arXiv:2302.11275v1 [math.CA] 22 Feb 2023

稀疏界　　分层群上的振荡乘子

ABHISHEK GHOSH 和 MICHAEL RUZHANSKY

Abstract. 本文讨论分层李群上一类包含振荡乘子的谱乘子的稀疏界。我们的结果可用于获得一般黎斯平均以及色散方程解的加权界。

1. Introduction

在 $\mathbb{R}^n$ 上，形如 $\widehat{Tf}(\xi) = m_\theta$、$_\beta(\xi)\,\widehat{f}\,(\xi)$ 的算子，其中 m_θ、$_\beta = |\xi|^{-\frac{\theta\beta}{2}} e^{i|\xi|^\theta}\chi_{\{|\xi|>1\}}$ 被称为振荡乘子。自 Hardy、Hirschman[24] 和 Wainger [48] 的开创性工作以来，人们便对其进行了广泛研究。Charles Fefferman 在 [20]，中证明了关键的弱型 (1, 1) 估计，而 L^p 估计的尖锐范围由 Fefferman 和 Stein 在 [21] 中得到。他们还在 H¨ormander [25] 的工作中对其进行了研究。关于波算子背景下的结果，即 $\theta = 1$，我们还可参阅文章 [40, 41, 46] 。Chanillo [12] 开始研究 $\mathbb{R}^n$ 上振荡乘子的加权估计，随后在 [14] 中得到推广。在 [15]，中，Chanillo、Kurtz 和 Sampson 获得了加权端点估计。本文将限于研究这些算子在分层李群上的加权 L^p 估计。为此，我们先回顾以下预备知识。

设 $\mathfrak{g}$ 为一个 d维分次幂零李代数，使得

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathfrak{g}_i$$

作为向量空间，并且对所有 i, j均有 $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$。假设 $\mathfrak{g}_1$作为李代数生成 $\mathfrak{g}$。与之对应的连通单连通李群 G称为分层李群。 G的齐性维数定义为 $Q = \sum_j j\,\dim(\mathfrak{g}_j)$。考虑定义在 G上的次拉普拉斯算子 $\mathcal{L} = -\sum_k X_k^2$，其中 $\{X_k\}$ 是$\mathfrak{g}_1$的一组基。对于定义在 $\mathbb{R}_+ = [0, \infty$上的任意博雷尔可测函数 m ，我们可以定义谱乘子算子

$$m(\sqrt{\mathcal{L}}) = \int_0^\infty m(\lambda)\, dE_\lambda$$

其中 $\{E_\lambda\}_{\lambda\geq 0}$ 是 $\sqrt{\mathcal{L}}$的谱分解。由于指数映射是一个全局微分同胚， G 上的测度可视为 d维勒贝格测度。在这一框架下，经典 H¨ormander-Mikhlin 乘子定理的类似结果由 Christ 在 [17], 的开创性工作中建立；Mauceri–Meda 在 [39], 也得到了基本的端点估计，其他有影响力的工作还可参见 [42, 43, 44] 。近年来，这一领域涌现出许多重要成果，参见 [3, 6, 7, 8, 9,13, 36, 37, 38, 47]。我们的研究受到近期工作 [13] 的启发，该文作者引入了一类涵盖振荡乘子的广义乘子，并得到了重要的端点估计。关于更一般的分次群上的傅里叶乘子算子，参见 [10, 11, 22, 23, 30] 及其中的参考文献。本文中，对于任意博雷尔可测集 R和 $1 \leq p < \infty$， $\langle f\rangle_{p,\,R}$ 表示 $\left(\frac{1}{|R|}\int_R |f|^p\right)^{1/p}$.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 42B15；42B20；42B25；43A22（主要）。第二作者获得 FWO Odysseus 1资助项目 G.0H94.18N：分析与偏微分方程，以及根特大学特别研究基金（BOF）的 Methusalem计划（资助编号 01M01021）的支持。MR 还获得 EPSRC资助项目 EP/R003025/2 和 FWO高级研究资助 G01152 的支持。

此外，若一族集合 $\mathcal{S}$ 满足：对每个 $R\in\mathcal{S}$，都存在 $E_R\subset R$，使得 $|E_R|\geq\eta|R|$与 $\{E_R\}_{\mathcal{S}}$ 两两不相交，则称其为 η–稀疏。现在陈述我们的主要结果。

主要结果陈述。受 [13], 的启发，我们引入以下一类乘子。令$\nu>1$ 为稍后指定的一个数。令 ϕ 为$(0,\infty)$上的一个光滑函数，其支集包含于$\{\nu^{-1}\leq\lambda\leq\nu\}$ 且满足 $\sum_j\phi(\nu^{-j}\lambda)=1$ 对所有 $\lambda>0$. 定义 $m^j(\lambda):=m(\nu^j\lambda)\phi(\lambda)$。

定义1.1. 设 $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 和 $\beta\geq0.$。若 m 的支集包含于集合 $\{\lambda\in\mathbb{R}_+:\lambda^\theta\geq1\}$ 且.....，则称 $m\in\mathscr{M}(\theta,\beta)$。

$$\sup_{j\theta>0}\nu^{j\theta\beta/2}\|m^j\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}<\infty, \tag{1}$$

$$and\quad\sup_{j\theta>0}\nu^{-j\theta(2s-\beta)/2}\|m^j\|_{L^2_s(\mathbb{R}_+)}<\infty\quad for\ all\ \ s\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

例1.2. 设 $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. 定义$m_{\theta,\ \beta}(\lambda):=e^{i\lambda^\theta}\lambda^{-\frac{\theta\beta}{2}}\chi_{\{\lambda\in[0,\infty):\lambda^\theta\geq1\}}$. 那么很容易看出$m_{\theta,\ \beta}\in\mathscr{M}(\theta,\beta)$。

Now 我们陈述乘子类 $\mathscr{M}(\theta$ 的主要稀疏控制原理，$\beta)$.

定理 1.3. 设 $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 和 $\beta\geq0$，且 $m\in\mathscr{M}(\theta,\beta)$。则存在稀疏族 $\mathcal{S}$和 $\mathcal{S}'$，使得对所有紧支撑有界函数 f, g，我们有

$$|\langle m(\sqrt{\mathcal{L}})f,g\rangle|\lesssim_{\theta,\beta,r_1,r_2}\sum_{R\in\mathcal{S}}|R|\langle f\rangle_{r_1,R}\langle g\rangle_{r_2',R}$$

$$and\ |\langle m(\sqrt{\mathcal{L}})f,g\rangle|\lesssim_{\theta,\beta,r_1,r_2}\sum_{R\in\mathcal{S}'}|R|\langle f\rangle_{r_2',R}\langle g\rangle_{r_1,R},$$

其中 r_1,r_2 满足

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{2}\right)<\frac{\beta}{2Q},\quad 1\leq r_1\leq r_2\leq2, \tag{3}$$

$$or$$

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)<\frac{\beta}{2Q},\quad 1\leq r_1\leq2\leq r_2\leq r_1'. \tag{4}$$

作为一个特例，我们得到以下推论。

推论 1.4. 设 $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 和 $\beta\geq0.$。则存在稀疏族 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$，使得对所有紧支撑有界函数 f,g，我们有

$$|\langle m_{\theta,\beta}(\sqrt{\mathcal{L}})f,g\rangle|\lesssim_{\theta,\beta,r_1,r_2}\sum_{R\in\mathcal{S}}|R|\langle f\rangle_{r_1,R}\langle g\rangle_{r_2',R}$$

$$and\ |\langle m_{\theta,\beta}(\sqrt{\mathcal{L}})f,g\rangle|\lesssim_{\theta,\beta,r_1,r_2}\sum_{R\in\mathcal{S}'}|R|\langle f\rangle_{r_2',R}\langle g\rangle_{r_1,R},$$

其中 r_1, r_2 满足条件 (3) 或 (4)。

证明此类估计的动机源于近期的一些研究 [2, 4, 18, 28, 29, 31, 32, 33, 34]，这些研究在各种背景下对调和分析中的若干经典算子实现了稀疏控制。证明此类估计的关键意义在于，我们可以根据衰减参数 β, 得到一系列定量加权估计，现陈述如下。穆肯霍普特权重类（A_p）和反向 H¨older 类（RH_q）的详细定义见第 4 节。

定理 1.5. 设 $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. 我们有以下结果：

i) 设 $m \in \mathscr{M}(\theta, 2Q)$。那么，对于所有 $1 < p < \infty$ 和 $\omega \in A_p$，$m(\sqrt{\mathcal{L}})$ 将 $L^p(\omega)$ 映射到 $L^p(\omega)$。
ii) 设 $m \in \mathscr{M}(\theta, \beta)$，且 $Q \le \beta < 2Q$. 那么，对于 $p_\beta < p < \infty$ 和 $\omega \in A_{p/p_\beta}$，$m(\sqrt{\mathcal{L}})$ 将 $L^p(\omega)$ 映射到 $L^p(\omega)$，其中 $p_\beta := \frac{2Q}{\beta}$.i

ii) 令 $m \in \mathscr{M}(\theta, \beta)$ 满足 $0 < \beta < Q$. 则对于所有 $2 < p < s_\beta$，$\omega \in A_{p/2} \cap RH_{(s_\beta/p)'}$，有 $m(\sqrt{\mathcal{L}}) : L^p(\omega) \to L^p(\omega)$，其中 $\frac{1}{s_\beta} := \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2Q}$.

我们相信，在分层李群的背景下，这些结果都是全新的。本文的组织结构如下。在下一节中，我们回顾一些必要的预备知识，第 3 节包含定理 1.3 的证明。在第 4 节中，我们证明定理 1.5 以及定理 1.3 在黎斯平均和色散方程中的其他应用。

2. 预备知识

令 $\{\delta_r\}_{r>0}$ 为与 G 相关联的膨胀群，并令 $|\cdot|$ 为一个齐次拟范数，即，$|x| = 0$ 当且仅当 $x = 0$，其中 0 表示群单位元，并且对于所有 $r > 0$ 和 $x \in G$，有 $|\delta_r x| = r|x|$。此外，算子 $m(\sqrt{\mathcal{L}})$ 的右卷积核记为 K_m，即，

$$m(\sqrt{\mathcal{L}})f(x) = \int_G f(x \cdot y^{-1})\, K_m(y)\, dy = \int f(y) K_m(y^{-1}x)\, dy.$$

一般而言，K_m 只是一个分布，但只要 m 具有紧支撑，K_m 就可以被视为定义在 L^2 上的一个函数。G. 关于 [22] 这些群上的分析，详见相关文献。以下估计是众所周知的。

定理 2.1（[47]）。以下核估计都是已知的。对于任意函数 h 和 $R > 0$，记 $h_R(t) := h(tR)$。

i) 以下 Plancherel 型恒等式成立

$$\|K_h\|^2_{L^2(G)} = \int_0^\infty |h(t)|^2 t^{Q-1}\, dt. \tag{5}$$

特别地，若乘子的支集包含于 $[0, R]$，则 $\|K_h\|^2_{L^2(G)} \le R^Q \|h_R\|^2_2$.ii) 对于任意紧支撑乘子 h,

$$\int_G |K_h(x)|^2 (1 + |x|^s)^2\, dx \lesssim \|h\|^2_{L^2_s(\mathbb{R}_+)} \tag{6}$$

对任意 $s > 0$ 均成立。因此，$\|K_h\|_{L^1} \le \|h\|_{L^2_s(\mathbb{R}_+)}$ 对于 $s > \frac{Q}{2}$.

我们还需要齐次型空间中的二进网格这一概念。详情请参阅 [16] 和[27, 35]。设 $0 < c_1 \le C_1 < \infty$ 和 $\mu \in (0, 1)$。一般二进网格 $\mathscr{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{D}_k$ 在 G 上是指由集合 R_k^α 构成的一个可数集，其中 $k \in \mathbb{Z}$，每个集合都与一个点 z_k^α相关联，α 来自一个可数指标集，并满足以下性质：

- $G = \bigcup R_k^\alpha$ 对每个 $k \in \mathbb{Z}$，都有 α。
- 若 $l \ge k$，则 $R_l^\beta \subset R_k^\alpha$ 或 $R_l^\beta \cap R_k^\alpha = \emptyset$。
- 对于常数 c_1、$C_1 > 0$，有 $B(R_k^\alpha) := B(z_k^\alpha, c_1\mu^k) \subset R_k^\alpha \subset B(z_k^\alpha, C_1\mu^k) =: C_1 B(R_k^\alpha)$。
- 若 $l \ge k$ 且 $R_l^\beta \subset R_k^\alpha$，则 $C_1 B(R_l^\beta) \subset C_1 B(R_k^\alpha)$。

Hyt¨onen 和 Kairema [27, 定理 4.1] 证明了存在有限个二进网格 $\mathscr{D}^n$, $n = 1, 2, \dots, \mathfrak{N}$，使得对于每个满足 $\mu^{k+2} \le r < \mu^{k+1}$ 的球 $B(z, r) \subset G$，都存在某个 $n \in \{1, 2, \dots, \mathfrak{N}\}$ 和 $R_k^\alpha \in \mathscr{D}^n$，使得 $B(z, r) \subset R_k^\alpha$ 且 diam $(R_k^\alpha) \le C\, r$，其中 C 取决于 μ。就本文而言，现将数 $\mu \in (0, 1)$ 视为固定，并令 ν 表示 $\frac{1}{\mu}$。

注 2.2. 我们指出，稀疏族 $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ 在定理 1.3 中由二进网格 $\mathscr{D}^n$, $n = 1, 2, \ldots, \mathfrak{N}$.

3. Proof of Theorems

我们将证明情形 $\theta > 0$. 下的定理 1.3。令 $\theta > 0$、$\beta \geq 0$ 和 $m \in \mathscr{M}(\theta, \beta)$ 固定。回忆，$m^j(\lambda) := m(\nu^j \lambda)\phi(\lambda)$，其中 ϕ 是定义在 $(0, \infty)$ 上、支集包含于 $\{\nu^{-1} \leq \lambda \leq \nu\}$ 且满足 $\sum_j \phi(\nu^{-j}\lambda) = 1$. 的光滑函数。于是，$m^j$ 满足以下条件

$$\begin{aligned} &\|m^j\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \lesssim \nu^{-j\theta\beta/2} \quad \text{for} \quad j \geq 0, \\ \text{and} \quad &\|m^j\|_{L^2_s(\mathbb{R}_+)} \lesssim \nu^{j\theta(2s-\beta)/2} \quad \text{for} \quad j \geq 0, \end{aligned} \tag{7}$$

其中隐含常数与 j. 无关。我们还引入以下记号 $m_j(\lambda) := m(\lambda)\phi(\nu^{-j}\lambda)$。回忆，若 $\sum_j \phi(\nu^{-j}\lambda) = 1$，则 $m = \sum_{j\geq 0} m_j(\lambda)$。此外，$m_j(\lambda) = m^j(\nu^{-j}\lambda)$。于是得到如下分解

$$m(\sqrt{\mathcal{L}}) = \sum_{j\geq 0} T_j, \quad \text{where} \quad T_j f = f * K_{m_j}.$$

由齐次性容易看出 $K_{m_j} = K_m * (\nu^{jQ} K_\phi(\delta_{\nu^j} \cdot))(x)$。受 [4] 的启发，我们进一步对空间变量作如下分解:

$$T_j^l f(x) = \int f(z) K_{m_j}(z^{-1}x)\phi(\nu^{-l+j(1-\theta)}|z^{-1}x|)\, dz, \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

那么 $T_j f = \sum_{l\in\mathbb{Z}} T_j^l f$，因此 $m(\sqrt{\mathcal{L}}) = \sum_{j\geq 0}\sum_{l\in\mathbb{Z}} T_j^l \cdot$。现在我们将着重证明一些关键估计，并且对于某些 $\epsilon > 0$，我们按照空间尺度对各项进行分组，即:

$$T_j f = \sum_{l\leq j\epsilon} T_j^l f + \sum_{l > j\epsilon} T_j^l f.$$

我们先证明各部分的 T_j^l. $l > j\epsilon$ 估计，并记 $g := K_{m_j}(\cdot)\phi(\nu^{-l+j(1-\theta)}|\cdot|)$。由杨氏不等式可得

$$\begin{aligned} \|T_j^l f\|_2 \leq \|f\|_2\|g\|_1 &\leq \|f\|_2 \left(\int_{|x|\simeq\nu^{l-j(1-\theta)}} |K_{m_j}(x)|\, dx\right) \\ &= \|f\|_2 \left(\int_{|x|\simeq\nu^{l-j(1-\theta)}} \nu^{jQ}|K_{m^j}(\delta_{\nu^j}x)|\, dx\right) \\ &\leq \|f\|_2 \left(\int_{|x|\simeq\nu^{l+j\theta}} |K_{m^j}(x)|\, dx\right) \\ &= \|f\|_2 \left(\int_{|x|\simeq\nu^{l+j\theta}} (1+|x|^s)(1+|x|^s)^{-1}|K_{m^j}(x)|\, dx\right) \\ &\leq \|f\|_2 \left(\int_{|x|\simeq\nu^{l+j\theta}} (1+|x|^s)^2|K_{m^j}(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \nu^{(l+j\theta)(\frac{Q}{2}-s)} \\ &\lesssim \nu^{(l+j\theta)(\frac{Q}{2}-s)}\|m^j\|_{L^2_s}\|f\|_2 \lesssim \nu^{(l+j\theta)(\frac{Q}{2}-s)}\nu^{j\theta(s-\frac{\beta}{2})}\|f\|_2 \\ &\lesssim \nu^{-\frac{j\theta\beta}{2}}\nu^{l(\frac{Q}{2}-\frac{s}{2})}\nu^{\frac{j\theta Q}{2}}\nu^{-l\frac{s}{2}}\|f\|_2 \lesssim \nu^{l(\frac{Q}{2}-\frac{s}{4})}\nu^{-\frac{ls}{4}}\nu^{\frac{j\theta Q}{2}}\nu^{-l\frac{s}{2}}\|f\|_2. \end{aligned}$$

注意，当 s 取得足够大时，项 $\nu^{l(\frac{Q}{2}-\frac{s}{4})} \ll 1$。此外，由于 $l > j\epsilon$，只要 $s \gg \lfloor \frac{Q\theta}{\epsilon} \rfloor$.，就有 $\nu^{-\frac{ls}{4}}\nu^{\frac{j\theta Q}{2}} \leq \nu^{\frac{j\theta Q}{2}}\nu^{-\frac{j\epsilon s}{4}} \ll 1$。最后，取足够大的 s，使得 $\nu^{-l\frac{s}{4}} \leq \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})\, l}$，且 $\nu^{-l\frac{s}{4}} \leq \nu^{-j\epsilon\frac{s}{4}} \leq \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})\, j}$.。因此，我们得到

$$\|T_j^l f\|_2 \leq c_\epsilon \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\|f\|_2 \quad \text{for} \quad l > j\epsilon. \tag{9}$$

当然，$\|T_j f\|_2 \leq \nu^{-\frac{j\theta\beta}{2}}\|f\|_2$因为 $\|m_j\|_{L^\infty} \leq \nu^{-\frac{j\theta\beta}{2}}$。结合式（9），我们证明以下引理:

引理 3.1. 我们得到以下估计:

i)

$$\|T_j^l f\|_2 \lesssim_\epsilon \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\|f\|_2 \quad \textit{for} \quad l > j\epsilon.$$

ii)

$$\|\sum_{l\leq j\epsilon} T_j^l f\|_2 \lesssim_\epsilon \nu^{-\frac{j\theta\beta}{2}}\|f\|_2.$$

注 3.2. 此处我们想指出，事实上可以将 T_j^l，$l > j\epsilon$，的界改进为 $\|T_j^l f\|_2 \lesssim_\epsilon \nu^{-c_\theta Q\ (Q+\frac{\theta\beta}{2})\ (j+l)}\|f\|_2$，其中 c_θ是某个较大的常数。类似的说明也适用于引理 *3.3*、引理 *3.4*、引理 *3.5*、引理 *3.6*以及引理 *3.7*，但我们不再重复说明。

现在我们将证明 $L^1 - L^1$ 对各部分 T_j^l. 的估计。回忆一下，$g = K_{m_j}\ (\cdot)\ \phi\ (\nu^{-l+j(1-\theta)}|\cdot|)$ 。前面的论证表明，对于任意 $l > j\epsilon$

$$\|T_j^l f\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1 \lesssim_\epsilon \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\|f\|_1. \tag{10}$$

另一个观察结合式（6），可得对任意 $s > \frac{Q}{2}$

$$\|T_j f\|_1 \leq \|f\|_1\|K_{m_j}\|_1 \leq \|f\|_1\|K_{m^j}\|_1 \leq \nu^{j\theta(s-\frac{\beta}{2})}\|f\|_1. \tag{11}$$

因此，

$$\|T_j f\|_1 \leq \nu^{j(-\frac{\theta\beta}{2}+\frac{\theta Q}{2}+\varepsilon)}\|f\|_1 \quad \text{for any} \quad \varepsilon > 0.$$

此外，将式（10）对 l 求和，可得

$$\|\sum_{l\leq j\epsilon} T_j^l f\|_1 = \|T_j f - \sum_{l>j\epsilon} T_j^l f\|_1 \lesssim \nu^{j(-\frac{\theta\beta}{2}+\frac{\theta Q}{2}+\varepsilon)}\|f\|_1.$$

引理 3.3。结合（10）与上述讨论，可得到以下估计：i）对任意 $\varepsilon > 0$

$$\|\sum_{l\leq j\epsilon} T_j^l f\|_1 \lesssim_\epsilon \nu^{j(-\frac{\theta\beta}{2}+\frac{\theta Q}{2}+\varepsilon)}\|f\|_1.$$

ii）对任意 $l > j\epsilon$，有

$$\|T_j^l f\|_1 \lesssim_\epsilon \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\|f\|_1.$$

最后，我们需要 $L^1 - L^\infty$ 算子的估计 T_j^l. 为此，我们首先需要证明核的逐点估计 K_h 该算子的 $h(\sqrt{\mathcal{L}})$，其中 h 的支集包含于 $[R/4, R]$ 对某个$R > 0$. 令 p_t 表示与热算子相关联的卷积核 $e^{-t\mathcal{L}}$. 回顾以下高斯估计（例如参见 [5]）

$$|p_t(x)| \leq \frac{C}{t^{Q/2}} e^{-\frac{|x|^2}{ct}}. \tag{12}$$

我们仅略述证明，详情见 [8]。记 $H(\lambda) = e^{\frac{\lambda^2}{R^2}}h(\lambda)$，则 $h(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{R^2}}H(\lambda)$。又由于$\|H_R\|_2 \simeq \|h_R\|_2$的支集包含于 $[R/4, R]$.，因此 $K_h(y^{-1}x) = \int_G p_{\frac{1}{R^2}}(z^{-1}x)K_H(y^{-1}z)\, dz$. H¨older 不等式和 (5) 可得

$$|K_h(y^{-1}x)| \le \|p_{1/R^2}(z^{-1}x)\|_{L^2(dz,G)}\|K_H(y^{-1}z)\|_{L^2(dz,G)} \lesssim R^Q\|H_R\|_2 \lesssim R^Q\|h_R\|_2. \tag{13}$$

注意到，由（5）产生一个 $R^{Q/2}$ 因子，另一个因子则来自 $R^{Q/2}$，它来自 $\|p_{1/R^2}(z^{-1}x)\|_{L^2(dz,G)}$. 利用傅里叶反演，我们可以写成

$$K_h(y^{-1}x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{G}(t)p_{(1-it)/R^2}(y^{-1}x)\, dt, \tag{14}$$

其中 $G(\lambda) := h(R\sqrt{\lambda})e^{\lambda}$. 注意，由于 h 满足支撑条件， $supp(G)$ 包含于 $[0,1]$，因此 e^{λ} 及其导数始终有界。此时我们使用以下来自 [45] 的估计

$$|p_{(1-it)/R^2}(y^{-1}x)| \le CR^Q e^{-\frac{R^2|y^{-1}x|^2}{(1+t^2)}} \le CR^Q(1+R|y^{-1}x|)^{-s}(1+|t|)^s.$$

因此，由上述界和（14），对任意 $s > 0$

$$\begin{aligned}|K_h(y^{-1}x)| \le CR^Q(1+R|y^{-1}x|)^{-s}\int |\widehat{G}(t)|(1+|t|)^s\, dt &\lesssim R^Q(1+R|y^{-1}x|)^{-s}\|G\|_{L^2_{s+\varkappa+\frac{1}{2}}} \\ &\lesssim R^Q(1+R|y^{-1}x|)^{-s}\|h_R\|_{L^2_{s+\varkappa+\frac{1}{2}}},\end{aligned} \tag{15}$$

对任意小的 $\kappa > 0$. 按照 13）和（15），利用复插值，如 [19], 我们消去1/2 索伯列夫指数中的额外指数，得到

$$|K_h(y^{-1}x)| \lesssim R^Q(1+R|y^{-1}x|)^{-s}\|h_R\|_{L^2_{s+\varkappa}} \tag{16}$$

对任意 $s > 0$ 以及任意小的 $\varkappa > 0.$，现在我们证明以下关于 T_j^l. 的 $L^1 - L^\infty$ 估计的引理

引理 3.4。i) 对于 $l > j\epsilon$

$$\|T_j^l f\|_{L^\infty} \lesssim_\epsilon \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\|f\|_1.$$

ii) 我们还有

$$\|\sum_{l\le j\epsilon} T_j^l f\|_\infty \le \nu^{jQ}\nu^{-\frac{j\theta Q}{2}}\|f\|_1.$$

证明。令 $l > j\epsilon$. 于是我们有

$$\begin{aligned}|T_j^l f(x)| &\le \left(\sup_{\{y:|y^{-1}x|\simeq\nu^{l-j(1-\theta)}\}}|K_{m_j}(y^{-1}x)|\right)\int |f(y)|\, dy \\ &\le \left(\sup_{\{y:|y^{-1}x|\simeq\nu^{l-j(1-\theta)}\}}|\nu^{jQ}K_{m^j}(\delta_{\nu^j}(y^{-1}x))|\right)\|f\|_1 \\ &\le \nu^{jQ}\left(\sup_{\{y:|y^{-1}x|\simeq\nu^{l+j\theta}\}}|K_{m^j}((y^{-1}x))|\right)\|f\|_1 \\ &\le \nu^{jQ}\left(\sup_{\{y:|y^{-1}x|\simeq\nu^{l+j\theta}\}}(1+|y^{-1}x|)^{-s}\|m^j\|_{L^2_{s+\varkappa}}\right)\|f\|_1 \quad (\text{using}(16)) \\ &\lesssim \nu^{jQ}\nu^{-s(l+j\theta)}\nu^{j\theta(s+\varkappa-\frac{\beta}{2})}\|f\|_1,\end{aligned}$$

对于任意 $s > Q$ 以及一个固定的小 $\varkappa > 0$ 由（16）可知。由于 $l > j\epsilon$，我们可以选择 s 足够大，正如引理3.1的证明中所做的那样，取决于 ϵ， $\varkappa$ 使得

$$\|T_j^l f\|_{L^\infty} \lesssim_\epsilon \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\|f\|_1.$$

对于第二部分，注意到

$$\begin{aligned}|\sum_{l\le j\epsilon} T_j^l f(x)| &= |\int f(z)K_{m_j}(z^{-1}x)\sum_{l\le j\epsilon}\phi(\nu^{-l+j(1-\theta)}|z^{-1}x|)| \\ &\le \int |f(z)||K_{m_j}(z^{-1}x)|\,dz \\ &\overset{\text{using (13)}}{\lesssim} \nu^{jQ}\|m^j\|_{L^\infty}\|f\|_1 \lesssim \nu^{jQ}\nu^{-\frac{j\theta Q}{2}}\|f\|_1,\end{aligned}$$

从而完成证明。 □

引理 3.5 ($L^{r_1}-L^{r_1}$ 估计). 设 $1 \le r_1 \le 2$. 那么，对引理 *3.3* 和引理 *3.1* 进行插值可得：

i) 对任意 $\varepsilon > 0$

$$\|\sum_{l\le j\epsilon} T_j^l f\|_{r_1} \lesssim_\epsilon \nu^{-\frac{j\theta\beta}{2}}\nu^{j(\frac{\theta Q}{2}+\varepsilon)(\frac{2}{r_1}-1)}\|f\|_{r_1}. \tag{17}$$

ii) 对任意 $l > j\epsilon$

$$\|T_j^l f\|_{r_1} \lesssim_\epsilon \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\|f\|_{r_1}. \tag{18}$$

下一个引理给出了稀疏支配估计所需的关键估计。

引理 3.6. 设 $1 \le r_1 \le r_2 \le 2$. 则有以下估计：

i) 对于 $l > j\epsilon$

$$\|T_j^l f\|_{r_2} \lesssim_\epsilon \nu^{-\frac{j\theta\beta}{2}}\nu^{jQ\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}\|f\|_{r_1} \tag{19}$$

ii) 对于任意 $\varepsilon > 0$

$$\|\sum_{l\le j\epsilon} T_j^l f\|_{r_2} \lesssim_\epsilon \nu^{-\frac{j\theta\beta}{2}}\nu^{j(\frac{\theta Q}{2}+\varepsilon)(\frac{2}{r_2}-1)}\nu^{jQ\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}\|f\|_{r_1}. \tag{20}$$

证明。 引入一个光滑截断函数 ψ 使得 $\psi = 1$ 在 ϕ. 的支集上。于是 $m_j = m\,\phi(\nu^{-j}\lambda) = m\,\phi(\nu^{-j}\lambda)\psi(\nu^{-j}\lambda) = m_j\,\psi(\nu^{-j}\lambda)$。令 K_ψ为 $\psi(\sqrt{\mathcal{L}})$的核。因此，对于 $l > j\epsilon$，利用引理 3.5 和杨氏不等式，可得

$$\|T_j^l f\|_{r_2} \lesssim_\epsilon \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\|f * K_{\psi(\nu^{-j}\cdot)}\|_{r_2} \lesssim_\epsilon \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\|f\|_{r_1}\|K_{\psi(\nu^{-j}\cdot)}\|_t, \tag{21}$$

其中 $\frac{1}{t} = \frac{1}{r_2} + 1 - \frac{1}{r_1}$. 接下来回顾由（16）和齐次性可知

$$|K_{\psi(\nu^{-j}\cdot)}(x)| = \nu^{jQ}|K_\psi(\delta_{\nu^j}x)| \le \nu^{jQ}\frac{C}{(1+|\delta_{\nu^j}x|)^N} \le \nu^{jQ}\frac{C}{(1+\nu^j|x|)^N}$$

对于任意 $N > 0$. 由（21）及上述逐点估计，我们得到以下结果

$$\begin{aligned}\|T_j^l f\|_{r_2} &\lesssim_\epsilon \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\|f * K_{\psi(\nu^{-j}\cdot)}\|_{r_2} \\ &\lesssim_\epsilon \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\|f\|_{r_1}\|K_{\psi(\nu^{-j}\cdot)}\|_t \lesssim_\epsilon \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\nu^{jQ\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}\|f\|_{r_1},\end{aligned}$$

其中我们利用了$\|K_{\psi(\nu^{-j}\cdot)}\|_t \lesssim \nu^{jQ(1-\frac{1}{t})}$通过选取 N充分大。同理，结合（17），对上述论证作相应修改，可得

$$\|\sum_{l\geq j\epsilon} T_j^l f\|_{r_2} \lesssim_\epsilon \nu^{-\frac{j\theta\beta}{2}}\nu^{j(\frac{\theta Q}{2}+\varepsilon)(\frac{2}{r_2}-1)}\|f\|_{r_1}\nu^{jQ\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

对于任意 $\varepsilon>0$. □

我们还需要以下 L^p 改进估计。

引理 3.7. 设 $1\leq r_1\leq 2\leq r_2\leq r_1'$. 则以下估计成立：i) 对于 $l>j\epsilon$

$$\|T_j^l f\|_{r_2} \lesssim_\epsilon \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\nu^{jQ(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})}\|f\|_{r_1}. \tag{22}$$

ii) 我们还有

$$\|\sum_{l\leq j\epsilon} T_j^l f\|_{r_2} \lesssim_\epsilon \nu^{-\frac{j\theta\beta}{2}}\nu^{jQ(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})}\|f\|_{r_1}. \tag{23}$$

证明。 对引理 3.1 和引理 3.4 进行插值可得，对于任意 $1\leq r_1\leq 2$

$$\|T_j^l f\|_{r_1'} \lesssim_\epsilon \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\|f\|_{r_1} \quad \text{for} \quad l\geq j\epsilon, \tag{24}$$

$$\text{and} \quad \|\sum_{l\leq j\epsilon} T_j^l f\|_{r_1'} \lesssim_\epsilon \nu^{-\frac{j\theta Q}{2}}\nu^{jQ(1-\frac{2}{r_1'})}\|f\|_{r_1}. \tag{25}$$

回顾前一个引理可知 $m_j=m_j\psi(\nu^{-j}\lambda)$，其中 ψ 在引理 3.6中引入。此外，回顾

$$|K_{\psi(\nu^{-j}\cdot)}(x)|\leq \nu^{jQ}\frac{C}{(1+\nu^j|x|)^N} \quad \text{for any} \quad N>0. \tag{26}$$

对于 $l>j\epsilon$，利用杨氏不等式可得

$$\|T_j^l f\|_2 \lesssim_\epsilon \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\|f*K_{\psi(\nu^{-j}\cdot)}\|_2 \leq \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\|K_{\psi(\nu^{-j}\cdot)}\|_t\|f\|_{r_1},$$

其中 $\frac{1}{t}=\frac{1}{2}+\frac{1}{r_1'}$. 因此，结合上式与 (26) 可得，对于 $l>j\epsilon$

$$\|T_j^l f\|_2 \lesssim_\epsilon \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\nu^{jQ(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{2})}\|f\|_{r_1}. \tag{27}$$

同理可得

$$\|\sum_{l\leq j\epsilon} T_j^l f\|_2 \lesssim_\epsilon \nu^{-\frac{j\theta\beta}{2}}\nu^{jQ(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{2})}\|f\|_{r_1}. \tag{28}$$

对 (24) 和 (27) 进行插值，可得

$$\|T_j^l f\|_{r_2} \lesssim_\epsilon \nu^{-Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\nu^{jQ(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})}\|f\|_{r_1} \quad \text{holds for all} \quad l>j\epsilon.$$

类似地，对 (25) 和 (28) 进行插值，可得

$$\|\sum_{l\leq j\epsilon} T_j^l f\|_{r_2} \lesssim_\epsilon \nu^{-\frac{j\theta\beta}{2}}\nu^{jQ(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})}\|f\|_{r_1}.$$

至此，证明完成。 □

现在我们可以证明主要定理1.4 在 $\theta>0$. 得到关键的无权估计后，稀疏控制的证明就相当标准了。下面给出简要概述，更多细节请参见 [4]。

定理 *1.3* 的证明。 回顾二进制族 $\mathscr{D}^n$对于 $n=1,\ \cdots,\ \mathfrak{N}$以及 $\mathscr{D}^n=\cup_{k\in\mathbb{Z}}\mathscr{D}_k^n$.定义算子

$$T_{j,n}^l f:=\sum_{\substack{R\in\mathscr{D}^n:\\ R\in\mathscr{D}^n_{\lfloor j(1-\theta)-j\epsilon\rfloor}}} T_j^l(f\chi_{c_GB(R)})\ \text{ for }\ l\le j\epsilon,$$

$$T_{j,n}^l f:=\sum_{\substack{R\in\mathscr{D}^n:\\ R\in\mathscr{D}^n_{\lfloor j(1-\theta)-l\rfloor}}} T_j^l(f\chi_{c_GB(R)})\ \text{ for }\ l>j\epsilon,$$

其中通用常数 c_G 可通过重标度度量取为充分小，使得 $T_j^l(f\chi_{c_GB\ (R)}$) 的支集包含于 $R.$。因此，只需对以下对象获得稀疏控制

$$\mathcal{T}_n:=\sum_{\substack{j\ge0\\ l\in\mathbb{Z}}}T_{j,n}^l,\ \text{ for }\ n=1,\cdots,\mathfrak{N}.$$

因此，我们只证明其中一个 $\mathcal{T}_n$ 的稀疏控制，并为简便起见省略指标 n 。通过局部化和引理 3.6，我们得到 $1\le r_1\le r_2\le 2$

$$\begin{aligned}
\big|\langle\sum_{l\le j\epsilon}T_j^l f,g\rangle\big| &\lesssim \sum_{j\ge0}\sum_{R\in\mathscr{D}_{\lfloor j(1-\theta)-j\epsilon\rfloor}}\ \big\|\big(\sum_{l\le j\epsilon}T_j^l(f\chi_{c_GB(R)})\big)\chi_R\big\|_{r_2}\|g\chi_R\|_{r_2'}\\
&\overset{(20)}{\lesssim_\epsilon}\sum_{j\ge0}\sum_{R\in\mathscr{D}_{\lfloor j(1-\theta)-j\epsilon\rfloor}}\ \nu^{-\frac{j\theta\beta}{2}}\nu^{j(\frac{\theta Q}{2}+\varepsilon)(\frac{2}{r_2}-1)}\nu^{jQ\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}\|f\chi_R\|_{r_1}\|g\chi_R\|_{r_2'}\\
&\lesssim_\epsilon\sum_{j\ge0}\sum_{R\in\mathscr{D}_{\lfloor j(1-\theta)-j\epsilon\rfloor}}\ |R|^{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2'}-1}\nu^{-\frac{j\theta\beta}{2}}\nu^{j(\frac{\theta Q}{2}+\varepsilon)(\frac{2}{r_2}-1)}\nu^{jQ\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}|R|\langle f\rangle_{r_1,R}\langle g\rangle_{r_2',R}\\
&\lesssim_\epsilon\sum_{j\ge0}\sum_{R\in\mathscr{D}_{\lfloor j(1-\theta)-j\epsilon\rfloor}}\ \nu^{Q(j\epsilon-j(1-\theta))\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2'}-1\right)}\nu^{-\frac{j\theta\beta}{2}}\nu^{j(\frac{\theta Q}{2}+\varepsilon)(\frac{2}{r_2}-1)}\nu^{jQ\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}|R|\langle f\rangle_{r_1,R}\langle g\rangle_{r_2',R}\\
&\lesssim_\epsilon\sum_{j\ge0}\sum_{R\in\mathscr{D}_{\lfloor j(1-\theta)-j\epsilon\rfloor}}\ \nu^{j\left(\theta Q(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})-\frac{\theta\beta}{2}+\frac{\theta Q}{2}\left(\frac{2}{r_2}-1\right)+\varepsilon\left(\frac{2}{r_2}-1\right)+\epsilon Q(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})\right)}|R|\langle f\rangle_{r_1,R}\langle g\rangle_{r_2',R},
\end{aligned}\tag{29}$$

因为 ϵ 且 εa re 充分小，上述论证给出了一个几何衰减的稀疏集族 if

$$\theta Q\big(\tfrac{1}{r_1}-\tfrac{1}{r_2}\big)-\tfrac{\theta\beta}{2}+\tfrac{\theta Q}{2}\big(\tfrac{2}{r_2}-1\big)<0\iff\tfrac{1}{r_1}-\tfrac{1}{2}<\tfrac{\beta}{2Q}.$$

对 T_j^l、 $l>j\epsilon$ 而言，结合注 3.2，类似的论证给出如下结果

$$\begin{aligned}
&\big|\langle\sum_{j\ge0}\sum_{l>j\epsilon}T_j^l(f\chi_{c_GB(R)}),g\rangle\big|\\
&\lesssim\sum_{j\ge0}\sum_{l>j\epsilon}\sum_{R\in\mathscr{D}_{\lfloor j(1-\theta)-l\rfloor}}\ \|T_j^l(f\chi_{c_GB(R)})\chi_R\|_{r_2}\|g\chi_R\|_{r_2'}\\
&\overset{(19)}{\lesssim}\sum_{j\ge0}\sum_{l>j\epsilon}\sum_{R\in\mathscr{D}_{\lfloor j(1-\theta)-l\rfloor}}\ \nu^{Q(l-j(1-\theta))\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}\nu^{-c_\theta Q(Q+\frac{\theta\beta}{2})(j+l)}\nu^{jQ\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}|R|\langle f\rangle_{r_1,R}\langle g\rangle_{r_2',R}
\end{aligned}\tag{30}$$

$$\lesssim \sum_{j\geq 0} \nu^{jQ\left(\theta\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)-c_\theta(Q+\frac{\theta\beta}{2})\right)} \sum_{l>j\epsilon} \nu^{Ql\left(\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)-(Q+\frac{\theta\beta}{2})\right)} \sum_{\substack{R\in\mathscr{D}:\\ R\in\mathscr{D}_{\lfloor j(1-\theta)-l\rfloor}}} |R|\langle f\rangle_{r_1,R}\langle g\rangle_{r_2',R}. \tag{31}$$

如注 3.2 中所述，常数 c_θ 可以取得足够大，因此我们总能确保 $\left(\theta\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)-c_\theta(Q+\frac{\theta\beta}{2})\right)<0$ 以及 $\left(\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)-(Q+\frac{\theta\beta}{2})\right)<0.$。因此，我们再次得到具有几何衰减的（$r_1$、$r_2'$）稀疏控制。于是，结合（29）和（31），对于 r_1、r_2'，当 $1\leq r_1\leq r_2\leq 2$ 满足 $\frac{1}{r_1}-\frac{1}{2}<\frac{\beta}{2Q}$.时，我们得到（$r_1$、$r_2'$）稀疏控制

在 $1\leq r_1\leq 2\leq r_2\leq r_1'$ 的情形下，同样利用引理3.7 可得

$$\begin{aligned}
\left|\langle\sum_{l\leq j\epsilon} T_j^l(f\chi_{c_GB(R)}),g\rangle\right| &\lesssim \sum_{j\geq 0}\sum_{\substack{R\in\mathscr{D}:\\ R\in\mathscr{D}_{\lfloor j(1-\theta)-j\epsilon\rfloor}}} \|\left(\sum_{l\leq j\epsilon} T_j^l(f\chi_{c_GB(R)})\right)\chi_R\|_{r_2}\|g\chi_R\|_{r_2'} \\
&\overset{(23)}{\lesssim_\epsilon} \sum_{j\geq 0}\sum_{\substack{R\in\mathscr{D}:\\ R\in\mathscr{D}_{\lfloor j(1-\theta)-j\epsilon\rfloor}}} \nu^{Q(j\epsilon-j(1-\theta))\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}\nu^{-\frac{j\theta\beta}{2}}\nu^{jQ(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})}|R|\langle f\rangle_{r_1,R}\langle g\rangle_{r_2',R} \\
&\lesssim_\epsilon \sum_{j\geq 0}\sum_{\substack{R\in\mathscr{D}:\\ R\in\mathscr{D}_{\lfloor j(1-\theta)-j\epsilon\rfloor}}} \nu^{j\left(-Q(1-\theta)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)-\frac{\theta\beta}{2}+Q\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)+\varepsilon Q\right)}|R|\langle f\rangle_{r_1,R}\langle g\rangle_{r_2',R},
\end{aligned} \tag{32}$$

由于 $\epsilon>0$ 足够小，对于 $1\leq r_1\leq 2\leq r_2\leq r_1'$，若满足以下条件，则可得到几何衰减的 (r_1,r_2') 稀疏控制

$$-Q(1-\theta)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)-\frac{\theta\beta}{2}+Q\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)<0 \iff \frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}<\frac{\beta}{2Q}.$$

类似的论证还可为以下部分 T_j^l、$l\geq j\epsilon$，在范围 $1\leq r_1\leq 2\leq r_2\leq r_1'$. 内给出 (,) 稀疏控制。我们的证明只能得到几何衰减的稀疏控制，因为在二进尺度$\mathscr{D}_{\lfloor j(1-\theta)-j\epsilon\rfloor}$ 下，立方体彼此不相交。不过，要获得真正的稀疏界，可以采用与[4], 中类似的论证，另见 [33]。此外，算子 $m(\sqrt{\mathcal{L}})$ 是自伴的，因此，(r_1,r_2') 稀疏控制蕴含 (r_2,r_1') 稀疏控制。至此，定理1.3 在 $\theta>0.$ □情形下的证明完成。

注3.8。令 $\theta<0$ 且 $m\in\mathscr{M}(\theta,\ \beta)$。情形 $\theta<0$ 表示低频，因此我们需要按照 [4, 13]中的做法对乘子进行分解。因此，

$$m(\lambda)=\sum_{j:j\leq 0} m_j(\lambda),$$

其中 $m_j=m(\lambda)\phi(\nu^{-j}\lambda)$。我们可以将上式改写为 $m(\lambda)=\sum_{k:k\geq 0} m_{-k}(\lambda)$，其中 $m_{-k}=m(\lambda)\phi(\nu^k\lambda)$ 对于 $k\geq 0.$。此外 $m^{-k}(\lambda):=m(\nu^{-k}\lambda)\phi(\lambda)$。由此，利用引理 3.1 中的事实 $\|m^{-k}\|_{L^\infty}\leq C\nu^{k\theta\beta/2}$，以及对于所有 $k\geq 0$ 和对于 $s\in\mathbb{N}$ 均有 $\|m^{-k}\|_{L_s^2}\leq C\nu^{-k\theta(2s-\beta)/2}$，取$s\gg\lfloor-\frac{\theta\beta}{2\epsilon}\rfloor$，即可得到如下估计

$$\|T_k^lf\|_2\lesssim_\epsilon \nu^{Q(\frac{\theta\beta}{2}-Q)(k+l)}\|f\|_2 \quad for\ \ l>k\epsilon,$$

also,

$$\|T_kf\|_2\lesssim \nu^{\frac{k\theta\beta}{2}} \quad for\ \ k\geq 0.$$

现在可以适当地修改引理 *3.3* 和引理 *3.4*，从而在这种情况下得到类似的结果。

4. Applications

4.1. 定量估计。 本小节中，我们将为振荡乘子 $m(\sqrt{\mathcal{L}})$ 给出若干加权估计。 回顾 [2] 中齐次空间上的 Muckenhoupt 权重的如下概念。设 $1<p<\infty$， $\omega\in A_p$ 若

$$[\omega]_{A_p}:=\sup_B\left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega^{1-p'}\right)^{p-1}<\infty. \tag{33}$$

此外，对于 $1<q<\infty$，若 $[\omega]_{RH_q}:=\sup_B \langle\omega\rangle_1^{-1}$ ， $_B\langle\omega\rangle_q$， $_B<\infty$. 对应于一个稀疏族$\mathcal{S}$，并且 $1\le r_1$，$r_2\le\infty$，令 $\Lambda_{\mathcal{S},\ r_1,\ r_2'}$ 表示如下双线性形式

$$\Lambda_{\mathcal{S},r_1,r_2'}(f,g):=\sum_{R\in\mathcal{S}}|R|\langle f\rangle_{r_1,R}\langle g\rangle_{r_2',R}.$$

以下定量估计已在 [2] 中得到证明。

引理 4.2（[2]）。对于任意 $r_1<p<r_2$，以及 $\omega\in A_{p/r_1}\cap RH_{(r_2/p)'}$，我们有

$$\Lambda_{\mathcal{S},r_1,r_2'}(f,g)\lesssim_{r_1,r_2,p,\mathcal{S}}\left([\omega]_{A_{p/r_1}}[\omega]_{RH_{(r_2/p)'}}\right)^{max\{\frac{1}{p-r_1},\frac{r_2-1}{r_2-p}\}}\|f\|_{L^p(w)}\|g\|_{L^{p'}(w^{1-p'})}.$$

受 [4], 定理 1.3的推论启发，我们现在证明定理1.5 关于 m（$\sqrt{\mathcal{L}}$）的加权估计。

定理 1.5 的证明。我们先证明部分 (i) 和 (ii)。假设 $m\in\mathscr{M}(\theta,\beta)$，其中 $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ with $Q\le\beta\le 2Q$. 证明由定理 1.3 以及 A_p 权重的反向 H¨older 性质得出，见[26]。由定理 1.3 很容易看出，对于所有满足$0<r_1<\frac{1}{p_\beta}$.的 r_1，我们有 $(r_1$,1) 稀疏控制。令 $p_\beta<p<\infty$，且 $\omega\in A_{p/p_\beta}$.。我们总可以选取 $\varepsilon>0$，使得 $\frac{1}{p}<\frac{1}{p_\beta}-\frac{\varepsilon}{p}$.。记$\frac{1}{r}:=\frac{1}{p_\beta}-\frac{\varepsilon}{p}$. 。此外，反向 H¨older 不等式保证量 ε 可以选为满足 $\omega\in A_{\underline{p}}$.。定理 1.3 和引理 4.2 表明，对于任意紧支撑的 f 和 g，存在一个^{r}稀疏族 $\mathcal{S}$，使得

$$\left|\langle m(\sqrt{\mathcal{L}})f,g\rangle\right|\lesssim\Lambda_{\mathcal{S},r,1}(f,g)\lesssim C([\omega]_{A_{p/p_\beta}})\|f\|_{L^p(w)}\|g\|_{L^{p'}(w^{1-p'})}.$$

现在由对偶性即可得出证明。

现在证明部分（iii）。设 $m\in\mathscr{M}(\theta,\beta)$，其中 $0<\beta<Q$.定理 1.3 意味着，对于所有满足 $\frac{1}{2}\le\frac{1}{s'}<\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2Q}$.的 s'，我们都有一个 $(2,s')$ 稀疏控制。设 $2<p<s_\beta$，并且$\omega\in A_{p/2}\cap RH_{(s_\beta/p)'}$.。由反向 H¨older 类的自改进性质可知，$\omega\in RH_{(s_\beta/p)'(1+\delta)}$，当 $\delta>0$. 足够小时成立。容易选取满足 $\frac{1}{2}<\frac{1}{s'}<\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2Q}=\frac{1}{s'_\beta}$且 $\omega\in RH_{(s/p)'}$ 同时成立的 s，使得 $2<p<s<s_\beta$。因此，

$$\left|\langle m(\sqrt{\mathcal{L}})f,g\rangle\right|\lesssim\Lambda_{\mathcal{S},2,s'}(f,g)\lesssim C([\omega]_{A_{p/2}},[\omega]_{RH_{(s_\beta/p)'}})\|f\|_{L^p(w)}\|g\|_{L^{p'}(w^{1-p'})}.$$

现在由对偶性即可得出证明。 □

4.3. 黎斯平均。对于 k、α、$t>0$，我们定义黎斯平均

$$I_{k,\alpha,t}(\mathcal{L}):=kt^{-k}\int_0^t(t-s)^{k-1}e^{is(\sqrt{\mathcal{L}})^\alpha}\,ds. \tag{34}$$

不妨设 $t=1$，并将 I_k、α、$1(\mathcal{L})$ 简记为 I_k、$\alpha(\mathcal{L})$。众所周知，算子 I_k、$\alpha(\mathcal{L})$ 可写为 $\sigma((\sqrt{\mathcal{L}})^\alpha)$，其中谱乘子 σ 可分解为$\sigma(\lambda)=c_k\psi(\lambda)\lambda^{-k}e^{i\lambda}+\sigma_1(\lambda)$，其中 σ_1 是满足 Mikhlin–H¨ormander 条件的光滑函数，而 ψ 是一个 C^∞ 函数，使得当 $0\le\lambda\le 1$ 时有 $\psi=0$，并且当 $\lambda\ge 2.$ 时有 $\psi\equiv 1$。我们将 [1, 7, 40, 41] 以及

其中的参考文献。由于 $\sigma_1((\sqrt{\mathcal{L}})^\alpha)$ 总是满足 (1,1) 稀疏控制，因此以下稀疏控制由推论 1.4推出

$$|\langle I_{k,\alpha}(\mathcal{L})f,g\rangle| \lesssim_{k,\alpha,r_1,r_2} \sum_{R\in\mathcal{S}} |R|\langle f\rangle_{r_1,R}\langle g\rangle_{r_2',R}$$
$$\text{and } |\langle I_{k,\alpha}(\mathcal{L})f,g\rangle| \lesssim_{k,\alpha,r_1,r_2} \sum_{R\in\mathcal{S}'} |R|\langle f\rangle_{r_2',R}\langle g\rangle_{r_1,R},$$

其中 r_1、r_2 满足

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{2}\right)<\frac{k}{Q},\quad 1\le r_1\le r_2\le 2,\quad \text{or}\qquad \left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)<\frac{k}{Q},\quad 1\le r_1\le 2\le r_2\le r_1'.$$

上述稀疏控制和定理1.5 给出以下加权估计。

i) 设 $k\ge Q.$，则 $I_{k,\alpha}(\mathcal{L})$ 将 $L^p(\omega)$ 映射到 $L^p(\omega)$，对所有 $1<p<\infty$ 和 $\omega\in A_p.$

ii) 设 $\frac{Q}{2}\le k<Q.$，则 $I_{k,\alpha}(\mathcal{L})$ 将 $L^p(\omega)$ 映射到 $L^p(\omega)$，其中 $p_k<p<\infty$ 和 $\omega\in A_{p/p_k}$，且 $p_k:=\frac{Q}{k}$

iii) 设 $0<k<\frac{Q}{2}.$ 则 $I_{k,\alpha}(\mathcal{L})$: $L^p(\omega)\to L^p(\omega)$ 对所有 $2<p<s_k$，$\omega\in A_{p/2}\cap RH_{(s_k/p)'}$，均成立，其中$\frac{1}{s_k}:=\frac{1}{2}-\frac{k}{Q}.$

4.4. 色散 方程。设 $f\in C_0^\infty(G)$ 且 $\alpha\in\mathbb{N}.$，考虑色散方程

$$i\,\partial_t u+(\sqrt{\mathcal{L}})^\alpha\, u=0,\ u(\cdot,0)=f.$$

那么 $u(x,t)=e^{it(\sqrt{\mathcal{L}})^\alpha}f(x,t)$。对于固定时刻 t，将算子 $\sqrt{\mathcal{L}}$按 $t^{1/\alpha}\sqrt{\mathcal{L}}$ 重标度，作为推论 1.4的结果，可以证明以下结论

$$|\langle u(\cdot,t),g\rangle| \lesssim_{\beta,\alpha,r_1,r_2,t} \sum_{R\in\mathcal{S}} |R|\langle (I+\sqrt{\mathcal{L}})^\beta f\rangle_{r_1,R}\langle g\rangle_{r_2',R}$$

当 $\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{2}\right)<\frac{\beta}{\alpha Q}$，$1\le r_1\le r_2\le 2$或 $\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)<\frac{\beta}{\alpha Q}$，$1\le r_1\le 2\le r_2\le r_1'.$设 $W^{s,\,\omega}{}^p$表示非齐次加权 Sobolev 空间 $W^{s,\,\omega}{}^p=\{f\colon\ \|f\|_{W^{s,\,\omega}{}^p}:=\|(I+\sqrt{\mathcal{L}})^s f\|_{L^p(\omega)}<\infty\}.$作为定理 1.5的应用，我们可以推出以下加权估计:

i) 令 $1<p<\infty$和 $\omega\in A_p.$那么 $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\omega)}\lesssim\|f\|_{W^{\beta,\omega}{}^p}$在 $\beta\ge\alpha\,Q.$的条件下

ii) 令 $\frac{\alpha\,Q}{2}\le\beta<\alpha Q.$那么 $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\omega)}\lesssim\|f\|_{W^{\beta,\omega}{}^p}$对所有 $p_{\alpha,\beta}<p<\infty$和 $\omega\in A_{p/p_{\alpha,\beta}}$均成立，其中$p_{\alpha,\beta}:=\frac{Q\,\alpha}{\beta}.$

iii) 最后，令$0<\beta<\frac{\alpha\,Q}{2}.$。我们还有 $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\omega)}\lesssim\|f\|_{W^{\beta,\omega}{}^p}$对所有 $2<p<s_{\alpha,\beta}$，$\omega\in A_{p/2}\cap RH_{(s_{\alpha,\beta}/p)'}$均成立，其中$\frac{1}{s_{\alpha,\beta}}:=\frac{1}{2}-\frac{\beta}{\alpha Q}.$

References

[1] G. Alexopoulos, *Oscillating multipliers on Lie groups and Riemannian manifolds*, 东北数学杂志 (2) 46 (1994), 第 4 期, 457–468. [2] F. Bernicot, D. Frey, and S. Petermichl, *Sharp weighted norm estimates beyond Calderón-Zygmund theory*, 《分析与偏微分方程》9 (2016), 第 5 期, 1079–1113. [3] R. Bramati, P. Ciatti, J. Green, J. Wright, *Oscillating spectral multipliers on groups of Heisenberg type*, 《伊比利亚美洲数学评论》38 (2022), 第 5 期, 1529–1551. [4] D. Beltran, L. Cladek, *Sparse bounds for pseudodifferential operators*, 《数学分析杂志》140 (2020), 第 1 期, 89–116. [5] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Uniform Gaussian estimates for the fundamental solutions for heat operators on Carnot groups* **7** 2002 10, 1153 1192 , 《微分方程进展》, ( ), 第 – 期. [6] T. A. Bui, F. K. Ly, *Sharp estimates for Schrödinger groups on Hardy spaces for* $0<p\le 1$, 《傅里叶分析与应用杂志》28 (2022), 第 4 期, 23 页. [7] T. A. Bui, Q. Hong, G. Hu, *On boundedness of oscillating multipliers on stratified Lie groups*, 《几何分析杂志》32 (2022), 第 8 期, 20 页.

[8] T. A. Bui, X. T. Duong, *Spectral multipliers of self-adjoint operators on Besov and Triebel-Lizorkin spaces associated to operators* 2021 23, 18181 18224 ,《国际数学研究通知》( ), 第 – 期. [9] T. A. Bui, P. D'Ancona, F. Nicola, *Sharp L^p estimates for Schrödinger groups on spaces of homogeneous type*,《伊比利亚美洲数学评论》36 (2020), 第 2 期, 455–484. [10] D. Cardona, J. Delgado, M. Ruzhansky, *L^p-bounds for pseudo-differential operators on graded Lie groups*,《几何分析杂志》31 (2021), 第 12 期, 11603–11647. [11] D. Cardona, M. Ruzhansky, *Björk-Sjölin condition for strongly singular convolution operators on graded Lie groups*, Math. Z. 302 (2022), 第 4 期, 1957–1981. [12] S. Chanillo, *Weighted norm inequalities for strongly singular convolution operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 281 (1984), 第1期, 77-107. [13] P. Ciatti, J. Wright, *Strongly singular integrals on stratified groups*, 调和分析的几何方面, 299–320, Springer INdAM 丛书, 45, Springer, Cham, [2021]. [14] S. Chanillo, D. Kurtz and G. Sampson, *Weighted L^p estimates for oscillating kernels*, Ark. Mat. 21 (1983), 233-257. [15] S. Chanillo, D. Kurtz and G. Sampson, *Weighted weak* (1, 1) *and weighted L^p estimates for oscillating kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. 295 (1986), 第 1 期, 127-145. [16] M. Christ, *Lectures on singular integral operators*, CBMS数学区域会议丛书, 第 77 卷, 由数学科学会议委员会出版, 华盛顿特区; 美国数学学会出版, 普罗维登斯, 罗得岛, 1990 年。 [17] M. Christ, *L^p bounds for spectral multipliers on nilpotent groups*, Trans. Amer. Maths. Soc. 328 (1991), 第 1 期 , 73-81. [18] J. M. Conde-Alonso, A. Culiuc, F. Di Plinio, and Y. Ou, *A sparse domination principle for rough singular integrals*,《分析与偏微分方程》10 (2017), 第 5 期, 1255–1284. [19] X. T. Duong, E. M. Ouhabaz, A. Sikora, *Plancherel-type estimates and sharp spectral multipliers*, J. Funct. Anal. 196 (2002), 第 2 期, 443–485. [20] C. Fefferman, *Inequalities for strongly singular integral operators*, Acta Math. 24 (1970), 9-36. [21] C. Fefferman, E.M. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math. 129 (1972), 137-193. [22] V. Fischer, M. Ruzhansky, *Quantization on nilpotent Lie groups*, 数学进展, 314. Birkh¨auser/Springer, [Cham], 2016. xiii+557 页. [23] V. Fischer, M. Ruzhansky, *Fourier multipliers on graded Lie groups*, Colloq. Math. 165 (2021), 第 1 期, 1–30. [24] I. Hirschman, *On multiplier transformations*, Duke Math. J. 26 (1959), 222-242. [25] L. H¨ormander, *Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations*, Proc. Sympos. Pure Math., 10, Amer. Math. Soc. (1967), 138-183. [26] T. Hyt¨onen, C. P´erez, E. Rela, *Sharp reverse Hölder property for A^∞ weights on spaces of homogeneous type*, J. Funct. Anal. 263 (2012), 第 12 期, 3883–3899. [27] T. Hyt¨onen, *Systems of dyadic cubes in a doubling metric space* **126** 2012 1, 1 33 and A. Kairema, , Colloq. Math. ( ), 第 – 期. [28] T. P. Hyt¨onen, *The sharp weighted bound for general Calderón-Zygmund operators*, Ann. of Math. (2) 175 (2012), 第 3 期, 1473–1506. [29] T. P. Hyt¨onen, L. Roncal, and O. Tapiola, *Quantitative weighted estimates for rough homogeneous singular integrals*, Israel J. Math. 218 (2017), 第 1 期, 133–164. [30] Q. Hong Q, G. Hu, M. Ruzhansky, *Fourier multipliers for Hardy spaces on graded Lie groups*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 即将发表。arXiv: 2101 07499 2 . v [31] M. T. Lacey, , Israel J. Math. 217 (2017), 第 1 期, 181–195. [32] M. T. Lacey, *An elementary proof of the A_2 bound* *Sparse bounds for spherical maximal functions*,《数学分析杂志》139 (2019), 第 2 期, 613–635. [33] M. T. Lacey, D. Mena, *The sparse T1 theorem*, Houston J. Math. 43 (2017), 第 1 期, 111–127. [34] A. K. Lerner *On pointwise estimates involving sparse operators*, New York J. Math. 22 (2016), 341–349. [35] E. Lorist, *On pointwise ℓ^r-sparse domination in a space of homogeneous type* **31** 2021 9, , 9366 9405 《几何分析杂志》( ), 第 – 期. [36] A. Martini, *Joint functional calculi and a sharp muliplier theorem for the Kohn Laplacian on the sphere*, Math. Z. 286 (2017), 1539–1574. [37] A. Martini and D. M¨uller, *Spectral multipliers of euclidean type on new classes of two-step stratified groups*, Proc. London Math. Soc. 109 (2014), 1229-1263. [38] A. Martini and D. M¨uller, *Spectral multipliers on 2-step groups: topological versus homogeneous dimension*, GAFA 26 (2016), 680-702. [39] G. Mauceri and S. Meda, *Vector-valued multipliers on stratified groups*, Revista Ibero. Mat. 6 (1990), 第 3 期, 141-154. [40] A. Miyachi, *On the weakly strongly singular integrals*, Japan J. Math. 4 (1978), 221-262. [41] A. Miyachi, *On some estimates for the wave equation in L^p and H^p*, J. Fac. Sci. Tokyo Sci. IA 27 (1980), 331-354.

[42] D. M¨uller 和 A. Seeger, *Sharp L^p-bounds for the wave equation on groups of Heisenberg type*, 《分析与偏微分方程》8 (2015), 第 5 期, 1051-1100。[43] D. M¨uller 和 E.M. Stein, *On spectral multipliers for Heisenberg and related groups*, 《纯粹与应用数学杂志》73 (1994), 413-440。[44] D. M¨uller 和 E.M. Stein, *L^p-estimates for the wave equation on the Heisenberg group*, 《伊比利亚美洲数学杂志》15 (1990), 297-334。[45] E. M. Ouhabaz, *Analysis of heat equations on domains*. 伦敦数学学会专著丛书第 31 卷。普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 2005。xiv+284 页。[46] J. Peral, *L^p estimates for the wave equation*, 《泛函分析杂志》36 (1980), 114-145。[47] A. Sikora, *Multiplier theorem for sub-Laplacians on homogeneous groups*, 《巴黎科学院报告》数学系列 I, 315 (1992), 第 4 期, 417-419。[48] S. Wainger, *Special trigonometric series in k dimesnions*, 《美国数学会回忆录》第 59 号 (1965)。

Abhishek GhoshTIFR-Centre of Applicable Mathematics, Bangalore-560065, IndiaAndDepartment of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete MathematicsGhent UniversityKrijgslaan 281, Building S8, B 9000 Ghent, Belgium.*Email address*: abhi21@tifrbng.res.in; abhi170791@gmail.com

Michael RuzhanskyDepartment of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete MathematicsGhent UniversityKrijgslaan 281, Building S8, B 9000 Ghent, Belgium.And Queen Mary University of London School of Mathematical SciencesUnited Kingdom.

Email address: michael.ruzhansky@ugent.be