arXiv:2302.11333v1 [math.LO] 22 Feb 2023

拓扑剩余格的原有限性与豪斯多夫性

Jiang Yang[a]、Pengfei He[b,*]、Juntao Wang[c]

[a]西北大学数学学院，西安，710127，中国[b]陕西师范大学数学与信息科学学院，西安，710119，中国[c]西安石油大学理学院，西安，710065，中国

摘要

本文旨在研究紧致拓扑剩余格的原有限性，以及豪斯多夫拓扑剩余格的存在性。首先，我们研究原有限剩余格，并得出了紧致拓扑剩余格具有原有限性的充要条件。这些条件包括拓扑刻画和代数刻画。此外，为研究豪斯多夫拓扑剩余格的存在性，我们考察了剩余格中的有限性条件。最后，我们研究线性拓扑剩余格，并给出了能够赋予非平凡豪斯多夫拓扑的剩余格类。

关键词：拓扑代数；原有限性；有限性条件；豪斯多夫性

1. 引言

近年来，人们通过普遍代数和代数逻辑，成功地将代数方法应用于非经典逻辑。布尔代数是二值逻辑的代数语义，而多值逻辑代数则是非经典逻辑的代数语义。在各种多值逻辑代数中，剩余格是非常基础且重要的代数结构。事实上，自20世纪30年代以来，代数学家便一直在研究剩余格 [36]，，其中包括理想格、格序群和关系代数等结构。不过，近年来，人们重新开始研究剩余格，将其视为次结构逻辑的数学结构 [17]，；次结构逻辑是指缺少三条结构规则（即收缩规则、弱化规则和交换规则）中的某些规则的逻辑。按照 Blok-Pigozzi 的意义 [8]，，剩余格簇是完全兰贝克演算 FL的等价代数语义。有界交换积分剩余格簇，即 FL_{ew} 的等价代数语义，是在 FL 的基础上添加两条结构规则后得到的演算：

*通讯作者。电子邮箱：yangjiangdy@126.com, hepengf1986@126.com, wjt@xsyu.edu.cn

交换规则和弱化规则。有界交换积分剩余格的重要子簇包括布尔代数、海廷代数、MTL-代数、BL-代数、 MV-代数。

拓扑与代数是数学的两个基础领域，二者相辅相成。当代数结构与拓扑自然地结合在一起时，描述拓扑与代数运算之间关系的规则几乎总是显而易见的，因此运算自然必须是连续或半连续的。近几十年来，人们对赋有拓扑的代数进行了大量研究[10, 11, 26, 27, 29, 37] ，由此得到的结构称为拓扑代数。代数上最重要、值得研究的拓扑是线性拓扑。例如，G. Birkhoff 指出（[6] 第52–54页），在某些条件下，可以利用一族子群来定义群中单位元的邻域，从而引入一种拓扑。这类称为“子群拓扑”的线性拓扑及其主要性质，是从 [14, 16, 22] 将拓扑代数视为一致结构的论述中引出的。此外，Zahiri 和 Borzooei [41] 利用BL-代数 L 上的一族特殊滤子，在 L上构造了拓扑 τ。该拓扑不仅是线性的，而且与 L的所有运算相容。在 [40], 中，Yang等人证明，对于剩余格 L的每个滤子 F，拓扑 $\mathcal{T}_F = \{U \subseteq L: \ \forall x \in U, x/F \subseteq U\}$不仅是线性的，而且是亚历山德罗夫拓扑；此外，$(L, \mathcal{T}_F)$是一个拓扑剩余格。此外， [40], 中还提出了一个值得关注的问题：集合$\mathcal{F}(L)$与 $LTRL(L)$是否等势？其中， L 的所有滤子构成集合 $\mathcal{F}(L)$，而底集为 L的所有线性拓扑剩余格构成集合 $LTRL(L)$？ 在 [20], 中，我们证明，对于剩余格 L，有 $|\mathcal{F}(L)| = |ZLTRL(L)|$，其中 $ZLTRL(L)$是底集为 L的所有零维线性拓扑剩余格所构成的集合。本文将对这一结果予以修正。此外，一个完全合理的问题是，代数是否确实可以赋予豪斯多夫的非离散（线性）拓扑。这个问题已在无限阿贝尔群中得到解决，参见 [14] 中的定理1.5或 [16]中的定理7.7。本文将针对剩余格讨论同一问题，即豪斯多夫拓扑剩余格的存在性。

众所周知，若一个代数可表示为有限代数的投影极限，则它是原有限的。原有限代数和原有限完备化起源于代数数论和伽罗瓦理论。原有限性指的是拓扑代数的拓扑结构与代数结构之间相互作用的一种性质；然而，对于拓扑群、环、半群和分配格（例如，参见 [24], Sec.VI.2），原有限性则是一种纯粹的拓扑性质，因为它等价于底层拓扑空间是斯通空间（即拓扑是紧致、豪斯多夫且零维的）。N. Nikolov 和 D. Segal [31, 32] 证明，有限生成有限拟群的拓扑结构完全由其代数结构决定；更确切地说，他们证明，这类群的有限指数子群恰好是其开子群。这一结果推广到了许多逻辑代数，其中包括海廷代数 [4], MV-代数 [30], 正交模格 [13]。据我们所知，迄今为止，原有限剩余格受到的关注很少。

本文研究原有限剩余格。特别地，我们给出紧致拓扑剩余格具有原有限性的刻画。

2. 预备知识

本节总结一些将会用到的基本定义和结果。

定义 2.1. [21] 如果一个代数结构 $\mathcal{L}=(L,\wedge,\vee,\odot,\rightarrow,0,1)$ 的类型为 (2, 2, 2, 2,0,0), 且满足以下条件，则称其为剩余格:

(1) $(L,\wedge,\vee,0,1)$ 是一个有界格;

(2) $(L,\odot,1)$ 是一个交换幺半群;

(3) 对所有 $x,y,z\in L,\quad x\odot y\leq z$ 当且仅当 $x\leq y\rightarrow z$，其中 $\leq$ 是格 $(L,\wedge,\vee,0,1)$ 的偏序。

本文中，只要不会引起混淆，我们将稍微滥用记号 L 来表示剩余格 $\mathcal{L}=(L,\wedge,\vee,\odot,\rightarrow,0,1)$ 的论域。

为方便读者，下面的命题给出剩余格的一些基本性质。

命题 2.2. *[35]* 在任意剩余格 $(L,\wedge,\vee,\odot,\rightarrow,0,1)$ 中，以下性质成立：对任意 $x,y,z\in L$,
(R_1) $1\rightarrow x=x$, $x\rightarrow 1=1$; (R_2) $x\leq y$ 当且仅当 $x\rightarrow y=1$; (R_3) 若 $x\leq y$，则 $y\rightarrow z\leq x\rightarrow z$, $z\rightarrow x\leq z\rightarrow y$ 且 $x\odot z\leq y\odot z$; (R_4) $x\odot(x\rightarrow y)\leq y$; (R_5) $x\odot y\leq x\wedge y$, $x\leq y\rightarrow x$; (R_6) $x\rightarrow(y\rightarrow z)=(x\odot y)\rightarrow z=y\rightarrow(x\rightarrow z)$; (R_7) $x\vee(y\odot z)\geq(x\vee y)\odot(x\vee z)$, 因此 $x^m\vee y^n\geq(x\vee y)^{mn}$。

定义 2.3. [35] 设 $(L,\wedge,\vee,\odot,\rightarrow,0,1)$ 是一个剩余格。滤子是一个非空集合 $F\subseteq L$，满足对于任意 $x,y\in L$,

(i) $x,y\in F$ 蕴含 $x\odot y\in F$,

(ii) 若 $x\in F$ 且 $x\leq y$，则 $y\in F$。

注意，在剩余格 L 中，L 的滤子 F 等价于一个演绎系统，即 F 满足以下条件：(i) $1\in F$，且 (ii) x, $x\rightarrow y\in F$ 蕴含 $y\in F$。

设 L 是一个剩余格。记 $\mathcal{F}(L)(Con(L))$ 为 L的所有滤子（同余关系）的集合。剩余格的同余关系与滤子之间存在密切对应关系。对于剩余格 L上的每个同余关系 θ，令 $[1]_\theta=$

$\{x \in L : (1, x) \in \theta\}$。那么 $[1]_\theta$ 是 L的一个滤子，称为由同余关系 θ确定的滤子。反过来，对于每个滤子 F， $\theta_F = \{(x, y) \in L \times L : (x \to y) \odot (y \to x) \in F\}$ 是 L上的一个同余关系，称为由滤子 F确定的同余关系。对于任意 $x \in L$，令 x/F为等价类 x/θ_F。若用 L/F表示商集 L/θ_F，则 L/F在由 L上的运算诱导的运算下成为一个剩余格。此外，以下结果成立。

定理 2.4. *[17]* 对于每个剩余格 L，我们有

$$\mathcal{F}(L) \cong Con(L).$$

我们回顾一致结构和一致拓扑的概念。下面使用以下记号。

设 X为一个集合。我们用 Δ_X表示 $X \times X$中的对角线，即 $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$。设 R是 $X \times X$的一个子集（换言之， R是 X上的一个二元关系）。对于任意 $y \in X$，我们定义集合 $R[y] = \{x \in X : (x, y) \in R\}$。 R 的逆关系 $R^{-1} \subset X \times X$ 定义为 $R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$。如果 R 满足 $R^{-1} = R$，则称其为对称的。若 R 和 S 是 $X \times X$的子集，则定义它们的复合关系 $R \circ S \subset X \times X$ 为 $R \circ S = \{(x, y) : \exists z \in X s.t. (x, z) \in R \text{ and } (z, y) \in S\}$。

定义 2.5. *[23]* 设 X 是一个集合。 X 上的一致结构是 $X \times X$ 的一个非空子集集合 $\mathcal{U}$，满足以下条件:

(1) 若 $V \in \mathcal{U}$，则 $\Delta_X \subset V$；(2) 若 $V \in \mathcal{U}$且 $V \subset V' \subset X \times X$，则 $V' \in \mathcal{U}$；(3) 若 $V, W \in \mathcal{U}$，则 $V \cap W \in \mathcal{U}$；(4) 若 $V \in \mathcal{U}$，则 $V^{-1} \in \mathcal{U}$；(5) 若 $V \in \mathcal{U}$，则存在 $W \in \mathcal{U}$使得 $W \circ W \subset V$。

赋予一致结构 $\mathcal{U}$ 的集合 X 称为一致空间， $\mathcal{U}$ 中的元素称为 X的邻域。设 X 是一个一致空间。容易验证，可以在 X 上定义一个拓扑，将满足以下性质的子集 $\Omega \subset X$ 取为开集：对每个 $x \in \Omega$，都存在一个邻域 $V \subset X \times X$ 使得 $V[x] = \Omega$。称该拓扑为 X上一致结构所关联的拓扑。对于该拓扑，子集 $N \subset X$是点 $x \in X$ 的邻域，当且仅当存在一个邻域 V 使得 $N = V[x]$。该拓扑是豪斯多夫的，当且仅当 X 的所有邻域的交与对角线 $\Delta_X \subset X \times X$重合。

命题 2.6. *[23]* 设 X 是一个集合，且 $\mathcal{B}$ 是由 $X \times X$的子集构成的非空集合。那么，当且仅当 $\mathcal{B}$ 满足以下性质时，它是 X 上某个（必然唯一的）一致结构的基:

(a) 若 $V \in \mathcal{B}$，则 $\Delta_X \subset V$；(b) 若 $V \in \mathcal{B}$ 且 $W \in \mathcal{B}$，则存在 $U \in \mathcal{B}$ 使得 $U \subset V \cap W$；(c) 若 $V \in \mathcal{U}$，则存在 $W \in \mathcal{B}$ 使得 $W \subset V^{-1}$；(d) 若 $V \in \mathcal{U}$，则存在 $W \in \mathcal{B}$ 使得 $W \circ W \subset V$。

给定代数 A上的两个同余关系 θ_1、θ_2。若 $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$，则称 θ_1 和 θ_2 可置换，或称 θ_1 和 θ_2 彼此置换。若代数 A 上的每一对同余关系都彼此置换，则称 A 是同余可置换的。代数类 $\mathcal{K}$ 是同余可置换的，当且仅当 $\mathcal{K}$ 中的每个代数都具有同余可置换性，见 [9]。

接下来，我们给出一个关于拓扑代数的一般性结果。

拓扑（泛）代数是一个对象 $\mathbf{A} = (A, (f_\alpha)_{\alpha\in I}, \tau)$，其中 A是一个集合，$(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是映射族 $f_\alpha : X^{n_\alpha} \to X$, n_α 是运算 f_α的元数，而τ是 A上的一个拓扑；该拓扑使得每个 f_α 都能将积空间 $(A, \tau)^{n_\alpha}$ 连续映射到空间 (A, τ)。$(A, (f_\alpha)_{\alpha\in I})$称为底层代数，而 (X, τ)称为底层空间。

根据命题 2.6，我们得到以下结果，这对研究拓扑代数具有重要意义。

定理 2.7. 对于同余可置换的代数 $\mathbf{A} = (A, (f_\alpha)_{\alpha\in I})$，若 $(\mathscr{C}, \subseteq)$ 是一个向下有向集，则 $(A, (f_\alpha)_{\alpha\in I}, \tau)$ 是一个拓扑代数，其中 $\mathscr{C} \subseteq ConA$和 τ 是由 $\mathscr{C}$诱导的拓扑。

显然，$\mathscr{C}$满足命题 2.6 的条件 (a) 和 (c)。假设 $(\mathscr{C}, \subseteq)$ 是一个向下有向集，这对应于命题 2.6 的条件 (b)；而同余可置换性蕴含命题 2.6 的条件 (d)。因此，根据命题 2.6，$\mathscr{C}$ 是 A 上的一致结构的基，且 τ 是与 A上的这一一致结构相关联的拓扑。注意

$$f_\alpha([a]_\theta, [b]_\theta) \subseteq [f_\alpha(a, b)]_\theta,$$

对任意 a、$b \in A$ 和 $\theta \in \mathscr{C}$。由此可知，$(A, (f_\alpha)_{\alpha\in I}, \tau_\theta)$ 是一个拓扑代数，其中

$$\tau_\theta = \{U \subseteq A : \forall a \in U, [a]_\theta \subseteq U\}.$$

由于 $\tau = \sup\{\tau_\theta : \theta \in \mathscr{C}\}$，我们推得 $(A, (f_\alpha)_{\alpha\in I}, \tau)$ 是一个拓扑代数 a.

剩余格的 $\mathcal{RL}$ 簇是算术的。它具有同余扩张性质（CEP），并且是同余 1-正则的，即对于任意同余 θ，1 的陪集唯一确定 θ。此外，剩余格的同余关系完全由滤子确定（见定理 2.4）。因此，在 [40], 中，我们研究了由滤子系统诱导的拓扑剩余格。由于该 $\mathcal{RL}$ 簇是同余可置换的，根据定理 2.7 可知，一个赋予了由滤子系统诱导的拓扑的剩余

格是拓扑剩余格，见 [40]中的定理 3.13。

如果 $\mathcal{T}$ 有开闭基，则拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 是零维空间。设 X 是给定集合上的两个拓扑 τ 和 τ'。如果 $\tau \subseteq \tau'$，则称 τ' 比 τ 更细。

定义 2.8. [40] 设 $\mathcal{F}$ 是剩余格 L 的滤子族。那么，如果 $(\mathcal{F},\subseteq)$ 是向下有向集，则称 $\mathcal{F}$ 为 L 的滤子系统。

如果剩余格 L 上的拓扑 τ 存在一个基 β，使得对于包含 1 的 β 中任意元素 B， B 都是 L 的滤子，则称该拓扑是 L 上的线性拓扑。

如果 $(\mathcal{F},\subseteq)$ 是剩余格 L 的滤子系统，那么根据 [40], 中的定理 2.7 或定理 3.13

$$\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \{U \subseteq L : \forall x \in U, \exists F \in \mathcal{F}\ s.t., x/F \subseteq U\}$$

这是 L 上的线性拓扑。我们称它为由 $\mathcal{F}$ 诱导的线性拓扑。此外，$(L,\mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ 是一个拓扑剩余格。

3. 原有限剩余格

本节研究原有限剩余格，并给出紧致拓扑剩余格中原有限性的若干刻画。

令 $I=(I,\leq)$ 表示一个有向部分集合或有向偏序集，即， I 是一个带有二元关系 $\leq$ 的集合，使得 $(I,\leq)$ 是一个偏序集，并且若 $i,j \in I$，则存在某个 $k \in I$，使得 $i,j \leq k$。

定义 3.1. [19] (i) 在范畴 $\mathcal{D}$ 中，一个逆关系或投影系统是指一个对象族 $\{B_i,\pi_{ij},I\}$，其指标由有向偏序集 I 给出，并带有一个态射族 $\pi_{ij}\colon B_i \to B_j$（对任意 $j \leq i$），满足以下条件:

(1) $\pi_{ik} = \pi_{jk} \circ \pi_{ij}$，对任意 $k \leq j \leq i$;

(2) $\pi_{ii} = id_{B_i}$，对任意 $i \in I$。

为简洁起见，我们称 $\{B_i,\pi_{ij},I\}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个逆系统。

(ii) 范畴 $\mathcal{D}$ 中逆系统 $\{B_i,\pi_{ij},I\}$ 的逆极限，是 $\mathcal{D}$ 中的一个对象 B，连同一族态射 $\{\phi_i\colon B \to B_i\}_{i\in I}$（通常记作 $\{B,\phi_i\}_{i\in I}$），并满足以下条件:

(1) 对任意 i、$j \in I$、$j \leq i$， $\pi_{ij} \circ \phi_i = \phi_j$（此条件通常称为相容条件）;

(2) 对于任意对象 B' of $\mathcal{D}$，以及态射族 $\lambda_i\colon B' \to B, i \in I$，若 $\pi_{ij} \circ \lambda_i = \lambda_j$，则对于任意 $i,j \in I, j \leq i$，存在唯一态射$\lambda\colon B' \to B$，使得 $\phi_i \circ \lambda = \lambda_i$，对于任意 $i \in I$。

上述系统的逆极限记作 $\lim\limits_{\leftarrow} B_i$.

回顾 Gr¨atzer [19] 的结果，代数族的逆极限按以下方式构造。

定理 3.2. *[19]* 设 $\{B_i, \pi_{ij}, I\}$ 是由同类代数组成的一个逆系统，$\prod_{i\in I} B_i$是其积，且 $\pi_i : \prod_{i\in I} B_i \to B_i$ 由 $\pi_i((x_i)_{i\in I}) = x_i$ 定义，其中 $i \in I$任意。令

$$B = \{(b_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} B_i : \pi_{ij}(b_i) = b_j, j \le i\}.$$

则 B 是 $\prod_{i\in I} B_i$ 的子代数，且 $\{B, \phi_i\}_{i\in I}$ 是 $\{B_i, \pi_{ij}, I\}$的逆极限，其中对任意 $i \in I$，$\phi_i = \pi_i \restriction_B$。

设 A 是一个代数。令 I 表示 A 上所有满足A/θ 有限的同余关系 θ 构成的集合。我们用 $[a]_\theta$表示 $a \in A$ 在 A/θ 中的像。若 $\theta \subseteq \theta'$，则存在一个典范投影 $\varphi_{\theta'\theta} : A/\theta' \to A/\theta$，由 $\varphi_{\theta'\theta}([a]_{\theta'}) = [a]_\theta$给出。因此，$(I, \supseteq)$ 是一个有向集，而 $(\{A/\theta\}, \{\varphi_{\theta'\theta}\}, I)$ 是一个代数逆系统。$\widehat{\ }$原有限完备化 A是 A的逆极限 $(\{A/\theta\}, \{\varphi_{\theta'\theta}\}, I)$。根据 [19]，，我们$\widehat{\ }$可以将 A 视为 $\prod_{\theta\in I} A/\theta$ 的子代数，它由所有满足以下条件的 $([a]_\theta)_{\theta\in I}$ 组成：对任意 $\theta' \subseteq \theta$，均有$\varphi_{\theta'\theta}([a]_{\theta'}) = [a]_\theta$。我们定义典范同态 $e_A :\sim A \to A$，使得 $e_A(a) = ([a]_\theta)_{\theta\in I}$。令 $\pi_{\theta'} : \prod_{\theta\in I} A/\theta \to A/\theta'$ 表示投影映射。$\widehat{\ }$我们也用 $\pi_{\theta'}$表示 $\pi_{\theta'}$ 在 A 上的限制。我们通常会认为，代数 A 的完备化应当是 A的扩张；然而，典范同态 $\sim e_A : A \to A$ 并不总是嵌入。

设 $(I, \le)$ 是一个有向偏序集。假设 I' 是 I 的子集，且 $(I', \le)$ 因此成为一个有向偏序集。我们称 I' 在 I 中共尾，如果对每个 $i \in I$，都存在某个 $i' \in I'$ 使得 $i \le i'$。如果 $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ 是一个逆系统，且 I' 在 I 中共尾，那么 $\{X_i, \varphi_{ij}, I'\}$ 以显然的方式成为一个逆系统，并且我们称 $\{X_i, \varphi_{ij}, I'\}$ 是 $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ 的共尾子系统。

命题 3.3. 设 $\{A_i, \varphi_{ij}, I\}$ 是定义在有向偏序集 I 上的同类代数的一个逆系统，并假设 I' 是 I 的共尾子集。那么

$$\varprojlim_{i\in I} X_i \cong \varprojlim_{i'\in I'} X_{i'}.$$

证明。假设 $\{A_i, \varphi_{ij}, I'\}$ 是 $\{A_i, \varphi_{ij}, I\}$ 的一个共尾子系统，并分别用 $(\lim\leftarrow_{i'\in I'}, \varphi'_{i'})$ 和 $(\lim\leftarrow_{i\in I}, \varphi_i)$ 表示它们对应的逆极限。对于任意 $j \in I$，取满足 $j \le j'$ 的 $j' \in I'$。定义

$$\overline{\varphi}_j : \varprojlim_{i'\in I'} X_{i'} \to X_j$$

作为典范映射 $\varphi_{j'j}, \varphi'_{j'}$的复合。注意到映射 $\overline{\varphi}_j$ 定义良好且相容。因此，它们诱导出一个映射

$$\overline{\varphi} : \varprojlim_{i'\in I'} X_{i'} \to \varprojlim_{i\in I} X_i$$

使得 $\varphi_j\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_j (j \in I)$。我们断言映射 $\overline{\varphi}$ 是一个双射。注意，若 $(x_{i'}) \in \varprojlim_{i' \in I'} X_{i'}$ 且 $\overline{\varphi}(x_{i'}) = (y_i)$，则对 $i' \in I'$ 有 $y_{i'} = x_{i'}$。由于 I' 在 I 中共尾，因此 $\overline{\varphi}$ 是一个单射。为证明 $\overline{\varphi}$ 是满射，取 $(y_i) \in \varprojlim_{i \in I} X_i$，并考虑元素 $(x_{i'})$，其中对每个 $i' \in I'$ 都有 $x_{i'} = y_{i'}$。于是 $(x_{i'}) \in \varprojlim_{i' \in I'} X_{i'}$，并且显然，$\overline{\varphi}(x_{i'}) = (y_i)$。这就证明了该断言。其余证明显而易见。

接下来，我们将特别关注作为逆极限出现的拓扑空间 X

$$X = \varprojlim_{i \in I} X_i$$

这些空间是赋予离散拓扑的有限空间 X_i。我们称这样的空间为原有限空间或布尔空间。若拓扑空间中的每个点都构成其自身的连通分支，则该空间是全不连通的。

定理 3.4. *[33]* 设 X 是一个拓扑空间。那么以下条件等价。

(a) X 是原有限空间；(b) X 是紧致豪斯多夫且全不连通的；(c) X 是紧致豪斯多夫空间，且其拓扑有一个由既开又闭集构成的基。

定义 3.5. 若剩余格 L 同构于某个有限剩余格逆系统的逆极限，则称其为原有限的。此类代数记作 $\mathbf{Pro}\mathcal{RL}$。

因此可以看出，若给定一个原有限代数 $A \cong \varprojlim_{i \in I} A_i$，那么 A 在其原有限拓扑下是一个拓扑代数；该拓扑可以通过极限锥 $(\pi_i : A \to A_i)_I$ 以自然的方式定义。现在我们将陈述一个基本事实：每个原有限拓扑都是布尔的，即每个原有限拓扑都是紧致豪斯多夫且零维的。

命题 3.6. *[2]* 若 $A \cong \varprojlim_{i \in I} A_i$ 是一个原有限代数，那么 A 在其原有限拓扑下是一个布尔拓扑代数。

注 3.7. 我们选择先用普遍代数来描述原有限代数，即将其视为有限代数图表 $\{A_i, \varphi_{ij}, I\}$ 的极限，然后指出可以在 $\varprojlim_{i \in I} A_i$ 上定义一种拓扑，使 $\varprojlim_{i \in I} A_i$ 成为拓扑代数。另一种做法是先在每个代数 A_i 上赋予离散拓扑，然后证明也可以对拓扑代数取极限，因此可立即得出 $\varprojlim_{i \in I} A_i$ 是一个拓扑代数。接着可以证明 $\varprojlim_{i \in I} A_i$ 是 $\prod_{i \in I} A_i$ 的闭子代数，因此根据一般拓扑学，$\varprojlim_{i \in I} A_i$ 上的原有限拓扑是布尔拓扑。

我们首先证明，无限原有限剩余格不可能是可数的。这是局部紧拓扑群的一般性质[16], ，但这里我们只给出针对原有限剩余格的证明。下面命题的第一部分类似于经典的贝尔纲定理，该定理适用于局部紧空间。

命题 3.8。设 L 是一个原有限剩余格。

(a) 设 $C_1, C_2, \ldots$ 是由 L 中具有空内点的非空闭集组成的可数无限集合。那么

$$L \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_i.$$

(b) $|L|$ 的基数 L 或为有限，或为不可数。

证明。部分 (*b*) 由 (*a*) 立即可得。为证明 (*a*)，假设 $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_i$，其中每个 C_i 都是 L 中具有空内点的非空闭子集。那么对于每个 $i \in \{1, 2, \ldots\}$， $D_i = L - C_i$ 都是 L 的稠密开子集。

接下来考虑 L 中的一个非空开子集 U_0；由于 D_1 在 L 中既开又稠密，因此 $U_0 \cap D_1$ 是开且非空的。由定理 3.4，存在 $U_0 \cap D_1$ 中的一个非空既开又闭子集 U_1。类似地， $U_1 \cap D_2$ 是开且非空的，因此存在 $U_1 \cap D_2$ 中的一个非空既开又闭子集 U_2。如此继续，我们得到一个非空既开又闭子集的嵌套序列

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots \supseteq U_i \supseteq \cdots$$

使得 $U_i \subseteq D_i \cap U_{i-1}$ 对每个 $i \in \{1, 2, \ldots\}$均成立。由于 L 是紧致的，且闭集 U_i 具有有限交性质，我们有

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \neq \emptyset.$$

另一方面，

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i = L - (\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) = \emptyset,$$

矛盾。

引理 3.9. 设 $\{L_i, \varphi_{ij}, I\}$ 是拓扑剩余格L_i的一个逆系统。则有：

(i) 逆极限 $\lim_{\leftarrow}\{L_i : i \in I\}$ 构成 $\prod\{L_i : i \in I\}$的一个子代数；(ii) 如果 $\{L_i : i \in I\}$ 中的每个拓扑剩余格都是豪斯多夫的，那么逆极限 $\lim_{\leftarrow}\{L_i : i \in I\}$ 在积 $\prod\{L_i : i \in I\}$中是拓扑闭的；(iii) 如果 $\{L_i : i \in I\}$ 中的每个拓扑剩余格都是非空、紧致且豪斯多夫的，那么逆极限 $\lim_{\leftarrow}\{L_i : i \in I\}$ 是非空的。

证明。(*i*) 的证明很容易。我们概述 (*ii*) 和 (*iii*) 的证明。首先假设每个 L_i 都是豪斯多夫的。对于每个 $k \in I$，定义集合

$$A_k = \{a \in \prod_{i \in I} : (\forall i \leq k) a_i = \varphi_{ki}(a_k)\}.$$

每个 A_k 都是 $\Pi_{i\in I}L_i$ 中的拓扑闭集，且 $\lim_{\leftarrow}\{L_i:\ i\in I\}=\bigcap_{k\in I}A_k$。因此，逆极限是拓扑闭的。现在进一步假设每个 L_i 都非空且紧致。由于 I 是有向的，并且每个 L_i 都非空，$\{A_k$ 的每个有限交：$k\in I\}$ 都非空。根据紧致性，集合 $\bigcap_{k\in I}A_k$ 非空。

命题 3.10。设

$$L=\varprojlim_{i\in I}L_i,$$

其中 $\{L_i,\varphi_{ij},I\}$ 是有限剩余格 L_i的一个逆系统，并设

$$\pi_i:L\to L_i(i\in I)$$

为投影同态。则

$$\{S_i:S_i=Ker(\pi_i)\}$$

是 L 中 1 的开邻域基。

证明。考虑 $\prod_{i\in I}L_i$ 中由以下形式的 1 的邻域组成的族:

$$(\prod_{i\neq i_1,\ldots,i_t}L_i)\times\{1\}_{i_1}\times\cdots\times\{1\}_{i_t},$$

对任意有限个指标 $i_i,\ldots,i_t\in I$，其中 $\{1\}_i$ 表示 L_i 中由单位元组成的子集。由于每个 L_i 都是离散的，这个族构成了 $\prod_{i\in I}L_i$中单位元的邻域基。设 $i_0\in I$ 满足 $i_1,\ldots,i_t\leq i_0$。于是

$$L\cap[(\prod_{i\neq i_0})L_i\times\{1\}_{i_0}]=L\cap[(\prod_{i\neq i_1,\ldots,i_t}L_i)\times\{1\}_{i_1}\times\cdots\times\{1\}_{i_t}].$$

因此，L 中形如以下形式的 1 的邻域族

$$L\cap[(\prod_{i\neq i_0})L_i\times\{1\}_{i_0}]$$

是 1 的开邻域的基本系统。最后，注意到

$$L\cap[(\prod_{i\neq i_0})L_i\times\{1\}_{i_0}]=Ker(\pi_{i_0})=S_{i_0}.$$

定理 3.11. 设 (L,τ) 是一个紧致拓扑剩余格。则以下条件等价:

(i) (L,τ) 是原有限的；(ii) 存在一个由 L 上的既开又闭的滤子（同余）组成的集合 $\mathcal{S}$，使得 (a) 集合 $(\mathcal{S},\supseteq)$ 是有向的，并且

(b) 对所有满足 $x \neq y$ 的 $x, y \in L$，都存在一个滤子 $F \in \mathcal{S}$，使得 $x/F \neq y/F$（存在一个同余 $\theta \in \mathcal{S}$，使得 $[x]_\theta \neq [y]_\theta$）。

证明。首先假设 (L, τ) 是紧致的，并设 $\mathcal{S}$ 是 L 上由既开又闭的滤子组成的集合，满足 (a) 和 (b)。我们可以在 $\{L/F$ 上构造一个逆系统：$F \in \mathcal{S}\}$，其中 $\mathcal{S}$ 按反向包含关系排序：对于 $\mathcal{S}$ 中的所有 $F \subseteq G$，定义同态 φ_{FG}：$L/F \to L/G$，使得 $\varphi_{FG}(x/F) = x/G$。由于 (L, τ) 是紧致的，每个商 L/F 都是有限的。容易证明，我们可以定义一个同构 ψ：$L \to \varprojlim\{L/F$：$F \in \mathcal{S}\}$，使得 $\psi(x)(F) = x/F$。（要证明 ψ 是满射，可利用 (L, τ) 的紧致性，对于每个 $z \in \varprojlim\{L/F : F \in \mathcal{S}\}$，找到 $\bigcap\{z(F) : F \in \mathcal{S}\}$ 中的一个元素。）显然，此逆极限是满射。由条件 (b) 可知，ψ 是单射。

现在假设 (L, τ) 是原有限的。我们可以假设它等于有限剩余格的逆极限 $\varprojlim\{L_i : i \in I\}$，即 $L = \varprojlim\{L_i : i \in I\}$。令$\mathcal{S} = \{Ker(\pi_i) : i \in I\}$。则对于每个 $i \in I$，$Ker(\pi_i)$ 都是 L 的既开又闭的滤子。因此，条件 (a) 显然成立。由命题 3.10，且原有限拓扑总是豪斯多夫的，可知 $\bigcap\{Ker(\pi_i) : i \in I\} = \{1\}$。由此可推出条件 (b) 成立。

以下结果是普遍代数中一个定理的特例。

命题 3.12. 剩余格 L 是一族 L_i 剩余格的次直积，当且仅当存在一族 $\{F_i\}_{i \in I}$ L 的滤子，使得

(i) $L_i \cong L/F_i$ *for each* $i \in I$;

(ii) $\bigcap_{i \in I} F_i = \{1\}$.

回顾一下，拓扑代数 (L, τ) 是剩余有限的 [34] 当且仅当，对于任意两个不同的元素 $x, y \in L$，存在一个有限离散拓扑代数 F 以及连续同态 $\varphi : L \to F$，使得 $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

定理 3.13. 设 (L, τ) 是一个紧致拓扑剩余格。那么以下条件等价：

(i) (L, τ) 是剩余有限的；(ii) (L, τ) 是原有限的；(iii) (L, τ) 是有限离散剩余格的闭次直积。

证明。首先，我们证明 (i) 蕴含 (iii)。对于 $x, y \in L$，其中 $x \neq y$。于是存在一个有限剩余格 F 和一个同态 $\varphi_{x,y} : L \to F$，使得 $\varphi_{x,y}(x) \neq \varphi_{x,y}(y)$。因此，对于每个满足 $x \neq y$ 的 $x, y \in L$，$Ker(\varphi_{x,y})$ 都是 (L, τ) 的有限指数闭开滤子。容易验证，L 是 $\{L/Ker(\varphi_{x,y}) : x, y \in L \text{ and } x \neq y\}$ 的次直积。由引理 3.9（ii），可推出 (iii) 成立。现在假设条件 (iii) 成立。设 L 是有限剩余格 $\{L_i : i \in I\}$ 的一个闭次直积。由命题 3.12，存在 L 的一族滤子 $\{F_i : i \in I\}$，使得 $\bigcap_{i \in I} F_i = \{1\}$，并且对每个 $i \in I$ 都有 $L_i \cong L/F_i$。因此，(L, τ) 在 $\prod_{i \in I} L/F_i$ 中是闭的，故 (L, τ) 是剩余有限的。

显然，(iii) 蕴含 (ii)，因此只需证明其逆命题。设 L 是乘积 $\Pi_{i\in I}L_i$ 的一个拓扑闭子代数，其中对于每个 $i\in I$， L_i 都是有限剩余格。令 $\mathcal{S}$ 为 I 的所有有限非空子集构成的集合，并按包含关系排序。对于每个 $J\in\mathcal{S}$，令 $L\restriction_J\colon L\to\prod_{j\in J}L_j$ 为投影。对于 $\mathcal{S}$ 中的所有 $K\supseteq J$，令 $\varphi_{KJ}\colon L\restriction_K\to L\restriction_J$ 为投影。于是 $\{L\restriction_J\colon J\in\mathcal{S}\}$ 构成一个拓扑剩余格的逆系统。定义逆极限$Y=\varprojlim\{L\restriction_J\colon J\in\mathcal{S}\}$。我们希望定义一个同构 $\psi\colon L\to Y$，其定义为$\psi(x)(J)=x\restriction_J$。对于每个 $x\in L$，有 $\psi(x)\in Y$，因为对于 $\mathcal{S}$ 中的所有 $K\supset J$， $\varphi_{KJ}((\psi(x))(K))=\varphi_{KJ}(x\restriction_K)=x\restriction_J=\psi(x)(J)$。由于投影都是同态，映射 ψ 是同态。容易验证 ψ 是单射。为证明 ψ 连续，考虑 Y 中的一个子基开集 $U=\{y\in Y\colon y(Y)(j)\in V\}$，其中 $j\in J\in\mathcal{S}$，且 V 在 L_j 中是开集。我们有 $\psi^{-1}(U)=\{x\in L\colon x(j)\in V\}$，它在 L 中是开集。还需验证 ψ 是满射。设 $y\in Y$。对于每个$J\in\mathcal{S}$，在 L 中定义闭集 $V_J=\{x\in L\colon x\restriction_J=y\restriction_J\}$。由于 $y\in Y$，我们知道 $y(J)\in L\restriction_J$，因此对于每个 $J\in\mathcal{S}$，都有 $V_J\neq\emptyset$。集合 $\{V_J\colon J\in\mathcal{S}\}$ 在有限交下封闭，因为 $V_{J_1}\cap V_{J_2}\cap\cdots\cap V_{J_n}=V_{J_1\cup\cdots\cup J_n}\neq\emptyset$。所以，由于 L 是紧致的，我们可以选取 $x\in\bigcap\{V_J\colon J\in\mathcal{S}\}$。对于每个 $J\in\mathcal{S}$，有$\psi(x)(J)=x\restriction_J=y(J)$。因此 $\psi(x)=y$。

4. 剩余格中的有限性条件

向量空间的初等理论研究有限维空间；在这类空间中，不存在无限的严格升链或严格降链子空间。类似地，群的初等理论研究有限群，或者至少研究在某种意义上并非“过于无限”的群。本节旨在讨论可对剩余格施加的各种有限性条件。

迄今为止，我们考虑的都是相当任意的剩余格。然而，为了进一步研究并获得更深刻的定理，我们需要施加一些条件。最方便的方式是采用“链条件”。

定义 4.1. 设 L 是一个剩余格。若 L 满足降链条件（简称 DCC），即每个滤子的严格降链

$$\cdots\subset F_2\subset F_1$$

都是有限的。

一种等价的表述是：若

$$\cdots\subset F_2\subset F_1$$

是一个 若滤子的无限下降序列，则存在一个整数 n使得 at i

$$F_i=F_n, for\ i=n+1,n+2\cdots.$$

定义 4.2. 如果每个非空滤子集合 $\mathcal{C}$ 都有一个极小元，即如果集合 $\mathcal{C}$中存在一个不包含于该集合中任何其他滤子 $\mathcal{C}$ 的滤子，则称剩余格满足极小条件。

命题 4.3. 设 L 为剩余格。则以下断言等价:

(1) L 满足降链条件；(2) L 满足极小条件；

(3) L 的每个滤子系统都有一个最小元。

证明。条件 (1) 和 (2) 的等价性是标准结果。现在，假设条件 (2) 成立。设 $(\mathcal{F}, \subseteq)$ 为一个滤子系统。它必有一个极小滤子 F 属于 $\mathcal{F}$。对于 $\mathcal{F}$ 中的任意另一个滤子 G，由于 $(\mathcal{F}, \subseteq)$ 是向下有向的，因此有 $F \subseteq G$。于是 F 是 $(\mathcal{F}, \subseteq)$ 中的最小滤子。条件 (3) 蕴含条件 (1) 是显然的，因为每个滤子链都是一个滤子系统。

定理 4.4. 设 L 为剩余格，$\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$ 为 L 的一个滤子系统。则以下陈述等价:

(i) $(L, \mathcal{T}_F)$ 是豪斯多夫空间；(ii) $(L, \mathcal{T}_F)$ 是一个 T_1-空间；
(iii) $(L, \mathcal{T}_F)$ 是一个 T_0-空间；(iv) $\bigcap_{i\in I} F_i = \{1\}$；(v) L 是剩余格族 L/F_i 的次直积。

证明. (i)–(iv) 的等价性与 [38] 中的命题 3.20 类似。(iv) 和 (v) 的等价性由命题 3.12 得出。

若剩余格 L 的滤子 F 满足：对于所有 $x, y \in L$，$x \vee y \in F$ 蕴含 $x \in F$ 或 $y \in F$，则称其为素滤子，见 [25]。我们用 $\mathcal{P}(L)$ 表示剩余格 L 的所有素滤子所组成的集合。

定理 4.5. *[21]* 设 L 为剩余格。对于每个满足 $a \neq 1$ 的元素 $a \in L$，在 L 中存在一个素滤子 P，使得 $a \notin P$。

推论 4.6。 *[21]* 剩余格的每个真滤子都是素滤子的交集。

推论 4.7。 *[21]* 设 L 是一个剩余格。那么 $\bigcap \mathcal{P}(L) = \{1\}$。

给定剩余格 L 的滤子系统 $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$。容易验证，下列断言成立:

(i) $(L, \mathcal{T}_F)$ 是离散空间，当且仅当 $\{1\} \in \mathcal{F}$；

(ii) $(L, \mathcal{T}_F)$ 是反离散空间，当且仅当 $\{L\} = \mathcal{F}$。

如果 $\mathcal{F}(L)\backslash\{1\}$ 是滤子系统，也就是说，$(\mathcal{F}(L)\backslash\{1\}, \subseteq)$ 对有限交封闭，则称其为全局滤子系。回顾一下，代数上的同余 θ 是因子同余，当且仅当存在同余 θ^*，使得 $\theta \cap \theta^* = \triangle$、$\theta \cup \theta^* = \nabla$ 和 θ 与 θ^* 可交换；详情参见 [9] 。如果一个代数不同构于两个非平凡代数的直积，则称它为直不可分解。

命题 4.8. 设 L 是一个剩余格。那么以下条件等价:

(1) $\mathcal{F}(L)\backslash\{1\}$ 是全局滤子系；(2) $\mathcal{F}(L)\backslash\{1\}$ 的任意有限交均不等于 $\{1\}$；(3) L 上不存在非平凡因子同余；(4) L 是直不可分解的。

证明。(1)、(2) 和 (3) 显然是等价的。根据 [9], 中的推论 7.7，条件 (3) 和 (4) 是等价的。

代数 A 是次直不可约的，当且仅当 A 是平凡的，或者 $Con(A) - \Delta$中存在最小同余，见 [9]。

由 [9], 中的定理 8.5 可知，次直不可约的剩余格是直不可分解的。但反之一般并不成立。下文将给出一些使反之亦成立的条件。

引理 4.9。设 L 是一个直不可分解的剩余格。如果 L 是次直不可约的，那么其全局滤子系所对应的零维线性拓扑剩余格是非离散的。

证明。假设 L 是次直不可约的。根据 [9], 中的定理 8.4，全局滤子系 $\mathcal{F}(L)\backslash\{1\}$ 具有一个最小滤子 F_0。因此，其全局滤子系的零维线性拓扑等于 $\mathcal{T}_{F_0}$，并且显然是非平凡的。

定理 4.10. 设 L 是直不可分解的剩余格，且 L 满足 DCC。那么， L 是次直不可约的，当且仅当其全局滤子系所对应的零维线性拓扑剩余格是非离散的。

证明. “仅当”部分由引理 4.9 得出。为证明“当”部分，根据命题 4.3， L 的全局滤子系有一个最小元 F_0。因此，根据 [9], 中的定理 8.4，我们得到 L 是次直不可约的。

命题 4.11. 若 L 是满足降链条件的剩余格，则 $\mathcal{F}(L) \setminus \{1\}$ 中的每个元素都可以唯一地表示为并不可约滤子的不可约冗余并。

证明. 注意，格 $(\mathcal{F}(L)\ \subseteq)$ 是一个分配格。因此，由 [7]中的定理 5.2 可直接得出。

在幂集格 $\mathcal{P}(X)$中，并不可约元恰好是单元素子集。令 $\mathcal{JF}(L)$表示剩余格 L 的并不可约滤子集合。因此，一般而言， L的所有并不可约滤子组成的集合 $\mathcal{JF}(L)$在集合包含关系下并不是向下有向集。下面我们将证明，在满足某些有限性条件时，$(\mathcal{JF}(L)\ \cup\{1\},\supseteq)$ 是有向集。

引理 4.12. 若 L 是满足降链条件的剩余格，则$(\mathcal{JF}(L)\ \cup\{1\},\supseteq)$ 在$(\mathcal{F}(L)\ \supseteq)$中是共尾的。

证明。设 $F,G\ \in\ \mathcal{JF}(L)$。若 $F\cap G\ =\ \{1\}$，则无需证明；否则，不妨设 $F\cap G$ 不是并不可约滤子。于是，根据命题 4.11，有$F\cap G=\bigvee_{i=1}^{n}F_i$，其中 $F_i\in\mathcal{JF}(L)$。由此可得 $F_i\subset F\cap G$，从而$(\mathcal{JF}(L)\ \supseteq)$是一个有向偏序集。令 F 为 L的一个滤子。于是，根据命题 4.11，存在并不可约滤子J_1、.....、 J_n，使得 $F=\bigvee_{i=1}^{n}J_i$。因此，存在某个并不可约滤子 J_j，使得 $J_j\subseteq F$。所以，$(\mathcal{JF}(L)$ $\supseteq)$在$(\mathcal{F}(L)\ \supseteq)$中是共尾的。

定理 4.13. 设 L 是一个有限剩余格。则

$$\widehat{L}=\varprojlim_{F\in\mathcal{JF}(L)\cup\{1\}}L/F.$$

证明. 由命题 3.3 和引理 4.12 可得。

5. 豪斯多夫拓扑剩余格的存在性

本节中，我们研究线性拓扑剩余格，并讨论豪斯多夫拓扑剩余格的存在性。

对于剩余格 L的一个滤子 F，我们可以得到一个零维线性拓扑剩余格 $(L,\mathcal{T}_F)$，其中 $\mathcal{T}_F=\{U\subseteq L:\ \forall x\in U,x/F\subseteq U\}$，参见[20]。为简单起见，当不会引起混淆时，这样的零维线性拓扑剩余格称为简单线性拓扑剩余格。

设 $(L,\mathcal{U})$ 是一个零维线性拓扑剩余格。考虑 $X_{\mathcal{U}}=\{F:\ 1\in F\in\mathcal{U}\}$，由 [20], 中的引理 3.4 和定理 3.7，我们得到以下结果。

定理 5.1. 设 L 是一个剩余格。那么， L 的每个零维线性拓扑 $\mathcal{U}$ 都是简单线性拓扑剩余格的上确界，即

$$\mathcal{U}=\sup\{\mathcal{T}_F:F\in X_{\mathcal{U}}\}.$$

现在，考虑剩余格 L 的一个特殊滤子系统，即所有有限指标滤子的集合，记为 $\mathcal{F}(L)_{fin}$。容易看出，$(\mathcal{F}(L)_{fin}, \subseteq)$ 是一个向下有向集。因此，$(L, \mathcal{T}_{\mathcal{F}(L)_{fin}})$ 是一个零维线性拓扑剩余格。类似于阿贝尔群的线性拓扑 [16], ，剩余格 L 上的这一线性拓扑称为 L 的有限指标拓扑。回忆一下，如果代数 A 同构于有限代数 [28], 的某个积的子代数，则称其为有限可逼近的；有限可逼近剩余格的类记为 Ap$\mathcal{RL}$。由此可知， A 是有限可逼近的，当且仅当 A 是其有限同态像的次直积。因此，我们得到：剩余格 L 是有限可逼近的，当且仅当 $\bigcap \mathcal{F}(L)_{fin} = \{1\}$。

因此，通过零维线性拓扑剩余格，我们得到有限可逼近剩余格的如下刻画。

定理 5.2. 一个剩余格是有限可逼近的，当且仅当其有限指标拓扑是豪斯多夫的。

证明. 这由上述结论和定理 4.4 可得。

设 $(L,\mathcal{U})$ 是一个线性拓扑剩余格。那么，拓扑 $\mathcal{U}$ 在 L 上存在一个基 β ，使得 β 中任何包含 1 的元素都是 L 的滤子。令 X 为 β 中所有包含 1 的元素组成的集合， Y 为 X 中所有有限交组成的集合。那么 Y 是 L 的一个滤子系统。由滤子系统 Y 诱导的拓扑记为 $\mathcal{V}$。

接下来，我们给出定理 3.7 的一个简明证明。定理 3.7 在 [20], 中回答了 [41] 中的一个开放问题。

定理 5.3. 若 $(L,\mathcal{U})$ 是零维线性拓扑剩余格，则 $\mathcal{V}$ 比 $\mathcal{U}$ 更细。

证明. 令 $\beta' = \{x/F_i : i \in I, x \in L\}$ 是 L 上拓扑 $\mathcal{V}$ 的一个基。由于 $(L,\mathcal{U})$ 是零维空间，存在一个 $\mathcal{U}$ 的开闭基 γ。为完成证明，我们只需证明对任意 $x \in U \in \gamma$ ，存在 $x/F_i \in \beta'$ 使得 $x/F_i \subseteq U$。令 $x \in U \in \gamma$。由于 U 是开闭集且 $\mathcal{U}$ 比 $\mathcal{V}$ 更细，可以得到 U 对 $\mathcal{V}$ 也是开闭的。因此，存在 $\mathcal{V}$ 的一个开闭 V ，使得 $x \in V \subseteq U$。由于 β' 是 $\mathcal{V}$ 的一个基，因此存在某个 F_i 使得 $x/F_i \subseteq V \subseteq U$。

推论 5.4。零维线性拓扑剩余格的拓扑完全由 1 的邻域基系统决定。

证明。设（L， $\mathcal{U}$）是一个零维线性拓扑剩余格。由 [39] 中的引理 3.1, $X_{\mathcal{U}} = \{F : 1 \in F \in \mathcal{U}\}$ 是 1 的邻域基。由 [40], 中的推论 3.8 可知，拓扑 $\mathcal{U}$ 是由 $X_{\mathcal{U}}$ 的滤子系统 L 诱导的。

推论 5.5。零维线性拓扑剩余格恰好是由其滤子系统诱导的线性拓扑剩余格。

证明。根据 [20], 中的定理 3.14，每个由滤子系统诱导的拓扑剩余格都是零维线性拓扑剩余格。证明的其余部分可由本文的定理 5.3 和 [40]中的推论 3.8 得出。

定义 5.6. 设 L 是一个剩余格，$(\mathcal{F}_1, \subseteq)$ 和 $(\mathcal{F}_2, \subseteq)$ 是 L的两个滤子系统。若偏序集 $(\mathcal{F}_1, \subseteq)$ 和 $(\mathcal{F}_2, \subseteq)$ 彼此共初始，即对于任意 $F_1 \in \mathcal{F}_1$，存在$F_2 \in \mathcal{F}_2$ 使得 $F_1 \subseteq F_2$，反之亦然，则称 $(\mathcal{F}_1, \subseteq)$ 与 $(\mathcal{F}_2, \subseteq)$ 等价。

命题 5.7. 在剩余格 L中，等价的滤子系统具有相同的拓扑。

证明。证明很直接。

例 5.8。设实单位区间 $I = [0, 1]$ 上的 $\odot$ 和 $\rightarrow$ 定义如下:

$$x \odot y = min\{x, y\} \ and \ x \rightarrow y = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ y, & otherwise. \end{cases}$$

那么 $\mathcal{I} = (I, min, max, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ 是一个 BL-代数（称为 G ¨odel 结构）。容易验证，$\mathcal{F} = \{(a, 1] \mid a \in [0, 1)\}$ 是一个滤子系统。由于 $\mathcal{F}$ 满足有限交，我们得到 $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, 它是 $\mathcal{F}$ 中元素的所有有限交组成的集合。可以检查出，L 不满足 DCC。

利用上述例子，我们可以说明 [20] 中定理 3.10 的证明是不正确的。事实上，在 [20], 中定理 3.10 的证明里，设 $(L, \mathcal{T})$ 是一个线性拓扑剩余格，使得 $(L, \mathcal{T})$ 是一个零维空间。那么，存在拓扑 $\mathcal{T}$ 在 L 上的一个基 β，使得 β 中任何包含 1 的元素都是 L 的滤子。设 X 是 β 中所有包含 1 的元素组成的集合，且 Y 是 X 中元素的所有交组成的集合。那么 $(X, \subseteq)$ 和 $(Y, \subseteq)$ 是剩余格 L 的两个滤子系统。一般而言，它们并不等价。因此，由它们诱导的拓扑也不相同。例如，在例 5.8 中取 $X = \mathcal{F}$，并使用 Y 的构造，我们有 $\{1\} \in Y$。于是，$\mathcal{T}_Y$ 是离散拓扑。但 $\mathcal{T}_X$ 不是离散拓扑。因此，$\mathcal{T}_X \neq \mathcal{T}_Y$，即 [20] 中定理 3.10 的证明里的 $\mathcal{T} \neq \mathcal{V}$。由此可知，从 $\mathcal{F}(L)$ 到 $ZLTRL(L)$ 的映射 φ （对所有 $F \in \mathcal{F}(L)$ 定义为 $\varphi(F) = (L, \mathcal{T}_F)$）不是满射，其中，在剩余格 L 上的所有零维线性拓扑剩余格组成的集合 $ZLTRL(L)$，见 [20]。

接下来，我们将在以下定理中更正 [20] 中的定理 3.10。

定理 5.9. 设 L 是一个剩余格。那么 $|\mathcal{F}(L)| = |ZLTRL(L)|$ 当且仅当 L 满足降链条件。

证明。假设 L 满足降链条件。定义映射 φ，从 $\mathcal{F}(L)$ 到 $ZLTRL(L)$，令 $\varphi(F) = (L, \mathcal{T}_F)$，对所有属于 $\mathcal{F}(L)$ 的 F 均成立，其中 $\mathcal{T}_F = \{U \subseteq L : \forall x \in U, x/F \subseteq U\}$。由此可知，$(L, \mathcal{T}_F)$ 是一个零维线性拓扑剩余格。根据 [20], 中的注 3.9，映射φ 是单射。因此，只需证明 φ是满射。假设 $(L,\mathcal{U})$ 是一个零维线性拓扑剩余格。根据定理 5.3 及其推论，存在一个滤子系统 $X_{\mathcal{U}}$，使得 $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{T}_F : F \in X_{\mathcal{U}}\}$。根据假设和命题 4.3，$X_{\mathcal{U}}$中存在一个最小滤子 F。因此，我们有 $\mathcal{U} = \mathcal{T}_F$。

反过来，假设 $|\mathcal{F}(L)| = |ZLTRL(L)|$。根据命题 4.3，只需证明 L的每个滤子系统都有最小元。设 $(\mathcal{F}, \subseteq)$ 是 L的一个滤子系统。于是，系统 $(\mathcal{F}, \subseteq)$ 可以诱导出一个零维线性拓扑剩余格 $(L, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$，且 $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \sup\{\mathcal{T}_F : F \in \mathcal{F}\}$。由假设可知，$L$ 的零维线性拓扑剩余格的数量等于 L的简单线性拓扑剩余格的数量。因此，存在一个滤子 $G \in \mathcal{F}(L)$，使得 $\mathcal{T}_G = \sup\{\mathcal{T}_F : F \in \mathcal{F}\}$。由此可得 $\mathcal{T}_F \subseteq \mathcal{T}_G$，进而对任意 $F \in \mathcal{F}$，都有 $G \subseteq F$。特别地，$\mathcal{T}_G$是一个亚历山德罗夫拓扑，且 $1/G$ 是 1 的最小开集。根据 [20], 中的引理 3.3，可知存在滤子 $F_1, F_2, \ldots, F_n$，属于 $\mathcal{F}$，使得$1/G = 1/\cap_{i=1}^{n} F_i$。因此，$G = \cap_{i=1}^{n} F_i$。由于 $(\mathcal{F}, \subseteq)$ 是一个向下有向集，存在滤子 $F \in \mathcal{F}$，使得 $F \subseteq \cap_{i=1}^{n} F_i = G$。因此，我们有 $G = F \in \mathcal{F}$，且 G 是 $\mathcal{F}$的最小滤子。

引理 5.10. 设 $(L,\mathcal{U})$ 是一个拓扑剩余格。若 F 是 L 的滤子，则对于任意 $a \in L$，F 是开（闭）的，当且仅当 a/F 是开（闭）的。

证明. 不失一般性，可假设 F 是 L 的开滤子。设 $a \in L$。定义两个映射 $l_a : L \to L$ 和 $g_a : L \to L$，如下：对任意 $x \in L$，$l_a(x) = a \to x$，且 $g_a(x) = x \to a$。显然，l_a 和 g_a 是连续映射，因此 $l_a^{-1}(F)$、$g_a^{-1}(F)$ 在 $(L,\mathcal{U})$ 中是开集。由于 $a/F = \{x \in L : x \to a \in F \text{ and } a \to x \in F\} = l_a^{-1}(F) \cap g_a^{-1}(F)$，故有 $a/F \in \mathcal{U}$。反之，由事实 $F = 1/F$ 可得。

接下来我们给出一个紧致性的简单推论，它与拓扑群 [33]中的类似结果相近。

定理 5.11. 在紧致零维线性拓扑剩余格 $(L,\mathcal{U})$ 中，滤子 G 是开集，当且仅当 G 是闭的且具有有限指数。

证明。根据假设，令 $X_{\mathcal{U}} = \{F : 1 \in F \in \mathcal{U}\}$。设 G 是 L的一个开滤子，则存在 $X_{\mathcal{U}}$中的一个滤子 F，使得 $F \subseteq G$。令 $L = \bigcup_{x \in L} x/F$。由于 $(L,\mathcal{U})$ 是紧致的，存在 $x_1, \ldots, x_n \in L$，使得 $L = \bigcup_{i=1}^{n} x_i/F$。由$F \subseteq G$可知，$x_i/F \subseteq x_i/G$。因此我们有 $L = \bigcup_{i=1}^{n} x_i/G$。不失

一般性，假设 $x_1/G = 1/G = G$，于是我们有 $G = L \setminus \bigcup_{i=2}^{n} x_i/G$。根据引理 5.10，每个 x_i/G 都是开的，因此 G 是有限指数的闭滤子。反过来，设 G 是一个闭滤子，则可令 $L = G \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} x_1/G$; 根据引理 5.10，$G = L \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} x_1/G$ 是开的。定理得证。

命题 5.12. 设 $\mathcal{F}(L)\setminus\{1\}$ 是剩余格 L 的一个全局滤子系。若 $(L, \mathcal{T}_{\mathcal{F}(L)\setminus\{1\}})$ 是紧致且豪斯多夫的，则 L 是有限可逼近的。

证明。由定理 4.4 和定理 5.11 可得。

定理 5.13. 设 L 是一个满足降链条件的非平凡剩余格。则 L 次直不可约，当且仅当它具有最大的零维线性拓扑剩余格。

证明。由本文中的定理 5.9 和 $[9]$ 中的定理 8.4 可得。 .

我们称剩余格 L 的素滤子链为有限严格递增序列 $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$，该链的长度为 n。

定义 5.14. 我们将剩余格 L 的维数定义为 L 中所有素滤子链长度的上确界：它是一个整数 $n \geq 0$，或为 $+\infty$（假设 L 非平凡）。

注意，这样的维数在交换环中也称为克鲁尔维数（例如参见 $[1]$）。

命题 5.15. 如果剩余格 L 是次直不可约的，那么它不具有非平凡的豪斯多夫零维线性拓扑剩余格拓扑。

证明. 设 L 是一个次直不可约剩余格。假设 $(L,\mathcal{U})$ 是一个豪斯多夫零维线性拓扑剩余格。由推论 5.5，存在一个滤子系统 $(\mathcal{F}, \subseteq)$，使得 $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{T}_F\colon\ F \in X_{\mathcal{U}}\}$。根据定理 4.4，且由于 $\mathcal{U}$ 是豪斯多夫的，我们有 $\bigcap \mathcal{F} = \{1\}$。由于 $\{1\}$ 在 $(\mathcal{F}(L)\ \subseteq)$ 中是完全交不可约的，因此可得 $\{1\} \in \mathcal{F}$。所以， $\mathcal{U}$ 是离散拓扑。

定理 5.16。如果剩余格 L 不是次直不可约的，且其维数为无限，则 L上必定存在一个非平凡的豪斯多夫拓扑剩余格。

证明。假设 L 不是次直不可约的，且其维数是无限的。根据推论 4.7，我们有 $\bigcap \mathcal{P}(L) = \{1\}$。由于 L 不是次直不可约的，我们必有

$$\bigcap(\mathcal{P}(L) \setminus \{1\}) = \bigcap(\mathcal{F}(L) \setminus \{1\}) = \{1\},$$

否则，由命题 4.6 可得 $\{1\} \subset F = \bigcap(\mathcal{F}(L) \setminus \{1\})$，$F$ 是 $\mathcal{F}(L) \setminus \{1\}$ 中的最小滤子，这与假设矛盾。由于 L 是无限维的，存在一个严格递增的 $\mathcal{P}(L) \setminus \{1\}$ 序列，记为 $\mathcal{P}$，使得

$$\bigcap \mathcal{P} = \bigcap(\mathcal{P}(L) \setminus \{1\}) = \{1\}.$$

容易验证，$(\mathcal{P}, \subseteq)$ 是一个滤子系统，因此 $(L, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ 是一个拓扑剩余格。根据命题 4.4，$\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ 是豪斯多夫的，这并非显然，因为 $\mathcal{P}$ 中任意有限个元素的交都不等于 $\{1\}$。

例 5.17。在例 5.8 中，$(\mathcal{F}, \subseteq)$ 是一个滤子系统。由于 G¨odel 结构 $\mathcal{I} = (I, min, max, \odot, \to, 0, 1)$ 是一个线性剩余格，因此 $\mathcal{F}$ 的每个元素都是素滤子，从而 $\mathcal{I}$ 是一个无限维剩余格。众所周知，$\mathcal{I}$ 不是次直不可约的（例如，参见 *[15]* 定理 2.4.11 ）。因此，根据定理 5.16，我们有 $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ 是一个非平凡的豪斯多夫零维线性拓扑剩余格。直接计算表明，对于 $\mathcal{F}$ 中的任意元素 $(a, 1]$，都有 $x/(a, 1] = \{x\}$ if $x \leq a$，以及 $x/(a, 1] = (a, x]$ if$x > a$，也就是说，该拓扑是

$$\mathcal{T}_{(a,1]} = \{\{x\} : x \leq a\} \cup (a, 1].$$

由于 $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \sup\{\mathcal{T}_{(a,1]} : a \in [0, 1)\}$，可知 I 上的索根弗雷拓扑比拓扑 $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ 更粗。

6. 结论与未来研究课题

本文得出结论：原有限剩余格的基数要么有限，要么不可数；这一结论可用于通过集合论方法判断拓扑剩余格是否为原有限代数。给定一个原有限代数 A，$\widehat{\ }$ 是否存在一个代数 B 使得 $A \cong B$。在格论中，这个问题与 Gr¨atzer 关于可表示偏序集的著名问题有关，参见 [18] 问题 34–35，第 156 页。本文得出结论：Pro$\mathcal{RL} \subseteq$ Ap$\mathcal{RL} \cap$ C$\mathcal{RL}$，其中 C$\mathcal{RL}$ 是完备剩余格的类。类似地，关于海廷代数的结果，以及 Gr¨atzer 关于剩余格可表示性的问题，将是我们未来的研究课题。众所周知，Pro$\mathcal{RL} \subseteq$ Sto$\mathcal{RL}$ 由这些斯通拓扑剩余格构成；换言之，范畴 Pro$\mathcal{RL}$ 等价于 Sto$\mathcal{RL}$ 的一个满子范畴。P.T. Jonstone 提出如下问题（见 [24] 第 VI 2.6 节）：给定一个代数 A，何时可以说每个斯通拓扑代数都是原有限代数? 这一问题对于一大类代数也成立，其中包括群、环、有界分配格、海廷代数和布尔代数。我们将针对剩余格研究这一问题。

致谢

本研究得到国家自然科学基金（12171294、11901371、12001423）和中国博士后科学基金（2019M660054XB）资助。

参考文献

[1] M.F. Atiyah, I.G. MacDonal,《交换代数导论》，Addison Wesley，马萨诸塞州雷丁，1699。[2] B. Banaschewski，《论原有限泛代数》。载于《一般拓扑学及其与现代分析和代数的关系》第三卷（第三届布拉格拓扑学研讨会论文集，1971年），Academia，布拉格，1972年，第51–62页。[3] R. Belohlavek，《剩余格的一些性质》，Czechoslovak Mathematical Journal，2003年，53(123):161-171。[4] G. Bezhanishvili, N. Bezhanishvili,《原有限海廷代数》，《序》，2008年，25:211-227。[5]G. Bezhanishvili, N. Bezhanishvili, T. Moraschini 和 M. Stronkowski，《海廷代数谱的原有限性与可表示性》，《数学进展》，2021年，391。[6] G. Birkhoof，《一般拓扑学中的 Moore-Smith收敛》，《数学年刊》，1937年，38:39-56。[7] T.S. Blyth，《格与有序代数结构》，施普林格出版社，伦敦，2005年。[8] W. Blok, D. Pigozzi，《可代数化逻辑》，《美国数学学会回忆录》396，普罗维登斯，1989年。[9] S. Burris, H. P. Sankappanavar，《泛代数教程》，施普林格纽约，《数学研究生教材》，1981年。[10] R.A. Borzooei, G.R. Rezaei, N. Kouhestani，《（半）拓扑BL代数的可度量化性》，《软计算》，2012年，16:1681-1690。[11]R.A. Borzooei, G.R. Rezaei, N. Kouhestani，《（半）拓扑商BL代数中的分离公理》，《软计算》，2012年，16:1219-1227。[12] A. Chagrov, M. Zakharyaschev，《模态逻辑》，《牛津逻辑指南》35，牛津大学出版社，牛津，1997年。[13] T.H. Choe, Greechie R J，《原有限正交模格》，《美国数学学会会刊》，1993年，118:1053-1060。[14] R. Dimitric，《纤细性》，第1卷：阿贝尔范畴，剑桥大学出版社，剑桥，2019年。[15] L. Esakia，《海廷代数：对偶理论》，施普林格，2019年，1985年原版著作的英文译本。[16] L. Fuchs，《阿贝尔群》，《施普林格数学专著》，施普林格，查姆，2015年。

[17] N. Galatos，P. Jipsen，T. Kowalski，H. Ono，《剩余格：次结构逻辑的代数一瞥》，《逻辑与数学基础研究》，Elseier，2007年。[18] G. Gr¨atzer，《格论：基本概念与分配格》，W.H. Freeman and Company，旧金山，1971年。[19] G. Gr¨atzer，《普遍代数》，第2版，施普林格，2008年。[20] P.F. He，J. Yang，J.T. Wang，《拓扑剩余格中的开放问题解答》，《模糊集与系统》，2021年，405：65-73。[21] U. H¨ohle，《交换剩余 ℓ-幺半群》。载于：U. H¨ohle与E. Klement（编），《非经典逻辑及其在模糊子集中的应用》。Kluwer，多德雷赫特，1995年。[22] M. Hull，《自由群及相关群的一个拓扑》，《数学年刊》，1950年，52：127-139。[23] I.M. Jam，《一致空间导论》，《伦敦数学学会讲义系列》，第144卷，剑桥大学出版社，剑桥，1999年。[24] P.T. Johnstone，《Stone空间》，剑桥大学出版社，剑桥，1982年。[25] M. Kondo，E. Turunen，《剩余格上的素滤子》，载于IEEE第43届多值逻辑国际研讨会，2013年，89-91。[26] W. Luan，H. Weber，Y.C. Yang，《滤子拓扑与拓扑MV代数》，《模糊集与系统》，2021年，406：11-21。[27] C. Luan，Y.C. Yang，《MV代数上的滤子拓扑》，《软计算》，2017年，21：2531-2535。[28] A.I. Malcev，《代数系统》，施普林格，纽约，1973年。[29] M. Najafi，G.R. Rezaei，N. Kouhestani，《关于（para，quasi）拓扑MV代数》，《模糊集与系统》，2017年，313：93-104。[30] J.B. Nganou，《原有限 MV-代数与多重集》，《序》，2015年，32：449-459。[31] N. Nikolov，D. Segal，《关于有限生成前有限群，I：强完备性与一致界》，《数学年刊》，2007年，165：171-238。[32] N. Nikolov，D. Segal，《关于有限生成前有限群，II：拟单群中的积》，《数学年刊》，2007年，165：239-273。[33] L. Ribes，P. Zalesskii，《前有限群》，第二版，《数学相关领域成果》第3辑，《现代数学综述系列》第40卷，施普林格出版社，柏林，2010年

[34] F.M. Schneider，J. Zumbr¨agel，《原有限代数与仿射有界性》，《数学进展》，2017年，305：661-681。[35] E. Turunen，《模糊逻辑背后的数学》，Physica-Verlag，1999年。[36] M. Ward，P.R. Dilworth，《剩余格》，《美国数学会会刊》，1939年，45：335-354[37] Y.C. Yang，《格序群上的C-拓扑》，《中国科学：数学》，2009年，52：2397-2403。[38] J. Yang，X.L. Xin，P.F. He，《关于拓扑EQ-代数》，《伊朗模糊系统杂志》，2018年，15(6)：145-158。[39] J. Yang，X.L. Xin，P.F. He，《关于拓扑 BL-代数的注记》，《模糊集与系统》，2018年，350：33-40。[40] J. Yang，X.W. Zhang，《拓扑剩余格的若干较弱版本》，《模糊集与系统》，2019年，373：62-77。[41] O. Zahiri，R.A. Borzooei，《 BL-代数上的拓扑》，《模糊集与系统》，2016年，289：137-150。