arXiv:2302.11336v2 [cs.CC] 3 May 2023

四顶点模型的可近似性

Zhiguo Fu* Tianyu Liu† Xiongxin Yang ‡

摘要

我们研究了四顶点模型的可近似性，这是六顶点模型的一个特例。我们证明，尽管四顶点模型在最坏情况下是NP难近似的，但当输入满足某个GF(2)上的线性方程组时，四顶点模型存在全多项式随机近似方案（FPRAS）。该FPRAS由一个称为 $worm\ process$的马尔可夫链给出，其状态空间和快速混合性依赖于该线性方程组的解。这是首次尝试为具有 $unwindable$ 约束函数的六顶点模型设计FPRAS。此外，我们探讨了该技术在平面图上的应用，并提供了高效采样算法。

1 引言

六顶点模型最早由 Linus Pauling [41] 于1935年提出，用于描述冰的性质。它是对具有氢键的晶格的一种抽象。从图论视角来看，六顶点模型定义在一个4-正则图 G 上，具体如下。假设每个顶点的四条关联边分别标记为1至4。六顶点模型的状态空间由 G的所有欧拉定向组成，即每个顶点恰有两个箭头指向顶点、两个箭头背离顶点的定向。“二入二出”规则也称为冰规则。一个顶点周围有 $\binom{4}{2} = 6$ 种允许的局部构型，因此得名六顶点模型（见图1）。

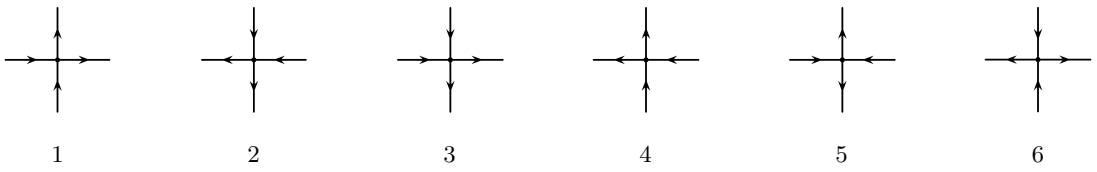

图1：六顶点模型的有效配置

一般而言，图1中的六种构型（1至6）分别对应六个权重 ω_1， ω_2， $\cdots$， ω_6。本文假设满足箭头反转对称性，即 $\omega_1 = \omega_2 = a$， $\omega_3 = \omega_4 = b$， $\omega_5 = \omega_6 = c$ 以及 a， b， $c \geq 0$，这符合物理学中的惯例。参数为（a， b， c）的六顶点模型在4-正则图 G 上的配分函数 定义为

$$Z_{6V}(G; a, b, c) := \sum_{\tau \in \mathcal{EO}(G)} a^{n_1+n_2} b^{n_3+n_4} c^{n_5+n_6},$$

其中， $\mathcal{EO}(G)$表示 G 的所有欧拉定向构成的集合，而 n_i 表示在欧拉定向 $\tau \in \mathcal{EO}(G)$下，图中类型为 $i(1 \leq i \leq 6)$的顶点数。

有趣的是，在物理学中，六顶点模型会随着参数a， b， c的变化（由温度变化引起）而呈现相变现象。当三角不等式成立时（$a \leq b + c$, $b \leq a + c$,

*东北师范大学信息科学与技术学院及KLAS，中国长春。电子邮箱：fuzg432@nenu.edu.cn

†美国加利福尼亚州斯坦福，斯坦福大学。电子邮箱：tliu248@stanford.edu

‡中国长春，东北师范大学信息科学与技术学院。电子邮箱：yangxx500@nenu.edu.cn

和 $c \leq a+b$），六顶点模型处于高温区域；否则，它处于低温区。详情请参阅 [2]。除了物理学之外，研究人员还发现六顶点模型与其他领域有许多联系，例如交错符号矩阵（ASM）猜想 [35] 和 Tutte 多项式 [47, 36]。此外，它还可以扩展为八顶点模型；八顶点模型与统计物理中的其他重要模型（例如零场Ising模型 [3]）有着密切联系。

作为一种乘积求和计算，六顶点模型的配分函数是一个计数问题，并且可以表示为一族*Holant*问题。Holant问题是研究计数问题的一个框架，表达能力足以涵盖图同态 （GH）和计数约束满足问题 （#CSP）等经典框架作为特例。针对 GH 和 #CSP，已有一系列关于精确计算 [21, 7, 6, 25, 19, 9, 12, 27, 8, 37, 1, 10]和近似 [28, 45, 29, 43, 38, 23, 30, 22]的复杂性分类定理。然而，关于 Holant问题的研究成果非常有限，尤其是在其近似复杂性方面。

六顶点模型是研究具有非对称约束函数的 Holant问题的重要基础案例，因为它无法用 GH 或 #CSP 表示 [11]。对于精确计算，Cai 等人证明了一个复杂性二分定理 [11]。

关于近似复杂性，Mihail 和 Winkler [40] 在无权情形下给出了第一个全多项式随机近似方案（FPRAS），即对底层图的欧拉定向进行计数。在加权情形下，Cai 等人 [16] 指出，随着温度变化，六顶点模型的可近似性与统计物理中的相变现象极为相似。他们证明，除非 RP $=$ NP，否则在整个低温区都不存在 FPRAS；而在高温区域的一个子区域中，才通过 马尔可夫链蒙特卡罗（*MCMC*）给出了 FPRAS。特别是，该子区域中的参数设置是“可风化”的——这是 McQuillan [39] 提出的一个概念，旨在系统地发现典范路径，从而证明马尔可夫链快速混合。Fahrbach 和 Randall [20]证明，在某些边界条件下，Glauber 动力学在整个铁电相以及部分反铁电相中混合速度呈指数级缓慢。此外，当温度足够低时，Cai 和 Liu [15] 为方格图上的六顶点模型和八顶点模型给出了全多项式时间近似方案（FPTAS）。

自物理学家发现平面图上的一些非凡算法（例如 FKT算法[46, 33, 34, 32], ）以来，平面结构便备受关注。Cai 等人 [10]将平面可处理性纳入考量，建立了六顶点模型的复杂性三分。在近似复杂性方面，Cai 和 Liu [14] 采用 Valiant [48] 提出的全息变换方法，为平面图上低温区域的一个子区域给出了全多项式随机近似方案。他们的工作表明，八顶点模型是第一个在一般图上已证明具有 NP难近似性质的问题（在精确复杂性方面，甚至对平面图也是 #P难），同时在二部图和平面图的参数空间中均有相当大的区域存在全多项式随机近似方案。

本文研究六顶点模型的一个子模型——四顶点模型。在此模型中，我们设定$b = 0$，这意味着一旦确定每个顶点周围四条边的局部标记，图1中的局部构型 3 和 4 就不允许出现。我们注意到，在六顶点模型中，a 和 b 的作用是对称的：将图中所有顶点处的边标记旋转 90 度，会把输入从 $(a, 0, c)$ 转换为 $(0, a, c)$。作为补充说明，物理学中已研究过具有四种允许局部构型的六顶点模型子模型 [5, 4]。

请注意，当 $a \neq c$ 时，$(a,\ 0,\ c)$ 属于六顶点模型的低温区，因此在一般的 4正则图上，其近似是 NP 难的 [16, 17]。尽管该问题在最坏情况下很难，本文确定了若干情形，在这些情形下存在高效的近似算法。

我们采用一种称为“回路分解”的技术，将四顶点模型归约为伊辛模型这一基础模型；伊辛模型已得到广泛研究。随后，我们确定了 GF(2) 上的一个线性方程组，求解该方程组即可揭示一种设计快速混合马尔可夫链（称为蠕虫过程）的方法，用于对四顶点模型进行计数和采样。值得注意的是，四顶点模型的约束函数是可解绕的，这也是首次尝试为具有可解绕约束函数的六顶点模型设计全多项式随机近似方案。

对于平面图，由于参数设置 $(a,\ 0,\ c)$ 下的约束函数是匹配门签名 [10]，因此四顶点模型的配分函数可以在多项式时间内精确计算。然而，为了从状态空间中（至少近似地）进行抽样，传统的通过计数进行抽样方法遇到了障碍，因为一般而言，六顶点模型尚未被证明是自

约的 [31]。本文基于平面四正则图的结构，为平面四顶点模型提出了一种“规范标记”。我们的研究表明，一旦输入的平面图具有规范标记，上述线性方程组总是有解，从而使我们能够利用蠕虫过程设计出高效的抽样算法。此外，在这种规范标记下，平面四顶点模型可以归约为定义在其底层图的中图上的伊辛模型。值得一提的是，我们认为，自然的图类不太可能全都满足代数判据——即线性系统有解。这进一步凸显了我们的发现：包括统计物理中的基本情形（正方晶格）在内的平面图类，都满足这一判据。

本文结构如下：第2节中，我们将形式化定义六顶点模型，并给出其他基本定义；随后陈述四顶点模型，并证明其约束函数通常是不可风的。第3节中，我们介绍“回路分解”技术以及向伊辛模型的归约，接着研究四顶点模型的可近似性。第4节中，我们分析四顶点模型的蠕虫过程，并证明其快速混合。第5节中，我们介绍规范标记下的平面四顶点模型与伊辛模型之间的等价性，并为平面四顶点模型提供一种抽样算法。

2 预备知识

2.1 六顶点模型

为便于技术讨论，我们将六顶点模型表述为一个Holant问题。Holant问题定义如下。一个元数为 k 的签名或约束函数是一个映射 $f:\{0,1\}^k \to \mathbb{C}$。本文将 f 限制为取值于 $\mathbb{R}^+$。设 $\mathcal{F}$ 为一组签名。签名网格 $\Omega = (G, \pi)$是一个元组，其中$G = (V, E)$是一个图，π 为每个 $v \in V$ 标记一个签名 $f_v \in \mathcal{F}$，并将 v 处的关联边 $E(v)$标记为 f_v的输入变量，这些变量也标记为 π。每个构型 $\sigma \in \{0,1\}^E$ 都给出一个求值$\prod_{v\in V} f_v(\sigma|_{E(v)})$，其中 $\sigma|_{E(v)}$ 表示 σ 在 $E(v)$上的限制。对于实例 Ω，问题Holant($\mathcal{F}$)是计算

$$\mathrm{Holant}(\Omega;\mathcal{F}) := \sum_{\sigma\in\{0,1\}^E} \prod_{v\in V} f_v(\sigma|_{E(v)}).$$

我们将二部图 (U, V, E) 上的签名网格对应的 Holant问题记作 Holant($\mathcal{F}|\mathcal{G}$)，其中 U 中的每个顶点都标记为 $\mathcal{F}$ 中的一个函数（ V 中的每个顶点则分别标记为 $\mathcal{G}$ 中的一个函数）。

为了将 4-正则图 $G = (V, E)$ 上的六顶点模型写成 Holant问题，我们考虑它的边顶点关联图。边顶点关联图 $G' = (U_E, U_V, E')$ 是一个二分图，其中 $(u_e, u_v) \in U_E \times U_V$ 是 E' 中的一条边，当且仅当 $e \in E$ 与 $v \in V$ 相关联。G 上六顶点模型的一个构型是 G' 上的边二染色，即 $\sigma: E' \to \{0,1\}$。我们通过要求与 $u_e \in U_E$ 相关联的两条边满足“一条为 0、一条为 1”，来表示边的定向 $e \in E$；并通过要求与每个顶点 $u_v \in U_V$ 相关联的四条边满足 “ 两条为 0 、两条为 1”，来表示冰规则。

“一个0、一个1”要求是一种二元不等约束，记作($\neq_2$)。我们将四元函数 f 的取值写成一个矩阵

$$M(f) = \begin{bmatrix} f_{0000} & f_{0010} & f_{0001} & f_{0011} \\ f_{0100} & f_{0110} & f_{0101} & f_{0111} \\ f_{1000} & f_{1010} & f_{1001} & f_{1011} \\ f_{1100} & f_{1110} & f_{1101} & f_{1111} \end{bmatrix}$$

，称为 f的约束矩阵。具有箭头反转对称性的六顶点模型的约束函数形式为 $M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。

六顶点模型的配分函数可以表示为一个Holant问题

$$Z_{6V}(G;a,b,c) = \mathrm{Holant}(\neq_2 | f).$$

注意到，配分函数在所有连通分量上具有乘法性，因此我们可以假设 G是连通的。

本文聚焦于约束矩阵具有形式 $M(f^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的四顶点模型。四顶点模型的配分函数为

$$Z_{4V}(G;a,c) = \sum_{\tau \in \mathcal{EO}(G)} a^{n_1+n_2} c^{n_5+n_6}.$$

$Z_{4V}(G;a,\ c)$ 的精确计算是 #P难，依据 [11]。此外，根据 [16]，一般情况下不存在该问题的全多项式随机近似方案。

注意，$Z_{4V}(G;\ a,\ c) = c^{n_1+n_2+n_5+n_6} \sum_{\tau \in \mathcal{EO}(G)} \left(\frac{a}{c}\right)^{n_1+n_2}$，而且 $n_1+n_2+n_5+n_6$ 是四顶点模型设定下的顶点数。为方便起见，我们有时会忽略常数因子 $c^{n_1+n_2+n_5+n_6}$，对约束函数进行归一化。令 $\beta = a/c$，归一化后的约束函数为 $M(f^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。在本文余下部分，我们始终假设约束函数已归一化。

2.2 伊辛模型

伊辛模型是统计物理中的一个基本模型。由于其表达简单且应用广泛，它在物理学、数学和计算机科学领域得到了广泛研究。从算法的角度来看，给定一个图 $G=(V,\ E)$，参数为 $\beta_e,\ e \in E$ 的图 G 上的伊辛模型定义如下。对于任意 $\sigma \in \{0,1\}^V$，处于构型 σ 的概率为

$$\pi(\sigma) = \frac{\prod_{e \in m(\sigma)} \beta_e}{Z_{Ising}},$$

其中，$m(\sigma)$ 是 σ 中单色边的集合，即 $(u,\ v) \in m(\sigma)$ 当且仅当 $\sigma(u) = \sigma(v)$；其配分函数定义为

$$Z_{Ising} = \sum_{\sigma \in \{0,1\}^V} \prod_{e \in m(\sigma)} \beta_e.$$

配分函数的计算是 #P 完全的。对于近似计算，当$\beta_e > 1$时，对所有 $e \in E$，系统都是铁磁的，且可通过马尔可夫链蒙特卡罗 [29] 在多项式时间内近似计算配分函数；当 $\beta_e < 1$ 时，对于某些 $e \in E$，系统是反铁磁的，且配分函数的近似计算仍然是 NP难。

2.3 近似算法

计数问题 $f : \Sigma^* \to \mathbb{R}$ 的随机近似方案是一种随机算法，它以实例 $x \in \Sigma^*$ 和误差容限 $\varepsilon > 0$ 为输入，并输出一个数值 Y，使得对于每个实例 x，

$$\Pr[(1-\varepsilon)f(x) \le Y \le (1+\varepsilon)f(x)] \ge \frac{3}{4}.$$

如果算法的运行时间由 $|x|$ 和 ε^{-1} 的多项式所界定，我们就称其为全多项式随机近似方案（*FPRAS*）。

将近乎均匀采样归约为近似计数的一种标准方法，是使用强大的马尔可夫链蒙特卡罗方法。不过，为了确保效率，有必要对采样器中所用马尔可夫链的收敛速率进行界定。对于一个有限状态空间 Ω 上的马尔可夫链，其转移矩阵为 P，平稳分布为 π，其混合时间定义为

$$\tau_\varepsilon(P) := \min\{t : \max_{x \in \Omega} \left\| P^t(x,\cdot) - \pi \right\|_{\mathrm{TV}} \le \varepsilon\},$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$ 是总变差距离，即

$$\|\pi-\pi'\|_{\mathrm{TV}} \coloneqq \frac{1}{2}\sum_{x\in\Omega}|\pi(x)-\pi'(x)|.$$

用于界定混合时间的最有用技术之一是典范路径。设 $\Psi \subseteq \Omega$ 为非空集合，并且

$$\Gamma = \{\gamma_{xy} : (x,y) \in \Omega \times \Psi\}$$

设为一组路径，其中 γ_{xy} 是从 x 到 y 、使用马尔可夫链转移的典范路径。与状态集 Ψ 及这些路径相关的"局部"拥塞 $\varrho(\Psi;\Gamma)$ 为

$$\varrho(\Psi;\Gamma) \coloneqq \max_{(z,z')\in\Omega^2, P(z,z')>0} \frac{L(\Gamma)}{\pi(\Psi)\pi(z)P(z,z')} \sum_{(x,y)\in\Omega\times\Psi,\gamma_{xy}\ni(z,z')} \pi(x)\pi(y),$$

其中， $L(\Gamma)$ 是 Γ 中最长路径的长度。拥塞可通过以下定理用于界定混合时间。

定理 1。 ([44]) 对于具有有限状态空间 Ω、转移矩阵 P、平稳分布 π 和任意初始状态 $x_0 \in \Omega$ 的不可约且非周期马尔可夫链，

$$\tau_\varepsilon(P) \le 4\varrho(\Psi;\Gamma)(\ln\frac{1}{\pi(x_0)} + \ln\frac{1}{\varepsilon}).$$

2.4 可风性

可风性由 McQuillan [39]，提出，是一种用于系统设计典范路径的技术。它将设计典范路径的任务简化为求解一组线性方程，从而使路径设计更加容易。具体而言，对于 Holant问题，如果所有约束函数都是"可风化"的，可风性便能够自动发现典范路径。此外，Huang等人 [26] 简化了检查函数是否可风化的条件。此后，可风性的应用得到了进一步扩展。可风性的定义如下:

定义 2。 对于任意有限集合 J和任意构型 $x \in \{0,1\}^J$，定义 $\mathcal{M}_x$ 为将 $\{i \mid x_i = 1\}$ 划分为若干对、至多再加一个单元素集合的所有划分所构成的集合。若存在值 $B(x,y,M) \ge 0$，使得对所有 x、 $y \in \{0,1\}^J$以及所有满足以下条件的 $M \in \mathcal{M}_{x\oplus y}$，函数 f： $\{0,1\}^J \to \mathbb{Q}^+$ 均为可风化:

- $f(x)f(y) = \sum_{M\in\mathcal{M}_{x\oplus y}} B(x,y,M)$ 对所有 x 和 $y \in \{0,1\}^J$均成立。
- $B(x,y,M) = B(x\oplus S, y\oplus S, M)$ 对所有 x、 $y \in \{0,1\}^J$ 和 $S \in M \in \mathcal{M}_{x\oplus y}$均成立。

这里， $x \oplus S$ 表示将 S 中的一个或两个元素 i 对应的 x_i 改为 $1-x_i$ 后得到的向量。

注意，对于具有箭头反转对称性的六顶点模型，当$a^2 \le b^2+c^2$ 且 $b^2 \le c^2+a^2$ 且 $c^2 \le a^2+b^2$时，约束函数是可风化的，即 [16] 为约束函数可风化的六顶点模型给出了一个全多项式随机近似方案。我们在以下命题中证明，约束函数 f^* 是不可风的，也就是说，我们将为不具可风性的六顶点模型给出一个全多项式随机近似方案。

命题 3. 当 $a \ne c$ 时，约束函数 f^* 是不可风的。

证明。 反设约束函数 f^* 是可风化的。首先，我们设定 $x = 0101$ 和$y = 1010$，则

$$\mathcal{M}_{x\oplus y} = \{M_1, M_2, M_3\},$$

其中 $M_1 = \{(x_1,x_2)、(x_3,x_4)\}$、 $M_2 = \{(x_1,x_3)、(x_2,x_4)\}$、 $M_3 = \{(x_1,x_4)、(x_2,x_3)\}$。根据定义 2，存在 $B(x,y,M) \ge 0$，使得 $f^*(x)\cdot f^*(y) = \sum_{M\in\mathcal{M'}_{x\oplus y}} B(x,y,M) = c^2$。此外，对于 M_1，我们有

$$B(x,y,M_1) = B(x\oplus\{x_1,x_2\}, y\oplus\{x_1,x_2\}, M_1) = B(1001,0110,M_1) = 0$$

因为 $f^*(1001) \cdot f^*(0110) = 0$。类似地，对于 M_3，我们有

$$B\left(0101, 1010, M_2\right) = B\left(1111, 0000, M_2\right) = 0.$$

因此，

$$c^2 = B(0101, 1010, M_3).$$

现在我们令 $x = 0011$ 和 $y = 1100$。对 $x = 0101$ 和 $y = 1010$进行非常相似的分析，可得

$$a^2 = B(0011, 1100, M_3).$$

由于 $B(0101, 1010, M_3) = B(0011, 1100, M_3)$，这意味着 $a = c$，这与 $a \neq c$矛盾。因此， f^* 在 $a \neq c$ 下是不可风的。 □

3 归约

3.1 回路分解

给定一个简单图 $G = (V, E)$ 及其对应的边-点图 $G' = (U_E, U_V, E')$，回想一下，在 Holant问题中，我们在 U_V 的每个顶点上标记 f^*，并在 U_E 的每个顶点上标记 $\neq_2$。我们将 f^* 的四个变量分为两对（x_1, x_4）和（x_2, x_3），并注意到约束函数 f^* 强制每个有效配置中同一对内的变量取相反值，因此对应的边必须成对地一条指入、一条指出。这一观察促使我们对底层图作如下回路分解：

- 任选一个顶点及其一条关联边，并从这条边开始追踪一条迹；
- 对于 U_E 中度数为 2 的顶点，迹直接穿过这些顶点；
- 对于 U_V 中度数为 4 的顶点，迹沿着对应于同一对变量的边继续前进。具体而言，如果一条路径从边 x_1 或 x_4 （x_2 或 x_3）进入一个顶点，那么它就分别从边 x_4 或 x_1 （x_3 或 x_2）离开该顶点；
- 当迹返回起始顶点时，就形成一个回路。从图中移除该回路，并重复此过程，直到图为空。

示例见图2。

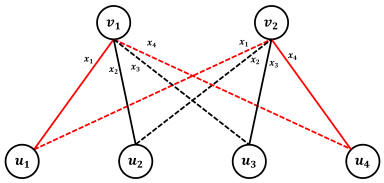

图2：回路分解示例：红色边和黑色边构成两个回路 $C_1(v_1 \to u_1 \to v_2 \to u_4 \to v_1)$ 和 $C_2(v_2 \to u_2 \to v_1 \to u_3 \to v_2)$。在同一个回路中，虚线边和实线边采用相反的赋值。

令 $\mathcal{C}$ 表示回路分解所得的回路集合，并令 $m = |\mathcal{C}|$。我们为 $\mathcal{C}$ 中的每个回路编上索引，并将回路集合记为 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$。现在，我们根据回路分解 $\mathcal{C}$ 重新定义四顶点模型的有效配置。注意，约束函数 f^* 和 $\neq_2$ 会迫使 $\mathcal{C}$ 中同一回路上的边交替取值 $\{0, 1\}$。对于每个回路 C_i，我们任意选取一条初始边 e_i。在有效配置中， C_i 中所有边的取值都由 e_i 的取值决定。因此，我们可以将回路 C_i 的赋值定义为初始边的取值

e_i，也就是说，有效配置为 $\mathcal{C}$ 中的每个回路赋予一个取值。反过来，给定对每个 $C_i \in \mathcal{C}$ 的赋值，就能得到四顶点模型的一个有效配置。

我们指出，在 [13]中使用了类似（但并不完全相同）的回路分解思想，以建立八顶点模型（经过全息变换后）与伊辛模型之间的联系。

3.2 顶点分类

注意，如果 U_V 中某个顶点的四条边只属于同一个回路，那么无论该回路的取值如何，该顶点处的约束函数值都保持不变。因此，我们可以假设U_V 中的每个顶点都属于两个不同的回路。为了对两个回路的公共顶点进行分类，我们根据它们输入相同时约束函数值的变化情况加以区分。形式化地，设回路 C_i 和 C_j 有一个公共顶点 v；在对称意义下， v 处的约束函数可能有以下四种情况:

$$f_v^*(x_1,x_2,x_3,x_4) = f^*(C_i, C_j, \overline{C_j}, \overline{C_i}); f_v^*(x_1,x_2,x_3,x_4) = f^*(\overline{C_i}, \overline{C_j}, C_j, C_i);$$
$$f_v^*(x_1,x_2,x_3,x_4) = f^*(C_i, \overline{C_j}, C_j, \overline{C_i}); f_v^*(x_1,x_2,x_3,x_4) = f^*(\overline{C_i}, C_j, \overline{C_j}, C_i).$$

前两种情况是指：当回路 C_i 和 C_j取值相同时，顶点 v 处的约束函数取值为 β；当它们取值不同时，函数值为1。后两种情况则相反。如果 v 处的约束函数属于前两种情况，我们称 v 为回路 C_i 和C_j之间的一致顶点 。否则，我们称 v 为 C_i 和 C_j之间的不一致顶点 。对于两个回路 C_i， $C_j \in \mathcal{C}$，令

$$A(i,j) \coloneqq \#\text{agree-vertices between } C_i \text{ and } C_j,$$
$$D(i,j) \coloneqq \#\text{disagree-vertices between } C_i \text{ and } C_j.$$

现在我们定义回路 $G_C = (\mathcal{C}, E_C)$ 的回路图。 G_C 的顶点集为 $\mathcal{C}$。当且仅当回路 C_u 和 C_v 至少有一个公共顶点时，边 $(u, v) \in E_C$。根据本节所述的事实， G 上的四顶点模型可以化约为定义在 G_C上的、具有局部约束函数的自旋系统。

自旋系统的构型是将状态赋予顶点的一种 2^m 可能的分配 $\sigma: \mathcal{C} \to \{0,1\}$。将每个 $(u, v) \in E_C$ 上的局部约束函数记为 $f^C_{(u,v)}$，其约束矩阵为$M(f^C_{(u,v)}) = \begin{bmatrix} \beta^{A(u,v)} & \beta^{D(u,v)} \\ \beta^{D(u,v)} & \beta^{A(u,v)} \end{bmatrix}$。四顶点模型的配分函数可写为

$$\begin{aligned} Z_{4V} &= \sum_{\sigma:\mathcal{C}\to\{0,1\}} \prod_{\substack{(u,v)\in E_C \\ \sigma(u)=\sigma(v)}} \beta^{A(u,v)} \prod_{\substack{(u,v)\in E_C \\ \sigma(u)\neq\sigma(v)}} \beta^{D(u,v)} \\ &= \prod_{(u,v)\in E_C} \beta^{D(u,v)} \sum_{\sigma:\mathcal{C}\to\{0,1\}} \prod_{\substack{(u,v)\in E_C \\ \sigma(u)=\sigma(v)}} \beta^{A(u,v)-D(u,v)}. \end{aligned}$$

忽略因子 $\prod_{(u,v)\in E_C} \beta^{D(u,v)}$，它可以直接计算；我们的目标是计算配分函数

$$Z_{4V} = \sum_{\sigma:\mathcal{C}\to\{0,1\}} \prod_{\substack{(u,v)\in E_C \\ \sigma(u)=\sigma(v)}} \beta^{A(u,v)-D(u,v)}. \tag{1}$$

显然，这种转换将 G 上的四顶点模型转化为 G_C上的伊辛模型。然而，由于 $A(u, v)$ 与 $D(u, v)$ 的相对大小无法控制， G_C 中任意两个顶点之间的相互作用可能是铁磁或反铁磁的，因此这个问题难以处理。事实上，如前所述，在 4-正则图上， Z_{4V} 通常是 NP难近似的。

定理 4 ([17]). </style}除非 $RP = N$，否则不存在适用于具有 $a \neq c$ 的四顶点模型的全多项式随机近似方案FPRAS.

尽管该问题在最坏情况下很难，但我们可以找出存在全多项式随机近似方案的情形。具体而言，如果图回路 G_C 能够转化为仅含铁磁伊辛型顶点相互作用的实例，则存在全多项式随机近似方案。

虽然在上述分析中，我们假设回路的初始边是固定的，但通过改变某些回路的初始边，我们可以调整 $A(u,\ v)$ 和 $D(u,\ v)$。具体而言，对于任意 $u,\ v \in \mathcal{C}$，如果将某个回路的初始边恰好改为与之相邻的一条边，那么 u 与 v 之间的一致顶点（不一致顶点）将分别变为不一致顶点（一致顶点）。如果我们能改变某些初始边，使得当 $\beta > 1$ 时，对所有 $u,\ v,\ A(u,\ v) \geq D(u,\ v)$，那么 (1) 就会变成铁磁伊辛型计算。对于 $\beta < 1$ 的情况也类似。随后，我们将这些条件表示为 GF(2) 上的线性方程组。

令 X_i 表示 C_i 是否改变其初始边，即 $X_i = 1$ 表示 C_i 改变其初始边，而$X_i = 0$ 表示 C_i 不改变其初始边。对于 $\beta > 1$，我们可以写出以下 GF(2) 上的线性方程组。

$$X_u \oplus X_v = \mathbf{I}(A(u,v) < D(u,v)), \quad \forall (u,v) \in E_C, \tag{2}$$

其中，$\oplus$ 是异或运算符，$\mathbf{I}(\cdot)$ 是示性函数。类似地，对于 $\beta < 1$，我们可以写出以下线性方程组。

$$X_u \oplus X_v = \mathbf{I}(A(u,v) > D(u,v)), \quad \forall (u,v) \in E_C. \tag{3}$$

值得注意的是，这两个方程组都相对稀疏：包含 E_c 个方程，且每个方程只有两个变量。因此，我们可以使用高斯消元法在至多 $O(m^2|E_C|)$ 时间内求解，所需时间为多项式级。在第4节中，我们通过分析蠕虫过程证明以下定理。

定理 5. 如果(2) 或(3) 有解，则分别存在一个针对 $Z_{4V}(G;\ \beta,1)$ 的全多项式随机近似方案，其中 $\beta > 1$ 或 $\beta < 1$。

4 四顶点模型的蠕虫过程

本节分析 $\beta > 1$ 和 (2) 有解时四顶点模型的蠕虫过程。这也适用于分析 $\beta < 1$ 和 (3) 有解的情况。该过程为配分函数提供了一种全多项式随机近似方案。蠕虫过程由 Prikof'ev和Svistunov [42], 引入，是一种在偶子图与近偶子图之间转移的马尔可夫链。铁磁伊辛模型的蠕虫过程已被证明具有快速混合性质 [18]。

根据解改变回路的初始边后，对所有 $e = (u,\ v) \in E_C$，令 $\beta_e = \beta^{A(u,v)-D(u,v)}$。我们可以将四顶点模型的配分函数改写为

$$Z_{4V} = \sum_{\sigma:\mathcal{C}\to\{0,1\}} \prod_{(u,v)\in E_C} \beta_e^{\mathbf{I}(\sigma(u)=\sigma(v))}. \tag{4}$$

令 Ω_k 表示 G_C 的子图集合，其中恰有 k 个顶点的度数为奇数。蠕虫过程的状态空间为 $\Omega_{worm} \coloneqq \Omega_0 \cup \Omega_2$。(4) 与偶子图模型的配分函数之间存在一种著名的等价关系，可通过全息变换加以解释（例如，参见 [24]）。也就是说

$$Z_{4V} = 2^{|\mathcal{B}|} \prod_{e\in E_C} \frac{\beta_e + 1}{2} \sum_{S\in\Omega_0} \prod_{e\in S} \frac{\beta_e - 1}{\beta_e + 1}.$$

令 $x_e \coloneqq (\beta_e - 1)/(\beta_e + 1)$。对于任意 $S \subseteq E_C$，令 $w(S) \coloneqq \prod_{e\in S} x_e$ 和 $Z_k \coloneqq \sum_{S\in\Omega_k} w(S)$。从全息变换的角度来看，已知 $Z_k \leq \binom{m}{k} Z_0$ （再次参见 [24]）。蠕虫过程的子集 $S \subseteq E_C$的权重定义为 $w_{worm}(S) = \xi(S)\, w(S)$，其中

$$\xi(S) \coloneqq \begin{cases} m & \text{if } S \in \Omega_0 \\ 2 & \text{if } S \in \Omega_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

令 $Z_{worm} \coloneqq \sum_{S\in\Omega_{worm}} w_{worm}(S) = mZ_0 + 2Z_2$。蠕虫测度定义为 $\pi_{worm}(S) \coloneqq {}^{w_{worm}(S)}/_{Z_{worm}}$。为了应用定理 1，我们使用以下引理来界定蠕虫测度。

引理 6. 对于所有 $S \in \Omega_{worm}$，我们有

$$w_{worm}(S) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{x_{min}}{2}\right)^{|E_C|}$$

其中 $x_{\min} = \text{最小值}_{e \in E_C}\{x_e\}$。

证明。根据 Z_{worm} 和 $Z_k \leq \binom{m}{k} Z_0$ 的定义，可得

$$\begin{aligned} Z_{worm} &= mZ_0\left(1 + \frac{2}{m}\frac{Z_2}{Z_0}\right) \\ &\leq m^2 Z_0 \\ &\leq m^2|\Omega_0| \\ &= m^2 2^{|E_C|-m+1}. \end{aligned}$$

在最后一个等式中，我们用到了这样一个事实：任意具有 m 个顶点和 $|E_C|$ 条边的有限连通图都有 $2^{|E_C|-m+1}$ 个偶子图。

由于对任意 $S \in \Omega_{worm}$，$w_{worm}(S) \geq 2w(S) \geq 2x^{|E_C|}$ 最小值 均成立，因此我们有

$$\begin{aligned} \pi_{worm}(S) &\geq \frac{2x_{\min}^{|E_C|}}{m^2 2^{|E_C|-m+1}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_{\min}}{2}\right)^{|E_C|}\frac{2^{m+1}}{m^2} \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\frac{x_{\min}}{2}\right)^{|E_C|}. \end{aligned}$$

□

现在假设当前状态为 A，蠕虫过程的转移策略描述如下：

- 若 $A \in \Omega_0$：

  1. 均匀随机选择一个顶点 $v \in \mathcal{C}$，2. 均匀随机选择一个邻居 $v \sim u$，3. 提议 $A \mapsto A \oplus (u,\ v)$。

- 如果 $A \in \Omega_2$：

  1. 均匀随机选择一个奇顶点 $v \in \partial A$，2. 均匀随机选择一个邻居 $v \sim u$，3. 提议 $A \mapsto A \oplus (u,\ v)$。

这里 ∂A 表示 A 的奇顶点集合。容易验证，$A \oplus uv$ 始终属于 Ω_{worm}。因此，这些提议定义良好。为了使转移矩阵对称，我们选择适当的 Metropolis 接受率来修改转移概率。此外，为了确保转移矩阵的特征值严格为正，我们考虑该链的惰性版本，即每一步以概率 $1\ 2$ 保持当前状态，并以概率 $1\ 2$ 执行上述提议。得到的转移矩阵为

$$P(A, A \oplus uv) := \begin{cases} x_{(u,v)}^{\mathbf{I}((u,v)\notin A)}\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{d(u)} + \frac{1}{d(v)}\right) & \text{if } A \in \Omega_0 \\ x_{(u,v)}^{\mathbf{I}((u,v)\notin A)}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{d(u)} + \frac{1}{d(v)}\right) & \text{if } A \oplus (u,v) \in \Omega_0 \\ \min\left(1, \frac{d(u)}{d(v)} x_{(u,v)}^{\mathbf{I}((u,v)\notin A) - \mathbf{I}((u,v)\in A)}\right)\frac{1}{4d(u)} & \text{if } A, A \oplus (u,v) \in \Omega_2, u \in \partial A \end{cases}$$

且 P 的其他非对角项均为 0，对角项等于同一行中其他项之和的 1 减去该和。上述转移矩阵对应的蠕虫过程的拥塞由以下引理界定，这是一种标准的典范路径论证。

引理 7. 存在一组路径 $\Gamma = \{\gamma_{x,y} : (x, y) \in \Omega_{worm} \times \Omega_0\}$，使得

$$\varrho(\Omega_0; \Gamma) \le m^5 |E_C|.$$

证明。设 $I \in \Omega_{worm}, F \in \Omega_0$ 为两个构型，分别表示初始状态和最终状态。则$I \oplus F \in \Omega_{worm}$ 且 $\partial(I \oplus F) = \partial I$。首先，假设 $I \in \Omega_2$ 且 $\partial I = \{u, v\}$。固定一条连接 u, v 的最短路径 B_0，则 $I \oplus F \setminus B_0 \in \Omega_0$。因此，我们可以将 $I \oplus F \setminus B_0$ 分解为一组边不相交的环。将所得的环排序，并记为 $B_1, B_2, \cdots, B_r$。此外，为每个 $B_i, i \ge 0$指定一个可区分的初始顶点，并为每个 $B_i, i \ge 1$指定一个方向。令 $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ 为按顺序取自 $\{B_0, B_1, \cdots, B_r\}$ 的边。现在我们有 $I \oplus F = \cup_{i=0}^{r} B_i = \{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$。如果 $I \in \Omega_0,$，就令$B_0 = \varnothing$。

从 I 到 F 的典范路径 γ_{IF} 定义为 $Z_0 = I$，$Z_i = Z_{i-1} \oplus e_i$和 $Z_k = F$。令$\Gamma_{worm} = \{\gamma_{IF} : (I, F) \in \Omega_{worm} \times \Omega_0\}$ 为所有此类典范路径构成的集合。显然，$\Gamma_{worm} \le |E_C|$，因为 $|E_C|$ 中的每条边至多使用一次。

对于每个转移 (A, A')，我们使用一种组合编码来表示所有经过 (A, A') 的路径。对于 $I \in \Omega_{worm}, F \in \Omega_0,$，令 $\eta(I, F) = I \oplus F \oplus (A \cup A')$。我们声称 $\eta : \Omega_{worm} \times \Omega_0 \to \Omega_{worm} \cup \Omega_4$ 是一个单射。给定转移 (A, A') 和 $U = \eta(I, F)$，所有不属于 $(A \cup A') \oplus U$ 的边在 I 和 F 中的状态相同，因为 $(A \cup A') \oplus U = I \oplus F$。令 $e = A \oplus A'$。根据典范路径的构造，$I \oplus F$ 中的所有边都有一个排列。对于 e 之前的每条边，它在 $A \cup A'$ 中的状态已变为 F 中的状态，而在 U 中仍与 I 中的状态相同。对于 e 之后的每条边，它在 $A \cup A'$ 中的状态已变为 I 中的状态，而在 U 中仍与 F 中的状态相同。因此，我们可以从 (A, A') 和 U 唯一恢复 (I, F)。此外，若 $I \in \Omega_0,$，则 $\eta(I, F) \in \Omega_{worm}$；若 $I \in \Omega_2,$，则 $\eta(I, F) \in \Omega_{worm} \cup \Omega_4$。

由于 $I \cap F \subseteq A \cup A' \subseteq I \cup F$和 $U = I \oplus F \oplus (A \cup A')$，可得 $U \cap (A \cup A') = I \cap F$和$U \cup (A \cup A') = I \cup F$。我们有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi_{worm}(\Omega_0)} \frac{\pi_{worm}(I)\pi_{worm}(F)}{\pi_{worm}(A)P(A, A')} &= \frac{1}{mZ_0} \frac{m\xi(I)w(I)w(F)}{\xi(A)w(A)P(A, A')} \\
&\le \frac{2m}{Z_0} \frac{\xi(I)w(I)w(F)}{w(A \cup A')} \\
&= \frac{2m}{Z_0} \xi(I) w(\eta(I, F)).
\end{aligned}$$

该不等式是转移概率定义以及对每个 $u \in \mathcal{C}$均有 $d(u) \le m$ 的直接推论。现在令 (A, A') 为最大拥塞转移。我们有

$$\begin{aligned}
\varrho(\Omega_0; \Gamma_{worm}) &\le \frac{2m|E_C|}{Z_0} \sum_{(I,F) \in \Omega_{worm} \times \Omega_0, \gamma_{IF} \ni (A, A')} \xi(I) w(\eta(I, F)) \\
&\le \frac{2m|E_C|}{Z_0} [m(Z_0 + Z_2) + 2(Z_0 + Z_2 + Z_4)] \\
&\le 2m|E_C| \left[(m + 2) + (m + 2)\binom{m}{2} + 2\binom{m}{4} \right] \\
&\le m^5 |E_C|.
\end{aligned}$$

第二个不等式是因为 η 是一个单射。 □

结合定理 1、引理 6 和引理 7，我们立即得到以下定理。此外，正如我们在第 2.3 节中提到的，该定理也给出了定理 5 的一个证明。

定理 8。 对于四顶点模型 $Z_{4v}(G; \beta, 1)$，当 $\beta > 1$ 且 (2) 有解，或 $\beta < 1$ 且 (3)有解时，蠕虫过程的混合时间为 $\tau_\varepsilon(P) \le 4n^5 |E_C|^2 (\frac{\ln 2\varepsilon^{-1}}{|E_C|} + \ln {}^2_{x_{\min}})$。

5 关于平面图

根据 [10],，四顶点模型在参数设置（a，0，c）下的约束函数是匹配门签名，因此可以在多项式

时间内对平面图精确计算其配分函数。然而，为了从状态空间中（至少近似地）进行抽样，传统的通过计数进行抽样方法会遇到障碍，因为一般而言，六顶点模型并不已知是自归约的 [31]。

本节重点讨论四顶点模型的抽样复杂度。我们为平面四顶点模型中每个顶点周围的局部边确定了一种规范标记方式，使得 (2) 总能成立，因此第4节研究的蠕虫过程可为 $\beta > 1$ 提供一种抽样算法。自然图类满足存在可解线性系统这一代数判据的可能性不大。我们发现，包含统计物理中基本情形（正方晶格）的平面图类满足这一判据，这进一步凸显了其重要性。

5.1 规范标记

考虑平面图上的六顶点模型。众所周知，任意 4-正则平面图的对偶图 G 都是二部的 [49]。因此， G 的面可以进行二着色，即用两种颜色（黑色和白色）为各面着色，使任意两个相邻的面颜色不同。不失一般性，我们假设 G 的外面被染成白色。示例见图 3。

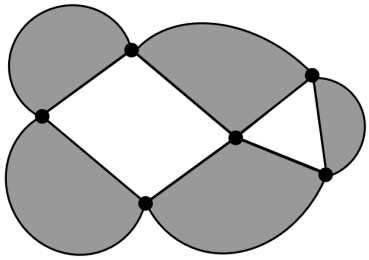

图 3：面的二着色示例，其中外面为白色。

根据上述事实，对于平面图上的六顶点模型，局部边标记存在一种规范方式，可将局部取向分为三类：

- 夹住每个黑面的边均为一入一出，且沿两个黑面的箭头流方向相反。这些顶点（图 4 中的 1、2）的权重为 a。
- 夹住每个黑面的边均为两入或两出。这些顶点（图 4 中的 3、4）的权重为 b。
- 夹住每个黑面的边均为一入一出，且沿两个黑面的箭头流方向相同。这些顶点（图 4 中的 5、6）的权重为 c。

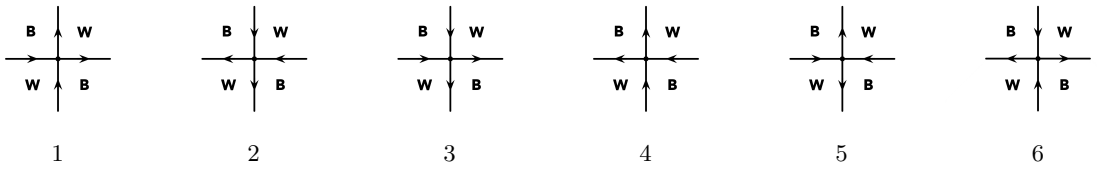

图 4：平面六顶点模型的有效构型

5.2 抽样算法

给定一个平面4-正则图 G，可以按如下方式构造一个图 H：

- H 的顶点与 G的黑面一一对应； G 的每个黑面 F 恰好包含 H的一个顶点 v（F）；

H 的边与 G的顶点一一对应；给定 G的一个顶点 x ，设 G 中与 x相邻的两个黑面（可能相同）为 F_1 和 F_2 ，则 H 中与 x 对应的边 e（x）包含于 $F_1 \cap F_2 \cap \{x\}$，包含 x，并连接 v（F_1）和 v（F_2）。

我们称图 H 为 G 的黑面图，称 G 为 H的中图。我们用 $\mathcal{B}$ 表示 G 的所有黑面的集合，并记作 $H = (\mathcal{B}, E(H))$。令 $n = |V|$ 和 $k = |\mathcal{B}|$，则有 $|E| = 2n$ 和$|E(H)| = n$。

在平面四顶点模型的有效配置中，黑面上所有边的方向构成一个有向回路，可以是顺时针方向，也可以是逆时针方向。因此，我们无需为每个黑面上的所有边赋值 0 或 1，而可以直接为黑面赋值 0 或 1。如果一个顶点的两个相邻黑面方向相同，该顶点的权重为 β；否则，其权重为 1。

因此， G 上的四顶点模型可以化简为 H上的一个自旋系统。其构型 自旋系统包含 2^k 种可能的赋值 σ ： 为顶点赋予 $\mathcal{B} \to \{0,1\}$ 种状态。 E（H）中的边是 标记为约束函数 f'，其约束矩阵为 $M(f') = \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$.

构型 σ 的权重定义为

$$w(\sigma) = \prod_{(u,v)\in E(H)} f'_{\sigma(u),\sigma(v)} = \prod_{(u,v)\in E(H)} \beta^{\mathbf{I}(\sigma(u)=\sigma(v))}.$$

配分函数定义为 $Z(H) = \sum_\sigma w(\sigma)$。注意， H中可能存在多重边或自环。自环对配分函数的影响可以忽略，因为它们的约束函数总是取值 β。我们使用局部约束函数替代多重边。具体而言，如果 $u, v \in \mathcal{B}$之间存在多条边，我们将它们替换为一条边 e，并在其上标记一个局部约束函数 $M(f_e) = \begin{bmatrix} \beta_e & 1 \\ 1 & \beta_e \end{bmatrix}$，其中 $\beta_e = \beta^{\#\text{multiple 之间的边 } u,v}$ 在其上。用 E^*表示新的边集。构型 σ 的权重可改写为

$$w(\sigma) = \prod_{(u,v)\in E^*} \beta_{(u,v)}^{\mathbf{I}(\sigma(u)=\sigma(v))}.$$

配分函数可改写为

$$Z_{4V} = \sum_{\sigma:\mathcal{B}\to\{0,1\}} \prod_{(u,v)\in E^*} \beta_{(u,v)}^{\mathbf{I}(\sigma(u)=\sigma(v))}. \tag{5}$$

因此，我们回到第4节中讨论过的问题。如果 $\beta > 1$，则可将蠕虫过程直接应用于这种情形，从而为平面四顶点模型提供一个快速近似均匀采样器。 G 的平面结构带来了若干优化。根据欧拉公式， G 的面数为 $n + 2$，且图中至少有两个白色面。因此，我们有 $k \le n$。此外， H 中的边数有限，因为 $|E^*| \le |E(H)| = n$。由此可得以下定理:

定理 9. 对于满足 $\beta > 1$ 规范标记的平面四顶点模型 $Z_{4v}(G;\beta,1)$，蠕虫过程的混合时间为 $\tau_\varepsilon(P) \le 4n^7(\ln\frac{2\varepsilon^{-1}}{n} + \ln 2^{\beta_{\min}+1}_{(\beta_{\min}-1)})$，其中 $\beta_{\min} = \min_{e\in E^*}\beta_e$。

参考文献

[1] Miriam Backens. 复值 Holantˆc 的完整二分分类。载于 Ioannis Chatzigiannakis、Christos Kaklamanis、D´aniel Marx 和 Donald Sannella 编，第 *45* 届自动机、语言与编程国际研讨会（*ICALP 2018*），*2018* 年 *7* 月 *9—13* 日，布拉格，捷克共和国，第 107 卷，*LIPIcs*，第 12:1–12:14 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2018年。

[2] R. J. Baxter。《统计力学中的精确可解模型》。学术出版社，美国加利福尼亚州圣迭戈，1982 年。

[3] Rodney J Baxter. 八顶点格点模型的配分函数。《物理学年鉴》, 70(1):193–228, 1972年。

[4] Nikolay Bogoliubov 和 Cyril Malyshev. 非均匀外场中的四顶点模型配分函数与迹统计。《物理学杂志*A*：数学与理论》, 52(49):495002, 2019年。[5]NM Bogoliubov. 四顶点模型与随机铺砌。《理论与数学物理》, 155(1):523–535, 2008年。[6] Andrei A. Bulatov. 计数约束满足问题的复杂性。《*ACM*杂志》, 60(5):34:1– 34:41, 2013 年。[7] Andrei A. Bulatov, Martin E. Dyer, Leslie Ann Goldberg, Markus Jalsenius, Mark Jerrum 和 David Richerby. 带权与无权#CSP的复杂性。《计算机与系统科学杂志》, 78(2):681–688, 2012年。[8] Jin-Yi Cai 和 Xi Chen. 复权重计数CSP的复杂性。《*ACM*杂志》, 64(3):19:1–19:39, 2017年。[9] Jin-Yi Cai, Xi Chen 和 Pinyan Lu. 复数值图同态：一个二分定理。*SIAM* 计算杂志, 42(3):924–1029, 2013年。[10] Jin-Yi Cai, Zhiguo Fu 和 Shuai Shao. 新的平面多项式时间可计算六顶点模型及完整的复杂性分类。载于 D´aniel Marx（编）, *2021*年*ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集，*SODA 2021*，虚拟会议，*2021*年*1*月*10*日至*13*日，第1535–1547页。SIAM，2021年。[11] Jin-Yi Cai, Zhiguo Fu 和 Mingji Xia. 六顶点模型的复杂性分类。《信息与计算》, 259(Part):130–141, 2018年。[12] Jin-Yi Cai, Heng Guo 和 Tyson Williams. 捕获消失签名，从而得出一个完整的二分定理。*SIAM* 计算杂志, 45(5):1671–1728, 2016年。[13] Jin-Yi Cai 和 Tianyu Liu. 计数完美匹配与八顶点模型。载于 Artur Czumaj, Anuj Dawar 和 Emanuela Merelli（编）, 第*47*届自动机、语言与程序设计国际学术讨论会（*ICALP 2020*）, 第168卷，莱布尼茨信息学国际论文集（*LIPIcs*）, 第23:1–23:18页，德国达格斯图尔，2020年。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik。[14] Jin-Yi Cai 和 Tianyu Liu. 通过马尔可夫链蒙特卡罗获得全多项式随机近似方案，尽管混合缓慢（而且几乎不费力）。*CoRR*, abs/2010.05425, 2020年。[15] Jin-Yi Cai 和 Tianyu Liu. 低温下正方晶格六顶点和八顶点模型的FPTAS。载于 D´aniel Marx（编）, *2021*年*ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集，*SODA 2021*，虚拟会议，*2021*年*1*月*10*日至*13*日，第1520–1534页。SIAM，2021年。[16] Jin-Yi Cai, Tianyu Liu 和 Pinyan Lu. 六顶点模型的可近似性。载于 Timothy M. Chan（编）, 第三十届*ACM-SIAM*离散算法年会论文集，*SODA 2019*，美国加利福尼亚州圣迭戈，*2019*年*1*月*6*日至*9*日，第2248–2261页。SIAM，2019年。[17] Jin-Yi Cai, Tianyu Liu, Pinyan Lu 和 Jing Yu. 八顶点模型的可近似性。载于 Shubhangi Saraf（编）, 第*35*届计算复杂性会议，*CCC 2020*，*2020*年*7*月*28*日至*31*日，萨尔布吕¨肯，德国（虚拟会议）, 第169卷，*LIPIcs*, 第4:1–4:18页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2020年。[18] Andrea Collevecchio, Timothy M Garoni, Timothy Hyndman 和 Daniel Tokarev. 伊辛模型的蠕虫过程快速混合。《统计物理学杂志》, 164(5):1082–1102, 2016年。[19] Martin E. Dyer 和 David Richerby. 计数约束满足问题的有效二分。*SIAM* 计算杂志, 42(3):1245–1274, 2013年。

[20] Matthew Fahrbach 和 Dana Randall。序相中六顶点模型 Glauber 动力学的慢混合。载于 Dimitris Achlioptas 和 L´aszl´o A. V´egh 编，近似、随机化与组合优化：算法与技术，APPROX/RANDOM 2019，2019年9月20—22日，美国马萨诸塞州剑桥麻省理工学院，LIPIcs 第145卷，第37:1–37:20页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2019年。[21] Leslie Ann Goldberg、Martin Grohe、Mark Jerrum 和 Marc Thurley。带混合符号的配分函数的复杂性二分。SIAM 计算杂志，39(7):3336–3402，2010年。[22] Leslie Ann Goldberg 和 Mark Jerrum。铁磁 Potts 模型配分函数的近似。《ACM杂志》(JACM)，59(5):1–31，2012年。[23] Leslie Ann Goldberg、Russell A. Martin 和 Mike Paterson。在 $\mathbb{Z}^2$ 中对3-着色进行随机抽样。Random Struct. Algorithms，24(3):279–302，2004年。[24] Heng Guo 和 Mark Jerrum。伊辛模型的随机簇动力学快速混合。载于 Philip N. Klein 编，《第二十八届 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集》，SODA 2017，西班牙巴塞罗那 Hotel Porta Fira，1月16—19日，第1818–1827页。SIAM，2017年。[25] Heng Guo 和 Tyson Williams。带复权重的平面布尔 #CSP 的复杂性。载于 Fedor V. Fomin、Rusins Freivalds、Marta Z. Kwiatkowska 和 David Peleg 编，《自动机、语言与编程——第四十届国际学术讨论会论文集》第一部分，计算机科学讲义第7965卷，第516–527页。施普林格，2013年。[26] Lingxiao Huang、Pinyan Lu 和 Chihao Zhang。MCMC 的典范路径：从艺术到科学。载于 Robert Krauthgamer 编，《第二十七届 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集》，SODA 2016，美国弗吉尼亚州阿灵顿，2016年1月10—12日，第514–527页。SIAM，2016年。[27] Sangxia Huang 和 Pinyan Lu。实权 Holant 问题的二分。Comput. Complex.，25(1):255–304，2016年。[28] Mark Jerrum 和 Alistair Sinclair。永久式的近似。SIAM 计算杂志，18(6):1149–1178，1989年。[29] Mark Jerrum 和 Alistair Sinclair。伊辛模型的多项式时间近似算法。SIAM 计算杂志，22(5):1087–1116，1993年。[30] Mark Jerrum、Alistair Sinclair 和 Eric Vigoda。用于近似计算非负元素矩阵永久式的多项式时间算法。《ACM杂志》，51(4):671–697，2004年。[31] Mark R. Jerrum、Leslie G. Valiant 和 Vijay V. Vazirani。从均匀分布中随机生成组合结构。理论信息学，43(补编C):169–188，1986年。[32] Pieter Kasteleyn。图论与晶体物理学。《图论与理论物理学》，第43–110页，1967年。[33] Pieter W Kasteleyn。格点上的二聚体统计：I. 方格点上的二聚体排列数。Physica，27(12):1209–1225，1961年。[34] Pieter W Kasteleyn。二聚体统计与相变。《数学物理杂志》，4(2):287–293，1963年。[35] Greg Kuperberg。交错符号矩阵猜想的另一种证明。《国际数学研究通知》，1996(3):139–150，1996年。[36] Michel Las Vergnas。关于图的 Tutte 多项式在 (3, 3) 处的取值。《组合理论杂志》B辑，45(3):367–372，1988年。

[37] Jiabao Lin 和 Hanpin Wang。带非负权重的布尔 Holant 问题的复杂性。*SIAM* 计算杂志，47(3):798–828，2018年。[38] Michael Luby、Dana Randall 和 Alistair Sinclair。平面格结构的马尔可夫链算法。*SIAM* 计算杂志，31(1):167–192，2001年。[39] Colin McQuillan。通过绕行近似 Holant 问题。*CoRR*，abs/1301.2880，2013年。[40] Milena Mihail 和 Peter Winkler。关于图的欧拉定向数量。*Algorithmica*，16(4/5):402–414，1996年。[41] Linus Pauling。冰及其他具有一定原子排列随机性的晶体的结构与熵。美国化学会志，57(12):2680–2684，1935年。[42] Nikolay Prokof'ev 和 Boris Svistunov。经典统计模型的蠕虫算法。*Physical reviewletters*，87(16):160601，2001年。[43] Dana Randall 和 Prasad Tetali。通过比较马尔可夫链分析 Glauber 动力学。载于 Claudio L. Lucchesi 和 Arnaldo V. Moura 编，*LATIN '98*：理论信息学，第三届拉丁美洲研讨会，巴西坎皮纳斯，*1998*年*4*月*20—24*日，论文集，计算机科学讲义第1380卷，第292–304页。施普林格，1998年。[44] Jason Schweinsberg。关于分支图上马尔可夫链弛豫时间的 $O(n^2)$ 界。*RandomStruct. Algorithms*，20(1):59–70，2002年。[45] Alistair Sinclair。马尔可夫链混合率与多商品流的改进界。组合学、概率与计算，1(4):351–370，1992年。[46] Harold NV Temperley 和 Michael E Fisher。统计力学中的二聚体问题——一个精确结果。*Philosophical Magazine*，6(68):1061–1063，1961年。[47] William Thomas Tutte。对色多项式理论的贡献。*Canadian Journal of Mathematics*，6:80–91，1954年。[48] Leslie G. Valiant。全息算法（扩展摘要）。载于第*45*届计算机科学基础研讨会（*FOCS 2004*），*2004*年*10*月*17—19*日，意大利罗马，论文集，第306–315页。IEEE计算机学会，2004年。[49] Dominic JA Welsh。欧拉与二部拟阵。组合理论杂志，6(4):375–377，1969年。