arXiv:2302.11388v1 [math.RA] 22 Feb 2023

GRADED PRIME IDEALS OVER GRADED LIE ALGEBRAS

ABDALLAH SHIHADEH

哈希姆大学科学学院数学系，扎尔卡 13133，邮政信箱 330127，约旦

Abstract. 本文将分次素理想的定义从交换分次环推广到分次李代数上的理想。我们证明了任意李代数中的分次素李理想的一些性质，这些性质类似于交换环或非交换环上的分次素理想的相关性质。此外，我们还将引入分次半素李理想和分次全素李理想的概念。

1. Introduction

设 G 是一个阿贝尔群， L 是域 $\mathbb{F}$ 上的李代数。一个 G-分次 L 是 L 的子空间的直和分解

$$L = \bigoplus_{g \in G} L_g \tag{1}$$

使得对于所有 g、 $h \in G$，均有 $[L_g, L_h] \subseteq L_{g+h}$。在这种情况下，称 L 为 G-分次的，或称 L 具有 G-分次。

请注意， L_g允许零子空间。分次的支撑记作 Supp L ，是由 $g \in G$ 组成的子集 $S \subseteq G$，其中 $L_g \neq \{0\}$ 。分次的齐次分量是子空间 L_g ，而 L_g 中非零的元素称为次数为 g 的齐次元素。此外， L 中这类齐次元素的集合表示为 $h(L) = \bigcup_{g \in G} L_g$。

设 G、 G' 表示两个阿贝尔群。假设 L 和 M 分别是带有 G-分次和 G'-分次的李代数。

电子邮箱：abdallaha ka@hu.edu.jo。关键词：分次素李理想、半素李理想、全素李理想、分次李代数。2010年数学主题分类：主要分类 17B70，次要分类 13A15。

$$L = \bigoplus_{g\in G} L_g \quad \text{and} \quad M = \bigoplus_{h\in G'} M_h$$

设 $\phi : L \longrightarrow M$ 是一个线性映射。若对于所有 $g \in G$，都有 $h \in G'$，使得 $\phi(L_g) \subseteq M_h$，则称 ϕ 是分次的。

若理想 I of L 满足以下条件，则称其为 G分次理想

$$I = \bigoplus_{g\in G}(L_g \cap I). \tag{2}$$

上述定义意味着，对于每个 $z \in I$ with$z = z_{g_1} + z_{g_1} + \cdots + z_{g_n}$，存在一些齐次元素 $z_{g_i} \in L_{g_i}$，使得 $z_{g_i} \in I$，即 I 由齐次元素生成。

关于分次李代数、分次李理想和模的研究已十分广泛（参见例如 $[5, 6, 7]$）。

设 R 是任意含幺交换环，且 P 是 R 的一个理想。若对任意 a, $b \in R$，只要 $a.b \in P$，就有 $a \in P$ 或 $b \in P$，则称理想 P 为素理想。

李代数上的素理想在 $[9]$ 中被引入。若对 L 的任意两个理想 I, J，只要 $[I, J] \subseteq P$，就有 $I \subseteq P$ 或 $J \subseteq P$，则称理想 P 为 L 的素理想。本文将介绍 L 上分次素理想的定义。

以下定理由 N.Kawamoto 提出 $[9,$ 定理 $1]$

定理 1.1。 $[9,$ 定理 $1]$ 以下各条件与一个理想P 的 L等价:

（1）P 是素理想；（2）对于 $a \in L$ 和 I， L的一个理想。如果 $[a, I] \subseteq P$，则 $a \in P$ 或$I \subseteq L$。（3）对于 a, $b \in L$。如果 $[a, \langle b\rangle] \subseteq L$，则 $a \in P$或 $b \in P$。

以下理想及其描述对于我们的工作非常重要。

定义 1.2。由 $x \in L$ 生成的理想是L中包含元素 x的最小理想，记作 $\langle x\rangle$。

在 $[9],$ 中，作者将理想 $\langle x\rangle$ 描述如下。设

$$\begin{aligned} V_0 &= \mathbb{F}a \\ V_i &= [V_{i-1}, L], \text{ for all } i \geq 1. \end{aligned} \tag{3}$$

∞那么 $\langle x\rangle = \sum V_i$。

$i=0$

根据前面的描述，显然，如果 x 是齐次的，那么理想 $\langle x\rangle$ 是分次的。

现在设 I、 J 是 L 中的一个理想。定义理想

$$(I:J)=\{y\in L\mid [y,J]\subseteq I\} \tag{4}$$
$$=\{y\in L\mid \mathrm{ad}_y(J)\subseteq I\}$$

对于 $x\in L$，理想

$$(I:x)=\{y\in L\mid [y,x]\in I\} \tag{5}$$

本文将给出分次素理想、分次全素理想和分次半素理想的定义，并将关于这些理想的一些结论从交换环和非交换环的情形推广到李代数的情形。在不止一处，我们将借鉴 [?, 9, 2, 1, 10] 中的一些结果，并将其推广到我们的情形。

2. Graded prime Lie ideals

从现在起，设 L 是任意域$\mathbb{F}$上的 G-分次李代数。本节将定义分次素李理想和分次半素李理想，并给出关于这些概念的一些结论。

定义 2.1. 设 P 是 L的一个理想。若对所有分次理想 I、 $J\subseteq L$，只要 $[I,J]\subseteq P$，就有 $I\subseteq P$或 $J\subseteq P$，则称 P 是 L的分次素理想。

请注意，若 P 是分次素理想，且 x、 $y\in h(L)$满足 $[x,y]\in P$，则可推出 $[\langle x\rangle,\langle y\rangle]\subseteq P$。因此， $\langle x\rangle\subseteq P$或 $\langle y\rangle\subseteq P$。也就是说，$x\in P$ 或 $y\in P$。注意，反过来并不成立。

定理 2.2. 设 P 是 L 的分次理想。则下列陈述等价:

(1) P 是分次素理想。(2) 若 $x\in h(L)$ 且 J 是一个分次理想，满足 $[x,J]\subseteq P$，则有 $x\in P$ 或 $J\subseteq P$。(3) 若 x， $y\in h(L)$ 且满足 $[x,\langle y\rangle]\subseteq P$，则有 $x\in P$ 或 $y\in P$。

证明. (1) $\Rightarrow$ (2)

假设 $[x,J]\subseteq P$，其中 $x\in h(L)$，且 J 是 L 的一个分次理想。$_\infty$ 确实如此。为此，假设 $\langle x\rangle=\sum V_i$，其中 V_i 如方程 (3) 中的 $_{i=0}$。现在我们使用归纳法证明 $[V_i,J]\subseteq P$。当 $i=0$ 时，显然有 $[V_0,J]=[\mathbb{F}x,J]\subseteq P$。现在假设对 $i-1$ 结论成立。那么

$$[V_i,J]=[[V_{i-1},L]J]\subseteq[[L,J],V_{i-1}]+[[J,V_{i-1}],L]\subseteq[J,V_{i-1}]+[P,L]\subseteq P.$$

因此，我们有 $[\langle x\rangle,J]\subseteq P$。鉴于 P表示一个分次素理想，我们有 $\langle x\rangle\subseteq P$或 $J\subseteq P$，因此 $x\in P$或 $J\subseteq P$。

(2) ⇒(3) 显然

(3) ⇒(2)

设 $x \in h(L)$ 和 J 表示一个满足 $[x, J] \subseteq P$ 的分次理想。若 $x \in P$，则结论成立。现在若 $x \notin P$，那么对于任意齐次元素 $y \in h(J) \subseteq h(L)$，有 $[x, y] \in P$，这意味着 $[x, \langle y \rangle] \subseteq P$。利用第 (3) 部分，且由于 $x \notin P$，可得 $y \in P$。这意味着 $J \subseteq P$。

(2) ⇒ (1)

设 I、J 是 L 中满足 $[I, J] \subseteq P$ 的两个分次理想。假设 $I \nsubseteq P$，因此存在一个齐次元素 $x \in h(I) - P \subseteq h(L) - P$。由于 $[I, J] \subseteq P$，可得 $[x, J] \subseteq P$。利用第 (2) 部分，我们得到 $x \in P$ 或 $J \subseteq P$。但是 $x \notin P$，于是 $J \subseteq P$。

□

引理 2.3. 假设 P 表示一个分次理想。那么对所有 $x \in L(h) - P$，理想 $(P : x)$ 都是分次的。

证明. 设 $x \in L(h) - P$。由于 x 在 L中是齐次的，因此$x \in L_h$ 对于某个 $h \in G$成立。为证明 $(P : x)$ 是分次的，我们需要证明 $(P : x) = \bigoplus_{g \in G}((P : x) \cap L_g)$。

首先我们将证明，对于任意 $g \in G$，有 $(P : x) \cap L_g = (P_{gh} : x)$。现在令 $g \in G$，并令 $y_g \in (P : x) \cap L_g$。也就是说，y_g 是次数为 g的齐次元素，并且 $[y_g, x] \in P$。由于 x在 L中是次数为 h的齐次元素，因此$[y_g, x] \in L_{gh}$。但 P是分次的，也就是说 $[y_g, x] \in P_{gh}$，所以 $y \in (P_{gh} : x)$，这意味着 $(P : x) \cap L_g \subseteq (P_{gh} : x)$。

现在令 $y \in (P_{gh} : x) \subseteq (P : x)$，则 $[y, x] \in P_{gh} \subseteq L_{gh}$。由于 x 在 L 中是次数为 h 的齐次元素，因此 y 必须是 L 中次数为 g 的齐次元素。这意味着 $y \in (P : x) \cap L_g$。

只需证明 $(P : x) = \bigoplus_{g \in G}(P_{gh} : x)$。显然，$(P : x) \supseteq \bigoplus_{g \in G}(P_{gh} : x)$。

令 $y \in (P : x)$。由于 L 是分次的，因此对某些 $g_1, g_2, \ldots, g_k \in G$，有 $y = y_{g_1} + y_{g_2} + \cdots + y_{g_k}$。现在 $[y, x] = [y_{g_1}, x] + [y_{g_2}, x] + \cdots + [y_{g_k} + x] \in P$，且 P 是分次的，因此对所有 $i = 1, \ldots k$，我们有对某个 $\bar{g} \in G$，$[y_{g_i}, x] \in P_{\bar{g}}$。也就是说，$[y_{g_i}, x] \in P_g$，其中 $g = \bar{g}hh^{-1}$。这意味着 $[y, x] \in \bigoplus_{g \in G}(P_{gh} : x)$，即 $(P : x) \subseteq \bigoplus_{g \in G}(P_{gh} : x)$。由此完成证明。

□

定理 2.4. 假设 P 被视为 L 的分次理想。那么 P 是分次素的，当且仅当对所有 $x \in h$，$(P : x) = P\ L - P$。

证明. (⇒)

显然，$P \subseteq (P : x)$。现在令 $y \in (P : x)$。情形 1：令$y \in h(L)$。现在，由于 $y \in (P : x)$，我们有 $[x, y] \in P$，这表明

$[\langle x\rangle, \langle y\rangle] \subseteq P$。已知 P是分次素，且 $x \notin P$，我们得到 $\langle y\rangle \subseteq P$，因此 $y \in P$。

情形 2：设 $y \notin h(L)$，即 $y = y_{g_1} + y_{g_2} + \cdots + y_{g_k}$，其中 $y_{g_i} \in L_{g_i}$、$i = 1$、2、$\ldots k$ 是齐次元素。

现在 $[x, y] = [x, y_{g_1}] + [x, y_{g_2}] + \cdots + [x, y_{g_n}] \in P$。由于 x 是 L 中的齐次元素，因此 $[x, y]$ 的线性组合中的每个分量都属于不同的齐次分量。由于 P 是分次理想，我们得到 $[x, y_{g_i}] \in P$，其中 x 和 y_{g_i} 都属于 $h(L)$，对所有的 $i = 1$、$\ldots k$ 均成立。利用情形 1，我们还得到 $y \in P$。因此 $(P\colon x) \subseteq P$。($\Leftarrow$)

设 I、J 是 L 中的分次理想，且 $[I, J] \subseteq P$。假设 $I \nsubseteq P$。那么存在齐次元素 $x \in h(I) \subseteq h(L)$，满足 $x \notin P$（否则，由于 P 是分次的，我们可得 $I \subseteq P$，这与假设不符）。由于 $[I, J] \subseteq P$，我们得到 $[x, J] \subseteq P$，这意味着 $J \subseteq (P\colon x) = P$。□

定理 2.5. 设 $\varphi\colon L \longrightarrow L'$ 是从 G-分次李代数 L 到 G-分次代数 L' 的分次李代数满同态。假设 P表示 L 的分次素理想，使得 $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq P$。则 $\varphi(P)$ 是 L'的分次素理想。

证明。设 I'， J'被视为 L'的一个分次理想，使得 $[I', J'] \subseteq \varphi(P)$。由于 φ 是满射，因此存在一个分次理想 $I = \varphi^{-1}(I')$，且 $J = \varphi^{-1}(J')$。

注意，$\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq I$ 且 $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq J$，又由于 $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq P$，我们得到

$[I, J] \subseteq \varphi^{-1}(\varphi([I, J])) \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(P)) = P$。因此 $I \subseteq P$或 $J \subseteq P$，从而推出 $I' \subseteq \varphi(P)$ 或 $J' \subseteq \varphi(P)$。

□

定理 (2.5) 的一个直接推论如下。

推论 2.6. 假设 $\varphi\colon L \longrightarrow L'$ to 是一个分次李代数满同态。设 P' 表示 L' 的一个分次理想。若 $\varphi^{-1}(P')$ 是 L 的分次素李理想，则 P' 是 L' 的分次素李理想。

定理 2.7. 设 P 是一个分次素理想。则 P_e 是 L_e 的分次素理想。

证明. 设 I_e、 J_e 是 L_e 中的分次理想，且满足 $[I_e, J_e] \subseteq P_e$。因此 $[I_e, J_e] \subseteq P$，这意味着 $I_e \subseteq P$ 或 $J_e \subseteq P$。由于 $P_e = P \cap L_e$，于是 $I_e \subseteq P_e$ 或 $J_e \subseteq P_e$ □

定义 2.8. 若对任意理想 H，只要 $H' = [H, H] \subseteq Q$，就有 $H \subseteq Q$，则称理想 Q 为半素理想。

定义 2.9. 若对任意分次理想 H ，只要 $H' = [H, H] \subseteq Q$ ，就有 $H \subseteq Q$，则称分次理想 Q 为分次半素理想。

显然，任何（分次）素理想都是（分次）半素理想。

定义 2.10. 若对于 L 的（分次）理想 H、 K，有 $N = H$ 或 $N = K$，则称 L 的（分次）理想 N 为（分次）不可约。

引理 2.11. 任何分次素李理想都是分次不可约理想。

证明. 假设 P 是 L 的分次素理想，且 I、J 是 L 中满足 $P = I \cap J$ 的分次理想。则 $[I, J] \subseteq I \cap J = P$。由于 P 是分次素理想，因此 $I \subseteq P$ 或 $J \subseteq P$。□

在下一个事实中，我们沿用 $[9,$ 命题 $4]$。

命题 2.1. L 的理想 P 是分次素理想，当且仅当 P 是分次不可约且分次半素理想。

证明。 ⇒

由引理2.11可显然得出。

⇐

设 I、 J是 L中的分次理想，且满足 $[I, J] \subseteq P$。定义理想$H = (I + P) \cap (J + P)$。显然， $P \subseteq H$。由于 $[I, J] \subseteq P$，我们有 $H' \subseteq [I + P, J + P] \subseteq P$。由于 P是半素的，因此$H \subseteq P$。于是， $H = (I + P) \cap (J + P) = P$。因此， $P = (I + P)$或 $P = (J + P)$，也就是说， $I \subseteq P$或 $J \subseteq P$。□

定理2.12。设 Q 被视为一个分次理想。那么， Q表示分次半素理想，当且仅当对于任意 $x \in h(L)$，若$\langle x\rangle' \subseteq Q$ ，则有 $x \in Q$

证明。 ⇒清楚

⇐ 设 H 被视为 L 中的分次理想，且满足 $H' \subseteq Q$。假设 $H \nsubseteq Q$，则存在一个齐次元素 $x \in H - Q$。由于 $\langle x\rangle \subseteq H$ ，因此 $\langle x\rangle' \subseteq H' \subseteq Q$，这表明 $\langle x\rangle \subseteq Q$，即 $x \in Q$，矛盾。□

3. Graded total prime Lie ideals

定义 3.1。若理想 P of L 对于 L 而言满足：对所有 x， $y \in h(L)$，其中 $[x, y] \in P$ 表明 $x \in P$ 或 $y \in P$，则称其为 L 的分次全素理想。

任何分次素理想显然都是分次全素理想。

定理 3.2. 假设 P 被视为 L 的一个分次理想。那么当且仅当对于任意 x、$y \in h$（L），只要$\langle [x,y] \rangle \subseteq P$，就有 $\langle x \rangle \subseteq P$ 或 $\langle y \rangle \subseteq P$，$P$ 是分次全素理想。

证明。 $\Rightarrow$

设 $x, y \in h(L)$ 满足 $\langle [x,y] \rangle \subseteq P$。因此 $[x,y] \in P$，这意味着 $x \in P$ 或 $y \in P$，也就是说 $\langle x \rangle \subseteq P$ 或 $\langle y \rangle \subseteq P$。

$\Leftarrow$

设 $x, y \in h(L)$ 满足 $[x,y] \in P$。则 $\langle [x,y] \rangle \subseteq P$。因此，$\langle x \rangle \subseteq P$ 或 $\langle x \rangle \subseteq P$，从而 $x \in P$ 或 $y \in P$。

□

定理 3.3. 假设 P 表示一个分次全素理想。那么，对于所有 $x \in h(L) - P$，$(P\colon x) = (P\colon L)$。

证明。设 $x \in h(L) - P$。显然，由于对 $(P : L)$ 施加了更严格的条件，$(P\colon L) \subseteq (P\colon x)$。现在设 $y \in (P : x)$。因此，我们可以在选定的 y 中采用证明定理 (2.4) 时的相同论证，所以不失一般性，假设 $y \in h(L)$。由于 $y \in (P\colon x)$ 蕴含 $[x,y] \in P$。由于 $x \notin P$，于是 $y \in P$，也就是说 $[y,L] \subseteq P$，这意味着 $y \in (P : L)$。□

定理 3.4. 假设将 P 视为分次全素理想。那么（$P : L$）是 L 的分次全素理想。

证明。设 x， $y \in h$（L），其中 $[x,y] \in$（P： L）。事实上，如果 $L = P$，那么结论已经得证。因此设 $P \neq L$，并选取 $z \in L - P$。由于 $[x,y] \in$（P： L），我们有 $[[x,y],z] \in P$。因此 $[x,y] \in P$，即 $x \in P$ 或 $y \in P$。这意味着 $[x,L] \subseteq P$ 或 $[y,L] \subseteq P$。□

推论 3.5. 假设将 P 视为分次全素理想。那么对于所有 $x \in h$（L） $- P$，（P： x）是 L 的分次全素理想。

定义 3.6. 非空子集 S of $h(L)$ 称为分次乘法闭集，如果每当 $x, y \in S$ 时，都有 $[x,y] \in S$

命题 3.1. 分次理想 P of L 是分次全素理想，当且仅当 $S = h(L) - h(P)$ 是分次乘法封闭集。

证明. ($\Rightarrow$) 设 P 表示一个分次素理想，且 x_g, $y_h \in S$ 是 L 中不属于 P 的齐次元素。显然， $[x_g, y_h] \in h(L)$。若 $[x_g, y_h] \in h(P) \subseteq P$，则 $x_g \in P$ 或 $y_h \in P$。由于 P 是分次的，因此 $x_g \in P_g$ 或 $y_h \in P_h$，这与假设矛盾。即 $[x_g, y_h] \in h(L) - h(P) = S$。

($\Leftarrow$) 令 S 为乘法封闭集，并令 $x, y \in h(L)$，其中 $[x,y] \in P$。若 x 和 y 均属于 S，且由于 x 和 y 是齐次的，那么

$[x,y] \notin P$，矛盾。因此 $x \notin S$ 或 $y \notin S$，即 $x \in P$ 或 $y \in P$。

□

定理 3.7. 假设 $\varphi : L \longrightarrow L'$ 表示从 G-分次李代数 L 到 G-分次代数L'的分次李满同态。设 P 是 L 的分次全素理想，且 Ker(φ) $\subseteq P$。因此， $\varphi(P)$ 是 L'的分次全素理想。

证明. 假设 $x, y \in h(L')$，使得 $[x,y] \subseteq \varphi(P)$。由于 φ是满射，因此存在齐次元素 $a, b \in L$ ，使得 $\varphi(a) = x$ 且$\varphi(b) = y$。此外，存在 $c \in P$ ，使得 $\varphi(c) = [x,y]$。因此 $\varphi([a,b]) = [\varphi(a)\ \varphi(b)$ $= [x,y] = \varphi(c)]$, ，这意味着 $[a,b] - c \in$Ker(φ) $\subseteq P$。由于 $c \in P$, 于是 $[a,b] \in P$，得到 $a \in P$或 $b \in P$。因此， $x \in \varphi(P)$ 或 $y \in \varphi(P)$。

□

此外，定理（3.7）直接得出以下结论。

推论 3.8. 假设 $\varphi : L \longrightarrow L'$ 被视为分次李代数满同态。设 P' 表示 L' 的一个分次理想。若 $\varphi^{-1}(P')$ 是 L 的分次全素理想，则 P' 是 L' 的分次全素理想。

References

[1]Abu-Dawwas、Rashid、Malik Bataineh 和 Maaly Al-Muanger。《非交换环上的分次素子模》。《越南数学杂志》46卷，第3期（2018）：681–92。doi:10.1007/s10013- 018-0274-2。[2]Abu-Dawwas、Rashid。《分次半素理想与分次弱半素理想》。《意大利纯粹与应用数学杂志》36（2016）：535–42。[3]Anderson、D. D. 和 Malik Bataineh。《素理想的推广》。《代数学通讯》36卷，第2期（2008年）：686–96。doi:10.1080/00927870701724177。[4] Atani、Shahabaddin。《论分次素子模》。《清迈科学杂志》33卷，第1期（2006年）：3–7。[5] Bahturin、Yuri 和 Abdallah Shihadeh。《秩为2的分次无挠 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-模》。《代数及其应用杂志》21卷，第11期（2021年）。doi:10.1142/s0219498822502292。[6] Bahturin、Yuri 和 Abdallah Shihadeh。《分次单 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-模的张量积》。《土耳其数学杂志》46卷，第5期（2022）：1619–43。doi:10.55730/1300-0098.3222。[7] Bahturin、Yuri、Mikhail Kochetov 和 Abdallah Shi- hadeh。《单李代数上的分次模》。《Revista

Colombiana De Matem´aticas 53卷，增刊（2019）：45–86。doi:10.15446/recolma.v53nsupl.84006。[8] Farzalipour、F 和 P Ghiasvand。《论分次半素理想与分次弱半素理想》。《International Electronic Journal of Algebra》13（2013）：15–22。[9] Kawamoto、Naoki。《论李代数的素理想》。《广岛数学杂志》4卷，第3期（1974）。doi:10.32917/hmj/1206136843。[10] Refai、M、M Hailat 和 S Obiedat。《分次根基与分次素谱》。《远东数学科学杂志》1（2000）：59–73。