击中罗马人

Henning Fernau ! ˇ
特里尔大学，第四系，计算机科学，德国
Kevin Mann !
特里尔大学，第四系，计算机科学，德国

摘要

罗马支配是少数几个相关扩展问题即使在原始判定问题为 NP完全时仍可在多项式时间内求解的例子之一。这很有意思，因为它使我们能够建立用于寻找极小罗马支配函数的多项式延迟枚举算法；而关于能否以多项式延迟枚举图的所有极小支配集，或超图的所有击中集，这个问题四十多年来一直悬而未决。为探究其原因，我们将击中集的思想与罗马支配的思想结合起来。因此，我们提出并研究了两个新问题，分别称为罗马击中函数和罗马击中集，二者均是罗马支配的推广。这使我们能够划定多项式延迟可枚举性的界限。在这里，我们假设所谓的击中集横截猜想成立，该猜想认为，不可能以多项式延迟枚举超图的所有极小击中集。我们首先关注这些问题的扩展版本。在此过程中，我们找到了若干条件，在这些条件下，扩展罗马击中函数问题是 NP完全的。随后，我们运用参数化复杂性，更深入地理解扩展罗马击中函数为何会呈现这种特性。此外，我们还分析了相关优化问题的参数化复杂性和近似复杂性。我们也讨论了其他问题的罗马变体（如顶点覆盖）所带来的影响。

2012年 ACM 学科分类 计算理论 → 问题、归约与完备性；计算理论 → 参数化复杂性与精确算法

关键词与短语 枚举问题、多项式延迟、支配问题、击中集、罗马支配

数字对象标识符 10.4230/LIPIcs...

arXiv:2302.11417v1 [cs.CC] 22 Feb 2023

1 引言

几个世纪以来，人们一直从历史军事角度研究罗马帝国的防御策略，后来也开始从图论角度进行探讨，相关研究始于 Arquilla[1] 和 Fredricksen [7] 的一篇文章。本文讨论的策略如今称为罗马支配，其提出见 [43]，与 Arquilla 和 Fredricksen 的论述一脉相承，并将一项军事战略决策形式化；这一决策可追溯至君士坦丁大帝时期。

罗马支配是图支配中一种经过深入研究的变体，在较新的教科书 [32]，中，Chellali等人为其撰写了长达 45 页的章节。这里，军队被部署在不同的区域。如果某个区域内至少有一支军队，或者某个相邻区域内有两支军队，那么该区域就受到保护。从数学上说，我们将地图建模为一个图，其中区域对应顶点，区域之间的连接对应边；此外，军队的部署由一个函数描述，该函数将每个顶点映射到 0、1 或 2。若每个值为 0 的顶点都有一个值为 2 的邻点，则称该函数为罗马支配函数。显然，我们希望尽量降低开支，因此要

[1] Arquilla 因其对网络战的分析而颇为知名，参见 [6]。

© Henning Fernau 和 KevinMann；根据知识共享许可协议 CC-BY 4.0 授权 莱布尼茨国际信息学会议录 达格施图尔城堡–莱布尼茨信息学中心，Dagstuhl 出版社，德国

XX：2 击中罗马人

找到使用军队数量最少的罗马支配函数；相应的判定问题称为罗马支配。

除了针对罗马支配已经取得的大量组合（图论）结果（ [32], 中对此进行了很好的综述）之外，判定问题罗马支配也从多个方面得到了研究。粗略地说，罗马支配的表现与经典且广为人知的支配集问题非常相似。更具体地说，以下列举其中一些结果：

- 罗马支配是NP完全的，即使在特殊图类上也是如此；参见 [23]。 [40], 给出了一个更简单的证明，由此还可以清楚看出（尽管该文未明确指出），在指数时间假设（ETH）的前提下，可以排除亚指数时间算法。最小罗马支配可以在对数因子范围内近似，但除非 $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$，否则无法得到更好的近似；参见 [40] 以及 [39]。在标准参数化下（参数为军队数量的上界 k ），罗马支配是W[2]完全的；参见 [26]。然而，对偶参数化使罗马支配属于固定参数可解； [1] 中明确说明了这一点，也可以通过结合 [8] 与 [9]得到。

尽管在多种情形下，罗马支配与支配集在复杂度方面表现相同，但这种平行关系可能令人意外地在两个（彼此相关的）问题上失效：

- 我们能否以多项式延迟枚举给定实例的所有极小解？给定解的某个部分，我们能否判断
- 是否存在一个扩展该预解的极小解？

第一类问题也称为输出敏感枚举问题。一个悬而未决的问题已有四十年之久：是否存在一种算法，能够仅以多项式延迟枚举所有按包含关系极小的支配集？也就是说，用户只需等待多项式时间即可看到第一个极小支配集；任意两个输出之间，以及最后一个解输出后到算法终止之间，也都只需等待多项式时间。正如 [2] 所证明的，罗马支配函数（针对两种自然的极小性概念）对应的枚举问题可以通过多项式延迟求解。罗马支配方面的这一结果基于另一项结果：对于第二项中所述的扩展问题，存在多项式时间算法。具体而言，其思路是在继续进行分支之前先执行扩展测试。这一策略在枚举算法领域已广为人知，但具体实例却不多；我们仅在此提及 [44] 中的讨论。因此，扩展罗马支配是少数几个扩展问题可在多项式时间内求解、而原问题却是 NP完全的问题之一。关于扩展问题的更多细节，请参阅综述 [15] ；该综述还提出了描述此类问题的一般框架，并进一步阐述了其动机与应用。

本文想要探究的简单科学问题是“为什么”：为什么罗马支配在枚举和扩展方面是可行的？为了找出扩展罗马支配为何表现得如此特别，以及它与扩展支配集有何不同，我们希望推广罗马支配的概念，并试图找出可处理性的边界。具体来说，我们要探讨的是：能否以多项式延迟枚举极小击中集。这个所谓的击中集横截问题已经悬而未决四十年。也许是时候将其表述为一个猜想了：击中集横截猜想（简称 HSTT）认为，不存在用于极小击中集的多项式延迟枚举算法。这个问题等价于逻辑、数据库理论中的若干枚举问题，也等价于

图中极小支配集的枚举问题，见 [18, 24, 30, 34]。本文可以看作是在 HSTT 假设下，试图理解哪些问题无法进行多项式延迟枚举，并进一步描述在哪些情况下存在多项式延迟枚举算法。以往关于极小支配集枚举算法的研究，常常尝试考察一些特殊图类，以确定在 HSTT 假设下能否实现多项式延迟枚举。例如， [34] 表明，分裂图中的极小支配集可以用多项式延迟枚举，[2] 而在 HSTT 假设下，极小连通支配集则无法如此枚举，另见 [33]。事实上， [34] 表明，就多项式延迟这一问题而言，若干图枚举问题等价于枚举极小击中集。这种方法可以看作是通过研究特殊图类，对一个已知的（HSTT 难）枚举问题进行特化。我们的方法则有所不同：我们从一个已知可在一般图上通过多项式延迟枚举算法求解的支配类问题出发，并尝试通过推广来扩展这一结果，从而在 HSTT 假设下理解这项枚举任务何时会变得不可行。

众所周知，通过用闭邻域超图对图进行建模，击中集可以视为支配集的一种推广。尽管击中集和罗马支配都是成熟的概念，且都推广了支配集，但文献中似乎还没有将这两个概念结合起来的研究。实际上，尝试定义这种结合会遇到一些问题。若要让一个击中集实例表示一个支配集实例，给定图的顶点集就是我们要构造的超图的顶点集，也称为“全集”；所有闭邻域组成的集合则是（超）边集。忽略孪生顶点后，这意味着全集与（超）边集之间存在双射。但对于一般的超图而言，超边的数量与全集中元素的数量不一定相同。因此，我们必须思考如何诠释“值为一的设定”，使其与罗马支配的定义相关联；根据该定义，恰有一支军队部署在某个顶点上。我们提出两种方法来对超图中的这一效应进行建模：

1. 如果一个顶点在罗马支配函数下的取值为 1，那么它只命中自身的闭邻域超边。

2. 如果一个顶点在罗马支配函数下的取值为 1，那么其闭邻域不 需要由某个与之关联且取值为 2 的顶点命中。

按照第一种解释，我们需要一个称为对应关系的函数，将一个顶点映射到一条与之关联的超边，使得当该顶点的取值为 1 时，这条超边被支配。我们将相关的判定问题称为罗马击中函数。第二种解释意味着，取值 1 与一条超边相关，而不是与其关联顶点相关。相关的判定问题将称为罗马击中集。下一节中，我们将利用这些思想，更正式地定义这两个不同的超图问题。此外，我们还将简要讨论文献中此前提出的超图中的支配概念。

快速总结一下主要结果：罗马击中集导出了罗马支配的一种推广，其扩展版本是多项式时间可解的，因此可以用多项式延迟枚举极小罗马击中集。然而，对于罗马击中函数而言，对应关系是否为满射似乎至关重要。如果它是满射，那么我们可以证明，罗马击中函数的扩展版本同样是多项式时间可解的，因此在此条件下，极小罗马击中

[2] Kanté 等人使用直接论证得出了这一多项式延迟枚举结果。还可以证明，在分裂图中，将扩展问题扩展到极小支配集可以在多项式时间内求解。

函数可以用多项式延迟枚举。如果不满足这一满射条件，那么罗马击中函数的扩展版本就是 NP完全的，而且对该问题进行参数化的各种尝试也都未能奏效，无法导出固定参数可解延迟枚举算法。由此，我们明确界定了枚举极小罗马击中函数的可行性边界。我们还展示了如何定义罗马顶点覆盖等概念，并将多项式延迟枚举结果推广到这些概念。

2 定义与符号

本文中，我们将直接使用复杂性理论中的标准概念，而不在此处加以定义。这包括参数化复杂性中的概念，涉及固定参数可解性以及 W 层级中更低的层级，直至 W[3], ；这些内容可参见 [27, 22] 等教科书。

2.1 一般概念、图与超图

令 $\mathbb{N}$ 表示所有非负整数（包括 0）构成的集合。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们使用记号 $[n] := \{1, \ldots, n\}$。对于有限集 A 以及满足 $n \leq |A|$的某个 $n \in \mathbb{N}$， A的基数记为 $\binom{A}{n}$；它表示 A 中所有基数为 n的子集构成的集合，而 2^A 表示 A的幂集。对于两个集合 A、B， B^A 表示所有映射 $f\colon A \to B$构成的集合。如果 $C \subseteq A$，则$f(C) = \{f(x) \mid x \in C\} \subseteq B$。我们用 $\chi_C \in \{0,1\}^A$ 表示特征函数，其中$\chi_C(x) = 1$ 成立，当且仅当 $x \in C$。对于两个函数 f、$g \in \mathbb{N}^A$，我们写作 $f \leq g$，当且仅当对于所有 $a \in A$， $f(a) \leq g(a)$ 成立。此外，我们将 f的权重定义为 $\omega(f) = \sum_{a \in A} f(a)$。

我们关注超图 $H = \left(X, \hat{S} = (s_i)_{i \in I}\right)$，其全集 X（也称为顶点集）和指标集 I 均为有限集，其中对于每个 $i \in I$， $s_i \subseteq X$ 都是一个超边。用集合S 表示序列 $\hat{S}$ 中包含所有超边的集合，即 $S = \{s_i \mid i \in I\}$。$\hat{}$注意，同一超边可能在序列 S 中出现多次。如果不允许这种情况，我们就称其为简单超图。对于所有 $x \in X$，定义 $\mathrm{S}(x) = \{s_i \in S \mid x \in s_i\}$，表示被顶点 x 击中的超边集合，从而定义函数 $\mathrm{S}\colon X \to 2^S$。集合 $D \subseteq X$ 是击中集，当且仅当 $\mathrm{S}(D) = S$，其中 $\mathrm{S}(D) = \bigcup_{x \in D} \mathrm{S}(x)$。类似地，定义 $\mathrm{I}\colon X \to 2^I$，使得 $\mathrm{I}(x) = \{i \in I \mid x \in s_i\}$，并将其扩展到 $A \subseteq X$，令 $\mathrm{I}(A) = \bigcup_{x \in A} \mathrm{I}(x)$。若函数 $\tau\colon X \to I$ 满足对所有 $x \in X$ 都有 $x \in s_{\tau(x)}$，或者换句话说，对所有 $x \in X$ 都有 $\tau(x) \in \mathrm{I}(x)$，则称其为对应关系。

我们可以将一个（简单无向）图 $G = (V, E)$ 看作超图 $G = (V, \hat{E})$，其中每条超边恰好包含两个元素。在这种情况下，我们就称超边为边。讨论简单图时，我们可以将 E 视为指标集。对于每个顶点 $v \in V$，将其邻域定义为 $N(v) = \{u \mid \{v, u\} \in E\}$，将闭邻域定义为 $N[v] = \{v\} \cup N(v)$。对于顶点集 $U \subseteq V$，我们用 $N[U] = \bigcup_{v \in U} N[v]$ 表示 U 的闭邻域。图 $G = (V, E)$ 的一个 支配集是满足 $N[D] = V$ 的集合 $D \subseteq V$。

2.2 罗马支配函数

设 $G = (V, E)$ 是一个图。当且仅当对于每个满足 $f(v) = 0$ 的顶点 $v \in V$，存在一个满足 $f(u) = 2$ 的 $u \in N(v)$ 时，函数 $f \in \{0, 1, 2\}^V$ 是罗马支配函数（简称 rdf）。对于 $f, g \in \{0, 1, 2\}^V$，当且仅当对每个 $v \in V$， $f(v) = 0$ 或 $f(v) = g(v)$ 时，定义 $f \leq_{PO} g$。若对于每个满足 $g \leq f$（或分别满足 $g \leq_{PO} f$）的罗马支配函数 g，都有 $f = g$ 成立，则罗马支配函数 f 是极小的（或分别是 PO-极小的）。我们将考虑以下问题。

问题名称： 罗马支配 ，简称 RD **给定：** 一个图 $G=(V,\ E)$ 和 $k\in\mathbb{N}$ **问题：** 是否存在一个罗马支配函数 f，使得 $\omega(f)\leq k$?

问题名称： （PO-）扩展罗马支配，简称（PO-）Ext RD。 **给定：** 一个图 $G=(V,\ E)$ 以及一个函数 $f\colon\ V\to\{0,\ 1,\ 2\}$ **问题：** 是否存在一个关于 G、满足 $f\leq_{(PO)}g$ 的极小 rdf g？

有些出人意料的是，第二个方框中的扩展问题已被证明在 [2] 中是多项式时间可解的。这意味着（PO-）极小罗马支配函数可以用多项式延迟枚举。为了探究这些结果何以成立，我们将从三个方面把这些概念和问题推广到超图。

第一个定义可能是最自然的，它类比于（简单）超图中支配集的概念；参见 [5]。设 $H=(V,\ E)$ 是一个（简单）超图，即 $E\subseteq 2^V$。那么，如果对于所有满足 $f(v)=0$ 的 $v\in V$，都存在一个顶点 $u\in V$，满足 $f(v)=2$，且该顶点是 v 的邻点，即它与 v 共享一条边；更正式地说，存在某个 $e\in E$ 使得$\{u,\ v\}\subseteq e$，则 $f\colon\ V\to\{0,\ 1,\ 2\}$ 是一个罗马支配函数。随后可以像对图一样定义这些问题。我们将其称为超图罗马支配（Hypergraph Roman Domination），简称 HRD；以及（PO-）扩展超图罗马支配（（PO-）Extension Hypergraph Roman Domination），简称（PO-）Ext HRD。

然而，正如我们接下来将展示的那样，我们基本上可以通过使用相同的归约，将罗马支配在图情形下的所有有趣性质转移到超图情形。更具体地说，我们可以证明：

▶超图罗马支配 是 *NP*-完全的。

▶**命题 2**。 （*PO*-）扩展超图罗马支配可在多项式时间内求解。

▶**命题 3**。 可以用多项式延迟枚举超图的所有（*PO*-）极小罗马支配函数。

也就是说，如果 $G=(V,\ E)$ 是一个简单超图，我们可以通过令 $\{x,\ y\}\in E'$ 来构造一个图 $G'=(V,\ E')$，当且仅当存在一个超边 $e\in E$ 满足 $\{x,\ y\}\subseteq e$。那么，$f\colon\ V\to\{0,\ 1,\ 2\}$ 是超图 G 的罗马支配函数，当且仅当 f 是图 G'的罗马支配函数。反过来，我们只需将给定的图解释为一个简单超图即可。

因此，我们提出了罗马支配面向超图的另外两种推广，以便研究罗马支配在扩展版本中为何表现得如此特殊，以及极小罗马支配函数的枚举问题。这些定义见下文各小节。

多项式延迟枚举算法的基础是对极小罗马支配函数的组合刻画。为了表述上述对极小罗马支配函数的组合刻画，我们还需要引入一个概念。对于 $D\subseteq V$和 $v\in D$，将相对于 D 的 $v\in V$私有邻域 定义为 $P_{G,D}(v):=N_G[v]\setminus N_G[D\setminus\{v\}]$。$P_{G,D}(v)$ 中的顶点称为 v的私有邻点。

▶ **定理 4.** *[2]*设 $G=(V,E)$ 是一个图，且 $f\colon\ V\to\{0,1,2\}$ 是一个函数。记 $G':=G\left[f^{-1}(0)\cup f^{-1}(2)\right]$。那么， f是一个极小罗马支配函数，当且仅当满足以下约束：

1. $N_G\left[f^{-1}(2)\right]\cap f^{-1}(1)=\emptyset$，**2.** $\forall v\in V_2(f)\colon\ P_{G',\ V_2(f)}(v)\not\subseteq\{v\}$，
也称为隐私条件，以及**3.** $f^{-1}(2)$ 是 G'的极小支配集。

▶**定理 5**。 *[2]*设 $G=(V,E)$ 是一个图，且 $f\colon V\to\{0,1,2\}$ 是一个函数。简记为G'：$=G\left[f^{-1}(0)\cup f^{-1}(2)\right]$。那么，$f$ 是 *PO*-极小 *rdf*，当且仅当满足以下约束：

1. $N_G\left[f^{-1}(2)\right]\cap f^{-1}(1)=\emptyset$，**2.** $f^{-1}(2)$ 是 G'的极小支配集。

2.3 罗马击中函数

设 $H=(X,\hat{S}=(s_i)_{i\in I})$ 为一个超图，且 $\tau\colon X\to I$ 为一个对应关系。如果对于每个 $i\in I$，都存在一个 $x\in s_i$，使得 $f(x)=2$，或者存在一个 $x\in X$，使得 $\tau(x)=i$ 且 $f(x)=1$，则称函数 $f\in\{0,1,2\}^X$ 为罗马击中函数（简称 rhf）。在这些情况下，我们称 x 命中 i 或 s_i。对于函数 $f\in\{0,1,2\}^X$，定义划分$P(f)=\{f^{-1}(0)\ f^{-1}(1)\ f^{-1}(2)\}$。现在我们定义两个与 rhf 相关的判定问题。

问题名称：罗马击中函数，简称 RHF **给定：**一个有限集 X，一个超边序列 $\hat{S}=(s_i)_{i\in I}$，构成超图 $(X,\hat{S})$、对应关系 $\tau\colon X\to I$，以及 $k\in\mathbb{N}$ **问题：**是否存在罗马支配函数 f，使得 $\omega(f)\le k$?
问题名称：扩展罗马击中函数，简称 Ext RHF **已知：**有限集 X，超边序列 $\hat{S}=(s_i)_{i\in I}$，构成超图 $(X,\hat{S})$，一个对应关系 $\tau\colon X\to I$，以及 $f\colon X\to\{0,1,2\}$ **问题：**是否存在一个极小 rhf g，使得 $f\le g$?

要理解这一设定以何种方式推广了罗马支配（RD），请回想图还可以用其他方式表示为超图。更准确地说，与图 $G=(V,E)$ 相关联的闭邻域超图G_{nb}可以表示为 $G_{nb}=(V,(N[v])_{v\in V})$。显然，$D\subseteq V$是支配集，当且仅当 D 是 G_{nb}的击中集。由于 $v\in N[v]$，恒等映射可以视为一种对应关系。在这种解释下，$f\colon V\to\{0,1,2\}$ 是 G 的罗马支配函数，当且仅当它是 G_{nb}的罗马击中函数。

2.4 罗马命中集

设 $(X,\hat{S}=(s_i)_{i\in I})$ 是一个超图。当且仅当对于所有 $i\in I$, $s_i\cap R_2\neq\emptyset$或 $i\in R_1$，$R=(R_1,R_2)\in 2^I\times 2^X$ 是一个罗马击中集，简称右侧命中集（rhs）。如果 $x\in s_i\cap R_2$，我们就说 x 命中 i或s_i。当 $i\in R_1$ 时，我们就说 i 命中自身。对于两个元组 (P_1,P_2)、$(R_1,R_2)\in 2^I\times 2^X$，如果 $P_1\subseteq R_1$ 且 $P_2\subseteq R_2$，我们就说 $(P_1,P_2)\le(R_1,R_2)$。我们称一个 rhs P 为极小的，如果 $R\le P$ 蕴含 $R=P$ 对每个 rhs R 都成立。沿用此前的记法，我们也写作 $\omega(R_1,R_2):=|R_1|+2\cdot|R_2|$，并称其为 $(R_1,R_2)\le(I,X)$ 的权重。

▶例6. 考虑某个 $f\colon V\to\{0,1,2\}$。那么，当且仅当 $(\tau(f^{-1}(1))\ f^{-1}(2))$ 是一个右侧命中集时，f才是一个罗马支配函数；但是，对于 $X=\{a,b,c,d\}$ 和 $\hat{S}:=(s_1:=\{a,b\}\ s_2:=\{a\}\ s_3:=\{b\}\ s_4:=\{a,c\}\ s_5:=\{c,d\})$，$I:=[5]$, $R_1=[3]$ 和 $R_2=\{c\}$ 构成一个有效的右侧命中集，但它并不对应于该超图 $(X,\hat{S})$ 的任何罗马支配函数。

▶**引理7.** 设 $H=(V,(s_i)_{i\in I})$ 是一个超图，且 $\tau\colon V\to I$是一个对应关系。 τ是满射，当且仅当对于 h 的每个右侧命中集 (R_1,R_2)，都存在一个罗马支配函数 $f\colon V\to\{0,1,2\}$，使得$f^{-1}(2)=R_2$。

证明。设 $H=(V,(s_i)_{i\in I})$ 是一个超图，且 $\tau\colon V\to I$是一个对应关系。此外，设 τ是满射，且 (R_1,R_2) 是一个右侧命中集。那么 $f\colon V\to\{0,1,2\}$ 是一个罗马支配函数，其中 f定义为：若 $v\in R_2$，则 $f(v)=2$；若对于某个 $i\in R_1$ 有 $v\in\phi(\tau^{-1}(i))$，则 $f(v)=1$，其中 ϕ 是策梅洛选择函数；否则，$f(v)=0$。

假设 τ不是满射。那么存在一个 $i \in I$，使得 $\tau^{-1}(i) = \emptyset$。$(I, \emptyset)$ 是一个右侧命中集，但不存在满足 $f^{-1}(2) = \emptyset$ 的罗马支配函数，因为对于所有 $j \in I$，都必须有一个 $v \in f-1(1) \cap \tau^{-1}(j)$。对于 $j = i$，情况并非如此。◀

特别地，若我们考虑与图 $G = (V, E)$ 关联的函数 $f\colon V \to \{0, 1, 2\}$，那么 f 是罗马支配函数，当且仅当在相关超图 G_{nb} 中，f 是罗马支配函数，当且仅当 $(f^{-1}(1)\ f^{-1}(2))$ 是 G_{nb} 中的右侧命中集；这里我们将恒等映射视为所采用的对应关系。在这种情况下，$\omega(f) = \omega(f^{-1}(1)\ f^{-1}(2))$。作为进一步的例子，考虑 $X = \{a, b, c, d\}$ 和 $\hat{S} := (s_1 := \{a, b\}\ s_2 := \{b, c\}\ s_3 := \{b, e\}\ s_4 := \{b, c, d\}\ s_5 := \{d, e\})$，$I := [5]$。如果我们所考虑的对应关系 τ 满足 $\tau(d) = s_4$ 且 $\tau(e) = s_3$，那么 τ 不可能是满射，因为 $s_5 \notin \tau(X)$。权重最小为 3 的右侧命中集是 $(\{s_5\}, \{b\})$。然而，任何满足 τ 的、针对 $(X, \hat{S})$ 的罗马支配函数 f，都必须满足 $f(d) = 2$ 或 $f(e) = 2$。无论哪种情况，对剩余超图而言，至少还需要权重 2，因此必然有 $\omega(f) \geq 4$。

rhs 的概念引出了两个判定问题：

问题名称： 罗马击中集 ，简称 RHS **给定：** 一个超图 $H = (X,$ $\hat{S} = (s_i)_{i \in I})$ 和 $k \in \mathbb{N}$ **问题：** H 是否存在一个右侧命中集 (R_1, R_2)，使得 $\omega(R_1, R_2) \leq k$?
问题名称： 扩展罗马击中集 ，简称扩展罗马命中集函数 **给定：** 一个超图 $H = (X,$ $\hat{S} = (s_i)_{i \in I})$ 以及某些 $U = (U_1,\ U_2) \leq (I,\ X)$ **问题：** H 中是否存在一个极小右侧命中集 $R = (R_1,\ R_2)$，使得 $U \leq R$?

更准确地说，若 $G = (V, E)$ 是一个图，则取 $X = V, \hat{S}_G = (N[v])_{v \in V}$，定义闭邻域超图 G_{nb}。在这种情况下，函数 f 是罗马支配函数，当且仅当 $(f^{-1}(1)\ f^{-1}(2))$ 是一个右侧命中集。因此，(G, k) 是罗马支配的一个是实例，当且仅当 $(X, \hat{S}_G, k)$ 是 RHF 的一个是实例。对于充分性部分，我们需要证明：若存在一个右侧命中集 (R_1, R_2)，满足 $|R_1| + 2 \cdot |R_2| \leq k$，那么就存在一个右侧命中集 (P_1, P_2)，满足 $|P_1| + 2 \cdot |P_2| \leq k$ 和 $P_1 \cap P_2 = \emptyset$。在这种情况下，我们可以构造一个罗马支配函数 f，使得 $f^{-1}(0) := V \setminus (P_1 \cup P_2), f^{-1}(1) := P_1$ 和 $f^{-1}(0) := P_2$。因此，若存在一个右侧命中集 (R_1, R_2)，满足 $|R_1| + 2 \cdot |R_2| \leq k$ 和 $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$，那么 $(R_1 \setminus R_2, R_2)$ 也是一个右侧命中集，因为每个 $v \in R_1 \cap R_2$ 都被自身支配。

稍微宽泛地使用术语，我们将罗马击中函数和罗马击中集称为优化问题，因为两者各自都涉及一个底层的最小化问题，而其他问题则不然；后者概括为扩展问题。将它们视为参数化问题时，其标准参数 是给定的上界 k，即我们所求的罗马支配函数或右侧命中集的权重上界。类似地，我们将扩展罗马击中函数和扩展罗马击中集称为扩展问题。它们的标准参数 是给定函数 $f\colon X \to \{0, 1, 2\}$ 的权重，或给定元组 $(U_1,\ U_2) \leq (I,\ X)$ 的权重。

2.5 论文结构与主要结果

在第3节中，我们将证明我们的优化问题是NP完全的；更有意思的是，若将其视为标准参数化问题，它们将成为 W[2] 完全问题。随后，我们将关注这两种变体的扩展问题。回想一下，罗马支配情形下的算法结果基于一些基本的组合洞见。为方便读者，我们实际上会在本节末尾再次介绍这些洞见。遵循这一思路，我们首先在第4节中给出极小右侧命中集的组合刻画，并在第5节中利用它证明扩展罗马击中集可以在多项式时间内求解。在第6节推导出极小罗马支配函数的一系列有趣组合性质后，我们将在第7节中针对具有满射对应关系的扩展罗马击中函数给出相应结果。在

XX:8 击中罗马人

第8节中，我们回到罗马支配，并考察扩展问题的一种变体：对于我们要寻找的极小罗马支配函数，同时给出下界和上界条件。我们将证明，与只给出下界的原始问题不同，这个双边扩展问题是NP完全的。按下界函数的权重对该问题进行一种自然参数化（其动机来自平凡性距离原理 [31]）也无济于事，反而会得到一个属于 W[3]，完全类的参数化问题。我们在第9节利用这些结果证明，一般而言，按给定函数的权重参数化时，罗马支配函数的扩展问题属于 W[3] 完全类。这促使我们在第10节研究该扩展问题的其他参数化方式；有时我们证明其困难性，有时则得到 FPT 结果。在第 11 节中，我们展示如何利用第4节和第5节的结果，设计一种算法，以多项式空间和多项式延迟枚举所有极小右侧命中集。我们还从输入敏感枚举的角度分析该算法，并通过一个相当简单的下界示例证明，其运行时间通常无法得到实质性改进。在第12节中，我们介绍一种相当简单的分支算法，用于计算最小右侧命中集。基于我们关于右侧命中集的洞见，我们在第13.2小节中展示如何定义罗马顶点覆盖和罗马边覆盖等问题，以及我们此前的结果如何也能为这些问题带来算法结果。具体而言，我们给出一种用于枚举极小罗马顶点覆盖的（最优）固定参数可解枚举算法。最后，我们讨论研究结果及后续研究方向。这里先指出，采用我们的方法时，以多项式延迟枚举极小解的可行性，与求解相应扩展问题的多项式时间可解性是相辅相成的。即使在支配类问题中，情况也未必如此。正如 [13]，所示，边支配集的扩展问题是NP完全的；而正如 [35] 所示，极小边支配集可以用多项式延迟列出。

3 优化问题

本节将讨论这些优化问题的（参数化）复杂度。对于这两个问题，最自然的参数化可能是 rhf 或 rhs 权重的上界 k 。在我们的结果中，我们将使用文献 [26]中给出的罗马支配在标准参数化下的 W[2]-完全性。

▶**定理 8**。 *RHF* 和 *RHS* 是 *NP*完全的。从参数化的角度来看，标准罗马支配函数和标准罗马支配集是 *W*[2]-完全的。

证明。 如第 2 节所述，rdf 可以解释为 rhf，进而解释为 rhs，因此所有关于难度的论断都可以从罗马支配中转译而来。

我们只证明（标准）罗马击中函数属于 W[2]。对于（标准）罗马击中集，其归约更简单。

设 $H = (X, \hat{S} = (s_i)_{i \in I})$ 是一个超图，$\tau : X \to I$ 是一个对应关系（因此，

$x \in \tau(x)$ 对每个 $x \in X$) 都成立，且 $k \in \mathbb{N}$。定义 $G = (V, E)$，其

$$\begin{aligned} V &= \{a,b,c\} \cup \overbrace{\{v_x \mid x \in X\}}^{=:V(X)} \cup W \cup U, \quad \text{where} \\ W &= \{w_i \mid i \in I\} \quad \text{and} \\ U &= \{u_i \mid i \in I, \tau^{-1}(i) = \emptyset\}, \\ E &= \{\{a,b\},\{a,c\}\} \cup \{\{a,v_x\} \mid x \in X\} \cup \{\{v_x,w_i\} \mid i \in I, x \in s_i\} \\ &\cup \{\{v_x,u_i\} \mid i \in I, x \in s_i, u_i \in U\} \cup \{\{v_x,v_y\} \mid x,y \in X\}. \end{aligned}$$

▷ 断言 9. $H = (X, \hat{S})$ 中，τ 存在权重至多为 k 的罗马支配函数，当且仅当 G 存在权重至多为 $k+2$的罗马支配函数。

命题证明。设 $f \in \{0,1,2\}^X$ 是 H 上的极小罗马支配函数，且 τ。定义 $g\colon V \to \{0,1,2\}$，

$$v \mapsto \begin{cases} 2, & v \in \{a\} \cup \{v_x \mid x \in X : f(x) = 2\} \\ 1, & v \in \{w_i \in W \mid \exists x \in \tau^{-1}(i) : f(x) = 1\} \\ 0, & v \in \{b,c\} \cup \{w_i \in W \mid \forall x \in \tau^{-1}(i) : f(x) \neq 1\} \cup U \end{cases}.$$

由于 $g(a) = 2$，$N[a] = \{a,b,c\} \cup V(X)$ 被支配。设 $u_i \in U$，其中 $i \in I$。由于$\tau^{-1}(i) = \emptyset$，且 f是一个罗马支配函数，因此存在一个 $x \in X \cap s_i$，使得 $f(x) = 2$。这意味着存在 $v_x \in V(X) \cap N(u_i)$，使得 $g(v_x) = 2$。因此，U中的每个顶点都被支配。设 $w_i \in W$，其中 $i \in I$，且 $g(w_i) = 0$。于是，对于每个 $x \in \tau^{-1}(i)$，都有 $f(x) \neq 1$。由于 f是一个罗马支配函数，因此存在一个 $x \in X \cap s_i$，使得 $f(x) = 2$。因此，w_{s_i}被某个 v_x 支配，并且 g是一个罗马支配函数。

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} g(v) &= 2 + \sum_{x \in X \text{ with } f(x)=2} g(v_x) + \sum_{i \in I, (\exists x \in \tau^{-1}(i):\, f(x)=1)} g(w_i) \\ &\leq 2 + \sum_{x \in f^{-1}(2)} f(x) + \sum_{x \in f^{-1}(1)} f(x) \leq k+2\,. \end{aligned}$$

对于另一个方向，假设 $f \in \{0,1,2\}^V$是 G上的罗马支配函数。不失一般性，若存在 v，$w \in V$满足 $N[w] \subseteq N[v]$且 $f(v) + f(w) \geq 2$，则 $f(v) = 2$且 $f(w) = 0$。我们可以作此假设，因为其他每种情况至多支配相同数量的顶点。因此，我们有 $\{v \in V \mid f(v) = 2\} \subseteq \{a\} \cup \{v_x \mid x \in X\}$。

设 u，v，$w \in V$满足 $N[u] \cup N[w] \subseteq N[v]$且 $f(u) + f(v) + f(w) \geq 2$。假设$f(u) = f(w) = 1$。定义 $h \in \{0,1,2\}^V$，使得

$$v \mapsto \begin{cases} f(x), & x \notin \{u,v,w\} \\ 0, & x \in \{u,w\} \\ 2, & x = v \end{cases}.$$

$N[u] \cup N[w]$被 v支配（相对于 h）。其他顶点的支配情况与 f和 $\sum_{v \in V} h(v) \leq \sum_{v \in V} f(v)$ 相同。因此，不失一般性地，$f(a) = 2$，且 $f(x) = 0$，对于$x \in \{b,c\} \cup \{w_i,\ u_i \mid i \in I\colon\ \tau^{-1}(i) = \emptyset\}$。此外，$W \cap f^{-1}(2)$为空，因为我们可以将该集合中 f 下某个顶点的值与其任意邻点的值交换。对于每个 $w_i \in W$，若 $f(w_i) = 1$，则必定存在一个 $x_i \in \tau^{-1}(i)$。

定义 $g \in \{0,1,2\}^X$，当且仅当 $g(x) = 2$，若 $f(v_x) = 2$，$g(x_i) = 1$ 如上所定义，即存在某个 $w_i \in W$，使得 $f(w_i) = 1$，否则 $f(x) = 0$。考虑不含任何满足 $g(x) = 1$ 且 $\tau(x) = i$ 的 $i \in I$。因此，$f(w_i) = 0$，并且存在一个

$v_x \in V(X) \cap N(w_i)$，其中 $f(v_x) = 2$。因此，存在一个 $x \in s_i$，使得 $f(x) = 2$。所以，g 是一个罗马支配函数。此外，

$$\sum_{x \in X} g(x) = \sum_{x \in X:\, f(v_x)=2} g(x) + \sum_{x_{s_i} \in X:\, f(w_i)=1} g(x_i) = \sum_{v \in V} f(v) - 2 \le k.$$

◊

至此，我们完成了对多项式时间归约工作原理的描述，并证明了该问题属于 NP 和 W[2]。

要证明标准罗马击中集属于 W[2]，我们不需要顶点 $\{u_i \mid i \in I:\ \tau^{-1}(i) = \emptyset\}$。此外，由于 S 中的元素可能属于解的一部分，论证会更简单。此处省略更多细节。◄

► 注释 10。罗马击中函数和罗马击中集可以轻易地相互归约。

从罗马击中函数到罗马击中集。设 $H = (X, (s_i)_{i \in I})$ 是一个超图，其对应关系为 τ 和 $k \in \mathbb{N}$。定义 $H' = (X, (s_i)_{i \in I \cup I'})$，其中 $I' = \{i' \mid i \in I, \tau^{-1}(i) = \emptyset\}$，且对每个 $i' \in I'$ 都有 $s_{i'} = s_i$。现在证明：当且仅当存在一个权重为 k 的罗马支配函数 f，定义在 H 上且满足 τ，才存在一个权重为 k 的极小右侧命中集，定义在 H' 上。若存在一个定义在 H 上、权重至多为 k 的罗马支配函数 f，则 $\left(\tau\left(f^{-1}(1)\right), f^{-1}(2)\right)$ 是 H' 上权重至多为 k 的右侧命中集。设 (R_1, R_2) 是 H' 上权重为 k 的右侧命中集。若存在一个 $i' \in I' \cap R_1$，则 $s_i \cap R_2$ 非空或 $i \in R_1$。在第一种情况下，$(R_1 \setminus \{i'\}\ R_2)$ 也会是一个右侧命中集。否则，任取一个元素 $x \in s_i$，则 $(R_1 \setminus \{i, i'\}\ R_2 \cup \{x\})$ 也是权重相同的右侧命中集。因此，可以假设 $I' \cap R_1 = \emptyset$。类似地，$\{i \in I \mid \tau^{-1}(i) = \emptyset\} \cap R_1 = \emptyset$ 也成立。对每个 $i \in R_1$，任取一个元素 $x_i \in \tau^{-1}(i)$。于是，$f \in \{0, 1, 2\}^X$，其中 $f^{-1}(1) = \{x_i \mid i \in R_1\}$ 且 $f^{-1}(2) = R_2$，是一个权重至多为 k 的罗马支配函数。

从罗马击中集到罗马击中函数。令 $H = (X、(s_i)_{i \in I})$ 为一个超图，并且 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $k < |I|$；对于 $|I| \le k$，我们有一个平凡的是实例。因此，$(I、\emptyset)$ 不是该罗马击中集实例的解。定义超图 $H' := (X \cup I、(s'_i)_{i \in I'})$，其中 $I' := I \cup \{a\}$（对于一个 $a \notin I \cup X$），以及 $s'_i := s_i \cup \{i\}$，对于 $i \in I$ 和 $s'_a = X$。τ 与 H 的对应关系如下：

$$\tau : X \cup I \to I', y \mapsto \begin{cases} a, & y \in X \\ y, & y \in I \end{cases}.$$

令 f 是 H' 上的一个罗马支配函数，且 $\omega(f) \le k$。由于每个 $i \in I$ 只属于一条边，我们可以假设 $f(i) \neq 2$（否则，$f - \chi_{\{i\}}$ 也是一个权重更小的罗马支配函数）。因此，要以不超过 $k < |I|$ 的权重击中 $(s'_i)_{i \in I}$ 的每条边，$f^{-1}(2) \cap X$ 必须非空。因此，s'_a 被击中。如果存在一个 $x \in f^{-1}(1) \cap X$，那么 $f - \chi_{\{x\}}$ 也是一个权重更小的罗马支配函数。因此，我们有 $f^{-1}(1) \subseteq I$ 和 $f^{-1}(2) \subseteq X$。此外，$(f^{-1}(1)\ f^{-1}(2))$ 是一个权重不超过 k 的右侧命中集。现在令 (R_1, R_2) 是 H 上权重为 k 的一个右侧命中集，则 $f \in \{0, 1, 2\}^{X \cup I}$，其中 $f^{-1}(1) = R_1$ 且 $f^{-1}(2) = R_2$，是一个满足 $\omega(f) = k$ 的罗马支配函数。

文献中曾多次提到，即使在分裂图上，罗马支配也是 NP完全的，例如在 [17, 37], 中；但据我们所知，这一事实尚未有证明发表。下面我们将给出一个更强的断言。回顾一下，在图中，若两个顶点 u、v 满足 $N[u] = N[v]$，则称它们为真孪生顶点。

►**引理 11**。即使在无真孪点分裂图上，罗马支配也是 *NP*完全的。同样，标准罗马支配在无真孪点分裂图上是 *W*[2]-完全的。

证明。定理 8 中给出的构造说明，如何在给定一个罗马击中函数实例的情况下，构造一个图 G，作为罗马支配的实例。不难看出，该图 G 确实是一个分裂图，因为（沿用定理 8 证明中的记号） $V(X)\cup\{a\}$ 是一个团，而 $\{b,c\}\cup W\cup U$ 是一个独立集。因此，任何真孪生顶点都必须属于 $V(X)\cup\{a\}$。正如定理 8 的证明所述， $g(a)=2$ 由 $b,c\in N(a)$ 强制保证（确保 $g(v_x)\neq 1$，因为定理 4 会推出存在一个权重更小的罗马支配函数）。由于 b, $c\notin N(V(X))$，不存在满足 $N[x]=N[a]$ 的 $x\in V(X)$，也就是说，真孪生顶点必须位于 $V(X)$ 中。现在，我们按照任意但固定的顺序逐一考察 $V(X)$，并可以从图中删除大于当前考察顶点的顶点，也可以向独立集中添加一些额外顶点。设 $T(x)=\{y\in V(X)\mid N[y]=N[x]\}$ 是 x 的孪生顶点集合。如果 $|T(x)|>1$，则从图中删除 $T(x)\setminus\{x\}$。所得图构成一个无孪生顶点分裂图实例，当且仅当原超图存在相应情形时，该图有一个权重至多为 k 的罗马支配函数。◀

定理 8 的证明中的困难性部分（隐含地）利用了这样一个事实：超边序列可以多次包含同一条超边，因为原图中可能存在孪生顶点（具有相同闭邻域的顶点）。考虑一个有 $n\geq 2$ 个顶点的完全图$K_n=([n],\ E_n)$。由于闭邻域总是等于 $[n]$，如果我们用普通集合而非超边序列来表示超边，那么对于任意顶点 v，最佳解将是 $\chi_{\{v\}}$。这甚至不是一个罗马支配函数。也就是说，极小罗马支配函数的形式为：对于任意顶点 v，取 $2\cdot\chi_{\{v\}}$；或者它们恒为 1。尽管如此，重新考察引理 11，可得以下结论。

▶**推论 12.** 即使在简单超图上，罗马击中函数和罗马击中集也都是 *NP*完全的。此外，标准罗马击中函数和标准罗马击中集是*W*[2]-完全的。

让我们暂且把罗马击中函数和罗马击中集视为最小化问题。我们已经提到，最小 RD 可以在对数因子范围内近似。 [40] 的证明思路可以轻松地推广到罗马击中函数和罗马击中集，从而得到下一个结果；我们还将其与补充的困难性结果结合起来。

▶ **定理 13.** 存在一个多项式时间算法，对于给定的最小 *rhs* 实例 $H=(X,(s_i)_{i\in I})$，输出一个 *rhs* $(R_1,R_2)\in 2^I\times 2^X$，使得 $\omega(R_1,R_2)\leq 2\cdot(\ln(|I|)+1)\cdot \mathit{opt}(H)$。此外，除非 $P=NP$，否则不存在能达到优于 $\frac{1}{2}(\ln(|I|)-o(1))\cdot \mathit{opt}(H)$的近似比的多项式时间算法。

证明。所述算法将在底层简单超图上运行针对击中集的经典贪心算法（或其对偶解释中的集合覆盖；参见 [16]），并得到一个集合族 $C\subseteq X$，它覆盖了 $S=s_i\mid i\in I$。与最优覆盖 C^* 相比，Chvátal [16] 证明了 $|C|\leq(\ln|S|+1)\cdot|C^*|$。显然，$(\emptyset,C)$ 是一个有效的右侧命中集，且 $\omega(\emptyset,C)=2|C|$。反过来，设 $R^*=(R_1^*,R_2^*)$ 是一个最优右侧命中集解，即 $\omega(R^*)=\mathrm{opt}(H)$。通过定义 $C_{R^*}=\phi(R_1^*)\cup R_2^*$，我们可以得到一个有效解，将 H 的解释转化为一个击中集实例；其中，ϕ 应用于诸如 R_1^* 这样的指标集时，会为每个索引 $i\in R_1^*$ 任意选取一个 $s_i\subseteq X$ 中的元素。显然，$|C^*|\leq|C_{R^*}|\leq\omega(R^*)\leq 2\cdot|C_{R^*}|$。将导出的不等式合并起来，并最后注意到 $|S|\leq|I|$，即可得到所述贪心算法近似因子的结论：

$$\omega(R)=2|C|\leq 2\cdot(\ln(|S|)+1)\cdot|C^*|\leq 2\cdot(\ln(|I|)+1)\cdot\omega(R^*)\,.$$

现在，考虑某个针对最小 rhs 的多项式时间近似算法 A，它在给定指标集为 I 的实例时，达到近似比 $r(|I|)$。设 $H=(X,S)$ 是一个简单超图，它是最小击中集的一个实例，且其最优击中集为 $C^* \subseteq X$。我们将其解释为一个最小 rhs 实例，并在其上运行 A，得到某个解 $R=(R_1,R_2)$。与这个最小 rhs 实例的最优解 R^* 相比，我们知道 $\omega(R) \leq r(|S|)\cdot\omega(R^*)$。设 $C_R=\phi(R_1)\cup R_2$，与上文类似。同样，$|C_R|\leq\omega(R)\leq 2\cdot|C_R|$。如果 C_R 达到的近似比优于 $(\ln(|S|)-o(1))\cdot|C^*|$，那么根据 Dinur 和 Steuer [21] 的著名结果，P = NP。但若 $r(|S|)\leq\frac{1}{2}(\ln(|S|)-o(1))$，就会出现这种情况，因为此时我们得到：

$$|C_R|\leq r(|S|)\cdot\omega(R^*)\leq r(|S|)\cdot\omega((\emptyset,C^*))\leq r(|S|)\cdot 2|C^*|\leq(\ln(|S|)-o(1))\cdot|C^*|,$$

因为我们可以再次将最小击中集的解 C^* 解读为一个权重为 $2|C^*|$ 的解 $(\emptyset, C^*)$，显然它并不优于最优的最小 rhs 解 R^*。◀

前述定理中的下界与上界之间显然存在一个小的差距，但关于 [40] 中最小罗马支配的（不可）近似性结果也存在相应的差距，只是没有明确指出这一点。然而，我们的推理以及本节开头给出的归约证明，在这种情况下，乘法差距仍为四。对于最小 RHF，我们也可以得到类似的结果。

▶ **推论 14.** 存在一个多项式时间算法，对于给定的最小 *RHF* 实例 $H=(X,(s_i)_{i\in I})$，输出一个罗马支配函数 $f\in\{0,1,2\}^X$，使得 $\omega(f)\leq 2\cdot(\ln(|I|)+1)\cdot opt(H)$。此外，除非 $P=NP$，否则不存在能达到优于 $\frac{1}{2}(\ln(|I|)-o(1))\cdot opt(H)$ 的近似比的多项式时间算法。

证明与定理 13 的证明相同，但我们的算法得出的结果是 $f\in\{0,1,2\}^X$，其中 $f^{-1}(1)=\emptyset$ 和 $f^{-1}(2)=C$。此外，对于一个罗马支配函数 g，我们定义击中集 $C_g:=f^{-1}(1)\cup f^{-1}(2)$。

结合引理 11 中的构造，我们可以推导出关于无真孪点分裂图上的最小 RD 的同样的不近似性结果，从而强化了此前发表的此类结果。

这两个优化问题的 NP 完全性也促使我们分析扩展问题；这也可能有助于加快用于解决这些判定问题的精确分支算法。

4 极小罗马命中集的组合性质

为了为算法结果铺平道路，我们现在将推导极小右侧命中集的组合刻画，将它们与按包含关系极小的击中集概念紧密联系起来。

▶ **引理 15.** 令 $H=(X,\hat{S}=(s_i)_{i\in I})$ 为一个超图，且 (R_1,R_2) 为一个极小右侧命中集。那么对每个 $i\in I$，$s_i\cap R_2=\emptyset$。

证明。假设存在 H 的一个极小右侧命中集 $R=(R_1,R_2)$，其中有一个 $i\in I$ 满足 $s_i\cap R_2\neq\emptyset$。那么 $R':=(R_1\setminus\{i\}\ R_2)\leq(R_1,R_2)$。由于 $s_i\cap R_2$ 非空，i 被 R' 命中。对于 $j\in I\setminus\{i\}$，s_j 以与被 R 命中相同的方式被 R' 命中。因此，R 不是极小的。◀

▶ **引理 16.** 设 $H=(X,\hat{S}=(s_i)_{i\in I})$ 是一个超图，且 (R_1,R_2) 是一个极小右侧命中集。那么 R_2 是 $H'=(X,(s_i)^{i\in I\setminus R_1})$ 上的极小击中集。

证明。假设存在 H 的一个极小右侧命中集 $R = (R_1, R_2)$，使得 R_2 不是极小击中集。R_2 必须是击中集，否则 R 就不是右侧命中集。这意味着存在一个 $x \in R_2$，使得对每个 $i \in \mathrm{I}(x)$，都存在一个 $y_i \in s_i \cap (R_2 \setminus \{x\})$。定义$R' := (R_1, R_2 \setminus \{x\})$。$I \setminus \mathrm{I}(x)$ 中的索引被 R' 以与被 R 相同的方式击中。由于对于每个 $i \in \mathrm{I}(x)$，$s_i \cap (R_2 \setminus \{x\})$ 都非空，因此 $\mathrm{I}(x)$ 被 R'击中。因此，R' 是一个右侧命中集，而 R不是极小的。◀

▶ **定理 17.** 设 X 为一个顶点集，$S = (s_i)_{i \in I}$ 为一个超边序列。那么，元组 $(R_1, R_2) \leq (I, X)$ 是一个极小右端项，当且仅当满足以下约束：**1.** $\forall i \in R_1 : s_i \cap R_2 = \emptyset$，**2.** R_2 是 $s_i \in S \mid i \in I \setminus R_1$ 上的极小击中集。

证明。该证明的“仅当”部分由引理 15 和 16 得出。对于另一部分，我们假设元组 $R = (R_1, R_2)$ 满足这两个约束。由于 R_2 是 $\{s_i \in S \mid i \in I \setminus R_1\}$ 上的一个极小击中集，对于每个 $i \in I$，i 属于 R_1 或 $s_i \cap R_2$ 均非空。因此，R 是一个右侧命中集。现在假设存在一个极小右端项 $R' = (R'_1, R'_2)$，使得 $R' \leq R$。令$x \in R_2 \setminus R'_2$。那么对于每个 $i \in \mathrm{I}(x)$，要么 $i \in R'_1 \subseteq R_1$（这与第一个约束矛盾），要么 $s_i \cap (R'_2) \subseteq s_i \cap (R_2 \setminus \{x\})$ 非空（这与第二个约束矛盾）。这意味着 $R_2 = R'_2$。令 $i \in R_1 \setminus R'_1$。那么必定存在一个 $x \in s_i \cap R'_2 = s_i \cap R_2$。这与约束 1 矛盾。因此，$R' = R$。◀

▶ 注18。现在我们将这一刻画定理与定理 5 进行比较。因此，设 $G = (V, E)$ 为一个图，$G_{nb} = (V, (N[v])_{v \in V})$ 为相应的闭邻域超图。我们要证明，对于函数 $f\colon V \to \{0, 1, 2\}$，关于 G 的定理 5 中的约束，与关于 G_{nb} 的元组 $R_f = (f^{-1}(1)\ f^{-1}(2))$ 所对应的定理 17 中的约束相同。

首先，我们通过逆否命题证明定理 5 的第一个约束蕴含定理 17 的第一个约束。如果存在 $v \in f^{-1}(1)$ 和 $w \in N[v] \cap f^{-1}(2)$，那么 $N[f^{-1}(2)] \cap f^{-1}(1)$ 就不会是空集。反过来，若存在一个元素$v \in N[f^{-1}(2)] \cap f^{-1}(1)$，则意味着存在一个 $w \in f^{-1}(2) \cap N[v]$。这将与定理 17 中的约束 1 矛盾。因此，在这种情况下，这一约束等价于定理 5 中的约束 1。

其他两个约束的等价性可由以下事实得出：定理 5 中的闭邻域超图 G'_{nb} of $G' = G[V \setminus f^{-1}(1)]$ 可表示为 $(V \setminus f^{-1}(1), (N[v] \setminus f^{-1}(1))_{v \in V \setminus f^{-1}(1)})$。在第 2.3 小节中，我们提到，一个集合是图中的支配集，当且仅当它是其闭邻域超图上的击中集。显然，极小性也同样适用。

5 扩展罗马击中集与 PO-扩展罗马支配

本节将讨论扩展罗马击中集的复杂度。我们利用 PO-扩展罗马支配是多项式时间可解这一事实来进行讨论（见 [3]）。此外，我们还将介绍一种明确的多项式时间算法。

▶**定理 19.** 扩展罗马击中集是多项式时间可解的。

证明。设 $H = (X, \hat{S} = (s_i)_{i \in I})$ 是一个（不一定是简单的）超图，并且 $U = (U_1, U_2) \leq (I, X)$，其中 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$，即 $I = [m]$。定义 $G = (V, E)$ 和 $f \in \{0, 1, 2\}^V$

with

$$V \coloneqq \{a, b\} \cup \{v_1, \ldots, v_n\} \cup \{w_i \mid i \in I\}$$
$$E \coloneqq \binom{\{a, v_1, \ldots, v_n\}}{2} \cup \{\{v_j, w_i\} \mid x_j \in s_i\} \cup \{\{a, b\}\}$$

and, for each $v \in V$,

$$f(v) \coloneqq \begin{cases} 0, & v \in \{b\} \cup \{w_i \mid i \notin U_1\} \cup \{v_j \mid x_j \notin U_2\} \\ 1, & v \in \{w_i \mid i \in U_1\} \\ 2, & v \in \{a\} \cup \{v_j \mid x_j \in U_2\} \end{cases}.$$

注意， G 是一个分裂图，其中团基本上由原超图的顶点构成， v_j 表示 x_j，再加上 a；独立集则由表示超边 s_i的顶点 w_i构成，再加上 b；而 w_i 与 v_j 之间的邻接关系表示s_i 与 x_j的关联关系。

假设存在一个在 G 上满足 $f \leq g$ 的 PO-极小罗马支配函数 g。定义 $R = (R_1, R_2)$，其中 $R_1 \coloneqq \{i \mid f(w_i) \neq 0\}$，且 $R_2 \coloneqq \{x_i \mid f(v_i) = 2\}$。令 $i \notin R_1$。那么存在一个 $v_j \in N(w_i) \cap g^{-1}(2)$。这意味着存在一个 $x_j \in R_2 \cap s_i$。因此， R 是一个右侧命中集。假设存在一个 $i \in R_1$，使得 $(R_1 \setminus \{i\}\ R_2)$ 也是一个右侧命中集。因此，存在一个 $x_j \in s_i \cap R_2$。这将与 g 的 PO-极小性矛盾，因为 $w_i \in f^{-1}(\{1, 2\})$、 $f(v_j) = 2$，且 $N[w_i] \subseteq N[v_j]$（即 $g - \chi_{\{w_i\}}$ 也是一个罗马支配函数）。假设存在一个 $x_j \in R_2$，使得 $(R_1, R_2 \setminus \{x_j\})$ 也是一个右侧命中集。因此，每个满足 $x_j \in s_i$ 的 $i \in I$ 要么属于 R_1，要么存在另一个 $x_{t_i} \in R_2 \cap (s_i \setminus \{x_j\})$。因此，顶点 v_j 没有私有邻点，这意味着 g 不是 PO-极小的。因此，(R_1, R_2) 是一个极小右侧命中集，且 $(U_1, U_2) \leq (R_1, R_2)$。

反之，设 $(R_1,\ R_2)$ 是一个极小右端项，其中 $(U_1,\ U_2) \leq (R_1,\ R_2)$。定义

$$g\colon V \to \{0, 1, 2\},\ v \mapsto \begin{cases} 0, & v \in \{b\} \cup \{w_i \mid i \notin R_1\} \cup \{v_j \mid x_j \notin R_2\} \\ 1, & v \in \{w_i \mid i \in R_1\} \\ 2, & v \in \{a\} \cup \{v_j \mid x_j \in R_2\} \end{cases}.$$

由于 $g(a) = 2$，顶点 a、 b、 $v_1 \ldots$、 v_n 已被支配。由于 (R_1, R_2) 是一个右侧命中集，对于每个 $w_i \in g^{-1}(0)$，存在一个 $v_j \in N(w_i) \cap g^{-1}(2)$。因此， g 是一个罗马支配函数。假设存在一个 $w_i \in g^{-1}(1)$，其在 $v_j \in g^{-1}(2)$ 中有一个邻点。这意味着存在一个 $i \in R_1$，使得 $x_j \in s_i \cap R_2$。但此时，$(R_1 \setminus \{i\}\ R_2)$ 也是一个右侧命中集。接下来只需证明每个 $v \in g^{-1}(2)$ 都有一个私有邻点。根据构造， b 是 a 的一个私有邻点。假设存在一个 $v_j \in V$，使得每个 $u \in N[v_j]$ 都有一个邻点 $t \in (N[u] \cap g^{-1}(2)) \setminus \{v_j\}$。因此，每个 $s_i \in S(x_j)$ 都有一个 $x_z \in (R_2 \cap s_i) \setminus \{x_j\}$。这与定理 17 矛盾。因此， g 是 PO-极小的。◀

设 $G = (V,\ E)$ 为一个图，且 $f\colon V \to \{0,\ 1,\ 2\}$ 为一个映射。 [3] 中的定理 6 表明，若我们在 $H = (V,\ (N[v])_{v \in V})$ 上以元组 $(f^{-1}(1)\ f^{-1}(2))$ 求解 Ext-RHS，则我们就求解了 PO-Ext-RDF 实例 $(G,\ f)$。因此，我们可以将 Ext-RHS 视为 PO-Ext-RDF 的一种推广。

▶ **定理 20**。*算法 1 可在多项式时间内求解实例 $(X, \hat{}S, (R_1, R_2))$ 上的 Ext-RHS。*

证明。 令 $H = (X, (s_i)_{i \in I})$ 为一个超图，并令 $(R_1, R_2) \leq (I, X)$ 为一个元组。假设算法返回 是。则 $R_1 \subseteq M_1$ 且 $R_2 = M_2$，因为我们在开始时将 M_1, M_2 定义为R_1, R_2，并且从不从这些集合中删除任何顶点。此外，我们将每个

算法 1 ExtRHS 算法

```
1: 过程ExtRHS 求解器(X, Ŝ,(R1, R2))
   输入：集合 X, Ŝ := (si)i∈I, (R1, R2) ≤ (I, X)。
   输出：是否存在一个包含 R ≤ M 的极小罗马击中集 M？
2:     对于 x ∈ R2，执行
3:         对于 i ∈ I (x)，执行
4:             如果 i ∈ R1，则
5:                 返回否
6:         如果 I(x) ⊆ I(R2 \ {x}) 那么
7:             不返回任何内容
8:     M1 := R1
9:     M2 := R2
10:    对于 i ∈ I \ (I(M2) ∪ M1) 执行
11:        将 i 添加到 M1。
12:    返回是(M1, M2)
```

来自 $I \setminus (\mathbf{I}(M_2) \cup M_1)$ 的索引放入 M_1。因此，$M = (M_1, M_2)$ 在该算法结束时是一个右侧命中集。现在我们要检查 M 是否为极小。假设存在一个 $i \in R_1$，使得 $s_i \cap M_2 \neq \emptyset$。由于第 10 行的 for循环不会将这样的索引放入 M_1，因此 i 必须属于 R_1。因为 $M_2 = R_2$，第 5 行本会返回否。假设 R_2 不是 $(s_i)_{i \in I \setminus M_1}$ 上的极小击中集。由于 (M_1, M_2) 是一个右侧命中集，M_2 是 $(s_i)_{i \in I \setminus M_1}$ 上的击中集。如果 $M_2 = R_2$ 不是极小的，那么第 7 行将返回否。

假设在 H 上存在一个极小右侧命中集 (P_1, P_2)，满足 $(R_1, R_2) \leq (P_1, P_2)$，但算法返回否。如果算法在第 5 行返回否，那么存在一个 $i \in R_1 \subseteq P_1$，其中有一个 $x \in s_i \cap R_2 \subseteq s_i \cap P_2$。这与定理 17 矛盾。假设算法在第 7 行返回否。那么存在一个 $x \in R_2 \subseteq P_2$，使得对于每个 $i \in \mathbf{I}(x)$，都存在一个$y \in s_i \cap (R_2 \setminus \{x\})$。因此，$P_2$ 不可能是 $(s_i)_{i \in I \setminus P_1}$ 上的极小击中集。由于算法仅在上述情形下返回否，如果输入是一个是实例，那么算法将返回是。◀

我们将在第 11 节说明如何利用这一扩展算法，以多项式延迟枚举所有极小右侧命中集。

6 极小罗马击中函数的组合性质

本节将证明极小罗马支配函数的组合性质。这将帮助我们分析扩展罗马击中函数的复杂度。

▶ **引理 21**。设 X 为顶点集，$\hat{S} = (s_i)_{i \in I}$ 为超边序列，且 $\tau \colon X \to I$ 为对应关系。那么，对于 $X, \hat{S}$ 上的每个极小罗马支配函数 $f \in \{0, 1, 2\}^X$，以及所有 $x, y \in f^{-1}(1)$，若 $x \neq y$，$\tau(x) \neq \tau(y)$ 成立，则 $\tau|_{f^{-1}(1)}$ 为单射。

证明。假设 f 是 X、$\hat{S}$ 和 τ 的一个极小罗马支配函数，且存在 $x, y \in f^{-1}(1)$，使得 $x \neq y$，但 $\tau(x) = \tau(y) = i$。定义 $\tilde{f} = f - \chi_{\{y\}}$。显然，$\tilde{f} \leq f$ 且 $\tilde{f} \neq f$。由于 $f^{-1}(2) = \tilde{f}^{-1}(2)$ 和 $\tau(\tilde{f}^{-1}(1)) = \tau(f^{-1}(1) \setminus \{y\}) = \tau(f^{-1}(1))$ 成立，因此 $\tilde{f}$ 是一个罗马支配函数。这意味着 f 不是极小的，矛盾。◀

XX:16 击中罗马人

▶**引理 22**。设 X 是一个顶点集，$\hat{S}=(s_i)_{i\in I}$ 是一个超边序列，且 $\tau\colon X\to I$ 是一个对应关系。那么，对于 X 的每个极小罗马支配函数 $f\in\{0,1,2\}^X$，$\hat{S}$, τ 以及每个 $x\in f^{-1}(1)$，集合 $s_{\tau(x)}$ 和 $f^{-1}(2)$ 不相交。

证明。假设 f 是 X、$\hat{S}$ 和 τ 的一个极小罗马支配函数，使得存在一个 $x\in f^{-1}(1)$，满足 $s_{\tau(x)}\cap f^{-1}(2)\neq\emptyset$。定义 $\tilde{f}=f-\chi_{\{x\}}$。显然，$\tilde{f}\leq f$ 和 $f\neq\tilde{f}$。根据 $\tilde{f}$ 的定义，我们有 $f^{-1}(2)=\tilde{f}^{-1}(2)$。因此，$s_{\tau(x)}\in \mathrm{S}(\tilde{f}^{-1}(2))$。由于 s_i 对于 $i\in I\setminus\{\tau(x)\}$，被 $\tilde{f}$ 以与被 f 相同的方式在 $\check{}$ 中击中，所以 f 是一个罗马支配函数。这与 f 的极小性矛盾。◀

▶引理 *23*。设 X 为一个顶点集，$\hat{S}=(s_i)_{i\in I}$ 为一个超边序列，且 $\tau\colon X\to I$ 为一个对应关系。那么，对于 X、$\hat{S}$ 上的每个极小罗马支配函数 $f\in\{0,1,2\}^X$，τ, $f^{-1}(2)$ 是 $S'\coloneqq\{s_i\in S\mid i\in I,\tau^{-1}(i)\cap f^{-1}(1)=\emptyset\}$ 上的极小击中集；也就是说，每个 $s_i\in S'$ 都包含一个顶点 x，满足 $f(x)=2$。

证明。假设 $f^{-1}(2)$ 不是 S' 上的极小击中集。如果存在一个未被 $f^{-1}(2)$ 击中的 $s\in S'$，那么 f 就不是罗马支配函数，这与我们的假设矛盾。因此，我们假设 $f^{-1}(2)$ 不是极小的。那么存在一个 $x\in f^{-1}(2)$，使得对于每个满足 $x\in s$ 的 $s\in S'$，都存在一个 $y\in\left(f^{-1}(2)\setminus\{x\}\right)\cap s$.定义 $\tilde{f}=f-2\cdot\chi_{\{x\}}$。令 $i\in I$。根据定义，$\tau(f^{-1}(1))=\tau(\tilde{f}^{-1}(1))$ 成立，因此我们只需考虑 $i\in I\setminus\tau(f^{-1}(1))$。对于满足 $s_i\in \mathrm{S}(f^{-1}(2))\setminus \mathrm{S}(x)$ 的 i，显然 $s_i\cap\tilde{f}^{-1}(2)\neq\emptyset$。如果 $s_i\in \mathrm{S}(x)$，如前所述，存在一个 $y\in\left(f^{-1}(2)\setminus\{x\}\right)\cap s_i=\tilde{f}^{-1}(2)\cap s_i$。这意味着 $\tilde{f}$ 是罗马支配函数，且 f 不是极小的，这与我们的假设矛盾。◀

总之，这三个引理推出如下结论：

▶ **推论 24.** 设 f 是一个极小 *rhf*。对于所有的 $x\in f^{-1}(1)$ 以及所有满足 $s_i=s_{\tau(x)}$ 的 $i\in I$，有 $f^{-1}(1)\cap\tau^{-1}(i)\neq\emptyset$。

▶**引理 25.** 设 X 为一个顶点集，$\hat{S}=(s_i)_{i\in I}$ 为一个超边序列，且 $\tau\colon X\to I$ 为一个对应关系。那么，对于 X、$\hat{S}$、τ 中每个极小 *rhf* $f\in\{0,1,2\}^X$，以及所有的 $x\in f^{-1}(2)$，都存在 $i\in I\setminus\{\tau(x)\}$，使得 $s_i\cap f^{-1}(2)=\{x\}$。

证明。设 f 是一个极小 rhf。假设存在一个 $x\in f^{-1}(2)$，使得对于每个 $i\in I\setminus\{\tau(x)\}$，都有 $s_i\cap f^{-1}(2)\neq\{x\}$。我们要证明 $\tilde{f}=f-\chi_{\{x\}}$ 也是一个 rhf。根据引理 23，存在一个 $i\in I\setminus\tau(f^{-1}(1))$，使得 $s_i\cap f^{-1}(2)=\{x\}$。关于 x 的假设意味着 i 必定是 $\tau(x)$。令 $j\in I$。如果 $x\notin s_j\cap f^{-1}(2)\neq\emptyset$，那么 s_j 被 $\tilde{f}$ 以与被 f 相同的方式击中。索引 $j=\tau(x)$ 被 $\tilde{f}(x)=1$ 击中。对于满足 $j\neq\tau(x)$ 的 $x\in s_j\cap f^{-1}(2)$，除 x 之外，还必须存在另一个 $y\in s_i\cap f^{-1}(2)$。这样就剩下被 $f^{-1}(1)\subseteq\tilde{f}^{-1}(1)$ 击中的索引。因此，$\tilde{f}$ 是一个 rhf。◀

▶**定理 26**。设 X 为一个顶点集，$\hat{S}=(s_i)_{i\in I}$ 为一个超边序列，$\tau\colon X\to I$ 为一个对应关系。那么，函数 $f\in\{0、1、2\}^X$ 是一个极小罗马支配函数，当且仅当以下约束项成立：

0. $\forall x,y\in f^{-1}(1)\colon\ x\neq y\Rightarrow\tau(x)\neq\tau(y)$，1. $\forall x\in f^{-1}(1)\colon\ s_{\tau(x)}\cap f^{-1}(2)=\emptyset$，2. $\forall x\in f^{-1}(2)\ \exists i\in I\setminus\{\tau(x)\}\colon\ s_i\cap f^{-1}(2)=\{x\}$，以及 3. $f^{-1}(2)$ 是 $\{s_i\in S\mid i\in I,\tau^{-1}(i)\cap f^{-1}(1)=\emptyset\}$ 上的一个极小击中集。

证明。必要性部分由引理 22、引理 21、引理 23 和引理 25 得出。

假设 f 满足这些约束。根据约束 3，我们知道对于所有 $i\in I$，要么 $s_i\cap f^{-1}(2)\neq\emptyset$，要么存在一个 $x\in f^{-1}(1)$，使得 $\tau(x)=i$。因此，f 是一个罗马支配函数。令 $g\in\{0,1,2\}^X$ 为一个满足 $g\leq f$ 的极小罗马支配函数。因此，$g^{-1}(2)\subseteq f^{-1}(2)$，且 $\mathrm{S}(g^{-1}(2))\subseteq\mathrm{S}(f^{-1}(2))$

成立。此外，$g^{-1}(1) \subseteq f^{-1}(1) \cup f^{-1}(2)$。由于对于每个 $x \in X$，$\{^{s_{\tau(x)}}\} \subseteq \mathbf{S}(x)$，对于每个 $i \in \tau(g^{-1}(1))$，$i \in \tau(f^{-1}(1))$ 或 $s_i \in \mathbf{S}(f^{-1}(2))$。令 $x \in X$ 为一个满足 $g(x) < f(x)$ 的元素。**情况 1：** $g(x) = 0 < 2 = f(x)$。这意味着，对于每个 $i \in \mathbf{I}(x)$，都存在一个 $y \in s_i$，使得 $2 = g(y) \leq f(y) = 2$，或者 $y \in \tau^{-1}(i) \cap g^{-1}(1) \subset \tau^{-1}(i) \cap (f^{-1}(1) \cup f^{-1}(2))$。这要么与约束 1 矛盾，要么与约束 2 矛盾。

C情况 2： $g(x) = 1 < 2 = f(x)$。这种情况的处理方法类似，但稍微简单一些。我们只需要t排除 $i = \tau(x)$。

情况 2： $f(x) = 1$。这意味着 $g(x) = 0$。由于 g 是一个罗马支配函数，要么 $s_{\tau(x)} \cap g^{-1}(2)$ 非空，要么存在一个 $y \in g^{-1}(1)$，使得 $\tau(x) = \tau(y)$。

情形 2.1： $\tau(x) \cap g^{-1}(2) \neq \emptyset$。由于 $g^{-1}(2) \subseteq f^{-1}(2)$，这与约束 1 矛盾。

情形 2.2： 存在一个 $y \in g^{-1}(1)$，使得 $\tau(x) = \tau(y)$。因此，要么存在一个$y \in f^{-1}(1) \setminus \{x\}$，使得 $\tau(x) = \tau(y)$（这与约束 0 矛盾），要么 $y \in f^{-1}(2)$（这与约束 1 矛盾）。

因此，$g = f$ 成立。所以，f 是极小的。 ◀

▶ 注27。与注18一样，我们将把该定理与定理 4 进行比较。设$G = (V, E)$为一个图，且设 $G_{nb} = (V, (N[v])_{v \in V})$为闭邻域超图。函数 $\tau\colon V \to V$是恒等函数。设 $f\colon V \to \{0,1,2\}$。

由于 τ 是双射，约束 0 对每个 f都成立。接下来我们将证明，f 满足定理 26 的约束 1，当且仅当 f 满足定理 4 的约束 1。假设存在一个 $v \in f^{-1}(1)$，使得 $N[v] \cap f^{-1}(2) \neq \emptyset$。这意味着 $N[f^{-1}(2)] \cap \{v\} \subseteq N[f^{-1}(2)] \cap f^{-1}(1)$ 非空。这与定理 4 的约束 1 矛盾。反过来，若存在一个元素 $v \in N[f^{-1}(2)] \cap f^{-1}(1)$，则意味着存在一个 $w \in f^{-1}(2) \cap N[v]$。这与定理 26 的约束 1 矛盾。

对每个 $v \in f^{-1}(2)$，都存在一个 $u \in V \setminus \{v\}$，使得 $N[u] \cap f^{-1}(2) = \{v\}$，当且仅当 $f^{-1}(2)$ 中的每个顶点都有一个不是自身的私有邻点。我们可以将定理 26 的最后一个约束中出现的集合改写为 $\{N[v] \mid v \in V, \tau^{-1}(v) \cap f^{-1}(1) = \emptyset\} = \{N[v] \mid v \in V, v \notin f^{-1}(1)\}$。这是 $(f^{-1}(\{0, 2\}), (N[v])_{v \in V \setminus f^{-1}(1)})$ 的超边集合。$f^{-1}(2)$ 是该超图的极小击中集，当且仅当它是 $((f^{-1}(\{0, 2\}), (N[v] \setminus f^{-1}(1))_{v \in V \setminus f^{-1}(1)}))$ 的极小击中集；后者是 $G' = G[f^{-1}(\{0, 2\})]$ 的闭邻域超图。因此，在这种情况下，定理 4 和定理 26 的最后一个约束等价。

如果存在一个满足 $f \leq g$ 的极小罗马支配函数 g，则称 $f \in \{0,1,2\}^X$ 可扩展于带有对应关系 τ 的超图 $H = (X, \hat{S})$。

▶ **推论 28.** 设 $H = (X, \hat{S} = (s_i)_{i \in I})$ 是带有对应关系 τ 的超图，且 $f \in \{0, 1, 2\}^X$ 是满足 $x \in f^{-1}(2)$、$y \in f^{-1}(1)$ 和 $x \in s_{\tau(y)}$ 的函数。那么，f 可扩展当且仅当 $f + \chi_{\{y\}}$ 可扩展。

证明。由于 $\leq$ 在 $\mathbb{N}^X$ 上具有传递性，若 $f + \chi_{\{y\}}$ 可扩展，则 f 也可扩展。反过来，假设存在一个满足 $f \leq g$ 的极小罗马支配函数 g。因此，$g(x) = f(x) = 2$，且对于 $x \in f^{-1}(2)$、$y \in f^{-1}(1)$，有 $g(y) \in \{1, 2\}$。根据定理 26 的约束 1，$y \in g^{-1}(2)$，因为 $x \in s_{\tau(y)}$。对于其余的 $z \in X \setminus \{y\}$，成立 $(f + \chi_{\{y\}})(z) = f(z) \leq g(z)$。这意味着 $f + \chi_{\{y\}} \leq g$，因此 $f + \chi_{\{y\}}$ 可扩展。◀

▶ **推论 29. </style}设** $(X, \hat{S} = (s_i)_{i \in I})$ 是一个具有对应关系 τ 且$f \in \{0, 1, 2\}^X$是一个满足 $x, y \in f^{-1}(1)$，$x \neq y$和 $\tau(x) = \tau(y)$的函数。那么，f可扩展，当且仅当 $f + \chi_{\{x,y\}}$ 可扩展。

XX：18 击中罗马人

证明。由于 $\leq$ 在 $\mathbb{N}^X$ 上具有传递性，若 $f+\chi_{\{x,y\}}$ 可扩展，则 f也可扩展。反过来，假设存在一个极小罗马支配函数 g，满足 $f \leq g$。因此， $g(x)$ $g(y) \in \{1,2\}$。根据定理 26 的约束 0，$g(x)=2$ 或 $g(y)=2$。这意味着，如果 f 可扩展，那么 $f+\chi_{\{x\}}$ 或 $f+\chi_{\{y\}}$ 可扩展。两种情况下，我们都可以使用推论 28，并得出结论：若函数 f 可扩展，则 $f+\chi_{\{x,y\}}$ 可扩展。◀

▶定理 30。设 $H=(X, \hat{S}=(s_i)_{i\in I})$ 是一个具有关联 $\tau, \tau: X \to I$ 的超图。设 $f \in \{0,1,2\}^X$ 是一个函数，使得对于每个 $x,y \in f^{-1}(1)$， $x \neq y$ 蕴含 $\tau(x) \neq \tau(y)$。那么，当且仅当存在一个集合 R_2，满足 $f^{-1}(2) \subseteq R_2 \subseteq f^{-1}(1) \cup f^{-1}(2)$，以及一个映射 $\rho: R_2 \to I$，并满足以下约束时， f 是可扩展的。

1. $\forall x \in R_2$： $\rho(x) \neq \tau(x)$。**2.** $\forall x \in R_2$： $s_{\rho(x)} \cap R_2 = \{x\}$。
3. $\forall x \in f^{-1}(1) \setminus R_2$： $\tau(x) \cap R_2 = \emptyset$。**4.** $\forall i \in I$ 使得 $\tau^{-1}(i) = \emptyset$:$s_i \subseteq \left(\bigcup_{x\in f^{-1}(1)\setminus R_2} s_{\tau(x)}\right) \cup \left(\bigcup_{x\in R_2} s_{\rho(x)}\right) \implies s_i \cap R_2 \neq \emptyset$。

证明。定义 $I' := \{i \in I \mid \tau^{-1}(i) = \emptyset\}$。首先，我们假设 f 是可扩展的。令$g \in \{0,1,2\}^X$ 为一个满足 $f \leq g$的极小罗马支配函数。根据引理 23， $g^{-1}(2)$ 是 $\{s_i \in S \mid i \in I, \tau^{-1}(i) \cap f^{-1}(1) = \emptyset\}$ $(*)$ 上的一个极小击中集。由定理 26 的约束 2 可知，对于每个 $x \in g^{-1}(2)$，都存在一个 $\rho(x) \in I \setminus \{\tau(x)\}$，使得 $s_{\rho(x)} \cap g^{-1}(2) = \{x\}$。定义 $R_2 = (f^{-1}(1) \cup f^{-1}(2)) \cap g^{-1}(2)$。显然，$f^{-1}(2) \subseteq R_2 \subseteq f^{-1}(1) \cup f^{-1}(2)$。我们需要验证所声称的关于 R_2 的四个约束。根据 $(*)$，前两个约束甚至在稍微更一般的情形下也成立。如果存在一个 $y \in f^{-1}(1) \setminus R_2 \subseteq g^{-1}(1)$，使得 $\emptyset \neq s_{\tau(y)} \cap R_2 \subseteq s_{\tau(y)} \cap g^{-1}(2)$，那么这就与定理 26 的约束 2 矛盾，从而证明了该定理的第三个约束。现在来看第四个也是最后一个约束。令 $i \in I'$。由于$\tau^{-1}(i) = \emptyset$，必定存在一个 $y \in g^{-1}(2) \cap s_i$。若 $y \in R_2$，则该约束成立。因此，我们可以假设 $y \in g^{-1}(2) \setminus R_2 = g^{-1}(2) \cap f^{-1}(0)$。考虑 $x \in f^{-1}(1) \setminus R_2$。由于 $f \leq g$ 且 $x \notin R_2$，我们有 $g(x) = 1$。根据定理 26 的约束 1， $y \notin s_{\tau(x)}$。如果$s_i \subseteq \left(\bigcup_{x\in f^{-1}(1)\setminus R_2} s_{\tau(x)}\right) \cup \left(\bigcup_{x\in R_2} s_{\rho(x)}\right)$ 且 $s_i \cap R_2 = \emptyset$ 成立，那么这就与$s_{\rho(x)} \cap R_2 = \{x\}$矛盾。因此，所有约束均成立。

现在，令 f、 R_2 和 ρ： $R_2 \to I$ 满足此定理的约束。对于证明的这一部分，我们将定义一个超图 H'，它包含每条满足以下条件的边： $\tau(X)$ 不包含该边的索引，且该边尚未被击中。我们将证明，在 H' 上存在一个极小击中集 D，其中不包含 $s_{\rho(x)}$ 的任何顶点（对于 $x \in R_2$）或 $s_{\tau(x)}$ 的任何顶点（对于 $f^{-1}(1) \setminus R_2$）。 $R_2 \cup D$ 将描述值为 2 的顶点集合。我们将通过给某些顶点赋值 1 来击中剩余的顶点。

因此，我们定义超图 $H' = (X', (s'_i)_{i\in I''})$，其中

$$I'' := I' \cap \{i \in I \mid s_i \cap R_2 = \emptyset\},$$

$$X' := \left(\bigcup_{i\in I''} s_i\right) \setminus \left(\left(\bigcup_{x\in f^{-1}(1)\setminus R_2} s_{\tau(x)}\right) \cup \left(\bigcup_{x\in R_2} s_{\rho(x)}\right)\right)$$

以及 $s'_i := s_i \cap X'$。如果对于某个 $i \in I''$， s'_i 为空，那么在 H'上将不存在任何击中集。因此，我们需要确保不存在这样的索引。令 $i \in I''$。因此， $\tau^{-1}(i) = \emptyset$ 且 $s_i \cap R_2 = \emptyset$。约束 4 蕴含关系的逆否命题表明

$$s_i \not\subseteq \left(\bigcup_{x\in f^{-1}(1)\setminus R_2} s_{\tau(x)}\right) \cup \left(\bigcup_{x\in R_2} s_{\rho(x)}\right).$$

因此，对于每个 $i \in I''$，$s'_i \neq \emptyset$。由此，在 H'上存在一个极小击中集 D。此外，H' 和 D 的构造意味着，对于每个 $i \in I \setminus \mathbf{I}(R_2 \cup D)$，$\tau^{-1}(i)$ 都非空。对于每个 $i \in I \setminus \mathbf{I}(R_2 \cup D)$，除非存在一个 $x_i \in \left(f^{-1}(1) \setminus R_2\right) \cap \tau^{-1}(i)$（根据对 f 的假设，这样的元素至多有一个），否则 x_i 将表示 $\tau^{-1}(i)$ 中的任意一个顶点。在这种情况下，我们选择这个 x_i。

定义 $g \in \{0,1,2\}^X$，其中 $g^{-1}(1) = \{x_i \mid i \in I \setminus \mathbf{I}(R_2 \cup D)\}$，且 $g^{-1}(2) = D \cup R_2$。现在我们将使用定理 26 来证明 g 是一个极小罗马支配函数。根据 $g^{-1}(1)$ 的构造，定理 26 的前两个约束，即约束 0 和约束 1，均得到满足。由于 $g^{-1}(1)$ 命中 $I \setminus \mathbf{I}(D \cup R_2)$ 中的每条边，$\{s_i \mid i \in I, \tau^{-1}(i) \cap g^{-1}(1) = \emptyset\}$ 中的每条超边都被 $g^{-1}(2)$ 命中。由于 D 是极小的，且 $D \cap \left(\cup_{x \in R_2} s_{\rho(x)}\right) = \emptyset$，约束 2 意味着 $D \cup R_2$也是 $\mathbf{I}(D \cup R_2)$ 上的一个极小击中集。定理 26 的其余约束可由 f 的前两个约束以及 H' 和 D的定义推出，因为 H' 只包含满足 $\tau^{-1}(i) = \emptyset$ 的超边 s'_i。◀

▶注 31：设 $H = (X, (s_i)_{i \in I})$ 为具有对应关系 τ 的超图。结合推论 29 和定理 30，我们可以检查函数 $f \in \{0, 1, 2\}^X$ 是否可扩展（因此也可以判断 (H, τ, f) 是否为扩展罗马击中函数的肯定实例）。首先，我们穷举使用推论 29，然后便可以使用定理 30。

▶ 注 32：该定理已经说明了为什么具有满射对应的扩展罗马击中函数（因此 Ext-RDF 也一样）可以在多项式时间内运行。设 $H = (X, (s_i)_{i \in I})$ 为一个超图，且 $f \in \{0, 1, 2\}^X$ 为具有满射对应 τ 的函数。首先，我们可以忽略约束 4，因为对于每个 $i \in I$，$\tau(i) \neq \emptyset$。然后，我们可以使用推论 28 和 29。令 $R_2 := f^{-1}(2)$。根据约束 3，我们必须将 $x \in f^{-1}(1)$ 中的每个元素与 $s_{\tau(x)} \cap R_2 \neq \emptyset$ 一起添加到 R_2 中。这可以在多项式时间内完成（我们将在算法 2 中说明具体方法）。现在，我们可以在多项式时间内检查对于每个 $x \in R_2$ 是否存在满足约束 1 和 2 的 $i_x \in I$。

这也将是我们在下一节中采用的策略。

7 具有满射对应的 Ext-RHF 与 Ext-RDF

本节给出了一个用于具有满射对应函数 τ 的 Ext-RHF 实例的多项式时间算法。在本节末尾，我们将解释如何将该算法视为此前研究过的 Ext-RDF 的一种自然推广 [2]。

▶ **定理 33**。 *算法 2 可在多项式时间内解决满足 $\{i \in I \mid \tau^{-1}(i) = \emptyset\} \subseteq \mathbf{I}\left(g^{-1}(2)\right)$ 的 Ext-RHF 实例 $(X, \hat{S}, \tau, g)$。*

证明。假设算法返回 yes。定义 $f \in \{0,1,2\}^X$，其中 $f^{-1}(0) = X \setminus (M_1 \cup M_2)$、$f^{-1}(1) = M_1$ 以及 $f^{-1}(2) = M_2$。由于我们仅将顶点从 M_1 放入 M_2，以及从 $X \setminus (M_1 \cup M_2)$ 放入 M_1，所以 $g \leq f$ 成立。由于对于每个 $i \in I \setminus \mathbf{I}(M_2) \subseteq I \setminus \mathbf{I}\left(g^{-1}(2)\right)$，$\tau^{-1}(i)$ 都非空，f 是一个罗马支配函数。while 循环结束后，$\tau(M_1) \cap \mathbf{I}(M_2)$ 不再包含任何元素。由于从第 19 行开始的 for 循环仅将元素 $x \in X$ 放入 M_2，因此算法结束时，$\tau(M_1) \cap \mathbf{I}(M_2)$ 为空。第一个 for循环确保 M_1 中的两个不同元素在 τ 下具有不同的值。只有在最后一个 for循环中，我们才将一个元素 x 放入 M_1；该元素具有唯一的 $\tau(x)$，且 $\tau(x)$ 至今尚未被命中。如果存在一个顶点 $x \in M_2$，满足 $\mathbf{I}(x) \setminus \mathbf{I}(M_2 \setminus \{x\}) \subseteq \{\tau(x)\}$，则算法将返回 no。定理 26 意味着 f 是一个极小罗马支配函数。

假设算法返回否，但存在一个包含 $g \leq h$ 的极小罗马支配函数。因此，定理 26 的约束对 h 成立。这意味着 $\mathbf{I}\left(h^{-1}(2)\right) \cap \tau(h^{-1}(1)) = \emptyset$ 和

XX：20 击中罗马人

算法 2 ExtRHF算法

过程ExtRHF求解器(X, $\hat{S}$、τ、g)
输入： 集合 X, $\hat{S}:=(s_i)_{i\in I}$, τ对应函数, $g\in\{0,1,2\}^X$与$\{i\in I \mid \tau^{-1}(i)=\emptyset\}\subseteq$**我** $(g^{-1}(2))$。
输出： 是否存在一个带有 $g\le f$ 的极小罗马命中函数 f？

$M_2:=g^{-1}(2)$
$M_1:=g^{-1}(1)$
对于 $x\in M_1$，**执行**
  对于 $y\in M_1\setminus\{x\}$，**执行**
    若 $\tau(x)=\tau(y)$ **则**
      将 x,y 添加到 M_2，并在 M_1 中删除它们。
      继续处理下一个 x。
$M:=M_2$ { 以下内容中将考虑所有 $x\in f^{-1}(2)$。}
当 $M\neq\emptyset$ **时**
  选择 $x\in M$。
  对于 $y\in\tau^{-1}(\mathbf{I}(x))$ **执行**
    如果 $y\in M_1$ **则**
      将 y 添加到 M_2 和 M中。在 M_1中删除 y。
  从 M中删除 x。
对于 $x\in M_2$ **执行**
  如果 $\mathbf{I}(x)\setminus\mathbf{I}(M_2\setminus\{x\})\subseteq\{\tau(x)\}$ **则**
    返回否
对于 $i\in I\setminus(\mathbf{I}(M_2)\cup\tau(M_1))$ **执行**
  向 M_1 添加一个元素 $x\in\tau^{-1}(i)$。
返回 是 $\{f^{-1}(0)=X\setminus(M_1\cup M_2)\quad f^{-1}(1)=M_1,\quad f^{-1}(2)=M_2\}$

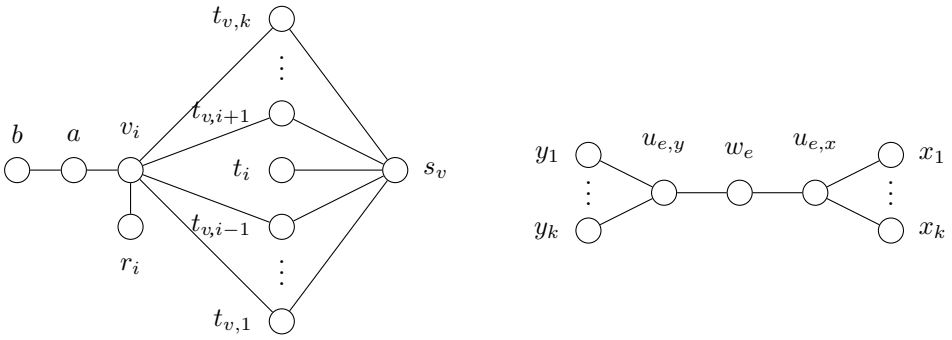
$\tau(x)\neq\tau(y)$ 对每个满足 $x\neq y$ 的 $x,y\in h^{-1}(1)$ 都成立。因此，在第 16 行之前，$M_1\subseteq h^{-1}(1)$ 和 $M_2\subseteq h^{-1}(2)$ 已满足。因此，对于每个 $x\in M_2$，$\mathrm{I}(x)\setminus\mathrm{I}\left(h^{-1}(2)\setminus\{x\}\right)\subseteq\mathrm{I}(x)\setminus\mathrm{I}(M_2\setminus\{x\})=\{\tau(x)\}$ 都成立。因此，h 不是极小罗马支配函数。因此，算法 2 在 $I\setminus\tau(X)\subseteq\mathrm{I}\left(g^{-1}(2)\right)$ 的条件下求解 Ext-RHF。

显然，这些 for循环在多项式时间内运行。由于从第 10 行开始的 while循环在每次迭代中都会从 M 中删除一个顶点，并且不会再次将该顶点放回其中，因此该 while循环只需多项式时间。于是，算法 算法 2 在多项式时间内运行。◀

这意味着以下推论。

▶**推论 34**。 当 τ 为满射时，*Ext-RHF* 是多项式时间可解的。

设 $G=(V,E)$ 为一个图。回顾与 G 相关联的闭邻域超图 G_{nb}，即 $G_{nb}=(V,(N[v])_{v\in V})$。如果我们将该算法与 [4] 中针对 G 的算法 1 进行比较，那么这两个算法的工作方式将相同。由于对应关系 τ 是双射，因此对于每个 $x,y\in X$（其中 $x\neq y$），$\tau(x)\neq\tau(y)$ 成立。因此，从第 4 行开始的 for循环不会改变任何内容。在 while循环中，我们遍历所有 $x\in M_2$，并寻找 $y\in\tau^{-1}(\mathbf{I}(x))\cap M_1$。$\hat{}S$ 的定义本身意味着，我们会将此类 $y\in N[x]$ 的值更新为 $f(y)=2$。[4] 的 ExtRDF算法中也会发生同样的情况。接下来，两个算法都会检查每个值为 2 的顶点是否具有不属于τ-超边的私有边（即不是自身的私有邻点）。最后，算法 2 取一个索引 i



(a) 用于 $v \in V$ 和 $i \in [k]$ 的构造。 **(b)** 用于 $e = \{x, y\} \in E$ 的构造。

图 1 定理 35 的构造部件

未命中，并将 $f(x) = 1$ 设置给一个顶点 $x \in \tau^{-1}(i)$。由于 τ 是单射的，顶点 x 是唯一的。因此，两个算法的工作方式将相同。由此，我们提出的算法将扩展罗马支配的多项式时间可解性推广了。

8 有界扩展罗马支配

本节将讨论扩展罗马支配的一个双侧有界版本，这一版本也是我们的一位同事提出的。

问题名称： 有界扩展罗马支配，简称 bounded-ExtRD**给定：** 一个图 $G = (V, E)$ 以及函数 f，$h \in \{0, 1, 2\}^V$.**问题：** 是否存在一个极小罗马支配函数 $g \in \{0, 1, 2\}^V$，满足 $f \leq g \leq h$?

也就是说，正如我们将在推论 37 中证明的那样，有界扩展罗马支配是 NP完全的。在这种情况下，一种标准做法是寻找固定参数可处理算法。这个问题的一种自然参数化可以是 $\omega(2 - h)$，因为对于 $2 - h = 0$，即 $\omega(2 - h) = 0$，我们就回到了扩展罗马支配这一特殊情形，而该问题已知可在多项式时间内求解。因此，这种参数化可以视为一个“距平凡情形的距离”参数 [31]。然而，正如我们将在定理 35 中证明的那样，这种参数化策略行不通。我们在定理 35 的证明所给出的归约中，利用了著名的、以解的大小为参数的独立集问题的 W[1]-完全性。在该定理中，我们实际讨论的是一种略有不同的参数化，即 $\kappa_{h^{-1}(0)}(G, f, h) := |h^{-1}(0)|$。

▶**定理 35.** *$\kappa_{h^{-1}(0)}$-bounded-ExtRD 即使在二部图上也是 W[1]-困难的。*

证明。 设 $G = (V, E)$ 是一个图，且 $k \in \mathbb{N}$。定义 $G' = (V', E')$ 为

$$\begin{aligned} V' :=& \{a, b\} \cup \{w_e, u_{e,x}, u_{e,y} \mid e = \{x, y\} \in E\} \cup \{r_i \mid i \in [k]\} \cup \{s_v \mid v \in V\} \\ & \cup \{v_i, t_{v,i} \mid v \in V, i \in [k]\}, \\ E' :=& \{\{u_{e,x}, w_e\}, \{u_{e,y}, w_e\}, \{u_{e,x}, x_i\}, \{u_{e,y}, y_i\} \mid e = \{x, y\} \in E, i \in [k]\} \\ & \cup \{\{t_{v,i}, s_v\}, \{t_{v,j}, v_i\}, \{a, v_i\}, \{r_i, v_i\} \mid v \in V,\, i, j \in [k]\,,\, i \neq j\} \cup \{\{a, b\}\}. \end{aligned}$$

图1a和图1b展示了图的部分可能呈现的样子。此外，我们需要映射 $f, h \in \{0, 1, 2\}^{V'}$，其中 $f(z) = 2$ 适用于 $z \in \{a\} \cup \{w_e \mid e \in E\} \cup \{s_v \mid v \in V\}$；$f(z) = 0$ 则适用于其他情况；此外，$h(z) = 0$ 适用于 $z \in \{r_i \mid i \in [k]\}$，而 $h(z) = 2$ 适用于其他情况。

由于 $f(a)=2$，$\{v_i \mid i\in[k], v\in V\}$ 中的所有顶点都被支配了，a 和 b 也被支配了。对于每个 $e=\{x,y\}\in E$，w_e 支配着 $w_e, u_{e,x}, u_{e,y}$。此外，$s_v, t_v, 1, \ldots, t_{v,k}$ 都被 s_v 支配，条件是 $v\in V$。这样还剩下集合 $\{r_i \mid i\in[k]\}$ 有待支配。由于这些邻域两两不相交，对于每个 $i\in[k]$，在一个满足 $f\le g$ 的罗马支配函数 g 中，恰好有一个顶点 $v_i\in N(r_i)=\{v_i \mid v\in V\}$ 的取值必须为 2。这也意味着，对于所有 $z\in V'\setminus\{v_i \mid i\in[k], v\in V\}$，$f(z)=g(z)$，因为 z 将没有私有邻点（或者 $h(z)=0$）。

▷ 命题 36. 存在一个大小为 k 的独立集 I，当且仅当在 G' 上存在一个满足 $f\le g\le h$ 的极小罗马支配函数g。

命题证明。设 $I=\{p^1,\ldots,p^k\}$ 是一个满足 $p^i\neq p^j$ 对 $i,j\in[k]$满足 $i\neq j$的独立集。定义 $g\colon V'\to\{0,1,2\}$ 满足

$$z\mapsto\begin{cases}2, & z\in\{a\}\cup\{w_e \mid e\in E\}\cup\{s_v \mid v\in V\}\cup\{p_i^i \mid i\in[k]\}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}.$$

根据上述论证，g 是一个罗马支配函数。此外，$f\le g\le h$ 成立。假设 g 不是极小的。由于 g 是一个罗马支配函数，并且不存在满足 $g(z)=1$ 的 $z\in V'$，因此必存在一个 $z\in V'$，使得 $N(z)\setminus N[g^{-1}(2)\setminus\{z\}]$ 为空。由于对于 i，$p^i\neq p^j$，满足 $i\neq j$ 的 $j\in[k]$，$t_{p^i,i}$是$s_{p_i^i}$的私有邻点。对于每个 $i\in[k]$，r_i 都是 p_i^i的私有邻点。此外，b 仅被 a支配。假设存在一个 $e=\{x,y\}\in E$，使得 w_e 除了自身之外没有私有邻点。这意味着$u_{e,x}$ 以及$u_{e,y}$被某个 $p_j^j\in\{x_i \mid i\in[k]\}\cap f^{-1}(2)$和 $p_l^l\in\{x_i \mid i\in[k]\}\cap f^{-1}(2)$支配。这与 I的独立性矛盾。因此，g 是极小的。

为证明逆命题，令 g 为 G' 上的极小罗马支配函数，其中 $f\le g\le h$。如前所述，$g^{-1}(2)\setminus f^{-1}(2)=\{d_1^1,\ldots,d_k^k\}$，其中 $d^i\in V$ 对于 $i\in[k]$。定义 $I=\{d^1,\ldots,d^k\}$。假设存在 i、$j\in[k]$，满足 $i\neq j$ 且 $d^i=d^j$。$N(s_{d^i})\subseteq N(\{d_i^i,d_i^j\})$ 意味着 g 一开始就不是极小的。为证明 I 是独立集，假设存在 d^i、$d^j\in I$，使得 $\{d^i,d^j\}=e\in E$。这与极小性矛盾，因为 w_e 除自身外没有私有邻点（$u_{e,d^i}\in N(d^i)$ 且 $u_{e,d^j}\in N(d^j)$）。因此，I 是一个大小为 k 的独立集。◊

至此，归约有效性的证明完成。显然，该归约可在多项式时间内计算。G' 也是二部图，其类为 $A=\{a\}\cup\{u_{e,x} \mid x\in e\in E\}\cup\{t_{v,i}, r_i \mid v\in V, i\in[k]\}$，以及 $B=\{b\}\cup\{w_e \mid e\in E\}\cup\{s_v, v_i \mid v\in V, i\in[k]\}$。可以根据 E 的定义验证这些类，因为在每条边中，A 的顶点都先提及，而 B 的顶点后提及。◄

由于该归约也是一个多项式时间归约，并且通过猜测与检查很容易看出其属于 NP，因此我们可以得出：

▶**推论 37**。*bounded-ExtRD* 即使在二部图上也是 *NP*完全的。

由于在定理 35 的证明中给出的归约将 h 中的顶点均不映射到 1，因此 bounded-Ext-RDF 参数化为 $\kappa_{2-h}(G,\ f,\ h)$ 时是 W[1]-困难的：$=\sum_{v\in V}(2-h(v))$. 具体而言，在定理 35 的构造中，$\kappa_{2-h}(G,\ f,\ h)=2\cdot\kappa_{|h^{-1}(0)|}(G,\ f,\ h)$。

另一种参数化可以是 $\omega(f)$：如果 $\omega(f)=0$，则存在一个极小罗马支配函数 $g\in\{0,\ 1,\ 2\}^V$，使得 $f\le g\le h$ 当且仅当 h 是一个罗马支配函数（这可以在多项式时间内检查）。如果存在这样的 g，那么 h 也是一个罗马支配函数。如果 h 是一个罗马支配函数，那么我们可以降低各顶点的值，直到无法在不丧失罗马支配函数性质的情况下继续降低任何顶点的值为止。

为了理解这个参数的复杂度，我们需要以下击中集的扩展版本。

问题名称：扩展击中集，简称 ExtHS**给定：**一个简单超图 $H = (X, S)$、$S \subseteq 2^X$，以及一个集合 $U \subseteq X$。**问题：**是否存在一个极小击中集 $T \subseteq X$，使得 $U \subseteq T$?

在 [10], 中，已证明当以 $|U|$为参数时，ExtHS 是 W[3]-完全的。

▶**定理 38**。 当以下界函数 f 的权重 $\omega(f)$ 为参数时，*bounded-ExtRD* 在分裂图上是 *W*[3]-困难的。

证明。 令 (X, S, U) 其中 $X = \{x_1, \ldots\ldots, x_n\}$， $S = \{S_1, \ldots\ldots, S_m\} \subseteq 2^X$ 以及 $U \neq \emptyset$ 是 ExtHS 的一个实例。定义 $G = (V, E)$ 其中

$$V := \{c_1, \ldots, c_n\} \cup \{t_1, \ldots, t_m\},$$
$$E := \{\{c_i, t_j\} \mid x_i \in S_j\} \cup \binom{\{c_1, \ldots, c_n\}}{2}.$$

显然， G是一个分裂图。令 $T := \{t_1, \ldots\ldots, t_m\}$， $C := \{c_1, \ldots\ldots, c_n\}$ 以及 $\varphi: X \to C$， $x_i \mapsto c_i$。定义函数 f、$h \in V\{0,1,2\}$，使得 $f(t) = f(c) = h(t) = 0$， $f(u) = h(c) = h(u) = 2$，其中 $u \in \varphi(U)$ $t \in T$， $c \in C \setminus \varphi(U)$。这意味着 $\sum_{v \in V} f(v) = 2 \cdot |U|$.注意到，当且仅当 $\varphi^{-1}(v) \in U$ 时， $f(v) = 2$。

设 H 是一个极小击中集，且 $U \subseteq H$。定义

$$g_H : V \to \{0, 1, 2\}, x \to \begin{cases} 0, & x \in T \cup \{c_i \in C \mid x_i \notin H\} \\ 2, & x \in \{c_i \in C \mid x_i \in H\} = \varphi(H) \end{cases}.$$

$U \subseteq H$和 $g_H(T) = \{0\}$ 对每个 $v \in V$ 都蕴含 $f(v) \leq g_H(v) \leq h(v)$。由于 U非空，g_H 已经支配 C。由于 H 是一个击中集，对每个 $s_j \in S$，都存在一个 $x_i \in S_j \cap H$。因此，对每个 $t_j \in T$，都存在一个 $c_i \in N(t_j)$，使得 $g_H(c_i) = 2$。所以， g_h是一个罗马支配函数。假设存在一个 $c_i \in C$，满足 $g_H(c_i) = 2$，且 $g_H - \chi_{\{c_i\}}$ 也是一个罗马支配函数。这意味着对每个 $t_j \in N(c_i)$，都存在一个 $c_q \in N(t_j) \cap g_H^{-1}(2)$。因此，对每个满足$x_i \in s_j$的 $s_j \in S$，都存在一个 $x_q \in (s_j \cap H) \setminus \{x_i\}$。这与 H的极小性矛盾。因此，g_H是一个极小罗马支配函数。由此，若 (X, S, U) 是 ExtHS 的是实例，则 (G, f, h) 是 bounded-ExtRD 的是实例。

令 g 是 G 上满足 $f \leq g \leq h$ 的一个极小罗马支配函数。定义 $H_g = \varphi^{-1}(C \cap g^{-1}(2)) = \{x_i \mid c_i \in C \wedge g(c_i) = 2\}$。由于对每个 $v \in V$ 都有 $f(v) \leq g(v)$，因此 U 是 H_g的子集。由于对每个 $t_j \in T$ 都有 $g(t_j) = 0$，因此必定存在一个 $c_i \in N(t_j)$，使得 $g(c_i) = 2$。因此， H_g 是一个击中集。假设存在一个 $x_i \in H_g$，使得对于每个满足 $x_i \in S_j$ 的 $S_j \in S$，都存在一个 $x_q \in H_g \subseteq S_j$。因此，对于每个 $t_j \in N(x_i) \cap T$，都存在一个 $c_q \in N(t_i) \setminus \{x_i\}$，使得 $g(c_q) = 2$。这样的 c_q 的存在意味着 c_i 的私有邻点不能属于 C。这与 g 的极小性矛盾。因此，如果 (G, f, h) 是 bounded-ExtRD 的是实例，那么 (X, S, U) 就是 ExtHS 的是实例。◀

由于该归约也是多项式时间归约，且通过猜测并验证很容易看出该问题属于 NP，因此我们可以得出：

▶**推论39**。 *bounded-ExtRD* 在分裂图上是 *NP*完全的。

▶ 备注40。这个结果很有意思，因为我们可以证明，扩展支配集在分裂图上是多项式时间可解的。如上所述，Ext RD 可以在多项式时间内求解，但 Ext DS 是 NP完全的。现在，我们找到了一个图类，在该图类上，有界 Ext RD 是 NP完全的，而 Ext DS 存在多项式时间算法。

如果 T 是一个团，我们之前的证明也同样适用。这一改动不会影响证明，因为对于每个 $t \in T$， $h(t) = 0$ 都成立。由此得到的图是余二部图。因此，我们可以得出以下结果。

▶**推论 41.** *bounded-ExtRD* 在余二部图上是 *NP*完全的。当以权重 $\omega(f)$ 作为参数时，*bounded-ExtRD* 在余二部图上是 *W*[3]-困难的，其中参数为下界函数 f。

下一节讨论 Ext RHF 的（参数化）复杂度时，我们将用到定理 38 的参数化归约。其中给出的归约还将表明，以下界函数的权重为参数的 bounded-ExtRD 属于 W[3]。因此，本节证明的 W[3]-困难性结果将转化为 W[3]-完全性结果。

最后需要指出，对于任意给定的 bounded-ExtRD 实例（G， f， h），我们总可以假设 (1) $f \leq h$，此外，(2) $h(v) = 0$ 蕴含 $h(u) = 2$，其中某个 $u \in N(v)$ 成立。否则，不可能存在一个满足 $f \leq g \leq h$ 的罗马支配函数 g。特别地，如果 $h(v) = 0$，如 $g \leq h$ 所示，那么也有 $g(v) = 0$；而由于 g 应当是一个罗马支配函数，因此对于某个 $u \in N(v)$，有 $g(u) = 2$，从而 $h(u) = 2$，如 $g \leq h$ 所示。这两个条件很容易检验。

9 扩展罗马击中函数的复杂性 I

在本节中，我们将证明，罗马击中函数也存在一些实例，在考虑其标准参数化时，它们是NP完全和 W[3]完全的。对于属于 W[3]，我们使用下面定义的多色独立族（MultIndFam）问题。

问题名称： 多色独立族**给定：** $k+1$（S_1，……，S_k，T）个定义在公共全集 U 上的子集 2^U，即（U，S_1）……，（U，S_k），（U，T）是 $k+1$ 个简单超图。**问题：** 是否存在超边 $s_1 \in S_1$，……，$s_k \in S_k$，使得没有 $t \in T$ 是 $\bigcup_{i=1}^{k} s_i \subseteq U$ 的子集?

已知该问题在以 $k \in \mathbb{N}$ 为参数时是 W[3]完全的（参见 [10, 11]）。由于没有合适的规范性 W[3]完全参数化问题，我们通过归约到 MultIndFam 来证明其属于 W[3]。遗憾的是，这一归约相当技术性。

▶**定理 42.** 标准扩展罗马命中函数属于 *W*[3]。

证明。设 $H = (X, \hat{S} = (s_i)_{i \in I})$ 是一个（不一定简单的）超图，其对应关系为 τ: $X \to I$，并令 f: $X \to \{0, 1, 2\}$ 为函数，它们构成标准扩展罗马命中函数的一个实例。(∗) 我们可以假设不存在两个元素 $x, y \in X$，使得 $f(x) = f(y) = 1$，且 $\tau(x) = \tau(y)$ 或 $f(x) = 2, f(y) = 1$，且 $x \in s_{\tau(y)}$。否则，我们可以使用推论 28 和 29。

接下来，我们将构造一个等价的 MultIndFam 实例。为此，我们将其全集定义为

$$U := X \cup \{r_{i,x}, x' \mid x \in f^{-1}(\{1,2\}), i \in I\} \cup \{\tau_x \mid x \in f^{-1}(1)\}.$$

为了构造超图，我们需要定义一些额外的（辅助）集合：对于 $x \in f^{-1}(\{1,2\})$， $i \in \mathbf{I}(x)$ 表示 $\tilde{s}_{x,i} := s_i \cup \{r_{i,x}, x'\}$。定义 $t_i := s_i \cup \{\tau_x \mid x \in f^{-1}(1) \cap s_i\}$，使得 $i \in I$ 满足 $\tau^{-1}(i)$，且 $s_i \cap f^{-1}(2)$ 为空。

- 对于每个 $x \in f^{-1}(2)$，令 $S_x := \{\tilde{s}_{x,i} \mid \tau(x) \neq i\}$；对于每个 $x \in f^{-1}(1)$，令 $S_x := \{s_{\tau(x)} \cup \{\tau_x\}\} \cup \{\tilde{s}_{x,i} \mid \tau(x) \neq i\}$。此外，我
- 们还需要目标集合 $T = T' \cup T''$，其中

$$T' := \{\, t_i \mid i \in I \wedge \tau^{-1}(i) = \emptyset \wedge s_i \cap f^{-1}(2) = \emptyset \,\} \quad \text{and}$$
$$T' := \left\{\, \{r_{i,x}, y'\} \mid i \in I \wedge \{x,y\} \subseteq (s_i \cap f^{-1}(\{1,2\})) \wedge x \neq y \,\right\}$$
$$\cup \left\{\, \{\tau_x, y'\} \mid x \in g^{-1}(1) \wedge y \in s_{\tau(x)} \wedge x \neq y \,\right\}.$$

现在我们将解释每个元素的含义。需要牢记的是，我们希望使用定理 30：如果 x' 属于一个选定的超边，那么我们就在极小罗马支配函数中为 x 赋值 2。元素 $r_{i,\,x}$ 为我们提供了有关映射 ρ的信息。$r_{i,\,x}$ 属于某条选定的边，当且仅当 $\rho(x) = i$ 成立。因此，集合 $\{r_{i,\,x}, y'\}$ 验证了定理 30 的约束 2。只有当我们为 x赋值 1 时，τ_x 才会属于我们所选择的集合。因此，约束 3 将由集合 $\{\tau_x,\ y\}$进行检验。T' 中的集合对应于我们在约束 4 中考虑的集合。这也是 τ_x 被包含在 t_i中的原因。由于存在一个 τ_x, $f(x) = 1$。如果 $x \in R_2$, $s_i \cap R_2 \neq \emptyset$。在 MultIndFam 实例中，这对应于：$\tau_x$ 不会属于我们的集合，这意味着 t_i 不会被完全覆盖。

▷断言 43. (H, τ, f) 是 Ext RHF 的一个是实例，当且仅当 $(U, (S_x)_{x \in f^{-1}(\{1,2\})}\, T)$ 是多色独立族问题的一个是实例。

命题证明。首先假设 (H, τ, f) 是 Ext RHF 的一个是实例，也就是说，我们需要证明 $(U, (S_x)_{x \in f^{-1}(\{1,2\})}\, T)$ 是 MultIndFam 的一个是实例。为此，我们将使用定理 30，同时牢记观察 (∗)。由于 (H, τ, f) 是 Ext RHF 的一个是实例，因此存在一个集合 $f^{-1}(2) \subseteq R_2 \subseteq f^{-1}(\{1, 2\})$ 和一个映射 $\rho\colon R_2 \to I$，它们满足定理 30 的全部四个约束。对于每个 $x \in R_2$，选择某个 $\tilde{s}_{x,\rho(x)} \in S_x$；对于每个 $x \in f^{-1}(1) \setminus R_2$，选择 $s_{\tau(x)} \cup \{\tau_x\} \in S_x$。我们将证明，从 $(S_x)_{x \in f^{-1}(\{1,2\})}$ 中这样选取超边，能够证明 $(U, (S_x)_{x \in f^{-1}(\{1,2\})}\, T)$ 是 MultIndFam 的一个是实例。为求反证，假设 T 中存在一条超边，它是

$$\mathcal{S} := \left(\bigcup_{x \in R_2} \tilde{s}_{x,\rho(x)} \right) \cup \left(\bigcup_{x \in f^{-1}(1) \setminus R_2} s_{\tau(x)} \cup \{\tau_x\} \right).$$

注意，对于每个 $x \in f^{-1}(\{1, 2\})$，$x' \in \mathcal{S}$当且仅当存在一个 $i \in \mathbf{I}(x)$ 使得$\tilde{s}_{x,i}$ 被选中。因此，x 必须属于 R_2。

如果 T'' 中存在一条包含于$\mathcal{S}$的超边，就会与约束1或2矛盾。现在，考虑 T' 中的一条超边 t_i。因此，存在某个 $i \in I$，满足$t_i \subseteq \mathcal{S}$、$s_i \cap f^{-1}(2) = \emptyset$ 和 $\tau^{-1}(i) = \emptyset$。这意味着

$$s_i \subseteq \left(\bigcup_{x \in f^{-1}(1) \setminus R_2} s_{\tau(x)} \right) \cup \left(\bigcup_{x \in R_2} s_{\rho(x)} \right).$$

此外，$f^{-1}(1) \cap R_2 \cap s_i = \emptyset$，否则就存在一个不属于$\mathcal{S}$的 $\tau_x \in t_i$。这将与约束 4 矛盾。因此，$(U, (S_x)_{x \in f^{-1}(\{1,2\})}\, T)$ 是一个是实例。

对于充分性部分，设对每个 $x \in f^{-1}$，$q_x \in S_x$（{1，2}）都是该 MultIndFam 实例的一个解，也就是说，它们的并集不包含来自 T 的任何超边。定义

$$R_2 := f^{-1}(2) \cup \{x \in f^{-1}(1) \mid \tau_x \notin q_x\}$$

XX:26 击中罗马人

并且，对每个 $x \in R_2$，确定满足 $\tilde{s}_{x,\ \rho(x)} = q_x$ 的 $\rho(x)$。我们再次使用定理 30 以及该刻画定理中提到的四个约束。约束 1 由 R_2 的构造满足。接下来的两个约束也都满足，否则，$\bigcup_{x \in f^{-1}(\{1,\ 2\})} q_x$ 中将包含一个 T'' 的集合。假设存在一个 $j \in I$，使得 $\tau^{-1}(j) = \emptyset$，并且

$$s_j \subseteq \left(\bigcup_{x \in f^{-1}(1) \setminus R_2} s_{\tau(x)} \right) \cup \left(\bigcup_{x \in R_2} s_{\rho(x)} \right).$$

对于每个 $i \in I$，t_i 都不是 $\bigcup_{x \in f^{-1}(\{1,2\})} q_x$ 的子集，因此必定存在某个 $\tau_x \in t_i$，使得 $x \in f^{-1}(1) \cap s_j$ 不属于 $\bigcup_{x \in f^{-1}(\{1,2\})} q_x$。因此，$R_2 \cap s_i \neq \emptyset$. 由此，约束 4 也满足。因此，$(H, f, \tau)$ 是 Ext RHF 的一个是实例。$\Diamond$

接下来的两个结论很容易证明，但要完成证明还需要它们。

▷ 结论 44。给定一个扩展罗马命中集函数实例，可以在多项式时间内构造出上述 MultIndFam 的等价实例。

▷ 结论 45。所构造的 MultIndFam 实例的参数 k 有上界，即不超过 $f^{-1}(\{1, 2\})$ 的基数，因此也不超过 f 的权重；后者是原始 Ext RHF 实例的标准参数。

因此，Ext RHF 属于 W[3]。 ◀

如前一个证明所述，所描述的归约也是多项式时间归约。因此，扩展罗马击中函数属于 NP，不过通过 NP 的猜测并验证刻画也可以（轻易地）看出这一点。对于困难性结果，我们将使用上一节所述的有界扩展罗马支配。

▶**定理 46.** 即使对应函数是单射，标准扩展罗马命中函数仍是 *W*[3]-困难的。

证明。我们将用到定理 38，从 bounded-ExtRD 归约。设 (G, f, h) 是 bounded-ExtRD 的一个实例，其中 $G = (V, E)$。我们可以假设 (1) $f \leq h$，并且 (2) $h(v) = 0$ 蕴含 $h(u) = 2$，其中某个 $u \in N(v)$。我们以 $\omega(f)$ 为参数。对于 $v \in X := V \setminus h^{-1}(0)$，定义 $T_v := \big(N(v) \setminus h^{-1}(\{0, 1\})\big) \cup \{v\}$；对于 $v \in h^{-1}(0)$，定义 $T_v := \big(N(v) \setminus h^{-1}(\{0, 1\})\big)$。此外，我们设 $\hat{S} := (T_v)_{v \in V}$，并定义 τ 为满足 $\tau(v) = v$ 的对应关系；再令 $f\colon X \to \{0, 1, 2\}$ $v \mapsto f(v)$，即 $f = f|_X$。令 $H = (X, \hat{S})$。那么，(H, τ, f) 描述了 Ext RHF 的一个实例。该实例的标准参数是 f 的权重。由于 $f \leq h$，$h(v) = 0$ 蕴含 $f(v) = 0$。因此，$\omega(f) = \omega(f)$，故从 bounded-ExtRD 实例转换为标准扩展罗马命中函数实例时，参数值保持不变。显然，所描述的构造可以在多项式时间内完成。显然，对应关系 τ 是单射。接下来需要证明的是，该构造满足归约性质，即将是实例映射为是实例，并将非实例映射为非实例。

令 g 为 G 上的极小罗马支配函数，且满足 $f \leq g \leq h$。定义 $g\colon X \to \{0, 1, 2\}$ $v \mapsto g(v)$，即 $g = g|_X$。因此，$f \leq g$。令 $v \in V$。对于 $g(v) \in \{1, 2\}$，T_v 被 v命中。若 $g(v) = 0$ 成立，则必存在一个 $w \in N(v)$，使得 $g(w) = 2$。这个 w 命中 T_v。因此，g 是一个罗马支配函数。假设 g 不是极小的。由于 τ 是单射，定理 26 的约束 0 得以满足。因此，必有定理 26 的约束 1、约束 2 或约束 3 的极小性被违反。若约束 1 被违反，则这意味着存在 $v,\ w \in V$，满足

$g(v) = \underline{g}(v) = 2$，$g(w) = \underline{g}(w) = 1$ 以及 $v \in T_w = \big(N(w) \setminus h^{-1}(\{0, 1\})\big) \cup \{w\} \subseteq N[w]$。这与 g 的极小性矛盾，因为我们可以令 $g(w) = 0$，同时仍得到一个罗马支配函数。

考虑约束 2。假设存在一个 $v \in g^{-1}(2)$，使得对于每个 $w \in V \setminus \{v\}$，$T_w \cap g^{-1}(2) \neq \{v\}$ 成立。因此，对于每个 $w \in N(v)$，都存在一个 $u \in (T_w \cap N[w] \cap g^{-1}(2)) \setminus \{v\} \subseteq (N[w] \cap g^{-1}(2)) \setminus \{v\}$。这意味着 g 不是极小的。

关于约束 3，考虑 $\mathrm{T} := \{T_v \mid v \in V, \tau^{-1}(v) \cap g^{-1}(1) = \emptyset\} = \{(N(v) \cap h^{-1}(2)) \cup \{v\} \mid v \in V, g(v) \neq 1\}$。如果 $g(v) = 2$，那么 v 显然命中 $(N(v) \cap h^{-1}(2)) \cup \{v\}$。如果 $g(v) = 0$，那么对于某个 $w \in N(v)$，$g(w) = 2$，因为 g 是 G 的罗马支配函数。如果 $g(w) = 2$，那么 $h(w) = 2$，因此 v 命中 $(N(v) \cap h^{-1}(2)) \cup \{v\}$。因此，$g^{-1}(2)$ 是 T 的击中集。假设存在某个 $z \in g^{-1}(2)$，使得 $g^{-1}(2) \setminus \{z\}$ 也是 T 的击中集。因此，对于每个满足 $z \in T_v$ 的 $T_v \in \mathrm{T}$，都存在某个 $y \in g^{-1}(2) \setminus \{z\}$，使得 $y \in T_v$。如果 $v = z$，那么 $y \in (N(v) \cap h^{-1}(2))$。因此，$h(y) = 2$，进而 $g(y) = 2$。由于在此情形下 $y \in N(z)$，我们可以令 $g(z) = 0$，这可能会得到一个更小的罗马支配函数。现在假设 $v \neq z$。那么，$z \in (N(v) \cap h^{-1}(2))$。考虑 $y \in T_v$。如果 $y = v$，我们可以再次论证，令 $g(z) = 0$ 可能会得到一个更小的罗马支配函数，因为我们找到了某个满足 $g(y) = 2$ 的 $y \in N(z)$。如果 $y \neq v$，那么 $\{y, z\} \subseteq (N(v) \cap h^{-1}(2))$。由于 $h(v) = 2$ 蕴含 $g(v) = 2$，在这第三种情形下，我们也可以令 $g(z) = 0$。总之，在每种情形下，通过令 $g(z) = 0$，我们都能为 G 找到一个比 g 更小的罗马支配函数。这与 g 的极小性矛盾。由定理 26，g 是极小的。

设 $\bar{g}$ 是一个极小罗马支配函数，是实例 (H, τ, f) 的一个解。定义

$$g : V \to \{0, 1, 2\}, v \mapsto \begin{cases} \bar{g}(v), & v \in X, \text{i.e., } h(v) \neq 0 \\ 0, & v \notin X, \text{i.e., } h(v) = 0 \end{cases}.$$

由于 g 扩展了 f，我们有 $\bar{f} \leq \bar{g}$。根据构造，$f \leq h$，因此对于 $v \notin X$，$f(v) = 0$。于是，$f \leq g$。考虑某个 $y \in h^{-1}(1)$。我们证明，此时 $g(y) \leq 1$，这就证明了 $g \leq h$。由于 $y \in h^{-1}(1)$，在 $\hat{S}$ 的所有集合中，只有集合 $T_y = T_{\tau(y)}$ 包含 y。若 $g(y) = 2$，即 $g(y) = 2$，则会与定理 26 的约束 2 矛盾。现在证明 g 是一个罗马支配函数。考虑某个 $v \in g^{-1}(0) = g^{-1}(0) \cup h^{-1}(0)$。若 $v \in h^{-1}(0)$，则必定存在一个 $u \in g^{-1}(2) \cap T_v \subseteq g^{-1}(2) \cap N[v]$，因为不存在满足 $\tau(u) = v$ 的 $u \in X$。若 $v \in g^{-1}(0)$，则 $\tau^{-1}(v)$ 中不存在取值为 (1) 的顶点，因为 $\tau(v) = v$。因此，存在一个 $u \in g^{-1}(2) \cap T_v \subseteq g^{-1}(2) \cap N[v]$。

接下来，我们说明为什么 g 是极小的。假设存在 $v, w \in V$，满足 $g(v) = g(v) = 2$，$g(w) = g(w) = 1$ 且 $\{v, w\} \in E$，这违反了定理 4 的第一条性质。这将与 g 的极小性矛盾，因为 $v \in \big(N(w) \setminus h^{-1}(\{0, 1\})\big) \cup \{w\} = T_w$，而 $g(v) = 2$ 意味着 $h(v) = 2$，由 $g \leq h$ 可知。假设存在一个 $v \in g^{-1}(2) = g^{-1}(2)$，满足 $N[v] \setminus N[g^{-1}(2) \setminus \{v\}] \subseteq \{v\}$，这违反了定理 4 的隐私性质。这意味着，对于每个 $w \in N(v)$，都存在一个 $t \in (N[w] \cap g^{-1}(2)) \subseteq (N(w) \setminus h^{-1}(\{0, 1\})) \cup \{w\}$，满足 $t \neq v$。这与定理 26 的约束 2 矛盾。考虑 $G' := G\big[g^{-1}(0) \cup g^{-1}(2)\big]$。由于 g 是罗马支配函数，$D := g^{-1}(2)$ 是 G' 的支配集。如果 D 不是极小支配集（因而违反定理 4 的最后一条约束），那么必定存在某个 v，满足 $g(v) = 2$，使得 $D \setminus \{v\}$ 也是一个支配集。因此，对于每个 $u \in N[v]$，都存在某个 $v_u \in N[u] \cap (D \setminus \{v\})$。根据构造，对于每个这样的 v_u，都有 $g(v_u) = 2$，因此 $g(v_u) = h(v_u) = 2$ 且 $T_{v_u} \neq \{v_u\}$ (*)。另一方面，由于 g 是极小罗马支配函数，根据定理 26 的最后一条约束，$D = g^{-1}(2) = g^{-1}(2)$ 是 $\mathrm{T} := \{T_x \mid x \in V \setminus g^{-1}(1)\}$ 的极小击中集。由于对所有 $x \in V$，$T_x \subseteq N[x]$，$(D \setminus \{v\})$ 不仅是 G' 的支配集，也是 T 的击中集（由 (*) 可知），这与定理 26 所述的极小性相矛盾。由于已证明，按定理 4 所表述的极小罗马支配函数刻画中所有可能的违反情形都会与我们的假设矛盾，因此我们必须得出结论：g 确实是一个极小罗马支配函数。

◀

由于这也是一个多项式时间归约，因此可得出以下推论。

▶**推论 47**。 扩展罗马击中函数是 *NP*完全的。

10 扩展罗马击中函数 II 的复杂度

我们已经知道，如果对应函数是满射，扩展罗马击中函数可在多项式时间内求解。由于对应函数为单射的扩展罗马击中函数，与一般的击中集问题一样难，因此引出了这样一个问题：对于每个实例 $\mathcal{I}=(H,\tau,f)$ with $H=(V,(s_i)_{i\in I})$，$\tau\colon V\to I$，$f\colon V\to\{0,1,2\}$，$\kappa_1(\mathcal{I})=|\{i\in I|\tau^{-1}(i)=\emptyset\}|$ 是否可以作为该问题的一个良好参数，从而再次衡量与平凡问题的距离？换言之，我们尝试将参数化复杂性作为一种研究手段，用以考察这样一种现象：对于扩展罗马击中函数而言，满射性等经典函数性质似乎是找到多项式时间算法的关键。

▶**定理 48.** κ_1-扩展罗马击中函数是 $W[1]$-困难的。

在证明中，我们利用定理 46 的证明中的归约也是从 κ_1-扩展罗马击中函数到 $\kappa_{h^{-1}(0)}$-bounded-ExtRDF 的固定参数可解归约这一事实，其中 $\kappa_{h^{-1}(0)}(G、f、h):=|h^{-1}(0)|$。

▶**引理 49.** κ_1-扩展罗马击中函数、$\kappa_{h^{-1}(0)}$-*bounded-Ext-RDF*、κ_{2-h}-*bounded-Ext-RDF* 属于 $\in$ *XP*。

证明。 对于 κ_1-扩展罗马击中函数和 $\kappa_{h^{-1}(0)}$-bounded-Ext-RDF，只需证明 κ_1-Ext-RHF 属于 $\in$XP。设 $(H、\tau、f)$ 是一个实例，其中 $H=(X,\hat{}S)$，$\hat{}S=(s_i)_{i\in I}$。这个 XP 算法并不难设计，因为我们可以对 $\{i\in I\ |\tau^{-1}(i)=\emptyset\}$ 中的每个索引进行分支，并尝试用 X 中的一个元素击中边 s_i。如果每条边都被击中，我们就用算法 2 检查是否存在一个大于该函数的极小 rhf。如果算法 2 返回是，我们也可以返回是。否则，我们尝试用另一种方式击中 $S\setminus\tau(X)$ 中的所有边。该算法的运行时间为 $\mathcal{O}(n^{\kappa_1(H、\tau、f)})$。

现在我们考虑 κ_{2-h}-bounded-Ext-RDF。令 (G,f,h) 为一个实例，其中 $G=(V,E)$ 满足 $f\le h$。首先，我们希望设置 $g(x):=2$，对每个顶点 $x\in N(f^{-1}(2))\cap f^{-1}(1)$ 都成立。然而，如果集合 $N(f^{-1}(2))\cap f^{-1}(1)\cap h^{-1}(\{0,1\})$ 非空，我们就会遇到一个平凡否实例，因为对于我们要寻找的解 g，任何满足 $f(x)=2$ 的顶点 x 都满足 $g(x)=2$；此外，满足 $f(y)=1$ 的顶点 $y\in N$ 必须由 g 设为 2，而当 $h(y)\in\{0,1\}$ 时，这种情况被排除。因此，我们可以将 $g(x)$ 设置为 $:=1$，对于 $x\in f^{-1}(1)\cap h^{-1}(1)$ 均如此。完成这些设置后，XP 算法会针对 $h^{-1}(0)$ 中的每个顶点进行分支，并尝试用 $h^{-1}(2)\setminus N(f^{-1}(1)\cap h^{-1}(1))$ 中的一个邻点支配它。由于 $2\cdot|h^{-1}(0)|\le\omega(2-h)$，这样做总共至多有 $n^{\omega(2-h)\choose 2}$ 种可能。对于 g 的每种可能设置，我们将 $g(x)$ 设置为 $:=f(x)$，适用于所有此前尚未定义的顶点 x；随后，运行 [2]，中用于 Ext-RDF 的多项式时间算法，并以 g 作为下界函数。该算法可以正常运行，因为 $h^{-1}(0)$ 中的每个顶点都已被支配（未被支配的顶点正是那些被设为 1 的顶点），并且不存在满足 $N(f^{-1}(2))\cap f^{-1}(1)\cap h^{-1}(1)$ 的顶点。◀

我们将在下文讨论其他几种参数化，它们要么导致参数化 NP-困难结果（见定理 50），要么得到 FPT 结果（见定理 55）。参数化函数记作 κ_Y，其中 Y 指定实例的全集 X 的一个子集 $(X,\hat{}S,f)$，使得 $\kappa_Y(X,\hat{}S,f)=|Y|$。

▶**定理 50**。κ_ζ-扩展罗马击中函数对于由 $\zeta \in \{f^{-1}(0)\ f^{-1}(1)\ f^{-1}(2)\ f^{-1}(\{0,2\})\}$ 描述的每种参数化都是参数化 *NP*-困难的。

证明。对于本证明中给出的所有归约，我们都利用扩展击中集的 NP 完全性。设 $H=(X,\hat{}$ $S=(s_i)_{i\in I})$ 是一个超图，具有 $U\subseteq X, I\cap X=\emptyset$以及一个元素 $a,i_b,i_c\notin X\cup I$。我们定义 $X'=X\cup\{a\}$，$I':=I\cup X$和 $I''=I\cup X\cup\{i_b,i_c\}$。对于每种参数化，我们证明，即使参数取值为零或一，因而是固定的，得到的每个问题也都可以用于求解任意的扩展击中集实例。

首先，我们讨论 $\zeta=f^{-1}(0)$。定义超图 $H'=(X,\hat{}S'=(s'_i)_{i\in I'})$。此外，我们需要 τ: $X\to I', x\mapsto x$，对于 $i\in I'$，我们令

$$s'_i:=\begin{cases}s_i, & i\in I\\ \{i\}, & i\in X\end{cases}\quad\text{and}\quad f:X\to\{0,1,2\}, x\mapsto\begin{cases}2, & x\in U\\ 1, & x\in X\setminus U\end{cases}.$$

这意味着 $|f^{-1}(0)|=0$，即参数值是常数。

▷断言 51。$(H,\ U)$ 是扩展击中集的一个是实例，当且仅当 $(H',\ \tau,\ f)$ 是扩展罗马击中函数的一个是实例。

命题证明。首先，假设存在一个在 H' 上的极小罗马支配函数 g，满足 $\tau\ f\le g$。令$D=g^{-1}(2)$。由于对于每个 $i\in I$，$\tau(i)=\emptyset$，$s_i\cap D$ 非空且 D 是一个击中集。如果存在一个 $x\in D$，使得对于每个 $i\in$ I(x)，存在一个 $y\in s_i\cap(D\setminus\{x\})$，那么这将与定理 26 的约束 2 矛盾。因此，$D$ 是一个极小击中集。

假设存在一个在 H 上的极小击中集 $D\subseteq X$，满足 $U\subseteq D$。定义 g: $X\to\{0,1、2\}$，其中 $g^{-1}(2)=D$ 且 $g^{-1}(1)=X\setminus D$。显然，$f\le g$ 成立。我们将使用定理 26 来证明 g 是一个极小罗马支配函数。τ 的定义蕴含了前两个约束的正确性，即约束 0 和约束 1。由于 D 是 H 上的一个极小击中集，且 H 的每条超边也是 H'的超边，因此约束 2 也成立。剩余约束成立，因为 $X=f^{-1}(\{1、2\})=\tau(f^{-1}(\{1、2\}))$，且 D 是 H 上的一个极小击中集。根据定理 26，g 是一个极小罗马支配函数。◊

接下来，我们来看看由 $|f^{-1}(1)|$ 描述的参数。定义超图$H''=(X',(s''_i)_{i\in I''})$。此外，我们还需要

$$\tau':X'\to I'', x\mapsto\begin{cases}x, & x\in X\\ i_b, & x=a\end{cases},\quad s''_i:=\begin{cases}s_i, & i\in I\\ \{a,i\}, & i\in X\\ X', & i=i_b\\ \{a\}, & i=i_c\end{cases}$$

对于 $i\in I''$。定义 f': $X'\to\{0,1,2\}$，其中 $f'^{-1}(2)=U\cup\{a\}$，且 $f^{-1}(0)=X\setminus U$。因此$|f'^{-1}(1)|=0$，也就是说，参数值是常数。

▷命题 52。(H,U) 是扩展击中集的一个是实例，当且仅当 (H'',τ',f') 是扩展罗马击中函数的一个是实例。

命题证明。首先，假设存在一个定义在 H'' 上的极小罗马支配函数 g，满足 $f'\le g$。定义 $D:=g^{-1}$ $(2)\setminus\{a\}$。由于对于每个 $i\in I$，$\tau'^{-1}(i)=\emptyset$ 非空，且 D 是 H 上的一个击中集。若存在一个 $x\in D$，使得对每个 $i\in$ I(x)，都存在一个 $y\in s_i\cap(D\setminus\{x\})$，则这将与定理 26 的约束 2 矛盾。因此，$D$ 是一个极小击中集。

假设存在一个在 H 上、带有 $U\subseteq D$ 的极小击中集 $D\subseteq X$。定义 g：$\{0,1,2\}^X$，其中 $g^{-1}(2)=D\cup\{a\}$，且 $g^{-1}(0)=X\setminus D$。显然，$f'\le g$ 成立。我们将使用定理 26

XX:30 击中罗马人

来证明 g 是一个极小罗马支配函数。由于 $g^{-1}(1)$ 为空，前两个约束，即约束 0 和约束 1，均得到满足。由于 D 是 H 上的一个极小击中集，且 H 的每条超边也是 H' 的超边，因此约束 2 也成立。对于最后一个约束，我们只需考虑 $i \in I$，因为 $g(a) = 2$。根据 D 是 H 上的一个极小击中集，且只有 a 击中 s''_{i_c}，即可推出定理 26 的最后一个约束。因此， g 是一个极小罗马支配函数。 ◊

基数 $|f^{-1}(2)|$ 描述了我们接下来要考虑的参数。我们将 1
重复使用 H'' 和 τ'。此外，我们需要

$$f'' : X' \to \{0,1,2\}, x \mapsto \begin{cases} 2, & x = a \\ 1, & x \in U \\ 0, & x \in X \setminus U \end{cases}.$$

因此， $|f''^{-1}(2)| = 1$，也就是说，参数值是常数。

▷断言 53. (H, U) 是一个扩展击中集是实例，当且仅当 (H'', τ', f'') 是一个扩展罗马击中函数是实例。

命题证明。我们反复使用推论 28。这意味着 (H'', τ', f'') 是一个扩展罗马击中函数是-˜ ˜实例，当且仅当 (H'', τ', f) 满足 $f(x) = 2$˜ ˜对于 $x \in U \cup \{a\}$，且 $f(x) = 0$对于 $x \in X \setminus U$时，是一个是实例。由于 $f = f'$，此情形由前一种情形推出。◊

最后一种情况是参数 κ_ζ取值为 $\zeta = f^{-1}(\{0, 2\})$。定义超图 $H''' = (X', (s'''_i)_{i \in I''})$。同样，我们重用 τ'。此外，我们需要

$$f''' : X' \to \{0,1,2\}, x \mapsto \begin{cases} 2, & x = a \\ 1, & x \in X \end{cases}, \quad s'''_i := \begin{cases} s_i, & i \in I \\ \{a, i\}, & i \in U \\ \{i\}, & i \in X \setminus U \\ X', & i = i_b \\ \{a\}, & i = i_c \end{cases}$$

for $i \in I'$。这意味着 $|f'''^{-1}(\{0, 2\})| = 1$，也就是说，参数值是常数。

▷断言 54. (H, U) 是扩展击中集的一个是实例，当且仅当 (H''', τ', f''') 是扩展罗马击中函数的一个是实例。

命题证明。首先，我们反复应用推论 28。这意味着 (H''', τ', f''')˜ 是扩展罗马击中函数的一个是实例，当且仅当 (H''', τ', f) 满足˜ ˜$f(x) = 2$for $x \in U \cup \{a\}$ 且 $f(x) = 1$for $x \in X \setminus U$ 时，是扩展˜罗马击中函数的一个是实例。假设在 H''' 上存在一个极小罗马支配函数 g， τ' 满足 $f \leq g$。定义$D = g^{-1}(2) \setminus \{a\}$。由于对每个 $i \in I$（即 $\tau'^{-1}(i) = \emptyset$），$s_i \cap D$ 均非空，因此对于这样的 i，它是非空的。若存在一个 $x \in D$，使得对每个 $i \in \mathrm{I}(x)$，都存在一个 $y \in s_i \cap (D \setminus \{x\})$，则这与定理 26 的约束 2 矛盾。因此， D 是一个极小击中集。

假设在 H 上存在一个带有 $U \subseteq D$ 的极小击中集 $D \subseteq X$ 。定义 $g \in \{0, 1, 2\}^{X'}$，其中 $g(x) = 2$ 对于 $x \in D \cup \{a\}$，而 $g(x) = 1$ 对于 $x \in X \setminus D$。和之前一样，我们使用定理 26 来证明 g 是一个极小罗马支配函数。由于对于每个 $x \in g^{-1}$，都有 $s_{\tau(x)} = \{x\}$ (1) $= X \setminus D \subseteq X \setminus U$，因此前两个约束成立。 D 是 H 上的一个极小击中集这一事实，以及 $s_{i_c} \cap g^{-1}(2) = \{a\}$，意味着约束 2 成立。约束 3 成立，因为 D 是 H 上的一个击中集，并且超边 $(s'''_i)_{i \in I'' \setminus I}$ 被 $\{a\} \cup (X \setminus D)$ 击中。因此， g 是 H''' 的一个极小罗马支配函数。◊

至此，所有参数的讨论均已完成。 ◀

▶ **定理 55.** κ_ζ-扩展罗马击中函数 $\in$ 对 $\zeta = \omega\,(2 - f)$ </style}和({0, 1})}.

证明。为证明此结果，我们将构造一个简单的固定参数算法。设 $(H = (X, \hat{S})\ \tau, f)$ 是一个实例。其思路是遍历所有满足 $f \leq g$ 的函数 $g \in \{0, 1, 2\}^X$，并检验 g 是否为极小罗马支配函数。该算法运行于固定参数时间，因为对于满足 $f(x) = 0$ 的顶点 $x \in X$，有 3 种选择；对于 $x(= 1)$ f，有 2 种选择；而对于 $x(= 2)$ f，只有 1 种选择。此外，我们可以在多项式时间内检查一个函数是否为极小罗马支配函数（只需对算法 2 稍作修改即可构造这样的算法）。因此，存在

$$\begin{aligned}\left(\prod_{x\in f^{-1}(0)} 3\right)\cdot\left(\prod_{x\in f^{-1}(1)} 2\right) &\leq \left(\prod_{x\in f^{-1}(0)} 2^{2-f(x)}\right)\cdot\left(\prod_{x\in f^{-1}(1)} 2^{2-f(x)}\right)\\ &= 2^{\omega(2-f(x))}\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}\left(\prod_{x\in f^{-1}(0)} 3\right)\cdot\left(\prod_{x\in f^{-1}(1)} 2\right) &\leq \left(\prod_{x\in f^{-1}(0)} 3\right)\cdot\left(\prod_{x\in f^{-1}(1)} 3\right)\\ &= 3^{|f^{-1}(\{0,1\})|}\end{aligned}$$

g的许多可能性。 ◀

11 枚举极小罗马击中集

现在我们要枚举所有极小罗马击中集。为此，我们构造一个分支算法。设 $H = (X, \hat{S} = (s_i)_{i\in I})$ 是一个超图。我们构造一个集合$X' \subseteq X$，其中包含所有已经属于 R_2 的顶点，即 $R_2 \subseteq X'$，或者至少可以属于 R_2 的顶点。为此，我们需要元组 (R_1, R_2)，其中 $R_1 \subseteq I$ 包含所有索引，而$R_2 \subseteq X'$ 包含构成我们将要构造的右侧命中集的所有元素。在分支过程中，我们要么将一个 $x \in X'$ 放入 R_2，要么删除 x，这表示以下操作：从 X' 中移除 x，然后也从其所属的所有超边中移除 x。因此，我们可以考虑超图

$$H' := (X', (s_i \cap X')_{i\in I})$$

用于描述计算过程中的“当前超图”。不过，我们会在计算过程中修改超边 s_i，使得始终满足 $s_i \subseteq X'$；但对于原始超边 s_i，我们始终可以将 $s_i \cap X'$ 视为其当前对应项。

我们将 $I' = I \setminus (R_1 \cup \mathbf{I}(R_2))$ 定义为 I 中描述尚未被命中的边的索引集合。这也定义了一个新的函数 $\mathbf{I}'$。如果我们（作为进一步的操作）添加一个 $i \in I'$ 到 R_1，还会从 X'中删除所有 $x \in s_i$，因为如果 i 也在其中，这些顶点就不可能属于极小右侧命中集。

我们的度量定义如下：

$$\mu := \mu(X', \hat{S}', R_1, R_2) := |X' \setminus R_2| + |I'|\,.$$

最初，我们有 $X' = X$、 $I' = I$ 和 $R_2 = \emptyset$，因此在开始时有 $\mu = |X| + |I|$。作为本节的主要结果，我们将证明所有极小右侧命中集都可以在

XX:32 击中罗马人

以多项式延迟在 $\mathcal{O}^*\left(\sqrt[3]{3}^{|X|+|I|}\right)$ 时间内枚举。我们还给出一个超图族作为示例，说明不存在显著更好的枚举算法，因为该族中一个具有 n 个顶点和 m 个索引的超图至少有 $\sqrt[3]{3}^{n+m}$ 个极小右侧命中集。

在每个分支步骤之前，我们会检查在 H' 上是否存在一个极小右侧命中集 (P_1, P_2)，且满足 $(R_1, R_2) \leq (P_1, P_2)$，并尝试使用归约规则。在所有适用的分支规则中，我们将使用编号最小的规则。首先，我们定义一些总是在分支规则之前尝试的归约规则。

▶ **归约规则 1**。 如果存在一个 $x \in X' \setminus R_2$，满足 $\mathbf{I}(x) \subseteq \mathbf{I}(R_2)$，则删除 x。

这个归约规则是正确的，因为如果我们把这样的顶点放入一个包含 R_2 的右侧命中集中，那么根据定理 17，它就不可能是极小的。

▶ **归约规则 2**。 如果存在一个 $i \in I'$ 满足 $s_i = \emptyset$，则将 i 放入 R_1。

该规则的正确性很容易得出，因为 i 必须被击中。

▶ **分支规则 1**。 设 $i \in I'$ 满足 $s_i = \{x\} \subseteq X' \setminus R_2$。那么我们按如下方式分支：**1.** 将 i 加入 R_1 并删除 x。**2.** 将 x 加入 R_2。

▶**引理56**。 分支规则 *1* 的情况区分是完备的。最坏情况分支向量为 $(2,2)$。

证明。 由于 s_i 仅包含 x，$i \in R_1$ 或 $x \in R_2$ 必定成立。根据定理 17 的约束 1，$i \in R_1$ 和 $x \in R_2$ 都不可能成立。因此，我们删除 x，然后根据归约规则 2 将 i 加入 R_1；或者将 x 放入 R_2。无论哪种情况，度量都会减少 2，因为 i 不再属于 I'，并且 x 已从 X' 中删除或被放入 R_2。◀

▶ **分支规则2**。 设 $x \in X'$ 满足 $|\mathbf{I}'(x)| \geq 3$。那么我们按如下方式分支：
1. 将 x 添加到 R_2。
2. 删除 x。

▶**引理57**。 分支规则*2*的情况区分是完备的。最坏情况分支向量为$(4,1)$。

证明。 在此分支情形中，我们根据 x 是否属于解进行分支。这显然构成完备的情况区分。将 x 添加到 R_2后，度量至少减少4，因为所得的 I' 不包含任何包含 x的超边。另一种情况下，度量显然减少1。◀

▶ **分支规则 3**。 设 $x, y \in X'$ 满足$\mathbf{I}'(x) = \{i\}$且 $s_i = \{x, y\}$。于是我们按如下方式进行分支：
1. 将 x 添加到 R_2 并删除 y。**2.** 将 y 添加到 R_2 并删除 x。**3.** 将 i 添加到 R_1 并删除 x 和 y。

▶**引理 58**。 分支规则 *3* 的情况区分是完备的。最坏情况分支向量为 $(3,3,3)$。

证明。 这是一个完整的情况区分，因为 x 和 y 不能同时属于同一个极小右侧命中集$P = (P_1, P_2)$ 其中 $R_1 \subseteq P_1 \subseteq I$ 和 $R_2 \subseteq P_2 \subseteq X'$。若存在这样的极小右侧命中集，那么$R_2 \setminus \{x\}$ 也是 $(s_i)_{i \in I \setminus R_2}$ 上的一个击中集，这与定理 17 的约束 2 矛盾。在每种情况下，i 不再属于 I'，而且 x 和 y 不再属于 $X' \setminus R_2$，因此度量减少 3。◀

▶ **分支规则 4**。 设 $x \in X'$ 满足 $\mathbf{I}'(x) = \{i\}$ 且 $|s_i| \geq 3$。那么我们按如下方式进行分支：
1. 将 x 加入 R_2，并删除 s_i中的其余顶点。**2.** 删除 x。

▶**引理 59**。 分支规则 *4* 的情况区分是完备的。最坏情况分支向量为 $(4, 1)$。

证明。 与引理 58 类似， x 不能属于 R_2 如果 $R_2 \cap s_i$ 中还有另一个顶点。因此，我们可以删除 中的其他顶点 s_i， i 不再属于 I'，并且度量减少 4。另一种情况显然成立。◀

▶ 注 60。从现在起，我们可以假设 $|\mathbf{I}'(x)| = 2$。理由如下。如果 $|\mathbf{I}'(x)| > 2$，分支规则 2 将会触发。对于 $|\mathbf{I}'(x)| = 0$，我们将使用约简规则 1。分支规则 1、3 和 4 处理 $|\mathbf{I}'(x)| = 1$ 的情况，并针对 $\mathbf{I}'(x) = \{i\}$ 中涉及 $|s_i|$的情形进行区分。

我们将利用这一事实分析以下分支规则。

▶ **分支规则 5**。 设 $x, y \in X'$ 满足 $x \neq y$，且 $\mathbf{I}'(x) = \mathbf{I}'(y)$。则我们按如下方式进行分支：
1. 将 x 加入 R_2 并删除 y。
2. 将 y 加入 R_2 并删除 x 。
3. 删除 x和 y。

▶**引理 61**。 分支规则 *5* 的情况区分是完备的。最坏情况分支向量为 $(4, 4,2)$。

证明。不存在这样的极小右侧命中集 (P_1, P_2)，使得 $R_1 \subseteq P_1 \subseteq I$ 且 $R_2 \cup \{x, y\} \subseteq P_2 \subseteq X'$，因为 $(P_1, P_2 \setminus \{x\})$ 也会是一个右侧命中集。因此，这一分支构成了完备的情况区分。在这三种情况下， x 和 y 都使 $X' \setminus R_2$ 保持不变。在前两种情况下，$\mathbf{I}'(x)$ 中的索引不再属于 I'。◀

▶ **分支规则 6**。 设 $i \in I'$ *with* $s_i = \{x, y\}$。那么我们按如下方式进行分支：
1. 将 x 加入 R_2。**2.** 将 y 加入 R_2
并删除 x 。**3.** 将 i 加入 R_1 并删除
x 和 y。

▶**引理 62**。 分支规则 *6* 的情况区分是完备的。最坏情况分支向量为 $(3、4、3)$。

证明。 这是一个非对称分支，我们首先考虑 x 是否属于解。如果不是，那么我们考虑 y。如果这两个顶点都不属于解，我们就必须将 i加入 R_1。因此，这是一个完备的情况区分。根据注 60， $|\mathbf{I}'(x)| = |\mathbf{I}'(y)| = 2$。因此，将 x 或 y 放入 R_2 会导致两个索引离开 I'。因此，我们得到分支向量$(3、4、3)$。◀

▶ **分支规则 7**。 设 $i \in I'$ 满足 $s_i = \{x, y, z\}$。然后我们按如下方式进行分支：
1. 添加 x 到 R_2。**2.** 添加 y 到 R_2
并删除 x。**3.** 添加 z 到 R_2 并删除 x，
y。**4.** 添加 i 到 R_1 并删除 x， y 和 z。

XX:34 击中罗马人

Rule	分支向量	分支数
1	(2，2)	$\sqrt{2} \leq 1.4143$
2 & 4	(4，1)	1.3803
3	(3,3,3)	$\sqrt[3]{3} \leq 1.4423$
5	(4，4，2)	$\sqrt{2} \leq 1.4143$
6	(3，4，3)	1.3954
7	(3，4，5，4)	1.4253
8	(1、4、8)	1.4271

表 1 Branc　　枚举最小　　mal 右侧命中集。

▶**引理 63**。 分支规则 7 的情况区分是完备的。最坏情况分支向量为 (3、4、5、4)。

证明。 这是一个非对称分支，与分支规则 6 中的情况相同（但多了一种情况：如果 x, y 不属于 R_2，我们就在 z上进行分支）。我们也可以用类似的方法得到分支向量。◀

▶注 64. 现在起，我们可以假设对每个 $i \in I'$ 都有 $|s_i| \geq 4$ 。此外，对于$x, y \in X'$ 且满足 $x \neq y$ 的情况，$\mathbf{I}'(x) \neq \mathbf{I}'(y)$。这些性质可以如下看出。情况 $|s_i| = 0$ 由归约规则 2 处理。分支规则 1 考虑情况 $|s_i| = 1$。从这里开始，我们可以使用注 60。分支规则 6 处理 $|s_i| = 2$ ，分支规则 7 处理 $|s_i| = 3$。此外，根据分支规则 5，我们可以假设对于 $x, y \in X'$ 且满足 $x \neq y$ 的情况，$\mathbf{I}'(x) \neq \mathbf{I}'(y)$。

▶ **分支规则 8**。 令 $x \in X'$ 满足 $\mathbf{I}'(x) = \{i, j\}$，且 $y \in s_i \setminus \{x\}$ 满足 $\mathbf{I}'(y) = \{i, k\}$。那么我们按如下方式进行分支：
1. 删除 x。2. 将 x 添加到 R_2 并删除 y。3. 将 x、y 添加到 R_2 并删除 $s_k \setminus \{y\}$中的所有元素。

▶**引理 65**。 分支规则 8 的情况区分是完备的。最坏情况分支向量为 (1,4,8)。

证明。 这是一个非对称分支。为分析此分支，我们将该分支规则拆分为两部分。首先，我们对 x 进行分支。若 x 不属于 R_2，度量减少 1。若 x 属于 R_2，度量减少 3，因为 i、j 不再属于 I'。在这种情况下，我们在第一部分之后使用分支规则 4，因为 $|\mathbf{I}'(y)| = 1$ 。在此处使用分支规则 4 时，分支向量为 (1,5)，因为 $|s_k| \geq 4$ （根据注 64）。这得出分支向量$(1,4,8)$。◀

▶注 66. 可以证明，这条分支规则甚至具有分支向量 (1，4，10)，因为在最后一种情况下，$R_2 \cap (s_j \setminus \{x\})$ 必须为空。要对这个分支向量进行更精细的分析很困难，因为 s_j 和 s_k 不一定互不相交。此外，这个分支向量并非最差的，我们已经可以使用分支向量 (1，4，8) 来证明紧确界，该界由 (3，3，3) 给出，见定理 70。

▶**推论 67.** 该分支算法是完整的情况区分。

证明。 注 60 和注 64 表明 $|I'(x)| = 2$ 对于每个 $x \in X' \setminus R_2$ 以及对于每个$i \in I'$, $|s_i| \geq 4$。由于分支规则 5 确保两个元素不能位于同一超边中，其余情况由分支规则 8 处理。◀

▶ **定理 68。** 对于超图 $H = (X, (s_i)_{i\in I})$ 其中 $|X| = n$ 且 $|I| = m$，所有极小右侧命中集都可以在 $O^*(\sqrt[3]{3}^{n+m})$ 时间内通过多项式延迟和多项式空间枚举。

证明。 根据推论 67，分支算法对每种可能性都有一条分支规则。如果我们计算表 1 中提到的分支向量的分支数，就得到 $\mathcal{O}^*(\sqrt[3]{3}^{n+m})$ 作为该算法在最坏情况下的运行时间。

This l叶子到 s how that the al算法hm 次运行 h pol项式 l del间和 d pol项式 l空间。分支算法本身使用多项式空间，唯一潜在的问题在于重复枚举解，因为这会迫使我们存储先前的结果。因此，我们接下来证明，不存在被重复计数的极小右侧命中集。分支规则 1、2 和 4 通过将 x 放入 R_2 或将其删除来进行分支。由于我们之后绝不会改变这类决策，这些分支规则可以避免我们重复枚举任何极小右侧命中集。其余分支也会产生相同效果（但伴有一些副作用），因为它们只是非对称分支，在某些情况下我们会再次进行分支。

关于多项式延迟，知道我们的分支算法不会再次输出解也很有帮助。现在，唯一潜在的问题是，算法在深入不存在极小右侧命中集解的子分支时会耗费指数时间。我们通过调用多项式时间扩展检查程序来避免这一点。为此，我们只需证明，对 H' 所描述的受限实例进行处理就足够了。我们在最后一个断言中证明了这一点，从而结束了论证。

▷ 命题 69. 设 $H = (X, (s_i)_{i\in I})$ 是一个超图， $R_1 \subseteq I$ 且 $R_2 \subseteq X' \subseteq X$。那么，存在一个扩展罗马击中集的解 (P_1, P_2)，其给定条件为 H， R_1， R_2，当且仅当$P_2 \subseteq X'$ 存在一个扩展罗马击中集的解，其给定条件为$H' = (X', (s_i \cap X')_{i\in I})$ R_1， R_2。

命题证明。设 $P_2 \subseteq X'$。那么，对于每个 $i \in I$，都有 $P_2 \cap (X' \cap s_i) = P_2 \cap s_i$。因此，$(P_1, P_2)$ 命中 H 当且仅当它命中 H'。根据这一观察，容易验证，(P_1, P_2) 是扩展罗马击中集问题的一个解，其条件为 H, R_1, R_2，当且仅当它是扩展罗马击中集问题的一个解，其条件为 H', R_1, R_2。◊

因此，如果我们使用带参数 X'、$(s_i \cap X')_{i\in I}$、 $R = (R_1$、 $R_2)$ 的算法 1，就会检查是否存在满足 $R \leq P$ 和 $P_2 \subseteq X'$ 的极小右侧命中集 $P = (P_1$、 $P_2)$。由于我们在每次分支后都会进行检查，并且每条规则都会增加 R，因此我们会检查该分支是否会枚举出一个极小右侧命中集。如果得到否定答案，我们就可以返回，无需深入分支算法的递归。由于分支次数至多为 $|X| + |I|$，分支树的每条路径上只需多项式时间，从而保证多项式延迟。◀

接下来，我们证明我们的（相对简单的）枚举算法在如下意义上是最优的：忽略运行时间中的多项式因子，任何算法都必须在某些实例上花费所声称的时间。

▶ **定理 70。** 存在一个超图 $H = (X, (s_i)_{i\in I})$，其极小右侧命中集至少有 $\sqrt[3]{3}^{|X|+|I|}$ 个。

证明。定义 $X=\{x_1,\ldots,x_{2n}\}$ 和 $I=\{1,\ldots,n\}$，其中对每个 $i\in I$，都有 $s_i=\{x_{2i-1},x_{2i}\}$。对于每个 $i\in I$，用极小右侧命中集 R_1,R_2 命中 i 有三种方式：$x_{2i-1}\in R_2$ 或$x_{2i}\in R_2$或 $i\in I$。由于集合 $s_1,\ldots,s_n$ 两两不相交，因此对每个 $i\in I$，每个 x_{2i-1}和 x_{2i} 不能同时属于 R_2，并且命中一条超边的方式不会影响命中另一条超边的方式。因此，极小右侧命中集有 $3^n=\sqrt[3]{3^{3n}}=\sqrt[3]{3^{|X|+|I|}}$ 个。◀

既然我们已经构造出了一个用于枚举极小右侧命中集的枚举算法，那么下一个问题可能是：是否存在一个能够以多项式延迟枚举极小罗马支配函数的枚举算法。我们不知道是否存在这样的算法，但可以证明以下定理。

▶**定理 71**。如果存在一个算法，能够以多项式延迟枚举实例（H、τ）的所有极小罗马支配函数，那么就存在一个能够以多项式延迟枚举超图 H' 的所有极小击中集的算法。

证明。设 $H=(X,(s_i)_{i\in I})$ 为一个超图。我们将使用与 H'' 定理 50 的证明中相同的超图构造。回顾一下，我们定义了 $X'=X\cup\{a\}$ 和$I''=I\cup\{i_b,i_c\}$ 以及超图 $H''=(X',(s''_i)_{i\in I''})$。此外，我们还需要

$$\tau':X'\to I'',x\mapsto\begin{cases}x,&x\in X\\ i_b,&x=a\end{cases},\quad s''_i:=\begin{cases}s_i,&i\in I\\ \{a,i\},&i\in X\\ X',&i=i_b\\ \{a\},&i=i_c\end{cases}$$

对于 $i\in I''$。由于 $\tau^{-1}(i_c)=\emptyset$且 $s''_{i_c}=\{a\}$，$f(a)=2$对每个罗马支配函数 f 都成立：$X'\to\{0,1,2\}$。因此，对于每个极小罗马支配函数 f：$X'\to\{0,1,2\}$且 $x\in X,f(x)\neq 1$，否则就与定理 26 的约束 1 矛盾。因此，对于 H''的每个极小罗马支配函数 f，$f^{-1}(1)$都是空的。

我们将证明，在 H 的极小击中集与 H''的极小罗马支配函数之间存在一个双射函数 T。该函数将每个极小击中集 D 映射为 $g:X'\to\{0,1,2\}$，其中 $g^{-1}(0)=X\setminus D$，$g^{-1}(2)=\{a\}\cup D$。在定理 50 的证明中，我们已经证明 g 是 H''的一个极小罗马支配函数。逆函数将极小罗马支配函数 g 映射为 $g^{-1}(2)\setminus\{a\}$，根据定理 50 的证明，这是一个极小击中集。由于我们可以在多项式时间内计算极小击中集和极小罗马支配函数 g 的 $T(D)$及 $T^{-1}(g)$，故定理成立。◀

该归约将“rhf 枚举是否能够以多项式延迟进行”这一问题，与“极小击中集是否能够以多项式延迟枚举”这一问题联系起来。因此，根据前述定理，我们可以说，假设 HSTT，[3] 不存在用于极小 rhf 的多项式延迟枚举算法。请注意，我们给出的论证采用的是保数归约。在枚举复杂性领域中使用这类归约的想法显然并不新颖；我们仅引用 [12, 18, 34, 38, 44] 以便对这一领域有一个初步了解。

12 用于优化 Roman 击中集的分支算法

本节将介绍一种可返回最小右侧命中集的简单分支算法。设$H=(X,(s_i)_{i\in I})$为一个超图。我们将重用

[3] 第 1 节中引入的一个假设

第 11 节中的分支算法思路（包括集合 X'、I'、R_1、R_2，以及度量 μ 和归约规则 2）。我们还将在算法中加入以最小 $|R_2|$ 寻找最小右侧命中集的思路。这一思路也启发了我们的下一条归约规则。

▶ **归约规则 3. </style}如果存在一个 \满足 $\mathbf{I}'(x)| \leq 2$，则删除 x。**

▶**引理 72.** 归约规则 *3* 是可靠的。

证明。设 $H = (X, (s_i)_{i \in I})$ 是一个超图，且 (R_1, R_2) 是一个最小右侧命中集，其中存在一个 $x \in R_2$ 满足 $\mathbf{I}(x) = \{i, j\}$（$i = j$ 可能成立）。那么，$(R_1 \cup \{i, j\}\ R_2 \setminus \{x\})$ 也是一个右侧命中集，且 $\omega(R_1 \cup \{i, j\}\ R_2 \setminus \{x\}) \leq \omega(R_1, R_2)$。◀

▶ **归约规则 4.** 如果存在一个 $x \in X' \setminus R_2$ 满足 $|\{i \in I' \mid s_i = \{x\}\}| \leq 3$，则将 x 放入 R_2。

该归约规则的正确性源于以下事实：将集合 $\{i \in I' \mid s_i = \{x\}\}$ 中的所有超边放入 R_1 的成本高于将 x 放入 R_2（在这种情况下，我们还可能命中更多的边）。

▶ **分支规则 9。** 设 $x \in X'$ 满足 $|\mathbf{I}'(x)| = 3$。那么我们进行如下分支：
1. 删除 x。2. 将 x 添加到 R_2 中，并从 $\bigcup_{i \in \mathbf{I}'(x)} s_i$ 中删除所有顶点。

▶**引理 73。** 分支规则 *9* 的情况区分是完备的。最坏情况分支向量为 $(1,5)$。

证明。设 $H = (X, (s_i)_{i \in I})$ 是一个超图，且 (R_1, R_2) 是一个最小右侧命中集。为证明这是一个完备的情况区分，假设存在一个 $x \in R_2$，满足 $\mathbf{I}(x) = \{i_1, i_2, i_3\}$，且 $|\mathbf{I}(x)| = 3$ 以及 $|s_{i_1} \cap R_2| = 2$。那么，$(R_1', R_2') = (R_1 \cup \{i_2, i_3\}\ R_2 \setminus \{x\})$ 也是一个右侧命中集（i_1 由 $s_{i_1} \cap (R_2 \setminus \{x\})$ 中剩余的元素命中，而 i_2, i_3 会自行命中）。此外，$\omega(R_1', R_2') \leq \omega(R_1, R_2)$。因此，这是一个完备的情况区分。

对于第一个分支，度量显然减少 1。考虑第二个分支。根据归约规则 4，我们知道 $\left(\bigcup_{i \in \mathbf{I}(x)} s_i\right) \setminus \{x\}$ 非空。因此，两个元素从 $X' \setminus R_2$ 中移出，且三条超边从 I' 中移出。因此，度量减少 5。◀

▶ **分支规则10。** 设 $x \in X'$ 满足 $|\mathbf{I}'(x)| \geq 4$。然后我们按如下方式进行分支：
1. 将 x 加入 R_2。
2. 删除 x。

完备性和分支向量可仿照分支规则2得出。

▶**推论74。** 分支规则*10*的情况区分是完备的。最坏情况分支向量为 $(5,1)$。

▶ **定理75。** 对于超图 $H = (X, (s_i)_{i \in I})$，若满足 $|X| = n$ 和 $|I| = m$，则可在 $O(1.3248^{n+m})$ 时间内使用多项式空间计算一个最小右侧命中集。

证明。 我们首先检查该分支算法是否涵盖了所有情况。根据归约规则 2，我们知道 I' 中不存在空超边。这意味着至少存在一个元素 $x \in X'$。$|\mathbf{I}'(x)| \leq 2$ 会触发归约规则 3。归约规则 4 和分支规则 9 处理情况 $|\mathbf{I}'(x)| = 3$。其余情况由分支规则10涵盖。

由于分支规则 9 和分支规则10 是仅有的分支规则，且二者的分支向量均为 (1，5)，因此运行时间为 $\mathcal{O}(1.3248^{n+m})$。归约规则 4 和分支规则 9 处理满足 $|\mathbf{I}'(x)| = 3$ 的 $x \in X'$。其余情况由分支规则 10 处理。

◀

▶ 备注 76。利用闭邻域超图，可得最小罗马支配在 n 个顶点的图上的运行时间为$\mathcal{O}(1.76^n)$。这显然优于平凡的 $\mathcal{O}^*(2^n)$ 算法，也优于枚举全部 $\mathcal{O}(1.94^n)$ 个极小罗马支配函数；参见 [2], 。但它逊于基于部分支配集问题的算法，正如 [36, 41, 42], 所建议的那样，其运行时间（和空间）为$\mathcal{O}(1.51^n)$。不过，我们提出的算法及其分析都非常简单，显然仍有改进空间。例如，我们在分析中没有采用任何测度与征服技术。尽管如此，我们认为这种方法很有前景。另请回想，在采用测度与征服技术研究最小集合覆盖后，最小支配集精确算法取得了突破；参见 [28, 29]。这一研究方向留待未来探索。

13 应用

在本节中，我们将讨论罗马击中集的应用。首先，我们将利用这样一个事实：扩展罗马击中集可以在多项式时间内求解，从而证明扩展支配集在分裂图上可以在多项式时间内求解。之后，我们将为那些以击中集为推广的问题定义更多罗马版本。

13.1 分裂图上的扩展支配集

▶**定理 77.** 扩展支配集在分裂图上可以在多项式时间内求解。

证明。我们将给出一个归约到扩展罗马击中集的方法。为此，设$G = (V, E)$是一个分裂图，其中 V划分为一个团 C 和一个独立集 I。我们可以假设 C 中的每个顶点在 I中至少有一个邻点。否则，我们将该顶点从 C 移入 I。设 G 和 $U \subseteq V$ 为扩展支配集问题的输入。定义超图 $H = (C, (N(i))_{i\in I})$和 $U' = (U \cap I, U \cap V)$。

▷命题 78. $(G,\ U)$ 是扩展支配集的一个是实例，当且仅当 $(H,\ U')$ 是扩展罗马击中集的一个是实例。

命题证明。设 $D \subseteq V$ 是 G 的一个包含意义下极小支配集，且满足$U \subseteq D$。接着，定义 $R = (D \cap I, D \cap C)$。显然， $U' \leq R$。由于 D是支配集且 I是独立集，对于每个 $i \in I \setminus D = I \setminus (D \cap I)$，存在一个 $c \in N(i) \cap D \subseteq C \cap D$。因此，$R$是一个右侧命中集。由于对每个 $i \in I$都有 $N[i] \subseteq N[c]$，且 $c \in N(i)$，根据 D 的极小性可知，对每个 $i \in D \cap I$，都有 $N[i] \cap (D \cap C) = N(i) \cap D = \emptyset$。如果 $D \cap C$不是 $\{N(i) \mid i \in I \setminus D\}$ 上的极小击中集，那么存在一个 $x \in D \cap C$，使得对每个 $i \in N(x) \cap I$，都存在一个 $y \in N(i) \cap ((D \cap C) \setminus \{x\})$。因此， x在 I 中没有私有邻点。根据 $N(x) \cap I \neq \emptyset$，$D \cap C$ 至少包含两个顶点。因此， x 在 C中没有私有邻点，这与 D的极小性矛盾。因此，定理 17 蕴含 R的极小性。

现在假设存在一个 H 的极小右侧命中集 $R = (R_1, R_2)$，且满足 $U' \leq R$。定义 $D = R_1 \cup R_2$。若 $R_2 = D \cap C$ 为空，则 $I = R_1$。由于对于所有 $x \in C$， $N(x) \cap I \neq \emptyset$，这是一个支配集。此外， D 是极小的，因为每个 $i \in I = R_1$ 都是其自身的私有邻点。现在假设 $R_2 = D \cap C$ 非空。因此， C 中的所有顶点都被支配。对于每个 $i \in I$，要么 $i \in R_1$，要么存在一个 $c \in N(i) \cap R_2 = N(i) \cap D$，因此 I 也被支配。所以， D 是一个支配集。根据约束 1，我们已经知道每个 $i \in R_1$ 在 $N(i) = N(i) \cap R_2 = N(i) \cap D$ 中都没有邻点，并且是其自身的私有邻点。此外， R_2 是 $\{N(i) \mid i \in I \setminus R_1\}$ 上的一个极小击中集。因此，每个 $x \in R_2$ 在 $I \setminus R_1$ 中都有一个私有邻点。由此， D 是一个极小支配集。◊

该归约也是一个多项式时间归约。因此，我们可以使用算法 1 来求解分裂图上的扩展支配集问题。◀

这是一个有趣的结果，因为已知 [15] 在相关的二部图类上，扩展支配集问题是 NP 完全的。据我们所知，目前还没有关于余二部图的类似结果。

但是，已知 [34], 当且仅当在余二部图上不存在以多项式延迟枚举极小支配集的算法时，HSTT 才成立。该证明的构造也可用于证明，在余二部图上，扩展支配集问题是 NP 完全的（若以预解的大小为参数，则是 W[3] 完全的）。为便于查阅，我们将这一结果明确表述如下。

▶**推论 79**。 即使在余二部图上，扩展支配集问题仍是 *NP* 完全的；若以预解的大小为参数，则是 *W*[3] 完全的。

13.2 其他问题的罗马版本

除了支配集，还有许多问题可以用击中集来推广。其他例子包括顶点覆盖和边覆盖。设 $G=(V,\ E)$ 是一个图。若对每个 $e\in E,\ C\subseteq V$都非空，我们就称 $C\subseteq V$ 为顶点覆盖。换句话说，当且仅当 C 是超图 $(V,\ (e)_{e\in E})$ 的击中集时， $C\subseteq V$ 才是顶点覆盖。若对每个 $v\in V$，$\mathbf{E}(v)\cap C\neq\emptyset$，且 $\mathbf{E}(v):=\{e\in E\mid v\in e\}$，则集合 $C\subseteq E$ 是边覆盖。因此，当且仅当 $C\subseteq E$ 是 $(E,\ (\mathbf{E}(v))_{v\in V})$ 上的击中集时，它才是边覆盖。在这些问题的语境中，我们称之为覆盖，而非击中。

问题名称：顶点覆盖，简称 VC**给定：**一个图 $G=(V,\ E)$ 以及 $k\in\mathbb{N}$**问题：**是否存在一个顶点覆盖 $C\subseteq V$，满足 $|C|\leq k$?

问题名称：边覆盖，简称 EC**给定：**一个图 $G=(V,\ E)$ 以及 $k\in\mathbb{N}$ **问题：**是否存在一个边覆盖 $C\subseteq E$，满足 $|C|\leq k$?

既然我们已经将罗马支配推广到了击中集，就可以利用这一点定义罗马顶点覆盖和罗马边覆盖等问题。对于这些新问题，我们将使用右侧命中集，但也可以使用罗马支配函数来定义。

设 $G=(V,\ E)$ 是一个图。若对于每个 $e\in E,\ e\in R_1$ 或 $R_2\cap e$ 都非空，则称元组 $(R_1,\ R_2)\leq(E,\ V)$ 为一个罗马顶点覆盖。若对于每个 $v\in V,\ v\in R_1$ 或 $R_2\cap\mathbf{E}(v)\neq\emptyset$，则称元组 $(R_1,\ R_2)\leq(V,\ E)$ 为一个罗马边覆盖。

问题名称：罗马顶点覆盖，简称 RVC**给定：**一个图 $G=(V,E)$ 和 $k\in\mathbb{N}$**问题：**是否存在一个罗马顶点覆盖 $(R_1,R_2)\subseteq E\times V$，使得 $\omega(R_1,R_2)\leq k$?

问题名称：罗马边覆盖，简称 REC**给定：**一个图 $G=(V,E)$ 和 $k\in\mathbb{N}$**问题：**是否存在一个罗马边覆盖 $(R_1,R_2)\subseteq V\times E$，使得 $\omega(R_1,R_2)\leq k$?

▶**引理 80**。设 $G=(V,E)$ 是一个图。对于每个罗马边覆盖 $(R_1,R_2)\leq(V,E)$,$\omega(R_1,R_2)\leq|V|$。

证明。 设 $G=(V,E)$ 是一个图。设 (R_1,R_2) 是 G的罗马边覆盖。定义

XX:40 击中罗马人

$V(R_2) \coloneqq \bigcup_{e\in R_2} e$. 每个 $e \in E$ 都恰好属于 $\mathbf{E}(v)$ 中的两个 $v \in V$。因此，

$$|V(R_2)| = \left|\bigcup_{e\in R_2} e\right| \leq \sum_{e\in R_2} |e| = 2 \cdot |R_2|.$$

由于 $V = R_1 \cup V(R_2)$ 是罗马边覆盖，

$$\omega(R_1, R_2) = |R_1| + 2 \cdot |R_2| \geq |R_1| + |V(R_2)| \geq |V|.$$

这证明了该断言。 ◀

由于对于每个满足 $\omega(V, \emptyset) = |V|$ 的图 $G = (V, E)$，$(V, \emptyset)$ 都是罗马边覆盖，因此它也是一个最优解。所以罗马边覆盖成为一个相当简单的问题，我们只需检查参数 k 是否小于 $|V|$。

▶**推论 81.** 罗马边覆盖可在对数空间内求解。

▶**定理 82.** 罗马顶点覆盖是 *NP*完全问题。

证明。由于罗马顶点覆盖的每个实例也是罗马击中集的一个实例，因此可直接得出其属于 NP。对于困难性，我们将使用顶点覆盖问题。设 $G = (V, E)$ 是一个图，且 $k \in \mathbb{N}$。定义图 $G' = (V', E')$，其中 $V' \coloneqq \{v, v' \mid v \in V\}$ $E' \coloneqq E \cup \{\{v, v'\} \mid v \in V\}$。显然，这是一个多项式时间归约，因为 G' 有 $2 \cdot |V|$ 个顶点和 $|V| + |E|$ 条边。接下来只需证明：当且仅当 G 上存在一个大小为 $|C| \leq k$ 的顶点覆盖 $C \subseteq V$ 时，G' 上存在一个满足 $\omega(R_1, R_2) \leq k + |V|$的罗马顶点覆盖 (R_1, R_2)。

设 $C \subseteq V$是 G 上大小为 $|C| \leq k$的一个顶点覆盖。接着定义 (R_1, C)，其中 $R_1 \coloneqq \{\{v, v'\} \mid v \notin C\}$。由于 C 是 G上的一个顶点覆盖，因此对于每个 $e \in E$，$C \cap e$ 都非空。对于 $v \in C$，$v \in \{v, v'\} \cap C$；对于 $v \notin C$，$\{v, v'\} \in R_1$。因此，(R_1, C) 是罗马顶点覆盖，满足 $\omega(R_1, C) = |V \setminus C| + 2 \cdot (|C|) \leq k + |V|$。

设 (R_1, R_2) 是 G' 上的罗马顶点覆盖，且 $\omega(R_1, R_2) \leq k + |V|$。若存在一个 $v \in V$ 满足 $v' \in R_2$，则 $(R_1 \cup \{\{v, v'\}\}\ R_2 \setminus \{v'\})$ 是一个权重更小的罗马顶点覆盖（因为 v' 只属于边 $\{v, v'\}$）。因此，我们可以假设 $R_2 \cap \{v' \mid v \in V\} = \emptyset$。对于每个 $v \in V$，要覆盖 $\{v, v'\}$，这条边必须属于 R_1 或 $v \in R_2$。此外，我们可以假设这两种情况不会同时成立。否则，$(R_1 \setminus \{\{v, v'\}\}\ R_2)$ 将是一个权重更小的罗马顶点覆盖。设 $\{v, u\} \in R_1 \cap E$。若 $v \in R_2$ 或 $u \in R_2$，则 $(R_1 \setminus \{\{v, u\}\}\ R_2)$ 将是一个权重更小的罗马顶点覆盖。因此，我们可以假设$v, u \notin R_2$。于是，$\{v, v'\} \in R_1$。元组 $(R_1', R_2') = (R_1 \setminus \{\{v, u\}, \{v, v'\}\}\ R_2 \cup \{v\})$ 也是一个罗马顶点覆盖，因为除 $\{v, u\}$、$\{v, v'\}$ 之外的每条边都以与 (R_1, R_2) 相同的方式覆盖，而其余边则由 v 覆盖。此外，$\omega(R_1, R_2) = \omega(R_1', R_2')$。因此，我们可以假设 $R_1 \cap E = \emptyset$。这意味着 $R_2 \subseteq V$ 是 G 和 $|R_1| + |R_2| = |V| = |R_1| + 2 \cdot |R_2| - k$ 的顶点覆盖。因此，R_2 是一个权重为 $|R_2| = k$ 的顶点覆盖。

◀

如我们所见，罗马顶点覆盖是 NP完全问题，接下来我们将展示一种关于解大小的固定参数可解时间算法。

▶**定理83.** 若按解的权重上界进行参数化，算法*3*可在固定参数可解时间内求解罗马顶点覆盖。 d 通过解的权重上界。

证明。 我们将对 k 进行归纳法，以证明此定理。对于 $k = 0$，显然成立，因为 $(\emptyset, \emptyset)$是权重为 0 的唯一元组。只有在不存在

算法3 RVC 固定参数可处理时间求解器

1: 程序 RVC Solver($G=(V,E)$ k) 输入：图 G, $k\in\mathbb{N}$。输出：是否存在一个罗马顶点覆盖 (R_1,R_2)，使得 $\omega(R_1,R_2)\leq k$? 2: 如果 $E=\emptyset$ 或 $|E|=k=1$ 则 3: 返回是 4: 如果 $k=0<|E|$ 或 $k=1<|E|$ 则 5: 返回否 6: 令 $e=\{v,u\}\in E$7: 如果 RVC Solver(($V\setminus\{v\}$, $\{e\in E\mid v\notin e\}$) $k-2$) 则 8: 返回是 9: 如果 RVC SolverRVC Solver(($V\setminus\{u\}$, $\{e\in E\mid u\notin e\}$) $k-2$) 则 10: 返回是 11: 返回 RVC Solver(($V,E\setminus\{e\}$) $k-1$)

要覆盖的边。唯一满足 $\omega(R_1,\ R_2)=1$ 的元组 $(R_1,\ R_2)$ 是包含 $|R_1|=1$ 和 $R_2=\emptyset$ 的元组。这些元组只能覆盖一条边。因此，我们在前两个 if 代码块中的情况区分是正确的。

假设对于某些 $k-1$ 和 $k\in\mathbb{N}$，该算法运行正确。

设 e 是第 6 行中的边。该边必须被覆盖。这可以通过三种方式实现：$v\in R_2$、$u\in R_2$ 或 $e\in R_1$。在前两种情况下，权重预算减少 2，并且所有包含 v 或 u 的边都被覆盖。在剩余情况下，权重预算减少 1，仅覆盖 e。因此，该算法运行正确。由于该分支是一个 (1，2，2) 分支，并且前两种情况可以在线性时间内计算，因此该算法的运行时间为 $\mathcal{O}(2^k\cdot|E|)$。◀

▶ 备注 84. 我们可以给出一个非常相似的算法，在相同的时间界 O*(2^k) 内枚举所有大小至多为 k 的极小罗马顶点覆盖：算法不再回答“是”，而是直接输出该解。此外，我们也可以将分支重新解释为：要么将 v 放入 R_2，要么不放；若不放，则要么将 u 放入 R_2，要么不放。在最后一种情况下，根据归约规则 2，将这条边放入 R_1，这一做法在此处的讨论中同样有效。由此可知，不会有任何解被重复枚举。此外，我们可以在枚举过程中加入定理 68 中的扩展测试，从而在多项式空间的基础上保证多项式延迟。因此，我们得到一个固定参数可解时间、多项式延迟且多项式空间的算法，用于枚举所有大小至多为 k 的极小罗马顶点覆盖。在此语境下，定理 70 可以重新解释为一组 P_2，即孤立边。因此，这个例子表明，一般而言，我们可能会遇到需要 O*(2^k) 枚举时间的实例。

所有这些都应与 [19, 25] 中讨论的极小顶点覆盖参数化枚举相关已知结果进行比较。有趣的是，枚举时间较差的例子与我们的罗马设定相吻合。不过，在多项式延迟方面，极小顶点覆盖枚举比罗马情形更差，因为与顶点覆盖相关的扩展问题是 NP 完全的，即使在相当受限的图类中也是如此，参见 [14]（这个问题最早由 Damaschke 提出 [19]）。

▶ 注释 85。如果声称为单个顶点或单条边“负责”所需承担的要求较低，那么相应需要付出的代价也低于为多个顶点或多条边“负责”的顶点，就可以用一种不那么好战的方式来阐释罗马支配和罗马顶点覆盖。若

忽略这一差异，即所有代价都相同，那么我们就从罗马支配转向支配集，从罗马顶点覆盖转向 Damaschke [20]称之为带遗漏边的顶点覆盖的问题。然而，后一个问题作为一个参数的优化问题是“无趣的”，因为它显然归结为顶点覆盖。因此，Damaschke 考虑了二参数变体：最多可以删除 m 条边，从而得到一个其边可由至多 k 个顶点覆盖的图。这种方法就确实类似于罗马顶点覆盖。

▶注86。我们可以设想一种不同的函数 $f\colon V \to \{0, 1, 2\}$ 的解释：对于图 $G = (V, E)$，顶点 $x \in V$若存在顶点 $y \in N[x]$满足 $f(y) = 1$，则可以花费 1 来防御；若存在顶点 $y \in N[N[x]]$满足 $f(y) = 2$，则可以花费 2 来防御。这种解释的出发点是，与其计算军队数量，不如对成本建模，同时仍以某种防御情景为背景，因为移动到距离更远的位置成本更高。我们称 $f\colon V \to \{0, 1, 2\}$ 为防御函数，条件是图中的每个顶点都受到防御。至于极小性的概念，只有对序 $0 < 1 < 2$ 作逐点扩张才有意义。现在，我们可以问：给定图 $G = (V, E)$ 和某个函数 $f\colon V \to \{0, 1, 2\}$，是否存在满足 $f \leq g$ 的极小防御函数 $g\colon V \to \{0, 1, 2\}$？我们也可以要求枚举所有极小防御函数。通过将这些问题与罗马击中集联系起来，两者都可以高效求解（也就是说，分别可在多项式时间内求解，或以多项式延迟进行枚举）。

首先，观察一个简单的归约规则：如果 G 包含真孪生顶点 u，v 且 $N[u] = N[v]$，那么我们可以移除其中一个。也就是说，如果 u 被权重为 1 的顶点支配，那么 v 同样被权重为 1 的顶点支配。如果 u 被某个顶点 y 在距离2内支配，那么就存在某个顶点 $x \in N(u) \cap N(y)$。现在，$x \neq v$便可推出，因为如果 $y \in N(x)$，那么 $y \in N(u)$，因为 u和 v是真孪生顶点，这与我们关于 u 和 y 之间距离为二的假设矛盾。因此，v被 y 在距离2内支配。类似的论证也适用于讨论某个顶点被例如 v 在距离1或2内支配时的情况。此时，u 也可以接替 v的角色。因此，下面我们可以假设 G 不包含真孪生顶点。

由于 G没有真孪生顶点，我们可以通过 $N[x]$为所有集合 $N[N[x]]$建立索引，因为 V与 I之间存在一个双射 $N := \{N[x] \mid x \in V\}$。因此，我们得到超图$H = (V, (N[i])_{i \in I})$。现在请注意，$H$上的一个右侧命中集（rhs）$(R_1, R_2)$对应于 G的一个防御函数 f，其中 $\omega(f) = \omega(R_1, R_2)$。

对防御函数的一种不那么军事化的理解，是设计一个国家的消防站覆盖方案，其中有两种类型的消防站：配备直升机的和不配备直升机的。不配备直升机的消防站成本更低（成本为1），而配备直升机的消防站成本为2。不过，配备直升机后，在我们的模型图中还可以到达“距离2”的地点。在这里，我们甚至可以看到另一个说明列出所有极小解为何有意义的动机：也许在提出这个模型之后，又出现了其他限制条件和条件；例如，由于并非每种事故都能由汽车处理，你希望对于任意顶点，在距离不超过4的范围内都有一架直升机。通过查看所有极小防御函数，可以筛选出这些附加约束。如果一些配备直升机的消防站已经建成，我们就会面临另一种扩展问题。

前面的评论也表明，本文研究的主题不仅具有纯粹的理论意义，还有不少可能适用的场景。此外，它还证明，本文引入的超图模型可用于刻画实际情境中可能出现的具体问题。

14 结论

我们从两个方面将罗马支配的概念推广到了超图。罗马击中集问题的行为与罗马支配颇为相似，它也具有多项式时间可判定的扩展版本，因此存在多项式延迟枚举算法。对于罗马击中函数，维持这些良好性质的关键在于对应函数的满射性。这可以视为对我们所提出问题的一种技术性回答：就多项式延迟可枚举性而言，是什么导致罗马支配的行为不同于经典支配？当对应关系不是满射时，罗马击中函数的行为则更像支配集；特别是，以给定预解的权重作为参数时，其扩展问题是 W[3]-完全的。我们还观察到，在这种情况下，若假设**击中集横截猜想 (HSTT)**，则无法枚举所有极小解。

本文背景下的主要开放问题如下：我们能否基于其他更广为人知或经典的计算复杂性假设来建立 HSTT？这可能与另一个自然问题有关：多项式延迟枚举的（不可）行性，与相关扩展问题的（不可）行性（就 P 与 NP 的意义而言）之间的关联有多紧密？本文所研究的问题中，这种关联相当紧密。但一般而言，只有一个方向是明确的：如果可以在多项式时间内判定可扩展性，那么就能以多项式延迟进行枚举。 [4]我们也不知道，所讨论的多项式延迟可枚举性问题是否确实等价于极小击中集的多项式延迟可枚举性。一个具体的技术问题，或许是缩小本文所述所有罗马优化问题的近似算法与不可近似结果之间的差距。我们在引言中提到，罗马支配在采用对偶方式进行参数化时属于 固定参数可解，在本例中，参数为 $n-k$，其中 n 是图的顶点数，而 k 是罗马支配函数权重的上界。若能针对本文引入的罗马支配的两种推广得到类似结果，或许会很有意义。不过，目前还不太清楚标准参数化的“对偶”应当是什么。

我们目前正在寻找能够在多项式时间内求解有界扩展罗马支配的非平凡图类。

参考资料

1 Abu-Khzam, F.N., Bazgan, C., Chopin, M., Fernau, H.: 改进近似算法的数据规约与组合界。《Journal of Computer and System Sciences》**82**(3), 503–520 (2016)2 Abu-Khzam, F.N., Fernau, H., Mann, K.: 极小罗马支配函数：扩展与枚举。载于：Bekos, M.A., Kaufmann, M.（编）《Graph-Theoretic Concepts in Computer Science》—第48届国际研讨会 WG。计算机科学讲义，第13453卷，第1–15页。Springer（2022）。https://doi.org/10.1007/978-3-031-15914-5_1

[4] 在 [12, 18, 38, 44] 中还提出了与枚举复杂性和经典复杂度相关的更一般问题（并对其中一部分进行了回答）。

XX：44 击中罗马人

3 Abu-Khzam, F.N., Fernau, H., Mann, K.: 极小罗马支配函数：扩展与枚举。技术报告 2204.04765，康奈尔大学，ArXiv/CoRR（2022），https: //doi.org/10.48550/arXiv.2204.04765 4 Abu-Khzam, F.N., Fernau, H., Mann, K.: 罗马普查：图类上罗马支配函数的枚举与计数。技术报告 2208.05261，康奈尔大学，ArXiv/CoRR（2022），https://arxiv.org/abs/2208.05261 5 Acharya, B.D.: 超图中的支配。AKCE国际图论与组合学杂志 4(2), 117–126 (2007) 6 Arquilla, J.: 从闪电战到比特战：军事与计算机的交锋。《Communications of the ACM》54(10), 58–65 (2011) 7 Arquilla, J., Fredricksen, H.: “绘制”最优大战略。《军事运筹学》第3–17页（1995年秋），http://hdl.handle.net/10945/38438 8 Bermudo, S., Fernau, H.: 更小的核的组合学：图的差分。《Theoretical Computer Science》562, 330–345 (2015) 9 Bermudo, S., Fernau, H., Sigarreta, J.M.: 图的差分与罗马支配数。《应用分析与离散数学》8, 155–171 (2014) 10 Bläsius, T., Friedrich, T., Lischeid, J., Meeks, K., Schirneck, M.: 高效枚举数据剖析中产生的超图击中集。载于：算法工程与实验（ALENEX）。第130–143页。SIAM（2019）11 Bläsius, T., Friedrich, T., Lischeid, J., Meeks, K., Schirneck, M.: 高效枚举数据剖析中产生的超图击中集。《Journal of Computer and System Sciences》124, 192–213 (2022) 12 Capelli, F., Strozecki, Y.: 增量延迟枚举：空间与时间。《离散应用数学》268, 179–190 (2019) 13 Casel, K., Fernau, H., Ghadikolaei, M.K., Monnot, J., Sikora, F.: 若干边图问题的扩展：标准复杂度与参数化复杂度。载于：Gasieniec, L.A., Jansson, J., Levcopoulos, C.（编）《计算理论基础》—第22届国际研讨会 FCT。计算机科学讲义，第11651卷，第185–200页。Springer（2019）14 Casel, K., Fernau, H., Ghadikolaei, M.K., Monnot, J., Sikora, F.: 若干图类中顶点覆盖与独立集的扩展。载于：Heggernes, P.（编）《算法与复杂性》—第11届国际会议 CIAC。计算机科学讲义，第11485卷，第124–136页。Springer（2019），https://doi.org/10.1007/978-3-030-17402-6_1115 Casel, K., Fernau, H., Ghadikolaei, M.K., Monnot, J., Sikora, F.: 优化问题解扩展的复杂性。《Theoretical Computer Science》904, 48–65 (2022)。https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.tcs.2021.10.017 16 Chvátal, V.: 集合覆盖问题的贪心启发式。《Mathematics of Operations Research》4(3), 233–235 (1979) 17 Cockayne, E.J., Dreyer Jr., P., Hedetniemi, S.M., Hedetniemi, S.T.: 图中的罗马支配。《Discrete Mathematics》278, 11–22 (2004) 18 Creignou, N., Kröll, M., Pichler, R., Skritek, S., Vollmer, H.: 困难枚举问题的复杂性理论。《离散应用数学》268, 191–209 (2019) 19 Damaschke, P.: 参数化枚举、横截集与不完美系统发育重建。《Theoretical Computer Science》351(3), 337–350 (2006) 20 Damaschke, P.: 两参数FPT问题的帕累托复杂性：以部分顶点覆盖为例。载于：Chen, J., Fomin, F.V.（编）《参数化与精确计算》第4届国际研讨会 IWPEC。计算机科学讲义，第5917卷，第110–121页。Springer（2009）21 Dinur, I., Steurer, D.: 并行重复的分析方法。载于：Shmoys, D.B.（编）《计算理论研讨会》STOC。第624–633页。ACM（2014）22 Downey, R.G., Fellows, M.R.:《参数化复杂性基础》。计算机科学丛书，Springer（2013）23 Dreyer, P.A.:《图支配的应用与变体》。博士论文，罗格斯大学，新泽西州，美国（2000）

24 Eiter, T., Gottlob, G.：识别超图的极小横截集及相关问题。《SIAM计算杂志》24(6), 1278–1304 (1995) 25 Fernau, H.：论参数化枚举。载于：Ibarra, O.H., Zhang, L. (编)《计算与组合学》，COCOON 2002论文集。计算机科学讲义，第2383卷，第564–573页。Springer (2002) 26 Fernau, H.：罗马支配：一种参数化视角。《国际计算机数学杂志》85, 25–38 (2008) 27 Flum, J., Grohe, M.：《参数化复杂性理论》。Springer (2006) 28 Fomin, F.V., Grandoni, F., Kratsch, D.：用于分析精确算法的测量与征服方法。《ACM学报》56(5) (2009) 29 Fomin, F.V., Kratsch, D.：《精确指数算法》。理论计算机科学丛书，Springer (2010) 30 Gainer-Dewar, A., Vera-Licona, P.：极小击中集生成问题：算法与计算。《SIAM离散数学杂志》31(1), 63–100 (2017) 31 Guo, J., Hüffner, F., Niedermeier, R.：参数化问题的一种结构视角：与平凡问题的距离。载于：Downey, R., Fellows, M., Dehne, F. (编)《参数化与精确计算国际研讨会 IWPEC 2004》。计算机科学讲义，第3162卷，第162–173页。Springer (2004) 32 Haynes, T.W., Hedetniemi, S., Henning, M.A. (编)：《图支配专题》，数学进展，第64卷。Springer (2020) 33 Kanté, M.M., Limouzy, V., Mary, A., Nourine, L.：极小支配集及其变体的枚举。载于：Owe, O., Steffen, M., Telle, J.A. (编)《计算理论基础》——第18届国际研讨会 FCT。计算机科学讲义，第6914卷，第298–309页。Springer (2011) 34 Kanté, M.M., Limouzy, V., Mary, A., Nourine, L.：论极小支配集的枚举及相关概念。《SIAM离散数学杂志》28(4), 1916–1929 (2014) 35 Kanté, M.M., Limouzy, V., Mary, A., Nourine, L., Uno, T.：用于列举图中极小边支配集的多项式延迟算法。载于：Dehne, F., Sack, J., Stege, U. (编)《算法与数据结构研讨会》WADS。计算机科学讲义，第9214卷，第446–457页。Springer (2015) 36 Liedloff, M.：NP难问题的精确指数算法：支配、变体与推广。博士论文，保罗·韦尔莱纳大学—梅斯，法国 (2007) 37 Liedloff, M., Kloks, T., Liu, J., Peng, S.L.：若干图类上的罗马支配高效算法。《离散应用数学》156(18), 3400–3415 (2008) 38 Mary, A.：《图的极小支配顶点枚举》。博士论文，LIMOS，布莱兹·帕斯卡大学，克莱蒙费朗，法国 (2013年11月) 39 Padamutham, C., Palagiri, V.S.R.：图中罗马支配的算法方面。《应用数学与计算杂志》64, 89–102 (2020) 40 Pagourtzis, A., Penna, P., Schlude, K., Steinhöfel, K., Taylor, D.S., Widmayer, P.：服务器放置、罗马支配及其他支配集变体。载于：Baeza-Yates, R.A., Montanari, U., Santoro, N. (编)《网络与移动计算时代的信息技术基础》，IFIP第17届世界计算机大会——TC1分会 / 第二届IFIP理论计算机科学国际会议 IFIP TCS。第280–291页。Kluwer (2002)，另可参见苏黎世联邦理工学院理论计算机科学研究所技术报告365, 10/2001。41 van Rooij, J.M.M.：《图支配问题的精确指数时间算法》。博士论文，乌得勒支大学，荷兰 (2011) 42 Shi, Z., Koh, K.M.：计算图的最小罗马支配函数数量。技术报告，arXiv / CoRR, abs/1403.1019 (2014) 43 Stewart, I.：保卫罗马帝国。《科学美国人》第136、137、139页 (1999年12月) 44 Strozecki, Y.：枚举复杂性。EATCS通报129 (2019)