arXiv:2302.11440v2 [math.CV] 7 Dec 2023

闭拟正则椭圆流形的德拉姆代数是欧几里得的

¨SUSANNA HEIKKILA 和 PEKKA PANKKA

Abstract. 我们证明，若一个闭、连通且定向的黎曼 n 维流形 N 存在从欧几里得 n 空间 $\mathbb{R}^n$ 到它的非恒定拟正则映射，则 N 的德拉姆上同调代数 $H^*_{\mathrm{dR}}(N)$ 嵌入外代数 $\bigwedge^*\mathbb{R}^n$。由此，我们得到闭、单连通拟正则椭圆 4 维流形的同胚分类。

1. Introduction

本文证明了关于拟正则椭圆流形德拉姆上同调的如下结果。

定理 1.1. 设 N 是一个闭拟正则椭圆 n 维流形， $n \geqslant 2$。那么存在分次代数嵌入 $H^*_{\mathrm{dR}}(N) \to \bigwedge^* \mathbb{R}^n$。

若存在非常数拟正则映射 $\mathbb{R}^n \to N$，则称连通且定向的黎曼 n-流形 N 为拟正则椭圆。若连续映射 $f\colon M \to N$ 是两个定向黎曼 n-流形 $n \geqslant 2$ 之间的映射，且 f 属于 Sobolev 空间 $W^{1,\,n}_{\mathrm{loc}}(M, N)$，并且存在常数 $K \geqslant 1$ 使得

$$\|Df\|^n \leqslant K J_f \quad \text{a.e. in } M; \tag{1.1}$$

这里， $\|Df\|$ 是弱微分 Df 的算子范数，而 J_f 是 f 的雅可比行列式。

定理 1.1 可视为度理论中一个经典结果的拟共形类比：对于定向闭流形之间的非零度映射 $f\colon M \to N$，上同调中的诱导映射 $f^*\colon H^*(N) \to H^*(M)$ 是分次代数嵌入。进一步观察可知，这种类比还可以推广：若存在一个分片线性分支覆盖 $\mathbb{T}^n \to N$，它相对于 $\mathbb{T}^n$ 和 N 的光滑结构是拟正则的，则 N 是拟正则椭圆的。

定理 1.1 的先行结果是 Kangasniemi 定理 [12]：若一个闭、连通且定向的黎曼 n-流形 N 存在非常值且非单射的一致拟正则映射 $N \to N$，则存在一个分次代数嵌入 $H^*_{\mathrm{dR}}(N) \to \bigwedge^* \mathbb{R}^n$。关于 Kangasniemi 定理，我们回顾一下：若畸变不等式 (1.1) 对该拟正则自映射的所有迭代都以同一常数成立，则该映射是一致拟正则的。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 30C65；次分类号 57M12、30L10。本文部分得到了芬兰科学院项目 #332671 的资助。本文还部分得到了美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-1928930；此外，P.P. 在 2022年春季学期参加了由加利福尼亚州伯克利的数学科学研究所（MSRI）主办的一项项目。

具有相同的常数。我们还注意到，这类闭流形是拟正则椭圆的；参见 Martin、Mayer 和 Peltonen [17]。

就闭拟正则椭圆流形上已知的上同调结果而言，定理 1.1 推广了 Prywes 的一个定理 [24]：设 N n 是一个闭拟正则椭圆 H^k_{dR}流形。那么 dim $N(\bigwedge^k \mathbb{R}^n =)$ 6 dim $\binom{n}{k}$ n。这一德拉姆上同调定理中的维数界是尖锐的，因为 $\mathbb{T}^n$ 环面 [7, 是拟正则椭圆的。Prywes 定理回答了 Gromov 的一个问题 200] 第 4 页：是否存在并非拟正则椭圆的闭单连通流形？答案确实是肯定的，例如，$\#\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$([1]) 根据 Prywes 定理并非拟正则椭圆。关于拟正则椭圆流形的德拉姆上同调的依赖于畸变的界，先前的结果可参见 Bonk 和 Heinonen [22] 。我们还回顾 Peltonen 的一个定理 $\mathbb{T}^n$，该定理表明，若 N 不是有理同调球面，则连通和 N # 并非拟正则椭圆。

顺便指出，Prywes 定理中关于 de Rham 上同调维数的界并不适用于开拟正则椭圆流形。事实上，对于任意有限集 $P \subset \mathbb{S}^n$ ，都存在一个拟正则映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$，使得 $f\mathbb{R}^n = \mathbb{S}^n \setminus P$；参见 [5]。因此，已知开拟正则椭圆流形 N 的 $(n-1)$-上同调可以具有任意大的有限维数。一般而言，$H^k_{\mathrm{dR}}(N)$ 的维数对畸变常数的依赖性尚不清楚。

1.1. 闭单连通拟正则椭圆 4 维流形的分类。定理 1.1 的主要应用是对闭单连通拟正则椭圆 4 维流形进行分类。

在维数 $n = 4m$ 中，定理 1.1 对闭拟正则椭圆流形 N 的交叉形式 $H^{2m}(N;\mathbb{R})\times H^{2m}(N;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 的正定与负定子空间给出的中间维 Betti 数 $\beta^+_{2m}(N)$ 和 $\beta^-_{2m}(N)$ 设定了上界。特别是在维数 $n = 4$ 中，两个 Betti 数 $\beta^+_2(N)$ 和 $\beta^-_2(N)$ 均不超过 3。因此，根据光滑、闭、单连通且定向的 4 维流形分类定理， N 同胚于下列某个流形

$$\#^k(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) \quad \text{or} \quad \#^j\mathbb{C}P^2\#^i\overline{\mathbb{C}P^2}, \tag{1.2}$$

其中 k、j、$i \in \{0,1,2,3\}$ 以及 $\#^0(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) = \#^0\mathbb{C}P^2\#^0\overline{\mathbb{C}P^2} = \mathbb{S}^4$。

Piergallini 和 Zuddas 在 [23] 中证明，这些流形是拟正则椭圆的。事实上，根据 Piergallini 和 Zuddas 的一个结果 [23], , 对于 (1.2) 中的流形 N，存在一个分段线性分支覆盖 $\mathbb{T}^4 \to N$，其中 $\mathbb{T}^4$ 和 N 具有与通常光滑结构相容的标准 PL 结构。因此，将这样的分歧覆盖 $\mathbb{T}^4 \to N$ 与一个局部等距的黎曼覆盖映射 $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{T}^4$ 复合，便得到所需的拟正则映射 $\mathbb{R}^4 \to N$。

将定理 1.1 与 Piergallini 和 Zuddas 的这一结果结合起来，我们得到如下分类。

推论 1.2。闭单连通 4-流形是拟正则椭圆的，当且仅当它同胚于 $\#^k(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$ 或 $\#^j\mathbb{C}P^2\#^i\overline{\mathbb{C}P^2}$，其中 k、 j、 $i \in \{0,1,2,3\}$ 取某些值。

基于流形一般分类定理的拟正则椭圆流形的类似分类，在二维和三维中已有研究。在二维情形，该结果经典地由黎曼曲面的统一化以及拟正则映射的 Sto¨ılow 定理推出。在三维情形，该分类源于佩雷尔曼对几何化猜想的证明以及基本群的增长界。将分类归结为几何化猜想是 Jormakka [11] 的工作。我们将从 Prywes 定理和定理 1.1 的角度，简要回顾这些结果。

在维数 $n = 2$ 中，闭拟正规椭圆 2-流形 N 满足 dim $H^1_{\mathrm{dR}}(N) \leqslant 2$。由于 N是定向的，我们根据可定向闭曲面的分类，立即得出 N与 $\mathbb{S}^2$ 或 $\mathbb{T}^2$ 同胚。

对于闭拟正规椭圆 3-流形 N，由 Prywes 定理可推得 dim $H^1_{\mathrm{dR}}(N) = \dim H^2_{\mathrm{dR}}(N) \leqslant 3$。通过初等代数，我们从定理 1.1 得到 dim $H^1_{\mathrm{dR}}(N) \neq 2$。因此， N的德拉姆上同调与流形 $\mathbb{S}^3$、 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$或 $\mathbb{T}^3$之一相同。这一同调结果是最优的，因为根据 Jormakka 分类定理 [11]，唯一的闭拟正规椭圆 3-流形是 $\mathbb{S}^3$、 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$、 $\mathbb{T}^3$及其商空间。有趣的是，事实上，二维和三维中所有闭拟正则椭圆流形都存在一个来自环面的分歧覆盖。

据我们所知，在四维情形下，在 Piergallini 和 Zuddas 的结果出现之前，已知的闭单连通拟正则椭圆四维流形例子只有 $\mathbb{S}^4$、 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$、$\#^2(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$ 和 $\mathbb{C}P^2$；其中前两个由初等映射给出，后两个分别由 Rickman [28] 和 Luisto–Prywes [16], 的构造给出。

1.2. 从球到流形的拟正则映射。定理 1.1 可改写为关于从单位球到闭流形的拟正则映射的形式。此改写进而给出了满足倍增条件的拟正则映射的上同调蒙特尔定理。陈述如下：设 N 为一个定向黎曼 n-流形， $K \geqslant 1$ 和 $D > 1$为常数，并令 $\mathcal{F}_{K,\,D}(N)$ 为所有满足畸变不等式 (1.1)（常数为 K ）及附加倍增条件的非恒定拟正则映射 $f\colon B^n_2 \to N$ 所构成的族

$$\int_{B^n_2} f^*\mathrm{vol}_N \leqslant D \int_{B^n} f^*\mathrm{vol}_N.$$

在下文中， B^n 和 B^n_2 分别表示以原点为中心、半径为 1 和 2 的欧几里得球。在下文中，我们还记

$$A(f) = \int_{B^n} f^*\mathrm{vol}_N.$$

定理 1.3. 设 N 是一个闭、连通且定向的黎曼 n流形， $n \geqslant 2$，满足

$$\sup_{f \in \mathcal{F}_{K,D}(N)} A(f) = \infty.$$

那么存在分次代数的嵌入 $H^*_{\mathrm{dR}}(N) \to \bigwedge^* \mathbb{R}^n$。

我们得出结论：若 $H^*_{\mathrm{dR}}(N)$ 不是 $\bigwedge^* \mathbb{R}^n$ 的子代数，则映射 f in $\mathcal{F}_{K,D}(N)$ 的面积 $A(f)$ 存在一个统一上界，因此其能量也存在统一上界。这个统一上界取代了格罗莫夫紧性定理中针对拟正则映射 [21] 的次数上界；结合这两项结果，我们得到拟正则映射在 $\mathcal{F}_{K,D}(N)$ 中的蒙特尔定理的如下上同调版本；关于无需额外倍增假设的 Rickman 拟正则映射蒙特尔定理，参见 Rick- man [26, 推论 IV.3.14] 。

推论 1.4. 设 N 为一个闭、连通且定向的黎曼 n维流形， $n \geqslant 2$。若 $H^*_{\mathrm{dR}}(N)$不是 $\bigwedge^* \mathbb{R}^n$的子代数，则$\mathcal{F}_{K,\ D}(N)$关于局部一致收敛拓扑是紧的。特别地，在这种情况下，$\mathcal{F}_{K,\ D}(N)$是一个正规族。

我们以陈述一个关于$\mathcal{F}_{K,\ D}(N)$中映射的归一化雅可比行列式弱极限的更一般结果来结束本引言。该结论可视为 Kangasniemi 关于一致拟正则映射 [13]不变测度的绝对连续性定理的非动力学版本。为陈述该结论，对每个$f \in \mathcal{F}_{K,\ D}(N)$，令$\nu_f$ 为测度

$$\nu_f = \frac{1}{A(f)} f^* \mathrm{vol}_N.$$

我们称ν_f为 f的归一化测度。显然， $\nu_f \ll \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n}$。

对于一个非有理同调球面的闭流形 N，$\mathcal{F}_{K,\ D}(N)$中的序列有如下二分结论；为陈述该结论，请注意，$\mathcal{F}_{K,\ D}(N)$中的序列未必有局部一致收敛的子序列。

定理 1.5. 设 N 是一个闭、连通且定向的黎曼 n维流形， $n \geqslant 2$，它不是有理同调球面。那么，$\mathcal{F}_{K,D}(N)$ 中的序列 (f_j) 存在一个子序列 (f_{j_i})，使得 (f_{j_i}) 要么收敛到一个常值映射，要么归一化测度 $\nu_{f_{j_i}}$ 弱星收敛到 B^n_2 中的测度$\nu \ll \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n}$ 。

定理 1.5 是尖锐的，因为对于 $N = \mathbb{S}^n$，存在一个映射序列 $(f_j : B^n_2 \to \mathbb{S}^n)$，使得归一化测度序列 (ν_{f_j}) 弱星收敛到测度 ν，而该测度相对于勒贝格测度是奇异的。回顾一下，测度 (ν_{f_j}) 弱星收敛到 ν，是指对于每个 $\varphi \in C_0(B^n_2)$，都有 $\int \varphi \nu_{f_j} \to \int \varphi \nu$ 。

注 1.6. 定理 1.5 对于不是有理同调球面的闭流形的覆盖空间也成立。特别地，定理 1.5 对 $\mathcal{F}_{K,D}(\mathbb{R}^n)$ 中的拟正则映射也成立。

1.3. 定理 1.3 的证明思路。由于定理 1.1 可归结为定理 1.3，下面我们从定理 1.3 的角度讨论其思路。为此，设 N 为一个闭、连通且定向的黎曼 n-流形，并设

$$h \colon H^*_{\mathrm{dR}}(N) \to \Omega^*(N), \quad c \mapsto h_c,$$

是将每个德拉姆上同调类 $c \in H^*_{\mathrm{dR}}(N)$ 与其唯一的调和代表元 $h_c \in c$ 相对应的映射。映射 h 通常仅是分次线性映射，而不是代数同态，因为调和

微分形式通常不构成代数。关于所谓形式黎曼流形的讨论（其调和形式构成一个代数），参见 Kotschick [14]；关于形式可测黎曼度量在一致拟正则动力学中的作用，参见 Kangasniemi [12]。

我们为每个 $f \in \mathcal{F}_{K,\,D}(N)$ 定义一个归一化拉回

$$f^{\#}\colon H^*_{\mathrm{dR}}(N) \to \mathscr{W}^*(B^n_2), \quad H^k_{\mathrm{dR}}(N) \ni c \mapsto A(f)^{-\frac{k}{n}} f^*(h_c),$$

其中 $A(f)^{-\frac{k}{n}} = 1$ 对于 $k = 0$，而 $\mathscr{W}^*(B^n_2)$ 是

$$\mathscr{W}^k(B^n_2) = \begin{cases} W^{d,\frac{n}{k}}(B^n_2; \bigwedge^k \mathbb{R}^n), & \text{for } 0 < k \leqslant n \\ \ker(d\colon \Omega^0(B^n_2) \to \Omega^1(B^n_2)), & \text{for } k = 0 \end{cases}$$

B^n_2 上的 Sobolev 微分形式分次代数。特别地，$\mathscr{W}^0(B^n_2)$ 仅由 B^n_2 上的常值函数构成。这里，$W^{d,\,\frac{n}{k}}(B^n_2; \bigwedge^k \mathbb{R}^n)$ 是 B^n_2 上由 $\frac{n}{k}$ 可积的 k-形式构成的部分Sobolev空间；详情见第 3 节。

容易看出，$f^{\#}$ 是单射分次线性映射；除非 h 是代数同态，否则它不是代数同态。尽管如此，若 (f_j) 是 $\mathcal{F}_{K,\,D}(N)$ 中的一个序列，满足 $A(f_j) \to \infty$，且对每个 $k = 1, \ldots, n-1$，序列 $(f_{\#\,j}\,|_{H^k_{\mathrm{dR}}(N)}\colon H^k_{\mathrm{dR}}(N) \to \mathscr{W}^k(B^n_2))$ 弱收敛，则极限算子给出一个分次代数嵌入。

定理 1.7. 设 N 是一个闭、连通且定向的黎曼 n 流形 $n \geqslant 2$。设 (f_j) 是 $\mathcal{F}_{K,\,D}(N)$ 中的一个序列，满足 $A(f_j) \to \infty$ 且 $f_j^{\#} \rightharpoonup L$，其中

$$f_j^{\#}, L\colon \bigoplus_{k=1}^{n-1} H^k_{\mathrm{dR}}(N) \to \bigoplus_{k=1}^{n-1} L^{\frac{n}{k}}(B^n_2; \bigwedge^k \mathbb{R}^n).$$

则 L 可延拓为一个分次代数嵌入

$$L\colon H^*_{\mathrm{dR}}(N) \to \mathscr{W}^*(B^n_2)$$

满足

$$\int_{B^n} L([\mathrm{vol}_N]) = 1.$$

有了定理 1.7，我们只需证明定理 1.3：对于每个满足 $A(f_j) \to \infty$ 的序列 (f_j)，都存在一个子序列，使其归一化拉回对每个 $H^k_{\mathrm{dR}}(N)$、$k = 1$、……、$n-1$ 均弱收敛到一个线性映射 $L\colon H^k_{\mathrm{dR}}(N) \to L^{\frac{n}{k}}(B^n_2; \bigwedge^k \mathbb{R}^n)$。由于这些线性映射给出了代数嵌入 $L\colon H^*_{\mathrm{dR}}(N) \to \mathscr{W}^*(B^n_2)$，因此只需注意到存在一个正测度集合 $E \subset B^n_2$，使得映射

$$H^*_{\mathrm{dR}}(N) \to \bigwedge{}^* \mathbb{R}^n, \quad c \mapsto (L(c))(x_0),$$

对于 $x_0 \in E$，这是一个定义良好的分次代数嵌入。

1.4. 文章结构。本文结构安排如下。

在第 2 小节中，我们将定理 1.1 归约为定理 1.3。随后，在第 3 小节中，我们讨论归一化拉回和 Sobolev 代数 $\mathscr{W}^*$。在第 4 和第 5 小节中，我们证明定理 1.7 的一个初步版本，该版本表明极限可扩展为代数同态。在第 6 小节中，我们证明定理 1.7 中关于嵌入的部分。在第 7 小节中，我们完成主定理定理 1.3 的证明。

在第 8 小节中，我们讨论一列拟正则映射 $B^n_2 \to \mathbb{S}^n$，以展示定理 1.5 的尖锐性。在第 9 小节中，我们证明定理 1.5。在附录 A 中，我们简要回顾光滑、闭、单连通且定向的 4 维流形的分类。最后，在附录 B 中，我们简要讨论 Piergallini 和 Zuddas 的分片线性分支覆盖 $\mathbb{T}^4 \to N$ 的拟正规性。

1.5. 致谢。我们感谢 Ilmari Kangasniemi、Jani Onninen、Eden Prywes 和 Juan Souto，多年来就这些主题与我们进行讨论。我们也感谢 Eero Hakavuori 和 Toni Ikonen 在恰当时机提出的一条有益意见。

2. Reduction of Theorem 1.1 to Theorem 1.3

本节讨论如何将定理 1.1 化约为定理 1.3。由于当目标流形为有理同调球面时，定理 1.1 和定理 1.3 都显然成立，因此这一化约基于以下结果；另见 [24, 第 4] 节。

对于该陈述，若存在一个非常值拟正则映射$\mathbb{R}^n \to N$ 满足畸变不等式 (1.1)，且常数为 K，则称拟正则椭圆流形 N 是 K-拟正则椭圆的。

命题 2.1. 设 N 是一个闭的 K-拟正则椭圆 n-流形，$n \geqslant 2$，且不是有理同调球面。那么存在常数$D = D(n) > 1$，使得

$$\sup_{f \in \mathcal{F}_{K,D}(N)} A(f) = \infty.$$

我们由以下两个结果推得命题 2.1。第一个结果是 Bonk 和 Heinonen [1]关于映入具有非平凡同调的流形的拟正则映射的增长下界；关于拟正则曲线情形下的相应结果，另见 [8] 。

定理 2.2. [1, 定理 1.11] 设 N 是一个闭、连通且定向的黎曼 n流形，$n \geqslant 2$，并设 $f\colon \mathbb{R}^n \to N$ 是一个满足畸变不等式 (1.1)（常数为 K）的非恒定拟正则映射。若 N 不是有理同调球面，则存在常数 $\varepsilon = \varepsilon(n, K) > 0$ 满足

$$\liminf_{r \to \infty} r^{-\varepsilon} \int_{B^n(r)} f^* \mathrm{vol}_N > 0.$$

第二个结果是 Rickman 猎引理的一个版本 [25, 引理 5.1]。以下表述归功于 Bonk 和 Poggi-Corradini [2]。

引理 2.3。 [2, 引理 2.1] 设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的无原子博雷尔测度，满足 $\mu(\mathbb{R}^n) = \infty$ 且 $\mu(B) < \infty$，对每个球 $B \subset \mathbb{R}^n$ 都成立。那么存在常数 $D = D(n) > 1$，使得对于每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在一个球 $B \subset \mathbb{R}^n$，使得

$$m \leqslant \mu(2B) \leqslant D\mu(B).$$

命题 2.1 是这些结果的直接推论。

命题 2.1 的证明。由于 N 是 K-拟正则椭圆的，因此存在一个非常值拟正则映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to N$，满足畸变不等式 (1.1)，其常数为 K。根据定理 2.2，由 $\mu(E) = \int_E f^*\mathrm{vol}_N$ 定义的 μ 上的博雷尔测度满足引理 2.3 的假设。因此，存在常数 $D = D(n) > 1$ 和一个球序列 $(B^n(a_m, r_m))$，使得

$$m \leqslant \int_{B^n(a_m, 2r_m)} f^*\mathrm{vol}_N \leqslant D \int_{B^n(a_m, r_m)} f^*\mathrm{vol}_N.$$

现在，映射 $f_m\colon B_2^n \to N, x \mapsto f(r_m x + a_m)$ 在 $\mathcal{F}_{K,D}(N)$ 中构成一个序列，满足 $A(f_m) \to \infty$。结论由此得证。□

3. Sobolev algebra $\mathscr{W}^*$ and normalized pull-backs

我们先简要回顾关于 Sobolev 微分形式的必要预备知识。若对每个 $k+1$ Ω $d\omega \in L^1_{\mathrm{loc}}(B_2^n)$，都有……，则 $(k+1)$-形式 $d\omega \in L^1_{\mathrm{loc}}(B_2^n; \bigwedge^{k+1}\mathbb{R}^n)$ 是 k-形式 $\omega \in L^1_{\mathrm{loc}}(B_2^n; \bigwedge^{k}\mathbb{R}^n)$ 的弱外微分

$$\int_{B_2^n} \omega \wedge d\varphi = (-1)^{k+1} \int_{B_2^n} d\omega \wedge \varphi$$

根据 [10, 引理 3.6], ，外导数与拟正则映射的拉回可交换。更准确地说，设N 是一个闭、连通且定向的黎曼 n-流形，并设$f\colon B_2^n \to N$是一个拟正则映射。那么，对于 $\alpha \in \Omega^k(N)$，形式 $f^*(d\alpha) \in L^{\frac{n}{k+1}}{}_{\mathrm{loc}}(B_2^n; \bigwedge^{k+1}\mathbb{R}^n)$ 是 $f^*\alpha \in L^{\frac{n}{k}}{}_{\mathrm{loc}}(B_2^n; \bigwedge^{k}\mathbb{R}^n)$ 的弱外微分，即 $d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha)$；此处 $f^*\alpha$ 和 $f^*(d\alpha)$ 的可积性由逐点不等式得出

$$|f^*\beta| \leqslant (|\beta| \circ f)\|Df\|^\ell$$

对于 $\beta \in \Omega^\ell(N)$。

令 $W^{d,\frac{n}{k}}(B_2^n; \bigwedge^{k}\mathbb{R}^n)$ 表示由属于 $L^{\frac{n}{k}}(B_2^n; \bigwedge^{k}\mathbb{R}^n)$ 的微分形式 ω 组成且具有弱外微分 $d\omega \in L^{\frac{n}{k}}(B_2^n; \bigwedge^{k+1}\mathbb{R}^n)$ 的 Sobolev 空间。现在假设 $f\colon B_2^n \to N$ 是一个具有可积雅可比行列式的拟正则映射，即 $J_f \in L^1(B_2^n)$。那么，对于闭形式 $\alpha \in \Omega^k(N)$，其拉回 $f^*\alpha$ 属于 $W^{d,\frac{n}{k}}(B_2^n; \bigwedge^{k}\mathbb{R}^n)$，因为 $f^*\alpha$ 弱闭。

令 $f_!\colon \Omega^*(N) \to \oplus_{k=0}^n L^{\frac{n}{k}}(B_2^n; \bigwedge^{k}\mathbb{R}^n)$ 为线性映射

$$\Omega^k(N) \ni \alpha \mapsto A(f)^{-\frac{k}{n}} f^*\alpha,$$

其中，对于 $k = 0$，$A(f)^{-\frac{k}{n}} = 1$；回顾

$$A(f) = \int_{B^n} f^*\mathrm{vol}_N.$$

容易看出， $f^!$ 与外积可交换，并且$f_! \circ h = f^\#$。我们还注意到， $f_!(\mathrm{vol}_N)$ 是 f 的归一化测度 ν_f。

接下来，我们记录一个初等引理：若 $f \in \mathcal{F}_{K,D}(N)$，则对于 k-形式，算子 $f_!$ 是从 $\Omega^k(N)$ 到 $\to L^{\frac{n}{k}}(B_2^n; \bigwedge^k \mathbb{R}^n)$ 的有界算子，且 $f^!$ 的算子范数由 K 和 D控制。

引理 3.1. 设 N 是一个闭、连通且定向的黎曼 n-流形， $n \geqslant 2$，并设 $f \in \mathcal{F}_{K,D}(N)$。那么

$$\|f^!(\alpha)\|_{\frac{n}{k},B_2^n} \leqslant DK\|\alpha\|_\infty$$

对于每个 $\alpha \in \Omega^k(N)$ 以及 $k = 0, \ldots, n$，均成立。

证明。对于 $\alpha \in \Omega^0(N)$，结论显然成立，因为 $\left|f_!(\alpha)\right|(x) = |\alpha(f(x))|$ 对每个 $x \in B_2^n$ 均成立。因此，设 $0 < k \leqslant n$ 且 $\alpha \in \Omega^k(N)$。那么

$$\begin{aligned}
\|f^!(\alpha)\|_{\frac{n}{k},B_2^n} &= A(f)^{-\frac{k}{n}} \left(\int_{B_2^n} |f^*\alpha|^{\frac{n}{k}} \right)^{\frac{k}{n}} \\
&\leqslant \|\alpha\|_\infty A(f)^{-\frac{k}{n}} \left(\int_{B_2^n} \|Df\|^n \right)^{\frac{k}{n}} \\
&\leqslant \|\alpha\|_\infty K^{\frac{k}{n}} A(f)^{-\frac{k}{n}} \left(\int_{B_2^n} f^*\mathrm{vol}_N \right)^{\frac{k}{n}} \\
&\leqslant \|\alpha\|_\infty K^{\frac{k}{n}} D^{\frac{k}{n}} \leqslant DK\|\alpha\|_\infty.
\end{aligned}$$

证明到此结束。 □

本小节最后说明，在序列 $(f_!j)$ 下，恰当形式的极限是可忽略的，其中 (f_j) 是 $\mathcal{F}_{K,\ D}(N)$ 中满足 $A(f_j) \to \infty$ 的一个序列；另见 [24]。关于整映射和拟正则动力系统背景下基于分部积分的类似观察，请参见 [20], [18], [12], 和[8]。

引理 3.2. 设 N 是一个闭、连通且定向的黎曼 n 流形， $n \geqslant 2$，并设 (f_j) 是 $\mathcal{F}_{K,D}(N)$ 中满足 $A(f_j) \to\infty$ 的一个序列。那么

$$\lim_{j\to\infty} \int_{B_2^n} \varphi \wedge f_j^!(d\alpha) = 0$$

对于 $\alpha \in \Omega^k(N)$、 $\varphi \in \Omega_0^{n-k-1}(B_2^n)$ 和 $k = 0, \ldots, n$。

证明。我们不妨假设 $0 \leqslant k < n$。设 $\alpha \in \Omega^k(N)$，并设 $\varphi \in \Omega_0^{n-k-1}(B_2^n)$。由 H¨older 不等式和引理 3.1，得

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{B_2^n} \varphi \wedge f_j^!(d\alpha)\right| \\
&= A(f_j)^{-\frac{k+1}{n}} \left|\int_{B_2^n} \varphi \wedge f_j^*(d\alpha)\right| = A(f_j)^{-\frac{k+1}{n}} \left|\int_{B_2^n} d\varphi \wedge f_j^*\alpha\right| \\
&= A(f_j)^{-\frac{1}{n}} \left|\int_{B_2^n} d\varphi \wedge f_j^!(\alpha)\right| \leqslant \frac{C(n)}{A(f_j)^{\frac{1}{n}}} \int_{B_2^n} |d\varphi| \left|f_j^!(\alpha)\right| \\
&\leqslant \frac{C(n)}{A(f_j)^{\frac{1}{n}}} \|d\varphi\|_{\frac{n}{n-k},B_2^n} \|f_j^!(\alpha)\|_{\frac{n}{k},B_2^n} \\
&\leqslant \frac{C(n)}{A(f_j)^{\frac{1}{n}}} \|d\varphi\|_{\frac{n}{n-k},B_2^n} DK\|\alpha\|_\infty.
\end{aligned}$$

该断言得证。 □

4. Limits of normalized pull-backs are Sobolev-Poincaré limits

我们先回顾 Iwaniec 和 Lutoborski[9,小节中的 Poincar´e 算子：存在一个分次紧线性算子

$$T\colon \bigoplus_{k=1}^{n-1} L^{\frac{n}{k}}(B_2^n; \bigwedge^k \mathbb{R}^n) \to \bigoplus_{k=1}^{n-1} L^{\frac{n}{k}}(B_2^n; \bigwedge^{k-1} \mathbb{R}^n)$$

满足 id $= dT + Td$。特别地，对于每个弱闭形式 $\omega \in \oplus_{k=1}^{n-1} L^{\frac{n}{k}}(B_2^n; \bigwedge^k \mathbb{R}^n)$，都有 $dT(\omega) = \omega$。

以下引理是对 [24, 引理 4.1] 的重新表述。为方便读者，我们重述其证明。还需回顾，对于拟正则映射 $f\colon B_2^n \to N$，

$$f^\#\colon H^*_{\mathrm{dR}}(N) \to \mathscr{W}^*(B_2^n),\ H^k_{\mathrm{dR}}(N) \ni c \mapsto A(f)^{-\frac{k}{n}} f^*(h_c) = (f^! \circ h)(c).$$

引理 4.1. 设 N 是一个闭、连通且定向的黎曼 n 流形，$n \geqslant 2$。设 (f_j) 是 $\mathcal{F}_{K,D}(N)$ 中的一个序列，满足 $f_{\#j} \rightharpoonup L$，其中

$$f_j^\#, L\colon \bigoplus_{k=1}^{n-1} H^k_{\mathrm{dR}}(N) \to \bigoplus_{k=1}^{n-1} L^{\frac{n}{k}}(B_2^n; \bigwedge^k \mathbb{R}^n).$$

那么存在一个子序列 (f_{j_i}) 和一个分次线性算子

$$\widehat{L}\colon \bigoplus_{k=1}^{n-1} H^k_{\mathrm{dR}}(N) \to \bigoplus_{k=1}^{n-1} W^{d,\frac{n}{k}}(B_2^n; \bigwedge^{k-1} \mathbb{R}^n)$$

满足 $T(f_{j_i}^\#) \to \widehat{L}$。特别地，$d\widehat{L} = L$。

证明。设 $c_1, \ldots, c_m$ 是 $\oplus_{k=1}^{n-1} H^k_{\mathrm{dR}}(N)$ 的一组基。由于

$$\|f_j^\#(c_\ell)\|_{\frac{n}{k_\ell},B_2^n} \leqslant DK\|h(c_\ell)\|_\infty,$$

其中 $c_\ell \in H^{k_\ell}(N)$，对每个 $\ell = 1, \dots, m$，由引理 3.1 且 T 是一个紧算子，可得存在一个子序列 (f_{j_i}) 以及微分形式 $\tau_1, \dots, \tau_m \in \oplus_{k=1}^{n-1} L^{\frac{n}{k}}(B_2^n; \bigwedge^{k-1} \mathbb{R}^n)$，满足 $T(f_{\#j_i}(c_\ell)) \to \tau_\ell$。由于 $dT(f_{\#j}(c_\ell)) = f_j^{\#}(c_\ell)$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{B_2^n} \tau_\ell \wedge d\varphi &= \lim_{i\to\infty} \int_{B_2^n} T(f_{j_i}^{\#}(c_\ell)) \wedge d\varphi = (-1)^{k_\ell} \lim_{i\to\infty} \int_{B_2^n} f_j^{\#}(c_\ell) \wedge \varphi \\ &= (-1)^{k_\ell} \int_{B_2^n} L(c_\ell) \wedge \varphi\end{aligned}$$

对每个 $\varphi \in \Omega_0^{n-k_\ell}(B_2^n)$ 都成立。因此 $d\tau_\ell = L(c_\ell)$。我们将 $\widehat{L}$ 定义为由 $c_\ell \mapsto \tau_\ell$ 定义的线性映射。结论得证。□

受引理 4.1 启发，我们引入以下概念。设 N 是一个闭、连通且定向的黎曼 n-流形，$n \geqslant 2$，并设 (f_j) 是 $\mathcal{F}_{K,\,D}(N)$ 中的一个序列。我们称一个分次线性算子

$$\widehat{L}\colon \bigoplus_{k=1}^{n-1} H^k_{\mathrm{dR}}(N) \to \bigoplus_{k=1}^{n-1} W^{d,\frac{n}{k}}(B_2^n; \bigwedge^{k-1} \mathbb{R}^n)$$

若 $d\widehat{L}$ 是算子 $f_j^{\#}$ 的弱极限，且 $\widehat{L}$ 是算子 $T(f_{\#j})$ 的极限，则称其为 $(f_j^{\#})$ 的 Sobolev–Poincar´e 极限。

Sobolev–Poincar´e 极限的弱外微分在弱意义下与楔积可交换；另见 [24, 引理 4.2]。为陈述该结论，我们回顾一下：若拉东测度序列 (μ_j) 在 B_2^n 上弱星收敛到 B_2^n 上的拉东测度 μ，则

$$\lim_{j\to\infty} \int_{B_2^n} \varphi \,\mathrm{d}\mu_j = \int_{B_2^n} \varphi \,\mathrm{d}\mu$$

对每个 $\varphi \in C_0(B_2^n)$。

命题 4.2. 设 N 是一个闭、连通且定向的黎曼n流形，$n \geqslant 2$。设 (f_j) 是 $\mathcal{F}_{K,D}(N)$ 中的一个序列，且算子 $(f_j^{\#})$ 有一个 Sobolev–Poincar´e 极限 $\widehat{L}$。另设 $k_1, k_2 \in \{1, \dots, n-1\}$满足 $k_1 + k_2 \leqslant n$。那么，对每个 $c_1 \in H^{k_1}{}_{\mathrm{dR}}(N)$ 和 $c_2 \in H^{k_2}{}_{\mathrm{dR}}(N)$，有 $f_j^{\#}(c_1) \wedge f_j^{\#}(c_2) \rightharpoonup d\widehat{L}(c_1) \wedge d\widehat{L}(c_2)$。这里，若 $k_1 + k_2 < n$，弱收敛指 $L^{\frac{n}{k_1+k_2}}(B_2^n; \bigwedge^{k_1+k_2} \mathbb{R}^n)$ 中通常意义下的弱收敛；若 $k_1 + k_2 = n$，则指测度的模糊收敛。

证明。令 $c_i \in H^{k_i}{}_{\mathrm{dR}}(N)$，其中 $i = 1, 2$。根据引理 3.1，序列 $(f_{\#j}(c_1) \wedge f_j^{\#}(c_2)) = (f_{!j}(h(c_1) \wedge h(c_2))$ 在 $L^{\frac{n}{k_1+k_2}}(B_2^n; \bigwedge^{k_1+k_2} \mathbb{R}^n)$ 中有界。此外，若 $k_1 + k_2 < n$，则 $\Omega_0^{n-k_1-k_2}(B_2^n)$ 关于 $_n\, L^{\overline{n-k_1-k_2}}$-范数在 $L^{\frac{n}{n-k_1-k_2}}(B_2^n; \bigwedge^{n-k_1-k_2} \mathbb{R}^n)$ 中稠密，且 $C_0^\infty(B_2^n)$ 关于 L^∞-范数在 $C_0(B_2^n)$ 中稠密。因此，只需证明

$$\lim_{j\to\infty} \int_{B_2^n} \varphi \wedge f_j^{\#}(c_1) \wedge f_j^{\#}(c_2) = \int_{B_2^n} \varphi \wedge d\widehat{L}(c_1) \wedge d\widehat{L}(c_2)$$

对于每个 $\varphi \in \Omega_0^{n-k_1-k_2}(B_2^n)$。

设 $\varphi \in \Omega_0^{n-k_1-k_2}(B_2^n)$。由三角不等式，只需估计这些项

$$\left| \int_{B_2^n} \varphi \wedge (d\widehat{L}(c_1) - f_j^{\#}(c_1)) \wedge d\widehat{L}(c_2) \right|$$

and

$$\left| \int_{B_2^n} \varphi \wedge f_j^{\#}(c_1) \wedge (d\widehat{L}(c_2) - f_j^{\#}(c_2)) \right|.$$

由于

$$\varphi \wedge d\widehat{L}(c_2) \in L^{\frac{n}{k_2}}(B_2^n; \bigwedge^{n-k_1} \mathbb{R}^n) \subset L^{\frac{n}{n-k_1}}(B_2^n; \bigwedge^{n-k_1} \mathbb{R}^n)$$

且在 $L^{\frac{n}{k_1}}(B_2^n; \bigwedge^{k_1} \mathbb{R}^n)$ 中有 $f_j^{\#}(c_1) \rightharpoonup d\widehat{L}(c_1)$，第一项收敛于零。对于第二项，由于 $dT(f_j^{\#}(c_2)) = f_j^{\#}(c_2)$，我们得到估计

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{B_2^n} \varphi \wedge f_j^{\#}(c_1) \wedge (d\widehat{L}(c_2) - f_j^{\#}(c_2)) \right| \\
&\quad = \left| \int_{B_2^n} \varphi \wedge f_j^{\#}(c_1) \wedge d(\widehat{L}(c_2) - T(f_j^{\#}(c_2))) \right| \\
&\quad = \left| \int_{B_2^n} d\varphi \wedge f_j^{\#}(c_1) \wedge (\widehat{L}(c_2) - T(f_j^{\#}(c_2)) \right| \\
&\quad \leqslant C(n, \varphi) \int_{B_2^n} \left| f_j^{\#}(c_1) \right| \left| \widehat{L}(c_2) - T(f_j^{\#}(c_2)) \right|.
\end{aligned}$$

由 H¨older 不等式和引理 3.1，我们进一步得到

$$\begin{aligned}
&\int_{B_2^n} \left| f_j^{\#}(c_1) \right| \left| \widehat{L}(c_2) - T(f_j^{\#}(c_2) \right| \\
&\quad \leqslant \| f_j^{\#}(c_1) \|_{\frac{n}{n-k_2}, B_2^n} \| \widehat{L}(c_2) - T(f_j^{\#}(c_2)) \|_{\frac{n}{k_2}, B_2^n} \\
&\quad \leqslant C(n, k_1, k_2) \| f_j^{\#}(c_1) \|_{\frac{n}{k_1}, B_2^n} \| \widehat{L}(c_2) - T(f_j^{\#}(c_2)) \|_{\frac{n}{k_2}, B_2^n} \\
&\quad \leqslant C(n, k_1, k_2, K, D, c_1) \| \widehat{L}(c_2) - T(f_j^{\#}(c_2)) \|_{\frac{n}{k_2}, B_2^n}.
\end{aligned}$$

由于 $T(f_j^{\#}(c_2)) \to \widehat{L}(c_2)$ 在 $L^{\frac{n}{k_2}}(B_2^n; \bigwedge^{k_2} \mathbb{R}^n)$ 中成立，结论得证。 □

接下来，我们证明，只要归一化因子趋于无穷，Sobolev–Poincar´e 极限的外导数就与楔积可交换。

引理 4.3. 设 N 是一个闭、连通且定向的黎曼 n 流形，$n \geqslant 2$。设 (f_j) 是 $\mathcal{F}_{K,D}(N)$ 中的一个序列，满足 $A(f_j) \to \infty$，并且算子 $(f_j^{\#})$ 有一个 Sobolev–Poincar´e 极限 $\widehat{L}$。那么

$$d\widehat{L}(c_1 \wedge c_2) = d\widehat{L}(c_1) \wedge d\widehat{L}(c_2)$$

对于满足 $k_1, k_2 \in \{1, \ldots, n-1\}$ $k_1 + k_2 < n$ 的每个 $c_1 \in H^{k_1}{}_{\mathrm{dR}}(N)$ 和 $c_2 \in H^{k_2}{}_{\mathrm{dR}}(N)$。

证明。令 $k_1, k_2 \in \{1, \dots, n-1\}$ 满足 $k_1 + k_2 < n$。令 $c_1 \in H^{k_1}_{\mathrm{dR}}(N)$ 和 $c_2 \in H^{k_2}_{\mathrm{dR}}(N)$。于是存在一个形式 $\tau \in \Omega^{k_1+k_2-1}(N)$，使得$h(c_1 \wedge c_2) = h(c_1) \wedge h(c_2) + d\tau$。由于 $f_{\#^j}(c_1 \wedge c_2) \rightharpoonup d\widehat{L}(c_1 \wedge c_2)$ 属于 $L^{\frac{n}{k_1+k_2}}(B^n_2; \bigwedge^{k_1+k_2} \mathbb{R}^n)$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{B^n_2} \varphi \wedge d\widehat{L}(c_1 \wedge c_2) &= \lim_{j\to\infty} \int_{B^n_2} \varphi \wedge f_j^{\#}(c_1 \wedge c_2) \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_{B^n_2} \varphi \wedge (f_j^{\#}(c_1) \wedge f_j^{\#}(c_2) + f_j^{!}(d\tau)) \\ &= \int_{B^n_2} \varphi \wedge d\widehat{L}(c_1) \wedge d\widehat{L}(c_2)\end{aligned}$$

根据引理 3.2 和命题 4.2，对每个 $\varphi \in \Omega_0^{n-k_1-k_2}(B^n_2)$ 都成立。该断言得证。□

以下结果表明，若目标流形 N 不是有理同调球面，且 (f_j) 是 $\mathcal{F}_{K,\,D}(N)$ 中满足 $A(f_j) \to \infty$ 的一个序列，则算子 $(f_j^{\#})$ 的 Sobolev–Poincar´e 极限 $\widehat{L}$ 会给出归一化测度 ν_{f_j} 的模糊极限。此外，极限测度是绝对连续测度；关于归一化测度的模糊收敛的进一步讨论，见第 8 节和第 9 节。

定理 4.4。设 N 为一个闭、连通且定向的黎曼n-流形 $n \geqslant 2$，并且它不是有理同调球面。设 (f_j) 是 $\mathcal{F}_{K,\,D}(N)$ 中满足 $A(f_j) \to \infty$ 的一个序列，并且算子 $(f_{\#^j})\widehat{\ }$具有 Sobolev–Poincar´e 极限 L。则存在一个非负形式 $\nu_{d\widehat{L}} \in L^1(B^n_2; \bigwedge^n \mathbb{R}^n)$，使得 $\nu_{f_j} \rightharpoonup \nu_{d\widehat{L}}$ 作为测度模糊收敛。

证明。由于 N 不是有理同调球面，根据庞加莱对偶性，存在一个指标 $k \in \{1, \dots, n-1\}$ 以及微分形式 $c \in H^k_{\mathrm{dR}}(N)$ 和 $c' \in H^{n-k}{}_{\mathrm{dR}}(N)$，使得 $\int_N c \wedge c' \neq 0$。于是

$$\nu_{d\widehat{L}} = \frac{\mathrm{vol}(N)}{\int_N c \wedge c'} d\widehat{L}(c) \wedge d\widehat{L}(c')$$

是 $L^1(B^n_2; \bigwedge^n \mathbb{R}^n)$ 中定义良好的 n-形式，我们也将其视为一个测度。

设 $\tau \in \Omega^{n-1}(N)$ 是一个满足以下条件的微分形式

$$\mathrm{vol}(N) h(c) \wedge h(c') = \left(\int_N c \wedge c' \right) (\mathrm{vol}_N + d\tau).$$

由于 $\|f_j^{!}(\mathrm{vol}_N)\|_{1,\,B^n_2} \leqslant D$ 且 $C_0^\infty(B^n_2)$ 关于 L^∞-范数在 $C_0(B^n_2)$ 中稠密，因此只需证明

$$\lim_{j\to\infty} \int_{B^n_2} \varphi \nu_{f_j} = \int_{B^n_2} \varphi \nu_{d\widehat{L}}$$

对每个 $\varphi \in C_0^\infty(B_2^n)$ 都成立。由命题 4.2 和引理 3.2，可得

$$\begin{aligned}\int_{B_2^n} \varphi \nu_{d\widehat{L}} &= \frac{\mathrm{vol}(N)}{\int_N c \wedge c'} \lim_{j\to\infty} \int_{B_2^n} \varphi f_j^{\#}(c) \wedge f_j^{\#}(c') \\ &= \frac{\mathrm{vol}(N)}{\int_N c \wedge c'} \lim_{j\to\infty} \int_{B_2^n} \varphi f_j^{!}(h(c)) \wedge f_j^{!}(h(c')) \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_{B_2^n} \varphi f_j^{!}(\mathrm{vol}_N + d\tau) \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_{B_2^n} \varphi \nu_{f_j}\end{aligned}$$

对每个 $\varphi \in C_0^\infty(B_2^n)$ 都成立。由于微分形式 ν_{f_j} 是非负的，因此 $\nu_{d\widehat{L}}$也是非负的。 □

我们通过证明以下结论来结束本节：将定理 4.4 中测度的模糊收敛限制在闭单位球 B^n上时，可加强为概率测度的弱收敛。

推论 4.5. 设 N 为闭、连通且定向的黎曼n-流形， $n \geqslant 2$，且不是有理同调球面。设 (f_j) 是 $\mathcal{F}_{K\text{中}D}(N)$ 的一个序列，满足 $A(f_j) \to \infty$，并且算子 $(f_{\#j})$ 有一个 Sobolev–Poincaré 极限 $\widehat{L}$。设 $\nu_{d\widehat{L}} \in L^1(B_2^n; \bigwedge^n \mathbb{R}^n)$ 为定理 4.4 中的极限测度。则 $\nu_{f_j} \llcorner B^n \rightharpoonup \nu_{d\widehat{L}} \llcorner B^n$。特别地，$\nu_{d\widehat{L}}(B^n) = 1$。

证明。设 $\zeta \in C(B^n)$ 为非负函数。设 $\eta \in C_b(B_2^n)$ 为满足 $\eta|_{\bar{B}^n} = \zeta$ 的非负有界函数。则 $\eta\nu_{f_j} \rightharpoonup \eta\nu_{d\widehat{L}}$ 作为测度弱星收敛。

设 $0 < r < 1 < R < 2$。设 $\psi_r \in C_0(B^n)$ 和 $\psi_R \in C_0(B^n(0,R))$ 满足 $\chi_{B^n(0,\ r)} \leqslant \psi_r \leqslant 1$ 和 $\chi_{B^n} \leqslant \psi_R \leqslant 1$。由于 $\eta\nu_{d\widehat{L}}$ 非负，我们得到

$$\int_{\bar{B}^n(0,r)} \eta\nu_{d\widehat{L}} \leqslant \int_{B_2^n} \psi_r \eta \nu_{d\widehat{L}} = \lim_{j\to\infty} \int_{B_2^n} \psi_r \eta \nu_{f_j} \leqslant \liminf_{j\to\infty} \int_{B^n} \eta\nu_{f_j}$$

and

$$\int_{B^n(0,R)} \eta\nu_{d\widehat{L}} \geqslant \int_{B_2^n} \psi_R \eta \nu_{d\widehat{L}} = \lim_{j\to\infty} \int_{B_2^n} \psi_R \eta \nu_{f_j} \geqslant \limsup_{j\to\infty} \int_{B^n} \eta\nu_{f_j}.$$

由于 $\nu_{d\widehat{L}} \in L^1(B_2^n; \bigwedge^n \mathbb{R}^n)$,

$$\liminf_{j\to\infty} \eta\nu_{f_j}(B^n) \geqslant \eta\nu_{d\widehat{L}}(B^n) = \eta\nu_{d\widehat{L}}(\bar{B}^n) \geqslant \limsup_{j\to\infty} \eta\nu_{f_j}(B^n).$$

Thus

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\bar{B}^n} \zeta\nu_{f_j} = \int_{\bar{B}^n} \zeta\nu_{d\widehat{L}}. \tag{4.1}$$

于是，对任意函数 $\zeta \in C(B^n)$，通过写成 $\zeta = \max(\zeta,0) - \max(-\zeta,0)$，即可得到等式 (4.1)。

特别地，由于 $\nu_{d\widehat{L}} \in L^1(B_2^n; \bigwedge^n \mathbb{R}^n)$，对于 $\zeta = 1$，我们有

$$\int_{B^n} \nu_{d\widehat{L}} = \int_{\bar{B}^n} \nu_{d\widehat{L}} = \lim_{j\to\infty} \int_{\bar{B}^n} \nu_{f_j} = \lim_{j\to\infty} \int_{B^n} \nu_{f_j} = 1.$$

□

5. Weak exterior derivatives of Sobolev–Poincaré limits extend to algebra homomorphisms

在本小节中，我们证明：若 N 不是有理同调球面，且 L 是由$\mathcal{F}_{K,D}(N)$中满足 $A(f_j) \to \infty$的序列(f_j)所诱导的 Sobolev–Poincar´e 极限，则由下式定义的映射 $\Phi_{d\widehat{L}}\colon H^*_{\mathrm{dR}}(N) \to \mathscr{W}^*(B^n_2)$

$$H^k_{\mathrm{dR}}(N) \ni c \mapsto \begin{cases} \text{constant function } h_c, & \text{for } k = 0 \\ d\widehat{L}(c), & \text{for } 1 \leqslant k \leqslant n-1 \\ \mathrm{vol}(N)^{-1}(\int_N c)\nu_{d\widehat{L}}, & \text{for } k = n \end{cases}$$

是一个分次代数同态；其中，$\nu_{d\widehat{L}}$ 是定理 4.4 中的极限 n-形式。

命题 5.1. 设 N 为一个闭、连通且定向的黎曼n-流形，$n \geqslant 2$，其不是有理同调球面。设 (f_j) 是 $\mathcal{F}_{K,D}(N)$ 中的一个序列，满足 $A(f_j) \to \infty$，并设算子 $(f_{\#j})$ 具有一个 Sobolev–Poincar´e 极限 L。则 $\Phi_{d\widehat{L}}$ 是一个分次代数同态。

证明. 显然，$\Phi_{d\widehat{L}}$ 是一个分次线性映射。还需证明 $\Phi_{d\widehat{L}}$ 是一个代数同态。设 $c_1 \in H^{k_1}{}_{\mathrm{dR}}(N)$ 和 $c_2 \in H^{k_2}{}_{\mathrm{dR}}(N)$，$k_1$、$k_2 \in \{0,\dots,n\}$。不失一般性，我们可以假设 k_1、$k_2 > 0$，并且 $k_1 + k_2 \leqslant n$。若 $k_1 + k_2 < n$，则根据引理 4.3，有

$$\Phi_{d\widehat{L}}(c_1 \wedge c_2) = d\widehat{L}(c_1 \wedge c_2) = d\widehat{L}(c_1) \wedge d\widehat{L}(c_2) = \Phi_{d\widehat{L}}(c_1) \wedge \Phi_{d\widehat{L}}(c_2).$$

现在假设 $k_1 + k_2 = n$，并令 $\tau \in \Omega^{n-1}(N)$ 为满足以下条件的微分形式

$$\mathrm{vol}(N) h(c_1) \wedge h(c_2) = \left(\int_N c_1 \wedge c_2 \right) (\mathrm{vol}_N + d\tau).$$

由命题 4.2、引理 3.2 和定理 4.4 可得

$$\begin{aligned} \int_{B^n_2} \varphi \Phi_{d\widehat{L}}(c_1) \wedge \Phi_{d\widehat{L}}(c_2) &= \int_{B^n_2} \varphi d\widehat{L}(c_1) \wedge d\widehat{L}(c_2) \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_{B^n_2} \varphi f_j^{\#}(c_1) \wedge f_j^{\#}(c_2) \\ &= \frac{\int_N c_1 \wedge c_2}{\mathrm{vol}(N)} \lim_{j\to\infty} \int_{B^n_2} \varphi f_j^{!}(\mathrm{vol}_N + d\tau) \\ &= \frac{\int_N c_1 \wedge c_2}{\mathrm{vol}(N)} \lim_{j\to\infty} \int_{B^n_2} \varphi \nu_{f_j} \\ &= \frac{\int_N c_1 \wedge c_2}{\mathrm{vol}(N)} \int_{B^n_2} \varphi \nu_{d\widehat{L}} = \int_{B^n_2} \varphi \Phi_{d\widehat{L}}(c_1 \wedge c_2) \end{aligned}$$

对每个 $\varphi \in C^\infty_0(B^n_2)$ 均成立。因此 $\Phi_{d\widehat{L}}(c_1) \wedge \Phi_{d\widehat{L}}(c_2) = \Phi_{d\widehat{L}}(c_1 \wedge c_2)$。证明至此完成。□

6. Limits of normalized pull-backs are algebra monomorphisms

本节回顾定理 1.7 的陈述，并给出其证明。

定理 1.7. 设 N 为一个闭、连通且定向的黎曼 n流形，$n \geqslant 2$。设 (f_j) 是 $\mathcal{F}_K$ 中的一个序列，$D(N)$，满足 $A(f_j) \to \infty$且 $f_j^{\#} \rightharpoonup L$，其中

$$f_j^{\#}, L\colon \bigoplus_{k=1}^{n-1} H_{\mathrm{dR}}^k(N) \to \bigoplus_{k=1}^{n-1} L^{\frac{n}{k}}(B_2^n; \bigwedge^k \mathbb{R}^n).$$

然后，L 延拓为分次代数嵌入

$$L\colon H_{\mathrm{dR}}^*(N) \to \mathscr{W}^*(B_2^n)$$

满足

$$\int_{B^n} L([\mathrm{vol}_N]) = 1.$$

证明。我们可以假设 N 不是有理同调球面。根据引理 4.1，算子 L 是某个 Sobolev–Poincar´e 极限 $\widehat{L}$ 的弱外微分，该极限取自算子序列 $(f_{j_i}^{\#})$ 的某个子序列 (f_{j_i})。根据命题 5.1，映射 $\Phi_L = \Phi_{d\widehat{L}}\colon H_{\mathrm{dR}}^*(N) \to \mathscr{W}^*(B_2^n)$ 是代数同态，并且根据定义，Φ_L 延拓 L。此外，根据定义和推论 4.5，我们有

$$\int_{B^n} \Phi_L([\mathrm{vol}_N]) = \nu_{d\widehat{L}}(B^n) = 1.$$

还需证明 Φ_L 是单射。由于 $\Phi_L([\mathrm{vol}_N]) \neq 0$，因此只需证明对于 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，$\Phi_L$ 在 $H_{\mathrm{dR}}^k(N)$ 上是单射的。设 $c \in H_{\mathrm{dR}}^k(N)$ 非零。存在 $c' \in H^{n-k}{}_{\mathrm{dR}}(N)$，使得 $\int_N c \wedge c' \neq 0$。由于

$$\Phi_L(c) \wedge \Phi_L(c') = \Phi_L(c \wedge c') = \frac{\int_N c \wedge c'}{\mathrm{vol}(N)} \Phi_L([\mathrm{vol}_N]) \neq 0,$$

我们有 $\Phi_L(c) \neq 0$。证明至此完成。 □

7. Proof of Theorem 1.3

在本节中，我们回顾定理 1.3 的陈述并完成其证明。

定理 1.3. 设 N 为一个闭、连通且定向的黎曼 n流形，$n \geqslant 2$，满足

$$\sup_{f \in \mathcal{F}_{K,D}(N)} A(f) = \infty.$$

那么存在一个分次代数嵌入 $H_{\mathrm{dR}}^*(N) \to \bigwedge^* \mathbb{R}^n$。

证明。由于 $\sup_{f \in \mathcal{F}_K,\ D(N)} A(f) = \infty$ 和 $\oplus_{k=1}^{n-1} H_{\mathrm{dR}}^k(N)$ 是有限维的，根据引理 3.1 和巴拿赫–阿劳格鲁定理，存在一个序列 (f_j)，属于 $\mathcal{F}_{K,\ D}(N)$，使得 $A(f_j) \to \infty$，以及一个算子

$$L\colon \oplus_{k=1}^{n-1} H_{\mathrm{dR}}^k(N) \to \oplus_{k=1}^{n-1} L^{\frac{n}{k}}(B_2^n; \bigwedge^k \mathbb{R}^n),$$

它是序列（$f_j^{\#}$）的弱极限。根据定理 1.7，算子 L 可延拓为分次代数嵌入 $L\colon H_{\mathrm{dR}}^*(N) \to \mathscr{W}^*(B_2^n)$，满足

$$\int_{B^n} L([\mathrm{vol}_N]) = 1.$$

设 $c_1, \dots, c_m$ 是 $H^*_{\mathrm{dR}}(N)$ 的一组基。我们为 $L([\mathrm{vol}_N])$、$L(c_{\ell_1} \wedge c_{\ell_2})$ 和 $L(c_{\ell_1}) \wedge L(c_{\ell_2})$ 固定逐点的 Borel 代表，其中 $\ell_1, \ell_2 = 1, \dots, m$。令

$$E = \{x \in B^n : (L([\mathrm{vol}_N]))(x) \neq 0\}$$

and

$$E_{\ell_1,\ell_2} = \{x \in B^n : (L(c_{\ell_1} \wedge c_{\ell_2}))(x) = (L(c_{\ell_1}))(x) \wedge (L(c_{\ell_2}))(x)\}$$

对于 $\ell_1, \ell_2 = 1, \dots, m$。由于集合 E 具有正的 n 维勒贝格测度，且集合 $E_{\ell_1,\ \ell_2}$ 在B^n中具有满 n 维勒贝格测度，因此集合 $E' = \cap_{\ell_1,\ \ell_2=1}^m E \cap E_{\ell_1,\ \ell_2}$ 具有正的 n 维勒贝格测度。

令 $x_0 \in E'$。现在映射

$$\mathscr{L} : H^*_{\mathrm{dR}}(N) \to \bigwedge\nolimits^* \mathbb{R}^n, \quad c \mapsto (L(c))(x_0),$$

是一个分次代数同态，在 $H^n_{\mathrm{dR}}(N)$ 上是单射。若 N 是有理同调球面，则 $\mathscr{L}$ 显然是单态射。若 N 不是有理同调球面，则 $\mathscr{L}$ 的单射性由配对 $H^*_{\mathrm{dR}}(N) \times H^{n-*}{}_{\mathrm{dR}}(N) \to \mathbb{R}, (c, c') \mapsto \int_N c \wedge c'$的非退化性得出。□

7.1. 关于调和代表元使用的注记。我们将算子 $f_\#\colon H^*_{\mathrm{dR}}(N) \to \mathscr{W}^*(B^n_2)$ 定义为复合 $f_\# = f_! \circ h$，其中$h\colon H^*_{\mathrm{dR}}(N) \to \Omega^*(N)$ 是 $\ker d \to H^*_{\mathrm{dR}}(N)$, $\alpha \mapsto [\alpha]$ 的小节，它将每个上同调类映射到其调和代表元。事实上，我们可以取 $\ker d \to H^*_{\mathrm{dR}}(N)$, $\alpha \mapsto [\alpha]$ 的任意小节 ξ，并将归一化的ξ-拉回定义为复合 $f^\xi = f_! \circ \xi$。归一化 ξ-拉回的极限独立于小节 ξ，具体含义如下。

引理 7.1. 设 N 是一个闭、连通且定向的黎曼 n-流形，$n \geqslant 2$，并设 (f_j) 是 $\mathcal{F}_{K,D}(N)$ 中的一个序列，满足 $A(f_j) \to \infty$。设 $\xi\colon H^*_{\mathrm{dR}}(N) \to \Omega^*(N)$ 是 $\ker d \to H^*_{\mathrm{dR}}(N)$, $\alpha \mapsto [\alpha]$ 的一个小节，并设

$$L, L' : \bigoplus_{k=1}^{n-1} H^k_{\mathrm{dR}}(N) \to \bigoplus_{k=1}^{n-1} L^{\frac{n}{k}}(B^n_2; \bigwedge\nolimits^k \mathbb{R}^n)$$

分别是 $f_{\#j}$和 f_j^ξ 的弱极限。于是 $L = L'$。

证明只需对引理 4.1 的证明稍作修改，因为对于每个 $c \in H^*_{\mathrm{dR}}(N)$，形式 $\xi(c) - h(c)$ 都是恰当的。详情留给感兴趣的读者。

7.2. 关于嵌入 $H^*_{\mathrm{dR}}(N) \to \mathscr{W}^*(B^n_2)$ 非唯一性的注记。除非流形 N 是有理同调球面，否则定理 1.7 中分次代数 $H^*_{\mathrm{dR}}(N) \to \mathscr{W}^*(B^n_2)$ 的嵌入并不唯一。事实上，给定一个序列 (f_j)，使得序列 $f_{\#\,j} \rightharpoonup L$在定理 1.7 的意义下成立，且存在满足 $Q^*L \neq L$ 的线性映射 $Q \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$，那么 $(f_j \circ Q)$ 就是 $\mathcal{F}_{K,D}(N)$ 中的一个序列，并且 $(f_j \circ Q)^\# \rightharpoonup Q^*L \neq L$ 在定理 1.7 的意义下成立。

即使我们将范围限制为与源自单个拟正则映射$\mathbb{R}^n \to N$的序列（$f_j\colon B^n_2 \to N$）相关联的嵌入 $H^*_{\mathrm{dR}}(N) \to \mathscr{W}^*(B^n_2)$，极限的唯一性也无法得到保证。关于

正面和负面的结果，设 $f\colon \mathbb{R}^n \to N$ 为一个非常数拟正则映射，并考虑所有映射$f_{a,r}\colon B_2^n \to N, x \mapsto f \circ T_{a,r}$构成的族，其中 $a \in \mathbb{R}^n$、 $r > 0$和$T_{a,r}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是映射 $x \mapsto rx + a$。

我们首先注意到，对于黎曼覆盖映射$\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$，诱导的代数同态 $H^*_{\mathrm{dR}}(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{W}^*(B_2^n)$ 是唯一的。

例 7.2. 设 $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (e^{ix_1}, \dots, e^{ix_n})$ 为标准黎曼覆盖映射，并设 $\theta_1, \dots, \theta_n$ 为满足以下条件的 1-形式：对每个 $i = 1, \dots, n$，均有 $\pi^*\theta_i = dx_i$。再设 $L_\pi\colon H^*_{\mathrm{dR}}(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{W}^*(B_2^n)$ 为嵌入 $[\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k}] \to m_n(B^n)^{-\frac{k}{n}} dx_{i_1} \wedge \cdots dx_{i_k}$，其中 $m_n(B^n) = \int_{B^n} \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n}$。

由于 π 是黎曼覆盖映射，因此它是 1-拟正则的。我们还知道，所有映射 $\pi_{a,\,r} = \pi \circ T_{a,\,r}|_{B_2^n}\colon B_2^n \to \mathbb{T}^n$ 都是 1-拟正则的。也容易推出，对于每个 $a \in \mathbb{R}^n$ 和 $r > 0$，都有 $\pi^{\#}_{a,\,r} = L_\pi$。事实上，只需注意到

$$\begin{aligned}
\pi^!_{a,r}(\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k}) &= \frac{1}{A(\pi \circ T_{a,r})^{k/n}} T^*_{a,r} \circ \pi^*(\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k}) \\
&= \frac{1}{r^k m_n(B^n)^{\frac{k}{n}}} T^*_{a,r}(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \\
&= \frac{1}{m_n(B^n)^{\frac{k}{n}}} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}
\end{aligned}$$

对于每个多重指标 $(i_1, \dots, i_k)$。

现在，我们在一列欧几里得球中修改黎曼覆盖映射 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$，从而得到一个拟正则映射 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$，使得其诱导的嵌入 $H^*_{\mathrm{dR}}(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{W}^*(B_2^n)$ 不唯一。

例 7.3. 设 $Q \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ 是一个非恒等线性映射。再设 $\alpha\colon [0,1] \to \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ 中一条从恒等映射到Q的测地线。对每个 $t \in [0,1]$，记 $Q_t = \alpha(t)$。再设 $B_j = B^n(a_j, r_j) = B^n(2^j e_1, j)$ 是一列两两不交的欧几里得球，满足 $r_j \to \infty$。

现在我们如下定义 $h_Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$。在并集 $\bigcup_j B_j$ 的补集中，映射 h_Q 是恒等映射。对于 $x \in B^n(a_j, r_j/2)$，我们令 $h_Q(x) = a_j + r_j Q((x - a_j)/r_j)$。最后，如果 $x \in B^n(a_j, r_j) \setminus B^n(a_j, r_j/2)$，我们令 $h_Q(x) = a_j + r_j Q_{2-2|x-a_j|/r_j}((x - a_j)/r_j)$。由于 α 是一条测地线，且每个 Q_t 都是等距映射，因此映射 h_Q 是拟共形的。

现在令 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ 为拟正则映射 $f = \pi \circ h_Q$。那么，序列 $(f_{-je_1,\,j})$ 给出极限嵌入 L_π，而序列 $(f_{a_j,\,r_j/2})$ 给出极限嵌入 $Q^* L_\pi \neq L_\pi$。

8. Example of a singular limit of normalized measures of quasiregular mappings $B_2^n \to \mathbb{S}^n$

在本小节中，我们证明，对于 $n \geqslant 2$，存在常数 $K = K(n) \geqslant 1$ 以及映射 $f_j \in \mathcal{F}_{K,\,3}(\mathbb{S}^n)$，使得归一化测度 ν_{f_j}

弱星收敛到博雷尔测度 ν,

$$E \mapsto \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(E \cap J),$$

其中 $J = [-1,1] \times \{0\}^{n-1}$。由于 ν 相对于 n 维勒贝格测度是奇异的, 这个例子表明, 定理 1.5 对映入 $\mathbb{S}^n$ 的拟正则映射并不成立。关于映射 f_j 的构造, 另见 [19,例 24]。

令 $\iota\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$ 为立体投影, 并令 $F\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ 为映射 $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{C}$, $(x, re^{i\theta}) \mapsto (x, re^{i3\theta})$ 的限制。我们指出, 对于赤道 $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ 上的点 z, $F(z) = z$, 并且映射 F 对于 $K = K(n) \geqslant 1$ 是 K-拟正则的。

对于 $j \in \mathbb{N}$ 以及 $i = 1, \ldots, j$, 令 $a_{ij} = (-1 + (2i-1)/j, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $B_{ij} = B^n(a_{ij}, 1/j)$, 并令 $U_j = \bigcup_{i=1}^{j} B_{ij} \subset B^n$。再令 $\rho_{ij}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为映射 $x \mapsto j(x - a_{ij})$。最后, 令 σ_{ij} 为满足 $\sigma_{ij} \circ \iota = \iota \circ \rho_{ij}$ 的 $\mathbb{S}^n$ 的 M¨obius 变换。

现在定义 $f_j\colon B_2^n \to \mathbb{S}^n$ 为映射 $f_j(x) = \iota(x)$, 其中 $x \notin U_j$; 对于 $f_j(x) = \sigma_{ij}^{-1}(F(\sigma_{ij}(\iota(x))))$, 其中 $x \in B_{ij}$, 且每个 $i = 1, \ldots, j$。每个映射f_j 都是 K-拟正则的, 并且在每个球 B_{ij} 中, 我们有

$$\int_{B_{ij}} f_j^* \mathrm{vol}_N = \int_{\sigma_{ij}^{-1}(\mathbb{S}^n_+)} 2 + \int_{\sigma_{ij}^{-1}(\mathbb{S}^n_-)} 1 = \mathrm{vol}(\sigma_{ij}^{-1}(\mathbb{S}^n_+)) + \mathrm{vol}(\mathbb{S}^n),$$

其中 $\mathbb{S}^n_+$ 和 $\mathbb{S}^n_-$ 分别是 $\mathbb{S}^n$的上半球和下半球。因此

$$\int_{B_2^n} f_j^* \mathrm{vol}_N \leqslant 3j\mathrm{vol}(\mathbb{S}^n) \leqslant 3 \int_{B^n} f_j^* \mathrm{vol}_N.$$

因此 $f_j \in \mathcal{F}_{K,\ 3}(\mathbb{S}^n)$。

剩下需要证明的是, 归一化测度 ν_{f_j} 弱星收敛到ν。令 $\psi \in C_0(B_2^n)$。记

$$\mu_{f_j} := \left(\int_{U_j} f_j^* \mathrm{vol}_N \right)^{-1} f_j^* \mathrm{vol}_N \quad \text{and} \quad \psi_{ij} := \int_{J \cap B_{ij}} \psi \, \mathrm{d}\nu.$$

由于

$$\frac{1}{A(f_j)} \int_{B_2^n \setminus U_j} f_j^* \mathrm{vol}_N \leqslant \frac{1}{j}$$

对于每个 j, 只需证明

$$\lim_{j \to \infty} \int_{U_j} \psi \mu_{f_j} = \int_{B_2^n} \psi \, \mathrm{d}\nu.$$

由于 $\sigma_{ij}^{-1}(\mathbb{S}^n_+) = \iota(B^n(a_{ij}, 1/j))$, 且 ι 在 B^n 中是 $\tilde{L}$-双利普希茨的, 其中 $\tilde{L} = L(n)$, 因此我们有

$$C'(n) \left(\frac{1}{\tilde{L}j} \right)^n + \mathrm{vol}(\mathbb{S}^n) \leqslant \int_{B_{ij}} f_j^* \mathrm{vol}_N \leqslant C'(n) \left(\frac{\tilde{L}}{j} \right)^n + \mathrm{vol}(\mathbb{S}^n)$$

因此

$$\left| \int_{B_{ij}} \mu_{f_j} - \frac{1}{j} \right| \leqslant C(n) \left(\frac{1}{j} \right)^{n+1}.$$

因此，我们得到估计

$$\begin{aligned}\left|\int_{U_j}\psi\mu_{f_j}-\int_{B_2^n}\psi\,\mathrm{d}\nu\right| &= \left|\sum_{i=1}^{j}\int_{B_{ij}}\psi\mu_{f_j}-\sum_{i=1}^{j}\int_{J\cap B_{ij}}\psi\,\mathrm{d}\nu\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{j}\left|\int_{B_{ij}}\psi\mu_{f_j}-\psi_{ij}\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{j}\left|\int_{B_{ij}}(\psi-j\psi_{ij})\mu_{f_j}\right|+\left|j\psi_{ij}\int_{B_{ij}}\mu_{f_j}-\psi_{ij}\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{j}\sup_{B_{ij}}|\psi-j\psi_{ij}|\int_{B_{ij}}\mu_{f_j}+\|\psi\|_\infty\left|\int_{B_{ij}}\mu_{f_j}-\frac{1}{j}\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{j}\sup_{B_{ij}}|\psi-j\psi_{ij}|\,C(n)\frac{1}{j}+\|\psi\|_\infty C(n)\left(\frac{1}{j}\right)^{n+1} \\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant j}\sup_{B_{ij}}|\psi-j\psi_{ij}|\,C(n)+\|\psi\|_\infty C(n)\left(\frac{1}{j}\right)^{n}.\end{aligned}$$

由于 $\psi\in C_0(B_2^n)$，有 $\max_{1\leqslant i\leqslant j}\sup_{B_{ij}}|\psi-j\psi_{ij}|\to 0$。因此，我们得到归一化测度$\nu_{f_j}$ 弱星收敛于奇异测度 ν。

9. Weak limits of normalized measures

本节证明以下结果，该结果给出了引言中陈述的推论 1.4 和定理 1.5。

定理 9.1。设 N 为一个闭、连通且定向的黎曼 n 流形，$n\geqslant 2$，其不是有理同调球面，即对于某个 $k\in\{1,\dots,n-1\}$，$H^k(N)\neq 0$。那么，经过取子序列，$\mathcal{F}_K$ 中的序列 (f_j)，$D(N)$ 满足 $\sup_j A(f_j)<\infty$，并局部一致收敛于一个K-拟正则映射 $f\colon B_2^n\to N$~~在 $\mathcal{F}_{K,D}(N)$~~ 中。

定理 9.1 几乎立即推出推论 1.4。

推论 1.4. 设 N 为一个闭、连通且定向的黎曼 n流形，$n\geqslant 2$。如果 $H^*_{\mathrm{dR}}(N)$不是 $\bigwedge^*\mathbb{R}^n$的子代数，那么$\mathcal{F}_{K,\,D}(N)$在局部一致收敛拓扑下是紧的。特别地，在这种情况下，$\mathcal{F}_{K,\,D}(N)$是一个正规族。

证明. 由于$\mathcal{F}_{K,\,D}(N)$中拟正则映射在局部一致收敛拓扑下的闭包$\mathcal{F}_{K,\,D}(N)$由$\mathcal{F}_{K,\,D}(N)$和常值映射 $B_2^n\to N$组成，因此只需证明$\mathcal{F}_{K,\,D}(N)$中的任一序列都存在一个子序列，该子序列或者收敛到$\mathcal{F}_{K,\,D}(N)$中的一个映射，或者收敛到一个常值映射。

由于 $H^*_{\mathrm{dR}}(N)$ 不是 $\bigwedge^*\mathbb{R}^n$ 的子代数，因此我们有

$$\sup_{f\in\mathcal{F}_{K,D}(N)} A(f)<\infty$$

由定理 1.3 可知，且 N 不是有理同调球面。因此，根据定理 9.1，$\mathcal{F}_{K,D}(N)$ 中的每个序列 (f_j) 都有一个子序列 (f_{j_i})，它局部一致收敛于一个（可能为常值的）拟正则映射 $B_2^n \to N$，其值在 $\mathcal{F}_{K,D}(N)$ 中。由此可得，族 $\mathcal{F}_{K,D}(N)$ 是紧的。□

作为定理 9.1 的推论，我们也得到定理 1.5。

定理 1.5. 设 N 是一个闭、连通且定向的黎曼 n流形，$n \geqslant 2$，它不是有理同调球面。则 $\mathcal{F}_{K,\,D}(N)$ 中的一个序列 (f_j) 存在一个子序列 (f_{j_i})，使得要么 (f_{j_i}) 收敛到一个常值映射，要么归一化测度 $\nu_{f_{j_i}}$ 弱星收敛到测度 $\nu \ll \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n}$ in B_2^n。

证明. 若 $\sup_j A(f_j) = \infty$，则存在一个子序列 (f_{j_i})，使得算子 $(f_{j_i}^{\#})$ 有一个 Sobolev–Poincar´e 极限 $\widehat{L}$，并且根据定理 4.4，$\nu_{f_{j_i}} \rightharpoonup \nu_{d\widehat{L}}$ 作为测度弱星收敛，其中 $\nu_{d\widehat{L}} \ll \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n}$。

现在假设 $\sup_j A(f_j) < \infty$。根据定理 9.1，存在一个子序列 (f_{j_i})，它局部一致收敛到映射 $f \in \mathcal{F}_{K,\,D}(N)$。若 f 非常值，则根据雅可比行列式的弱收敛（例如参见 [27, 引理 VI.8.8]），我们有 $\nu_{f_{j_i}} \rightharpoonup \nu_f$ 作为测度弱星收敛，其中$\nu_f \ll \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n}$。□

在本小节余下部分，我们将介绍定理 9.1 的证明思路。该定理是以下针对拟正则映射的格罗莫夫紧性定理版本的一个特例；参见 [21,定理 1.1]。

定理 9.2。设 N 是一个闭、连通且定向的黎曼 n-流形，$n \geqslant 2$。设 (f_j) 是 $\mathcal{F}_{K,\,D}(N)$ 中的一个序列，满足 $\sup_j A(f_j) < \infty$。那么，经过选取子序列后，(f_j) 局部一致收敛到一个 K-拟正则映射 $f\colon X \to N$，且 $J_f \in L^1(X)$，定义在某个节点黎曼 n-流形 X 上。此外，X 的主分层与 B_2^n 微分同胚，且 X 的所有泡都与 $\mathbb{S}^n$ 共形。

回顾一下，纯结点 n-流形 X 是一个拓扑空间，在有限集 $\mathrm{Sing}(X) \subset X$ 的补集中，它是一个 n-流形；$\mathrm{Sing}(X)$ X 中的每个点都将其分成两个分支；而X 在点 $p \in \mathrm{Sing}(X)$附近的局部结构，则由 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$中处于一般位置的两个 n维平面来刻画。$X \setminus \mathrm{Sing}(X)$的每个连通分支的闭包称为一个分层。在定理 9.2 中，每个分层都是光滑的n-流形；更确切地说，一个分层与 B_2^n 微分同胚，其余所有分层都与 n-球面微分同胚 $\mathbb{S}^n$。关于此内容的进一步讨论，请参见 [21, 小节 4]。

在 [21] 这一收敛定理中，讨论的是闭流形之间固定度数 $\deg f_j$ 的 K-拟正则映射$f_j\colon M \to N$；并且证明了极限映射 $f\colon X \to N$ 在结点意义下具有相同的度数；精确表述见[21, 定理 1.1] 。

在定理 9.2 中，度数条件被能量 $A(f_j)$ 的一致上界所取代。主要区别在于，$\mathcal{F}_{K,D}(N)$ 中的一个序列 (f_j) 可能收敛到一个常值映射，因此我们可能会观察到极限处的能量损失 $A(f_j)$。事实上，只需将 [21, 命题

3.1] 替换为以下命题，其证明与 [21,命题 3.1] 的证明几乎完全相同。

命题 9.3. [21, 命题 3.1] 设 N 是一个闭且定向的黎曼 n-流形，且 (f_j) 是 $\mathcal{F}_{K,\ D}(N)$ 中的一个序列，满足 $\sup_j A(f_j) < \infty$。那么，经过选取子序列后，存在一个有限集 $P \subset B_2^n$，具有以下性质：

(1) 测度 $f_j^*\mathrm{vol}_N$ 弱星收敛到一个测度 μ，满足$\mu(B_2^n) \leqslant D \cdot \sup_j A(f_j)$。 2 存在一个 K- 拟正则映射 $f\colon B_2^n \to N$，满足 $f^*\mathrm{vol}_N = \mu$ 于 $B_2^n \setminus P$。 3 序列 (f_j) 在局部一致收敛到 f 于 $B_2^n \setminus P$。 4 对每个 $p \in P$，存在某个整数 $d_p \geqslant 1$，使得 $\mu(p) = d_p \cdot \mathrm{vol}(N)$。

现在我们继续证明定理 9.1。

定理 9.1 的证明。设 (f_j) 是 $\mathcal{F}_{K,D}(N)$ 中的一个序列，且 $\sup_j A(f_j) <\infty$。于是，根据定理 9.2，序列 (f_j) 有一个子序列 (f_{j_i})，它收敛到一个 K-拟正则映射 $f\colon X \to N$；其中 X 是一个节点型 n-流形，其主分层为 B_2^n，其他分层则（可能）是 n-球面。

设 $S \subset X$ 是 X 中的一个分层，它是一个 n-球面。于是 $f|_S\colon S \to N$ 是一个拟正则映射。由于 N 不是有理同调球面，根据庞加莱对偶性，我们有 $\deg(f|_S\colon S \to N) = 0$。因此 $f|_S$ 是常值的。所以 f 在 X 的主分层之外是一个常值映射。因此，对于所有 $p \in$，都有 $d_p = 0\mathrm{Sing}(X)$。我们得出结论，(f_{j_i}) 局部一致收敛到一个 K-拟正则映射 $B_2^n \to N$。此外，我们有

$$\int_{B_2^n} f^*\mathrm{vol}_N \leqslant \liminf_{j\to\infty} \int_{B_2^n} f_j^*\mathrm{vol}_N \leqslant D \lim_{j\to\infty} \int_{B^n} f_j^*\mathrm{vol}_N = D \int_{B^n} f^*\mathrm{vol}_N$$

由雅可比行列式的弱收敛性。这就完成了证明。 □

Appendix A. Donaldson–Freedman–Serre classification of closed 4-manifolds

在本附录中，我们回顾推论 1.2 所需的光滑、闭、单连通、定向 4 维流形的拓扑分类部分。我们还给出交叉形式的正定和负定子空间维数的上界，其中 $4m$-流形的德拉姆代数嵌入 $\bigwedge^* \mathbb{R}^{4m}$ 的子代数。

我们先回顾交叉形式的定义。设 N 是一个闭、连通、定向的 $4m$-流形。 N 的交叉形式是双线性型

$$Q_N\colon H^{2m}(N)/\mathrm{Tor}\, H^{2m}(N) \times H^{2m}(N)/\mathrm{Tor}\, H^{2m}(N) \to \mathbb{Z},$$
$$(u, v) \mapsto (u \smile v)([N]),$$

其中 $[N] \in H_{2m}(N)$ 是 N 关于 N的定向所对应的基本类。令 $\beta_{2m}^+(N)$ 和 $\beta_{2m}^-(N)$ 分别表示 $H^{2m}(N;\ \mathbb{R})$ 中使 Q_N为正定和负定的向量子空间的最大维数。

对于 $m = 1$，Freedman [6, 定理 1.5] 表明，光滑、闭、单连通且定向的 4 维流形在拓扑意义下由其交叉形式分类；也就是说，两个流形同胚当且仅当它们具有相同的交叉形式。另一方面，Donaldson[4] 和 Serre [29, 第五章第 2 节2] 的定理给出了一列对称、幺模的双线性形式，其中包含每个光滑、闭、单连通且定向的 4 维流形的交叉形式。为避免不必要的技术细节，我们不详细列出 Donaldson–Serre 列表，而是指出，我们可以得到下表，其中列出了满足 $\beta^+_{2m}(N) \leqslant 3$ 且 $\beta^-_{2m}(N) \leqslant 3$ 的光滑、闭、单连通且定向的 4 维流形 N：

β_2^- \ β_2^+	0	1	2	3
0	$\mathbb{S}^4$	$\mathbb{C}P^2$	$\#^2\mathbb{C}P^2$	$\#^3\mathbb{C}P^2$
1	$\overline{\mathbb{C}P^2}$	$\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}$, $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$	$\#^2\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}$	$\#^3\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}$
2	$\#^2\overline{\mathbb{C}P^2}$	$\mathbb{C}P^2\#^2\overline{\mathbb{C}P^2}$	$\#^2\mathbb{C}P^2\#^2\overline{\mathbb{C}P^2}$, $\#^2\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$	$\#^3\mathbb{C}P^2\#^2\overline{\mathbb{C}P^2}$
3	$\#^3\overline{\mathbb{C}P^2}$	$\mathbb{C}P^2\#^3\overline{\mathbb{C}P^2}$	$\#^2\mathbb{C}P^2\#^3\overline{\mathbb{C}P^2}$	$\#^3\mathbb{C}P^2\#^3\overline{\mathbb{C}P^2}$, $\#^3\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$

因此，对于闭单连通拟正则椭圆 4-流形 N 的分类，只需注意到 $\beta^\pm_{2m}(N) \leqslant 3$。下面的引理记录了定理 1.1 的这一简单代数推论。

引理 A.1. 设 N 是一个光滑、闭、连通且定向的 $4m$-流形，并设 $\Phi\colon H^*(N,\mathbb{R}) \to \bigwedge^* \mathbb{R}^{4m}$ 是一个分次代数嵌入。那么

$$\beta^\pm_{2m}(N) \leqslant \frac{1}{2}\binom{4m}{2m}.$$

证明. 设 V 是 Q_N 在 $H^{2m}(N;\mathbb{R})$ 中的一个定号向量子空间，并设 $\mathscr{R}\colon H^*(N;\mathbb{R}) \to H^*_{\mathrm{dR}}(N)$ 为德拉姆同构。注意，$\mathscr{R}$ 是一个分次代数同构；例如参见 [3, 定理 III.3.1]。

令 $I\colon \bigwedge^{2m}\mathbb{R}^{4m} \to \mathbb{R}$ 双线性型 $(\omega,\tau) \mapsto \int_{\mathbb{R}^{4m}} \omega\wedge\tau$。双线性型 I 在 $\Phi(\mathscr{R}(V))$ 中是正定或负定的，因为

$$I(\Phi(\mathscr{R}(u)),\Phi(\mathscr{R}(u))) = \int_{\mathbb{R}^{4m}} \Phi(\mathscr{R}u\wedge\mathscr{R}u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^{4m}}\Phi([\mathrm{vol}_N])}{\mathrm{vol}(N)} Q_N(u,u),$$

其中 $\int_{\mathbb{R}^{4m}}\Phi([\mathrm{vol}_N]) \neq 0$。由于 $\bigwedge^{2m}\mathbb{R}^{4m}$ 中的 I 的定号向量子空间维数至多为 $\frac{1}{2}\binom{4m}{2m}$，我们得到

$$\dim V = \dim\Phi(\mathscr{R}(V)) \leqslant \frac{1}{2}\binom{4m}{2m}.$$

该论断得证。 □

AppendixB. Quasiregularity of piecewise linear maps

在本附录中，我们讨论分片线性映射的拟正规性。我们先回顾光滑三角剖分的定义。设 N 是带有分片线性结构的光滑流形。若存在一个具有以下性质的局部有限单纯复形 Σ，使得 $P=|\Sigma|$，并且对每个 $\sigma\in\Sigma$，都存在 $[0,e_1,\dots,e_{\dim\sigma}]$ 的一个邻域 $U\subset\mathbb{R}^{\dim\sigma}$、一个秩为 $\dim\sigma$ 的光滑映射 $\lambda\colon U\to N$，以及一个满足 $\lambda|_{[0,e_1,\dots,e_{\dim\sigma}]}=\kappa\circ A$ 的仿射映射 $A\colon [0,e_1,\dots,e_{\dim\sigma}]\to\sigma$，则称从欧几里得多面体 P 到 N 的分片线性同胚 $\kappa\colon P\to N$ 是分片光滑的。若存在一个从欧几里得多面体到 N 的分片线性同胚，且该映射分片光滑，则称 N 的分片线性结构与 N 的光滑结构相容。

现在我们可以陈述本附录的主要结果了。

命题 B.1. 设 M 和 N 是闭且定向的分片线性黎曼 n 流形，$n\geqslant 2$。设 $p\colon M\to N$ 是一个非退化的保定向分片线性映射。如果分片线性结构与 M 和 N 上的光滑结构均相容，那么 p 是一个拟正则映射。

下面的结果给出了命题 B.1 中的索伯列夫正则性。尽管该结果对于专家而言众所周知，我们仍为方便读者而给出证明。

引理 B.2. 设 M 是一个闭的分片线性光滑 n 流形，且设 $\kappa\colon P\to M$ 是一个分片线性同胚，并且其为分片光滑。设 Σ 是一个满足 $P=|\Sigma|$ 的局部有限单纯复形，并设 $\rho\colon M\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数，满足对于每个 n 单纯形 $\sigma\in\Sigma$，限制 $\rho|_{\kappa(\sigma)}$ 具有光滑延拓。那么 $\rho\in W^{1,\infty}(M,\mathbb{R})$。

证明。由于 M 是闭的且 κ 是一个同胚，Σ 有有限个n-单形 $\sigma_1,\dots,\sigma_j$。不失一般性，我们可以假设每个限制 $\kappa|_{\sigma_i}$, $i=1,\dots,j$ 都是秩为 n 的光滑映射。对于每个 $i\in\{1,\dots,j\}$，存在 $\kappa(\sigma_i)$ 的一个邻域 $U_i\subset M$，以及一个光滑函数 $\psi_i\colon U_i\to\mathbb{R}$，满足 $\psi_i|_{\kappa(\sigma_i)}=\rho|_{\kappa(\sigma_i)}$。

通过如下方式定义微分 1-形式 $\alpha\colon M\to TM^*$：若 $x\in\kappa(\operatorname{int}\sigma_i)$，则令 $\alpha_x=(d\psi_i)_x$；否则令其为 $\alpha_x=0$。显然，$\rho\in L^\infty(M)$ 且 $\alpha\in L^\infty(M,TM^*)$。因此，只需证明 α 是 ρ 的弱微分。

令 $\varphi\in\Omega_0^{n-1}(M)$。则

$$\begin{aligned}\int_M\rho\wedge d\varphi+\int_M\alpha\wedge\varphi&=\sum_{i=1}^{j}\left(\int_{\kappa(\sigma_i)}\psi_i\wedge d\varphi+\int_{\kappa(\sigma_i)}d\psi_i\wedge\varphi\right)\\&=\sum_{i=1}^{j}\int_{\partial\kappa(\sigma_i)}\psi_i\wedge\varphi=\sum_{i=1}^{j}\int_{\kappa(\partial\sigma_i)}\rho\wedge\varphi\end{aligned}$$

根据带角流形上的斯托克斯定理；例如参见 [15, 定理 16.25]。

对于每个 i，令 δ_1^i、……、δ_{n+1}^i 为 σ_i的（$n-1$）-面。那么

$$\sum_{i=1}^{j}\int_{\kappa(\partial\sigma_i)}\rho\wedge\varphi=\sum_{i=1}^{j}\sum_{j=1}^{n+1}\int_{\kappa(\delta_j^i)}\rho\wedge\varphi.$$

对于每个面 δ_ℓ^i，都存在唯一的面 $\delta_{\ell'}^{i'}$，使得面 δ_ℓ^i 和 $\delta_{\ell'}^{i'}$ 作为集合相同，但定向相反。因此，项 $\int_{\kappa(\delta_\ell^i)}\rho\wedge\varphi$和$\int_{\kappa(\delta_{\ell'}^{i'})}\rho\wedge\varphi$ 在求和中相互抵消。由此，整个和为零，结论得证。□

命题 B.1 的证明。设 $\kappa_1\colon P_1\to M$ 和 $\kappa_2\colon P_2\to N$ 是分片线性同胚，且为分片光滑。设 Σ_1 和 Σ_2 是有限单纯复形，其中 $P_i=|\Sigma_i|$，κ_i 相对于 Σ_i 是光滑且满秩的，并且映射 $\kappa_2^{-1}\circ p\circ\kappa_1\colon P_1\to P_2$ 相对于 Σ_1 和 Σ_2是单纯的。设 $\sigma_1,\ldots,\sigma_j$ 是 Σ_1的 n-单形。

由于 p 是非退化的，每个像 $\kappa_2^{-1}(p(\kappa_1(\sigma_i)))$ 都是Σ_2中的一个 n-单形。于是，对于 $i=1,\ldots,j$，存在 $\kappa_1(\sigma_i)$的一个邻域 $U_i\subset M$、$p(\kappa_1(\sigma_i))$的一个邻域 $U_i'\subset N$，以及一个微分同胚 $\varphi_i\colon U_i\to U_i'$，满足$\varphi_i|_{\kappa_1(\sigma_i)}=p|_{\kappa_1(\sigma_i)}$；这是因为映射 $\kappa_1|_{\sigma_i}$ 和$\kappa_2|_{\kappa_2^{-1}(p(\kappa_1(\sigma_i)))}$分别是秩为 n 和 $\kappa_2^{-1}\circ p\circ\kappa_1$ 的光滑单射映射，并且将 σ_i 光滑地映到$\kappa_2^{-1}(p(\kappa_1(\sigma_i)))$。

设 $\iota\colon N\to\mathbb{R}^m$是一个纳什嵌入。根据引理 B.2，$p\circ\iota\in W^{1,\infty}(M,\mathbb{R}^m)$。因此，$p\in W^{1,\infty}(M,N)$，接下来只需证明 p具有有限畸变。

对于几乎所有的 $x\in M$，存在某个 i，使得 $x\in\operatorname{int}\kappa(\sigma_i)$，因此

$$\frac{\|Dp(x)\|^n}{\det Dp(x)}\leqslant\frac{\max_{\kappa(\sigma_i)}\|D\varphi_i\|^n}{\min_{\kappa(\sigma_i)}\det D\varphi}.$$

由于

$$\max_{1\leqslant i\leqslant j}\frac{\max_{\kappa(\sigma_i)}\|D\varphi_i\|^n}{\min_{\kappa(\sigma_i)}\det D\varphi}<\infty,$$

我们得出 p 具有有限畸变。证明至此结束。□

References

[1] M. Bonk 和 J. Heinonen。拟正则映射与上同调。 *Acta Math.*，186 2 219 238，2001 ( ): – 。[2] M. Bonk 和 P. Poggi-Corradini。Rickman-Picard 定理。

Ann. Acad. Sci. , ( ): – 。[3] G. E. *Fenn. Math.* 44 2 615 633, 2019

Bredon。 *Sheaf theory*， *Graduate Texts in Mathematics*第170卷。Springer-Verlag，纽约，第二版，1997。[4] S. K. Donaldson。规范理论在四维拓扑中的一个应用。

J. , ( ): – 。[5] D. *Differential Geom.* 18 2 279 315, 1983

Drasin 和 P. Pankka。Rickman Picard 定理在所有维数中的尖锐性。*Acta Math.*，214(2):209–306，2015。[6] M. H. Freedman。四维流形的拓扑。

J. Differential Geom- , ( ): – 。[7] M. *etry* 17 3 357 453, 1982

Gromov。双曲流形，群与作用，载于 *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978)* 97 *Ann. of Math. Stud.* 183 213, , 第 卷，页码 –，

普林斯顿，新泽西州，1981。普林斯顿大学出版社。[8] S. Heikkil¨a。带符号拟正则曲线。 *J. Anal. Math.*，150(1):37–55，2023。

[9] T. Iwaniec 和 A. Lutoborski。零拉格朗日量的积分估计。

Arch. Rational , ( ): – 。[10]

Mech. Anal. 125 1 25 79, 1993

T. Iwaniec 和 G. Martin。偶数维中的拟正则映射。 *Acta Math.*，170 1 29 81，1993 ( ): – 。[11] J. Jormakka。从 R^3 到闭定向3-流形的拟正则映射的存在性。

Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes, (69):44，1988。[12] I. Kangasniemi。共形形式流形与$(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)\#(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$的一致拟正则非椭圆性。 *Adv. Math.*，393:论文编号 108103，48，2021。[13] I. Kangasniemi。拟正则椭圆流形的尖锐上同调界。 *Amer. J. Math.*，143(4):1079–1113，2021。[14] D. Kotschick。关于调和形式的乘积。 *Duke Math. J.*，107(3):521–531，2001。[15] J. M. Lee。 *Introduction to smooth manifolds* 218 *Graduate Texts in Mathematics* ，第 卷。Springer，纽约，第二版，。2013。[16] R. Luisto 和 E. Prywes。分支集像为分片线性集的开离散映射是分片线性映射。 *J. Lond. Math. Soc. (2)*，103(3):1186–1207，2021。[17] G. Martin、V. Mayer 和 K. Peltonen。广义Lichnerowicz问题：一致拟正则映射与空间形式。

Proc. Amer. Math. Soc.，134(7):2091–2097，2006。[18] Y. Okuyama 和 P. Pankka。一致拟正则动力系统的平衡测度。 *J. Lond. Math. Soc. (2)*，89(2):524–538，2014。[19] P. Pankka。缓慢拟正则映射与万有覆盖。 *Duke Math. J.*，141 2 293 320，2008 ( ): – 。[20] P. Pankka。有界平均畸变映射与上同调。

Geom. Funct. , ( ): – 。[21]

Anal. 20 1 229 242, 2010

P. Pankka 和 J. Souto。拟正则映射的起泡。 *Math. Ann. (to appear)*，arXiv: 1904.00885。[22] K. Peltonen。关于拟正则映射的存在性。

Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. , ( ): 。[23]

A I Math. Dissertationes 85 48, 1992

R. Piergallini 和 D. Zuddas。$\mathbb{C}P^2$ 及其他基本4维流形的分支覆盖。*Bull. Lond. Math. Soc.*，53(3):825–842，2021。[24] E. Prywes。拟正则椭圆流形的上同调上界。

Ann. of , ( ): – 。[25]

Math. (2) 189 3 863 883, 2019

S. Rickman。整拟正则映射遗漏值的数量。

J. , : – 。[26] S. Rickman。拟正则映射的存在性。载于 *Holomorphic functions and moduli Vol. I (Berkeley, CA, 1986)* 10 *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* , { }，第 卷，页码 179–185。Springer，纽约，1988。[27] S. Rickman。 *Quasiregular mappings* 26 *Ergebnisse der Mathematik und* , 第 卷。*ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]* Springer-Verlag，柏林，1993。[28] S. Rickman。单连通拟正则椭圆 4 *Ann. Acad. Sci.* -流形。 , ( ): – *Fenn. Math.* 31 1 97 110, 2006

。[29] J.-P. Serre。 *A course in arithmetic*。Graduate Texts in Mathematics，第 7 号。Springer-Verlag，纽约—海德堡，1973。由法文译出。

Department of Mathematics and Statistics, P.O. Box 68 (Pietari Kalmin katu 5), FI-00014 University of Helsinki, Finland

Email address: susanna.a.heikkila@helsinki.fi

Department of Mathematics and Statistics, P.O. Box 68 (Pietari Kalmin katu 5), FI-00014 University of Helsinki, Finland

Email address: pekka.pankka@helsinki.fi