arXiv:2302.11448v2 [math.RA] 2 Oct 2023

由交换子关系中的项所描述的性质

STEFANO FIORAVANTI

Abstract. 我们研究代数簇所具有的性质，这些性质由一种我们称为交换子方程的新型方程描述。交换子方程是对标准项等式的放宽，即用交换子关系替代等式关系。具体而言，代数 A 满足交换子方程 $p \approx_C q$，是指对于 Con(A) 中的每个同余 θ 以及同一 θ- 类中的元素的每个替换 $p^{\mathbf{A}}$、$q^{\mathbf{A}}$，均有 $(p^{\mathbf{A}}, q^{\mathbf{A}}) \in [\theta, \theta]$。这一方程概念的定义受到弱差项定义的启发，并允许对其作进一步推广。此外，我们给出了一种算法，在由给定簇的幂等约化的阿贝尔代数生成的簇中成立的同余方程与整个簇中成立的同余方程之间建立联系。最后，我们证明：如果由某个代数簇的幂等约化的阿贝尔代数生成的簇满足一个非平凡幂等 Mal'cev 条件，那么整个代数簇也满足一个非平凡幂等 Mal'cev 条件；这一结论也可由 [14, 定理 3.13] 得出。

1. Introduction

这项工作的缘起，是我们对由方程描述的簇类性质的兴趣。从 Mal'cev 关于同余可置换性的开创性研究出发（见 [17], ），利用 Mal'cev 条件刻画簇类性质这一问题已取得了许多成果。值得注意的是，A. Pixley 在 [19] 确定了一个强 Mal'cev 条件，用以描述同余既分配又可置换的簇类。类似地，B. J´onsson 在 [10] 建立了一个 Mal'cev 条件，用以刻画同余分配性；A. Day 则在 [5] 给出了一个 Mal'cev 条件，用以刻画具有模同余格的簇类。

上述结果是 Pixley [20] 和 R. Wille [24] 独立得到的一条更一般定理的实例，这条定理可视为该领域的奠基性结果。他们证明，若

2020 年数学主题分类。03C05,08B05,08B10。1

$p \leq q$ 是格恒等式，那么其同余格满足 $p \leq q$ 的簇所构成的类是可数多个 Mal'cev 类的并。特别是， [20] 和 [24] 提供了一种算法，用于生成与同余恒等式相关的 Mal'cev 条件。

此外，这些研究促使人们开始探讨这样的方程：其中变量的取值范围不仅限于同余格，还可以是可能更广泛的集合，例如所有容忍关系构成的格，或所有相容自反关系构成的格。关于代数的相容自反关系格上的方程，Pixley [20] 和 R. Wille[24] 结果的类似结论见 [8]。

此外，近年来，Mal'cev 条件的研究因其与约束满足问题（CSPs） [1, 25] 的深刻关联而日益受到关注，并且也与运算闭集的性质研究密切相关（例如， [6, 7, 21]）。

沿着这一研究方向，我们旨在引入一种新型方程，并将其称为交换子方程。受弱差项簇的定义与刻画（如 [14] 第6.1章所述）的启发，我们提出交换子方程的概念，以推广这一概念。显然，弱差项是通过将刻画方程放宽为我们所称的交换子方程而得到的马尔采夫项的弱化形式。因此，这一性质定义了一种 Mal'cev 条件，其严格弱于刻画含有马尔采夫项的簇类的 Mal'cev 条件。

在第2节和第3节中，我们介绍研究所需的一些基本概念。在第4节中，我们证明了 Taylor 定理关于交换子方程的一个等价结论 [23] ，该结果也可由 [14,定理 3.13]推出。具体而言，定理 4.4 表明，簇 $\mathcal{V}$ 是 Taylor 的，当且仅当由 $\mathcal{V}$ 的幂等约化的阿贝尔代数生成的簇 $\mathcal{V}'$ 是 Taylor 的。此外，我们还用同余方程给出了这一性质的一种新刻画。该结果建立了簇 $\mathcal{V}$ 与由 $\mathcal{V}$ 的幂等约化的阿贝尔代数生成的簇 $\mathcal{V}'$ 之间的联系，并将在第5节中进一步发展这一联系。在最后一节中，我们旨在为交换子方程提供一种 Pixley-Wille 型算法。在本节的主要结果定理 5.3 中，我们证明，在所涉及的格项满足温和假设的条件下，通过 Pixley-Wille 算法由同余方程产生的标准项方程，若将其弱化为交换子方程，则所得性质刻画了一个弱马尔采夫类。

2. Preliminaries and Notations

在本节中，我们简要回顾泛代数中的基本定义，并介绍一些与我们研究相关的新定义。关于一般代数的基本概念，例如格、代数和簇，我们参阅教材 [2]。关于更深入的主题，包括阿贝尔同余和同余交换子，我们请读者参阅 [14]。Mal'cev 条件和 Mal'cev 类的一般理论，可见于 [22], 所介绍的经典论述，或者参见 [14]所概述的较现代方法。我们先回顾中心化子的定义。设 $\mathbf{A}$ 为一个代数。对于 α、β、$\delta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$，如果$\alpha$ 模 δ 中心化 β，则称α 关于 δ 中心化 β，当所有可能的矩阵

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{a},\mathbf{u}) & f(\mathbf{a},\mathbf{v}) \\ f(\mathbf{b},\mathbf{u}) & f(\mathbf{b},\mathbf{v}) \end{pmatrix}$$

对于 $f \in \mathrm{Pol}_{n+m}(\mathbf{A})$，$\mathbf{a}$、$\mathbf{b} \in A^n$，$\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in A^m$，且 $\mathbf{a} \equiv_\alpha \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{u} \equiv_\beta \mathbf{v}$，我们有:

$$\text{if } f(\mathbf{a},\mathbf{u}) \equiv_\delta f(\mathbf{a},\mathbf{v}), \text{ then } f(\mathbf{b},\mathbf{u}) \equiv_\delta f(\mathbf{b},\mathbf{v}).$$

在这种情况下，我们记作 $C(\alpha,\beta;\,\delta)$，并称三元关系 C为中心化子关系。有关中心化子关系各种性质的全面概述，感兴趣的读者可参阅 [14, 第2.5]节。

现在回顾二项中心化子的定义。设 $\mathbf{A}$ 为一个代数。对于 $\alpha,\beta,\delta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$，若对所有可能的矩阵，我们称 α 在模 δ 意义下二项中心化β。

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{a},\mathbf{u}) & f(\mathbf{a},\mathbf{v}) \\ f(\mathbf{b},\mathbf{u}) & f(\mathbf{b},\mathbf{v}) \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} t(\mathbf{a},\mathbf{u}) & t(\mathbf{a},\mathbf{v}) \\ t(\mathbf{b},\mathbf{u}) & t(\mathbf{b},\mathbf{v}) \end{pmatrix}$$

其中 $f,t \in \mathrm{Pol}_{n+m}(\mathbf{A})$，$\mathbf{a}$、$\mathbf{b} \in A^n$，$\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in A^m$，且 $\mathbf{a} \equiv_\alpha \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{u} \equiv_\beta \mathbf{v}$，我们有:

$$\text{if } f(\mathbf{a},\mathbf{u}) \equiv_\delta t(\mathbf{a},\mathbf{u}),\ f(\mathbf{a},\mathbf{v}) \equiv_\delta t(\mathbf{a},\mathbf{v}), \text{ and } f(\mathbf{b},\mathbf{u}) \equiv_\delta t(\mathbf{b},\mathbf{u}) \text{ then } f(\mathbf{b},\mathbf{v}) \equiv_\delta t(\mathbf{b},\mathbf{v}).$$

我们将这个三元关系记作 $C_{2T}(\alpha,\beta;\,\delta)$，并称之为二项中心化子。在我们的研究中，我们采用 Freese 和 McKenzie 在 [9] 中引入的 TC-交换子。关于交换子的性质和基本结果，请参阅 [14]。此外，在定理 5.3 中，我们还用到了线性交换子和二项交换子的概念，分别记作 $[\alpha,\beta]_L$ 和 $[\alpha,\beta]_{2T}$

。例如，这些定义可见于 [13] 和 [15]。

此外，簇 $\mathcal{V}$ 的弱差项是一个三元项 $d(x, y, z)$，满足：对于所有 $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$, $a, b \in A$，以及满足 $(a, b) \in \theta$ 的 $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$，都有：

$$d(b, b, a)\ [\theta, \theta]\ a\ [\theta, \theta]\ d(a, b, b),$$

关于这一概念的全面论述，请参阅 [14, 第6]章。我们可以观察到，弱差项在阿贝尔同余的任何一个块上都是 Mal'cev。因此，具有弱差项的簇中的任何阿贝尔代数都是仿射的 [14]。作为这一概念的推广，我们引入交换子方程的概念。设 p 和 q 是语言 $\mathcal{L}$ 的项。于是，我们将涉及这两个项的方程记作 $p \approx q$。本文中，我们将这类方程称为项方程。作为这一概念的放宽，我们定义交换子方程。设 $\mathbf{A}$ 是一个代数，且 p 和 q 是 $\mathbf{A}$ 的 n 元项。若对于所有 $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$，以及所有属于同一个 θ-类的 $a_1, \ldots, a_n \in A$，都有：则称 $\mathbf{A}$ 满足交换子方程 $p \approx_C q$，记作 $\mathbf{A} \models p \approx_C q$。

$$p(a_1, \ldots a_n)\ [\theta, \theta]\ q(a_1, \ldots a_n).$$

显然，这种方程的概念比标准的项方程弱。事实上，如果一个代数满足项方程 $p \approx q$，那么它也满足交换子方程 $p \approx_C q$

接下来，我们回顾 Taylor 项的定义，该定义在 [23], 中提出，因为本文将频繁引用它。一个 n元 Taylor 项是满足以下项方程的项：

$$\begin{aligned} f(x_{11}, \ldots, x_{1n}) &\approx f(y_{11}, \ldots, y_{1n}) \\ &\vdots \\ f(x_{n1}, \ldots, x_{nn}) &\approx f(y_{n1}, \ldots, y_{nn}) \end{aligned}$$

其中 x_{ij}、$y_{ij} \in \{x, y\}$ 和 $x_{ii} \neq y_{ii}$，对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$均成立。这些方程描述了满足非平凡幂等 Mal'cev 条件 [23], 的一类簇，通常称为 Taylor 簇。

在继续之前，我们先回顾一下人字形项的定义，该定义也可见于 [14, 第 8.2] 节或 [15]。这些项尤其值得关注，因为它们与簇中性质良好的交换子有着重要联系，详见 [13] 和 [15]。

定义 2.1. 我们将变量 $\{x, y, z\}$ 上由下式定义的格项族$\{y^i\}_{i\in\mathbb{N}}$称为人字形项:

$$y^0(x, y, z) = y;$$
$$y^{n+1}(x, y, z) = y \vee (x \wedge y^n(x, z, y)).$$

我们采用上标记法，而不采用传统的下标记法，因为后者与通常用下标表示变量序列的惯例相冲突。值得注意的是，这些格项会产生一个可能无限的升链，而且通常以其对偶版本呈现。此外，设 p 是语言 $\wedge$、$\vee$、$\circ$ 中的一个项，并考虑 $k \in \mathbb{N}$。我们用 $p^{(k)}$ 表示将 $\vee$ 的每次出现都替换为 k 重关系乘积 $\circ^{(k)}$ 后得到的 $\{\wedge, \circ\}$ 项。

3. 标记图和正则项

为了介绍第5节的主要结果，我们回顾通常定义的与项相关联的标记图的定义（参见例如 [3, 4,14]）。首先给出标记图的定义。

定义 3.1. 设 S 是一个标签集合。那么，标记图是一个有向图 $\mathbf{G} = (V_{\mathbf{G}}, E_{\mathbf{G}})$，并带有一个标记函数 $l\colon E_{\mathbf{G}} \to S$。

接下来，[14], 令 p 为变量 $\{X_1, \ldots, X_t\}$中的一个 $\{\wedge, \circ\}$-项。我们给出一种构造，得到标记图 $\{\mathbf{G}_i(p)\}_{i\in I}$的有限序列。该序列以标记图 $\mathbf{G}_1(p) = (\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_2)\})$ 为起点，其中 $l((x_1, x_2)) = p$ 有一条边 (x_1, x_2)，其标签为 p，连接两个顶点 x_1 和 x_2。对于 $s \geq 1$，我们从标记图 $\mathbf{G}_s(p)$ 出发，该图的顶点为 $V_{\mathbf{G}_s(p)} = \{x_1, \ldots, x_k\}$，并选择（如果可能） $w \notin \{X_1, \ldots, X_t\}$，使得 w 是 $\mathbf{G}_s(p)$ 中一条边 (x_i, x_j) 的标签。然后分两种情况。

- 若 $w = u \wedge v$ 对某个 u 和 v $\{\wedge, \circ\}$-项成立，则 $\mathbf{G}_{s+1}(p)$ 可由 $\mathbf{G}_s(p)$ 得到：将标记为 w的边 (x_i, x_j) 替换为两条边，它们连接相同的顶点 x_i 和 x_j，标签分别为u和 v；
- 如果 $w = u \circ v$ 对于某些 u 和 v $\{\wedge, \circ\}$-项成立。那么 $\mathbf{G}_{s+1}(p)$ 可由 $\mathbf{G}_s(p)$ 得到：引入一个新顶点 x_{k+1}，并将标记为 w 的边 (x_i, x_j) 替换为两条边 (x_i, x_{k+1}) 和 (x_{k+1}, x_j)，它们分别标记为 u和 v，并通过 x_{k+1}将这些顶点依次连接起来。

当对于某个 $n \in \mathbb{N}$，上述步骤均无法应用于标记图 $\mathbf{G}_n(p)$ 时，构造过程便结束。因此，当 $l(e) \in \{X_1, \ldots, X_t\}$ 对于 $\mathbf{G}_n(p)$ 中的每条边 e 均成立时，

值得注意的是，每一步中 w 的选择可能会导致从项 p 得到不同的序列。然而，我们观察到，序列中的最后一个图在顶点重新排序后保持不变。我们将序列中的最后一个图称为与 p 相关联的标记图 $\{\mathbf{G}_i(p)\}_{i\in I}$，记作 $\mathbf{G}(p)$。

引入 $\mathbf{G}(p)$ 的主要原因在 [4, 命题 3.1] 和 [14] 的断言 4.8 中阐述。后者可以推广到容忍关系，如 [16, 命题 2.1] 所示，甚至可以推广到一般的关系，如 [8,命题 3.3] 所示。我们给出这一技术结果的最一般形式，以便在第5节中使用。

命题 3.2（[8]的命题 3.3）。设 $\mathbf{A}$ 是一个代数，设 p 是变量 $\{X_m\}_{m\in I}$ 中的一个 $\{\circ,\wedge\}$-项，并设 $R_i \subseteq A\times A$ 对于 $i\in I$。则：

（1）设 $V_{\mathbf{G}(p)}\to A$：$x_s\mapsto a_s$ 是一个赋值，使得对于 $\mathbf{G}(p)$ 中标签为 X_k 的所有边（x_i，x_j）以及 $k\in I$，都有（a_i，a_j）$\in R_k$。则（a_1，a_2）$\in p$（R_1，...，R_n）。（2）反之，给定任意（a_1，a_2）$\in p$（R_1，...，R_n），存在一个赋值 $V_{\mathbf{G}(p)}\to A$：$x_s\mapsto a_s$，其扩展为 $x_1\mapsto a_1$、$x_2\mapsto a_2$，使得当（x_i，x_j）是 $\mathbf{G}(p)$ 中标记为 X_k 的一条边且满足 $k\in I$ 时，（a_i，a_j）$\in R_k$，其中（x_1，x_2）是图 $\mathbf{G}_1(p)$ 的唯一一条边。

4. Taylor varieties and abelian algebras

本节旨在证明一种描述 Taylor 簇的性质；与 [23] 中给出的标准相比，该性质在逻辑上更弱。Taylor 簇因诸多原因受到广泛关注。令人惊讶的是，Taylor 簇构成了一个强马尔采夫类[18],，而且这一类簇与 Feder-Vardi 猜想有着深刻的联系；该猜想已分别在 [1] 和 [25] 中被证明成立。此外，近期研究揭示了交换子与 Taylor 簇之间关系的一些深刻结果 [12]。因此，Taylor 簇始终是泛代数领域研究的核心主题。

在深入探讨交换子方程理论之前，我们先从一个简单的观察开始。

注 4.1. 设 $\mathcal{V}$ 是满足交换子方程$x\approx_C p(x,\dots,x)$的一个簇。那么 p 是幂等的。

这条评论源于一个事实：交换子方程对零同余也必须成立。

为了证明本节的主要结果，我们先给出一个引理；[15] 中以略有不同的形式陈述了该引理，但没有提供证明。今后，若未特别说明，$\beta^n = y^n(\alpha, \beta, \gamma)$且$\gamma^n = y^n(\alpha, \gamma, \beta)$。

引理 4.2. 设 A 是一个代数，且 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Con(A)}$。设 $\delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\alpha \wedge \beta^n)$。那么，

$$[\alpha \wedge (\beta \vee \gamma), \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)] \leq \delta.$$

证明. 我们注意到，定义 2.1 表明，同余链 $\{\alpha \wedge \beta^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\alpha \wedge \gamma^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是共尾的，因为：

$$\alpha \wedge \beta^{n+1} \geq \alpha \wedge \gamma^n \geq \alpha \wedge \beta^{n-1}.$$

因此

$$\delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\alpha \wedge \beta^n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\alpha \wedge \gamma^n).$$

由这个恒等式、方程 $\beta^{n+1} = \beta \vee (\alpha \wedge \gamma^n)$ 以及 $\wedge$ 对并的分配性，可得：

$$\alpha \wedge (\beta \vee (\alpha \wedge \delta)) = \alpha \wedge (\beta \vee (\alpha \wedge \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\alpha \wedge \gamma^n)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\alpha \wedge \beta^n) = \delta. \tag{4.1}$$

显然，将 β 替换为 γ，也有类似的等式。由这两个恒等式以及中心化子关系的性质（参见 [14, 定理 2.19 (8)],），可得 $C(\beta, \alpha; \delta)$ 和 $C(\gamma, \alpha; \delta)$。中心化子在第一个分量上的半分配性（[14, 定理 2.19 (5)]）给出 $C(\beta \vee \gamma, \alpha; \delta)$。由交换子的定义可得 $[\beta \vee \gamma, \alpha] \leq \delta$，结论由交换子的单调性即得。□

引理 4.2 与下述定理共同在证明本节的主要结果中发挥关键作用。该定理确立了 Olˇs'ak 的结果 [18] 与刻画 Taylor 簇的方程 [13]之间的联系。利用 [18] 以及引理 4.6]中的同余方程 [13, ，我们可以得到该方程的简化形式。在 [13] 中，刻画 Taylor 簇的原始同余方程是借助一个任意的 n 元 Taylor 项推导出来的；而引入一个 6 元 Olˇs' ak 项后，我们便可以将其改写为一种更易理解的形式，其中只涉及固定数量的同余。

定理 4.3. 设 $\mathcal{V}$ 为一个簇。那么，以下条件等价：

(1) $\mathcal{V}$是 Taylor 簇；(2) $\mathcal{V}$ 满足以

下项方程：

$$t(x, y, y, y, x, x) \approx t(y, x, y, x, y, x) \approx t(y, y, x, x, x, y); \tag{4.2}$$

对于某个幂等项 t。

(3) $\mathcal{V}$ 满足关于变量$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_6, \beta_1, \ldots, \beta_6\}$的以下同余方程：

$$\bigwedge_{i=1}^{6}(\alpha_i \circ \beta_i) \leq (\bigvee_{i=1}^{6} \alpha_i \wedge \bigwedge_{i=1}^{2}(\gamma \vee \theta_i)) \vee (\bigvee_{i=1}^{6} \beta_i \wedge \bigwedge_{i=1}^{2}(\gamma \vee \theta_i)); \tag{4.3}$$

where $\gamma = \bigwedge_{i=1}^{6}(\alpha_i \vee \beta_i)$ *and*

$$\theta_i = (\bigvee_{j \in L_i} \alpha_j \vee \bigvee_{j \in L'_i} \beta_j) \wedge (\bigvee_{j \in R_i} \alpha_j \vee \bigvee_{j \in R'_i} \beta_j)$$

with

$$L_1 = L_2 = \{1, 5, 6\} \qquad L'_1 = L'_2 = \{2, 3, 4\}$$
$$R_1 = \{2, 4, 6\} \qquad R'_1 = \{1, 3, 5\}$$
$$R_2 = \{3, 4, 5\} \qquad R'_2 = \{1, 2, 6\}$$

证明。(1) 与 (2) 等价，这由 Olˇs´ak 的结果 [18] 得出。(2) $\Rightarrow$ (3) 由 [13, 引理 4.6] 得出，只需调整 (2) 中六元 Taylor 项的证明。为完整起见，我们给出修改后的证明。设 $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$，且 $(a, b) \in \bigwedge_{i=1}^{6}(\alpha_i \circ \beta_i)$。因此存在 $u_1, \ldots u_6 \in A$，使得对所有 $i \in \{1, \ldots, 6\}$，都有 $a\ \alpha_i\ u_i\ \beta_i\ b$。令 $u = t^{\mathbf{A}}(u_1, \ldots, u_6)$，且 $v = t^{\mathbf{A}}(a, b, b, b, a, a) = t^{\mathbf{A}}(b, a, b, a, b, a) = t^{\mathbf{A}}(b, b, a, a, a, b)$。我们证明：

(a) $(a, u) \in \bigvee_{i=1}^{6} \alpha_i$;
(b) $(u, b) \in \bigvee_{i=1}^{6} \beta_i$;
(c) $(a, u), (u, b) \in \bigwedge_{i=1}^{2}(\gamma \circ \theta_i)$.

对于断言 (a) 和 (b)，我们注意到：

$$a = t^{\mathbf{A}}(a, \ldots, a)\ \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_6\ t^{\mathbf{A}}(u_1, \ldots, u_6)$$
$$b = t^{\mathbf{A}}(b, \ldots, b)\ \beta_1 \circ \cdots \circ \beta_6\ t^{\mathbf{A}}(u_1, \ldots, u_6)$$

对于断言 (c)，我们注意到 a、b 和 v 属于同一个 γ-类。此外：

$$u = t^{\mathbf{A}}(u_1, \ldots, u_n)\ \theta_i\ v.$$

因此，$a\ \gamma\ v\ \theta_i\ u$ 和 $b\ \gamma\ v\ \theta_i\ u$，且 (c) 成立。将 (a)、(b) 和 (c) 合并可得，(a, b) 属于不等式 (4.3) 右侧，且 (3) 成立。对于 (3) $\Rightarrow$ (1)，我们可以注意到，方程 (4.3) 是 [13, 引理 4.6] 的证明中方程的一个特殊情形，因此 (4.3) 是非平凡的，进而意味着满足一个非平凡的幂等 Mal'cev 条件。考虑一个含有 8 个元素的集合 $\{a, b, u_1, \ldots, u_n\}$，其上的划分 α_i 由 (a, u_i) 生成，而划分 β_i 由 (b, u_i) 生成，其中对所有 $i \in \{1, \ldots, 6\}$ 均成立，即可看出这一点。因此，(1)、(2) 和 (3) 等价。□

值得注意的是，方程 (4.3) 还可以利用关系乘积进一步简化，并完全避免使用 $\vee$。这种方法通过 Pixley-Wille 算法 [20, 24] 导出一个强 Mal'cev 条件。考虑到这些因素，我们可以证明本节的主要结果：利用定理 4.3，找出一个等价于 Taylor 性质且涉及交换子方程的 Mal'cev 条件。

定理 4.4. 设 $\mathcal{V}$ 是一个簇。则以下条件等价：

(1) $\mathcal{V}$ 是 Taylor；(2) 由 $\mathcal{V}$ 的幂等约化中的阿贝尔代数生成的簇 $\mathcal{V}'$ 是 Taylor；(3) $\mathcal{V}$ 满足交换子方程：

$$t(x,y,y,y,x,x) \approx_C t(y,x,y,x,y,x) \approx_C t(y,y,x,x,x,y)$$
$$t(x,x,x,x,x,x) \approx_C x;$$

(4) $\mathcal{V}$ 满足以下同余方程：

$$\bigwedge_{i=1}^{6}(\alpha_i \circ \beta_i) \leq (\bigvee_{i=1}^{6}\alpha_i \wedge \bigwedge_{i=1}^{2}(\tau \vee \theta_i)) \vee (\bigvee_{i=1}^{6}\beta_i \wedge \bigwedge_{i=1}^{2}(\tau \vee \theta_i));$$

其中

$$\theta_i = (\bigvee_{j\in L_i}\alpha_j \vee \bigvee_{j\in L_i'}\beta_j) \wedge ([\tau,\tau] \circ \bigvee_{j\in R_i}\alpha_j \vee \bigvee_{j\in R_i'}\beta_j)$$

其中 $\tau = \bigwedge_{i=1}^{6}(\alpha_i \vee \beta_i)$ 且

$$L_1 = L_2 = \{1,5,6\} \qquad L_1' = L_2' = \{2,3,4\}$$
$$R_1 = \{2,4,6\} \qquad R_1' = \{1,3,5\}$$
$$R_2 = \{3,4,5\} \qquad R_2' = \{1,2,6\}$$

(5) 存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\mathcal{V}$ 满足关于变量 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_6,\beta_1,\ldots,\beta_6\}$ 的以下同余方程：

$$\bigwedge_{i=1}^{6}(\alpha_i \circ \beta_i) \leq (\bigvee_{i=1}^{6}\alpha_i \wedge \bigwedge_{i=1}^{2}(\tau \vee \theta_i)) \vee (\bigvee_{i=1}^{6}\beta_i \wedge \bigwedge_{i=1}^{2}(\tau \vee \theta_i)); \tag{4.4}$$

其中 $\tau = \bigwedge_{i=1}^{6}(\alpha_i \vee \beta_i)$，且

$$\theta_i = (\bigvee_{j\in L_i}\alpha_j \vee \bigvee_{j\in L_i'}\beta_j) \wedge ((\bigwedge_{i=1}^{5}(\alpha_i \vee \beta_i) \wedge \beta_6^n) \circ \bigvee_{j\in R_i}\alpha_j \vee \bigvee_{j\in R_i'}\beta_j)$$

$$with\ \beta_6^n = y^n(\bigwedge_{i=1}^5(\alpha_i \vee \beta_i), \beta_6, \alpha_6)\ and$$

$$\begin{aligned} L_1 = L_2 &= \{1,5,6\} & L_1' = L_2' &= \{2,3,4\} \\ R_1 &= \{2,4,6\} & R_1' &= \{1,3,5\} \\ R_2 &= \{3,4,5\} & R_2' &= \{1,2,6\} \end{aligned}$$

证明。(1) ⇒ (2) 显然成立，因为如果 $\mathcal{V}$ 是 Taylor，那么 $\mathcal{V}$ 的幂等约化也是 Taylor。

对于 (2) ⇒ (3)，设由 $\mathcal{V}$ 的幂等约化中的阿贝尔代数生成的簇 $\mathcal{V}'$ 是 Taylor 簇。因此，它有一个 Olˇs´ak 项 t，满足定理 4.3 中的方程 (4.2)。设 A $\in \mathcal{V}$，且 $\theta \in$ Con(A)。对 A 关于 $[\theta,\theta]$ 取商后，我们看到，只需验证 (3) 中针对阿贝尔同余的方程。令 A′ 为 A 的幂等约化。我们可以观察到，A 的每个 θ-类都是 A′ 的一个阿贝尔子代数，因此根据 (2)，它有一个满足 (4.2) 的项 t。我们断言，t 满足 (3) 中针对 $\mathcal{V}$ 的方程。令 $(a,b) \in \theta$，则 $t^{\mathbf{A}'}(a,b,b,b,a,a) = t^{\mathbf{A}'}(b,a,b,a,b,a) = t^{\mathbf{A}'}(b,b,a,a,a,b)$ 且 $t^{\mathbf{A}'}(a,a,a,a,a,a) = a$。交换子方程 (4.2) 可直接推出，注意这里已经对 $[\theta,\theta]$ 取了商。

对于 (3) ⇒ (4)，假设 (3) 成立。令 A $\in \mathcal{V}$ 且令 $\alpha_1, \ldots, a_6, \beta_1, \ldots, \beta_6 \in$ Con(A)，使得 $(a,b) \in \bigwedge_{i=1}^6(\alpha_i \circ \beta_i)$。那么，仿照定理 4.3 证明中 (2) ⇒ (3) 的论证，我们可知存在 $u_1, \ldots u_6 \in A$ 使得对所有 $i \in \{1,\ldots,6\}$都有 $a\ \alpha_i\ u_i\ \beta_i\ b$。令 $u = t^{\mathbf{A}}(u_1,\ldots,u_6)$，并令 $v = t^{\mathbf{A}}(a,b,b,b,a,a)$。由于 $(a,b) \in \tau$，根据 (3) 中的方程，我们有 $v\ [\tau,\tau]\ t^{\mathbf{A}}(b,a,b,a,b,a)\ [\tau,\tau]\ t^{\mathbf{A}}(b,b,a,a,a,b)$。我们证明：

(a) $(a,u) \in \bigvee_{i=1}^6 \alpha_i$；(b) $(u,b) \in \bigvee_{i=1}^6 \beta_i$；(c) (a,u)，$(u,b) \in \bigwedge_{i=1}^2(\tau \circ \theta_i)$。

对于断言 (a) 和 (b)，根据注 4.1，我们可以观察到 t 是幂等的，因此

$$\begin{aligned} a = t^{\mathbf{A}}(a,\ldots,a)\ \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_6\ t^{\mathbf{A}}(u_1,\ldots,u_6) \\ b = t^{\mathbf{A}}(b,\ldots,b)\ \beta_1 \circ \cdots \circ \beta_6\ t^{\mathbf{A}}(u_1,\ldots,u_6). \end{aligned}$$

对于断言 (c)，我们注意到 a、b 和 v 属于同一个 τ-类。此外，我们可以证明，对于 $i=1$，$v\ \theta_i\ u$，2。

$$t^{\mathbf{A}}(u_1,\dots,u_n)\bigvee_{j\in L_1}\alpha_j\vee\bigvee_{j\in L_1'}\beta_j\ v$$

$$t^{\mathbf{A}}(u_1,\dots,u_n)\bigvee_{j\in R_1}\alpha_j\vee\bigvee_{j\in R_1'}\beta_j\ t^{\mathbf{A}}(b,a,b,a,b,a)\ [\tau,\tau]\ v$$

$$t^{\mathbf{A}}(u_1,\dots,u_n)\bigvee_{j\in R_2}\alpha_j\vee\bigvee_{j\in R_2'}\beta_j\ t^{\mathbf{A}}(b,b,a,a,a,b)\ [\tau,\tau]\ v.$$

因此，$a\ \tau\ v\ \theta_i\ u$ 以及 $b\ \tau\ v\ \theta_i\ u$，从而 (c) 成立。结合 (a)、(b) 和 (c)，我们得到 (a,b) 位于不等式 (4) 右侧。

(4) $\Rightarrow$ (5) 通过将引理 4.2 应用于方程 (4)（其中使用 $\alpha=\bigwedge_{i=1}^{5}(\alpha_i\vee\beta_i)$、$\beta=\beta_6$ 和 $\gamma=\alpha_6$）即可得到。因此 $[\bigwedge_{i=1}^{6}(\alpha_i\vee\beta_i)\ \bigwedge_{i=1}^{6}(\alpha_i\vee\beta_i)]\le\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\alpha\wedge\beta^n)$，从而存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得：

$$[\tau,\tau]\le\bigwedge_{i=1}^{5}(\alpha_i\vee\beta_i)\wedge\beta_6^n.$$

这就得到了方程 (5)。对于 (5) $\Rightarrow$(1)，我们证明方程 (4.4) 是非平凡的，而根据 Pixley-Wille 算法，这蕴含了 (1)，见 [20, 24]。设 $\mathbf{A}=\langle\{a,b,c_1\dots c_6\},\pi\rangle$ 是一个代数，其基本运算仅为投影。显然，每个等价类都是 Con(A) 中的一个同余。令 α_i 为仅将 $\{a,c_i\}$ 识别的划分，并令 β_i 为仅将 $\{b,c_i\}$ 识别的划分，对所有 $i\in\{1,\dots,6\}$ 均如此。于是 (a,b) 位于 (4.4) 的左侧。我们证明 (a,b) 不在右侧。首先可以观察到，对于所有 $n\in\mathbb{N}$，$\bigwedge_{i=1}^{5}(\alpha_i\vee\beta_i)\wedge\beta_6^n=0$，因为对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $\beta_6^n=\beta_6$。此外，$\bigvee_{i=1}^{6}\alpha_i$ 恰好有两个类 $\{a,c_1,\dots,c_6\}$ 和 $\{b\}$，而 $\bigvee_{i=1}^{6}\beta_i$ 的两个类为 $\{c_1,\dots,c_6,b\}$ 和 $\{a\}$。再者，我们可以观察到，对于所有 $j=1$，……，6，有 (a,c_j)、$(c_j,b)\notin\bigwedge_{i=1}^{2}\tau\vee\theta_i$。因此，$\bigwedge_{i=1}^{2}\tau\vee\theta_i$ 仅有 $\{a,b\}$ 这一个非平凡类。于是我们可以得出，$\{a\}$ 是 $\bigvee_{i=1}^{6}\alpha_i\wedge\bigwedge_{i=1}^{2}(\tau\vee\theta_i)$ 的一个类，而 $\{b\}$ 是 $\bigvee_{i=1}^{6}\beta_i\wedge\bigwedge_{i=1}^{2}(\tau\vee\theta_i)$ 的一个类。因此 $(a,b)\notin(\bigvee_{i=1}^{6}\alpha_i\wedge\bigwedge_{i=1}^{2}(\tau\vee\theta_i))\vee(\bigvee_{i=1}^{6}\beta_i\wedge\bigwedge_{i=1}^{2}(\tau\vee\theta_i))$，如所要求。□

前述定理是在放宽假设的情况下，对 Taylor 关于满足非平凡幂等 Mal’cev 条件的簇类的刻画所作的改进。值得注意的是，该证明并不完全依赖 Olˇs’ak 项，也可以改用一般的 n元 Taylor 项。然而，使用

Olˇs'ak 项能够导出更简单的方程。前述定理也可以视为 [14, 定理 3.13],的推论；该定理表明 Taylor 簇不含强阿贝尔同余，是一个更强的结果。尽管如此，我们仍在讨论中纳入前述结果，因为其证明中采用的技巧可应用于更广泛的情境。下一节将进一步探讨这一思路及其影响。

5. A Pixley-Wille type algorithm for commutator equations

本节旨在为交换子方程构建一种 Pixley-Wille 型算法；在 [15,定理 3.4]中可以看到这一思路的一部分，但该定理没有给出证明。研究这个问题很有意义，因为系统地刻画由交换子方程描述的 Mal'cev 条件，可以得到在逻辑上弱于其同余对应条件的幂等 Mal'cev 条件。

设 $p \leq q$ 是语言 $\{\wedge, \circ\}$ 中关于变量$\{X_s\}_{s\in I}$的一个方程。设 $\mathbf{G}(p)$ 和 $\mathbf{G}(q)$ 分别是通过第 3 节所述过程从 p和 q 得到的图，并设 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 是 $\mathbf{G}(p)$ 的顶点集。对所有 $s \in I$，定义：

$$
\begin{aligned}
T_s(p) &:= \{(x_i, x_j) \mid (x_i, x_j) \text{ is an edge of } \mathbf{G}(p) \text{ with label } X_s\} \\
Tt^n(q) &:= \{(t_i, t_j) \mid (x_i, x_j) \text{ is an edge of } \mathbf{G}(q)\} \\
Tt^n_s(q) &:= \{(t_i, t_j) \mid (x_i, x_j) \text{ is an edge of } \mathbf{G}(q) \text{ with label } X_s\},
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

其中，$Tt^n(q)$ 中各有序对的元素 $\{t_1, \dots, t_l\}$ 是 n元项，且 $t_1 = x_1$ 和 $t_2 = x_n$ 是变量 $\{x_1, \dots, x_n\}$中的变量。设 $R \subseteq A \times A$是集合 A上的一个关系。我们用 $\mathrm{Eqv}(R)$ 表示由 R生成的等价关系。定义 $\mathrm{Eq}_s(p \leq q)$ 为所有形如以下形式的方程组成的集合：

$$
t_i(\sigma_s(x_1), \dots, \sigma_s(x_m)) \approx t_j(\sigma_s(x_1), \dots, \sigma_s(x_m)) \tag{5.2}
$$

使得 $(t_i, t_j) \in Tt^n_s(q)$，其中 n是 $\mathbf{G}(p)$ 中顶点的数量，而 σ_s 是 $\mathrm{Eqv}(T_s(p))$ 的一个横截，即将同一 $\mathrm{Eqv}(T_s(p))$-等价类中的变量映射到该类中某个固定元素的映射。此外，我们定义 $\mathrm{Eq}(p \leq q) = \bigcup_{s\in I} \mathrm{Eq}_s(p \leq q)$，它们恰好是 Pixley-Wille 算法 [20, 24] 所生成的方程，用于刻画由同余方程$p \leq q$描述的 Mal'cev 条件。

设 p 是语言 $\{\wedge, \circ\}$ 的一个项，q 是语言 $\{\wedge, \circ, \vee\}$ 的一个项。若存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{V}$ 满足方程 $p \leq q^{(k)}$，则称簇 $\mathcal{V}$ 满足方程 $p \leq q$。

我们对 [20, 24] 中所述算法的最后部分进行调整，从而得到一组方程 $\mathrm{Eq}_C(p \le q)$，它刻画了描述满足 $p \le q$ 的簇类的 Mal'cev 条件；这些簇是在由幂等约化的阿贝尔代数生成的簇中的代数上满足该条件的簇。

算法 5.1。设 $p \le q$ 是语言 $\{\wedge, \circ\}$ 的一个 m 元方程。用第 3 节中的过程，由 p 和 q 得到 $\mathbf{G}(p)$ 和 $\mathbf{G}(q)$。对所有 $1 \le s \le m$，考虑 (5.1) 中的 $T_s(p)$ 和 $Tt^n_s(q)$，其中 n 是 $\mathbf{G}(p)$ 的顶点数。我们将 $\mathrm{Eq}^s_C(p \le q)$ 定义为所有下列形式方程组成的集合的：

$$t_i(\sigma_s(x_1), \dots, \sigma_s(x_n)) \approx_C t_j(\sigma_s(x_1), \dots, \sigma_s(x_n))$$

使得 $(t_i, t_j) \in Tt^n_s(q)$，且 σ_s 是 $\mathrm{Eqv}(T_s(p))$ 的一个横截。此外，我们定义 $\mathrm{Eq}_C(p \le q) = \bigcup_{1 \le s \le m} \mathrm{Eq}^s_C(p \le q)$。

为了证明本节的主要结果，我们需要以下受 [15, 定理 3.1] 启发的技术引理。

引理 5.2. 设 $\mathcal{V}$ 是一个簇，设 $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(3)$ 是 $\mathcal{V}$ 的 3 生成自由代数，设 $\alpha = \mathrm{Cg}(\{(x, z)\})$ $\beta = \mathrm{Cg}(\{(x, y)\})$ $\gamma = \mathrm{Cg}(\{(y, z)\})$，并设 $s, t \in \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(3)$，且对于某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $(s, t) \in \alpha \wedge y^n(\alpha, \beta, \gamma)$。那么，对所有 $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ 以及满足 $[\delta, \delta]_{2T} = 0$ 的 $\delta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$，对于同一 δ-类中的所有 a, b, c，均有 $t^{\mathbf{A}}(a, b, c) = s^{\mathbf{A}}(a, b, c)$。

证明。首先我们证明：对于所有 $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$、满足 $[\delta, \delta]_{2T} = 0$ 的 $\delta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$，以及满足以下条件的三元项 u, v：对于同一 δ-类中的所有 a, b，都有 $u^{\mathbf{A}}(a, b, a) = v^{\mathbf{A}}(a, b, a)$，且 $u^{\mathbf{A}}(a, b, b) = v^{\mathbf{A}}(a, b, b)$；那么 $u^{\mathbf{A}} = v^{\mathbf{A}}$ 位于同一 δ-块中。这个断言包含在 [15, 定理 3.1] 的一个对称版本中。为了证明这个断言，我们可以注意到，对于同一 δ-类中的所有 a, b, c，可以考虑以下矩阵：

$$\begin{pmatrix} u^{\mathbf{A}}(b,c,b) & u^{\mathbf{A}}(a,c,c) \\ u^{\mathbf{A}}(b,b,b) & u^{\mathbf{A}}(a,b,c) \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} v^{\mathbf{A}}(b,c,b) & v^{\mathbf{A}}(a,c,c) \\ v^{\mathbf{A}}(b,b,b) & v^{\mathbf{A}}(a,b,c) \end{pmatrix}$$

根据二项交换子的定义，我们有 $u^{\mathbf{A}} \; [\delta, \delta]_{2T} \; v^{\mathbf{A}}$ 处于同一个 δ块中，由此得到 $u^{\mathbf{A}} = v^{\mathbf{A}}$ 属于同一个 δ类。此外，假设 $(s, t) \in \alpha \wedge y^1(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha \wedge (\beta \vee (\alpha \wedge \gamma))$。那么存在 $k \in \mathbb{N}$，使得 $(s, t) \in \alpha \wedge (\beta \circ^{(2k+1)} (\alpha \wedge \gamma))$。因此 $s \; \alpha \; t$，并且存在 $v_1, w_1, \dots, v_n, w_n \in \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(3)$，使得

$$s \; \beta \; v_1 \; \alpha \wedge \gamma \; w_1 \cdots v_k \; \alpha \wedge \gamma \; w_k \; \beta \; t.$$

根据标准的马尔采夫论证（[2, 引理 12.1]），$s(x, y, x) = t(x, y, x)$，$s(x, x, y) = v_1(x, x, y)$，$t(x, x, y) = w_k(x, x, y)$，$w_{j-1}(x, x, y) = v_j(x, x, y)$，

$v_i(x,y,x) = w_i(x,y,x)$，以及 $v_i(x,y,y) = w_i(x,y,y)$ 是$\mathcal{V}$的恒等式，对所有 $i \in \{1,\dots,k\}$, $j \in \{2,\dots,k\}$均成立。设 $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$，且令 $\delta \in$Con(A)，其中 $[\delta,\delta]_{2T} = 0$。我们可以应用前述断言，从而得出：对于属于同一 δ-类的 a,b,c，以及所有 $i \in \{1,\dots,k\}$，都有 $v_i^{\mathbf{A}}(a,b,c) = w_i^{\mathbf{A}}(a,b,c)$。因此，在 $a\ \delta\ c$的条件下，$s^{\mathbf{A}}(a,a,c) = t^{\mathbf{A}}(a,a,c)$。此外，由 $t(x,y,x) = s(x,y,x)$ 和 $s^{\mathbf{A}}(a,a,c) = t^{\mathbf{A}}(a,a,c)$，应用前述断言的对称形式可得，对于属于同一 δ-类的所有 a,b,c，都有 $t^{\mathbf{A}}(a,b,c) = s^{\mathbf{A}}(a,b,c)$。由此，我们证明了当 $(s,t) \in \alpha \wedge y^1(\alpha,\beta,\gamma)$ 时的命题。若 $(s,t) \in \alpha \wedge y^n(\alpha,\beta,\gamma)$，且 $n > 1$，则应用前述策略进行归纳即可得出结论。□

现在我们已经可以证明本节的主要定理了。下一个结果在簇 $\mathcal{V}$ 中成立的同余方程与由幂等约化的阿贝尔代数生成的簇 $\mathcal{V}'$ 中成立的同余方程之间搭起了一座桥梁，因此有几个方面值得关注。事实上，通过在 $\mathcal{V}'$ 中有效的同余方程系统地导出 Mal'cev 条件，多少有些出人意料。这也意味着，在一些宽松的假设下，算法 5.1 生成的交换子方程会产生一个弱 Mal'cev 条件，这一结果证明了研究它们的价值。

定理 5.3. 设 $\mathcal{V}$ 是一个簇，并假设 $\alpha \wedge (\beta \circ \gamma) \leq p(\alpha,\beta,\gamma)$ 是一个同余方程；该方程在一个具有两两交集为空的同余的三元素集上不成立，其中 p 是语言 $\{\circ,\wedge,\vee\}$ 的一个项。则以下条件等价：

（1） $\mathcal{V}$ 的幂等约化的阿贝尔代数满足 $\alpha \wedge (\beta \circ \gamma) \leq p(\alpha,\beta,\gamma)$；

（2） $\mathcal{V}$满足交换子方程 $\mathrm{Eq}(\alpha \wedge (\beta \circ \gamma) \leq p^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma))$，其中某个 $k > 2$ （见算法 5.1 ）；（ 3 ） $\mathcal{V}$ 满足以下方程：

$$\alpha \wedge (\beta \circ \gamma) \leq p(\alpha',\beta',\gamma'); \tag{5.3}$$

其中 $\alpha' = \alpha \circ G(\alpha,\beta,\gamma) \circ \alpha$，$\beta' = \beta \circ G(\beta,\alpha,\gamma) \circ \beta$，并且 $\gamma' = \alpha \circ G(\gamma,\alpha,\beta) \circ \alpha$，其中 $G(\alpha,\beta,\gamma) \in \{[\beta \wedge (\alpha \vee \gamma)\ \beta \wedge (\alpha \vee \gamma)], [\gamma \wedge (\alpha \vee \beta)\ \gamma \wedge (\alpha \vee \beta)]\}$；

（4）存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\mathcal{V}$ 满足以下方程：

$$\alpha \wedge (\beta \circ \gamma) \leq p(\alpha',\beta',\gamma'); \tag{5.4}$$

where $\alpha' = \alpha \circ F(\alpha,\beta,\gamma) \circ \alpha$, $\beta' = \beta \circ F(\beta,\alpha,\gamma) \circ \beta$, *and* $\gamma' = \gamma \circ F(\gamma,\beta,\alpha) \circ \gamma$ *with* $F(\alpha,\beta,\gamma) \in \{\beta \wedge y^n(\beta,\alpha,\gamma), \beta \wedge y^n(\beta,\gamma,\alpha), \gamma \wedge y^n(\gamma,\beta,\alpha), \gamma \wedge y^n(\gamma,\alpha,\beta)\}$.

证明。从 (1) ⇒(2) 开始。设 $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$，并设 $\theta \in$ Con(A)。将 A 对 $[\theta,\theta]$ 取商后，我们验证方程 $\mathrm{Eq}(\alpha \wedge (\beta \circ \gamma) \leq p^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma))$

在商的每个 $\theta/[\theta,\theta]$-块中成立，因此方程 $\mathrm{Eq}_C(\alpha \wedge (\beta \circ \gamma) \leq p^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma))$ 在 $\mathbf{A}$ 中成立，其中某个 $k > 2$。设 $\mathbf{A}'$ 是 $\mathbf{A}/[\theta,\theta]$ 的幂等约化。由于我们对 $[\theta,\theta]$ 取了商，可以看出 $\mathbf{A}/[\theta,\theta]$ 的每个 $\theta/[\theta,\theta]$-类都是 $\mathbf{A}'$ 的阿贝尔子代数，因此，根据 Pixley-Wille 算法 [20, 24]，它具有满足方程 $\mathrm{Eq}(\alpha \wedge (\beta \circ \gamma) \leq p^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma))$ 的项，其中某个 $k > 2$。我们可以观察到，方程 $\mathrm{Eq}(\alpha \wedge (\beta \circ \gamma) \leq p^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma))$ 中涉及的项证明了方程 $\mathrm{Eq}_C(\alpha \wedge (\beta \circ \gamma) \leq p^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma))$ 在 $\mathbf{A}$ 中成立，因为已经对 $[\theta,\theta]$ 取了商。

对于 (2) ⇒(3)。根据假设，存在 $k > 2$，使得方程 $C(\alpha \wedge (\beta \circ \gamma) \leq p^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma))$ 在 $\mathcal{V}$ 中成立。于是令 $\mathbf{A} \in \mathcal{V}, a_1, a_2 \in A$，并令 $\alpha,\beta,\gamma \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ 满足：

$$(a_1, a_2) \in \alpha \wedge (\beta \circ \gamma).$$

因此，存在 $a_3 \in \mathbf{A}$，使得 $(a_1, a_3) \in \beta$ 且 $(a_3, a_2) \in \gamma$。我们要证明

$$(a_1, a_2) \in p^{(k)}(\alpha', \beta', \gamma'). \tag{5.5}$$

令 $V_{\mathbf{G}(p^{(k)})} = \{z_1, \ldots, z_u\}$ 为 $\mathbf{G}(p^{(k)})$ 的顶点集，令 $Tt^3(p^{(k)})$ 如 (5.1) 中定义，并令 $\{t_1, \ldots, t_u\}$ 为出现在 $Tt^3(p^{(k)})$ 的各对中的项集。令 $\rho : V_{\mathbf{G}(p^{(k)})} \to A$ 为如下定义的赋值：

$$\begin{aligned} z_1 &\mapsto a_1 = t_1^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, a_3) \\ z_2 &\mapsto a_2 = t_2^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, a_3) \\ z_i &\mapsto t_i^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, a_3) \text{ for all } 3 \leq i \leq u. \end{aligned}$$

我们要证明 ρ 满足命题 3.2 中 (1) 的假设，由此可得 (5.5)。设 (z_i, z_j) 是 $\mathbf{G}(p^{(k)})$ 中一条标记为 X_s 的边。根据 $\mathrm{Eq}_C(\alpha \wedge (\beta \circ \gamma) \leq p^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma))$ 的定义，我们有 $(t_i, t_j) \in Tt_s^3(p^{(k)})$，并且

$$t_i(\sigma_s(x_1), \sigma_s(x_2), \sigma_s(x_3)) \approx_C t_j(\sigma_s(x_1), \sigma_s(x_2), \sigma_s(x_3))$$

属于方程 $C(\alpha \wedge (\beta \circ \gamma) \leq p^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma))$，其中 σ_s 是等价关系 $T_s^3(p)$ 的一个横截。假设 α 是代入 $p^{(k)}$ 的 X_s 的变量，即 $s = 1$。那么，固定这个同余关系后，我们有 $T_s^3(p) = \{(x_1, x_2)\}$ 并且

$$\begin{aligned} &t_i^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, a_3)\ \alpha\ t_i^{\mathbf{A}}(a_1, a_1, a_3)\ [\beta \wedge (\alpha \vee \gamma), \beta \wedge (\alpha \vee \gamma)]\ t_j^{\mathbf{A}}(a_1, a_1, a_3) \\ &t_j^{\mathbf{A}}(a_1, a_1, a_3)\ \alpha\ t_j^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, a_3). \end{aligned}$$

用同样的论证可以验证，对于代入 X_s 和 $\{\tau_s, \delta_s\} = \{\alpha, \beta, \gamma\} \setminus \{\theta_s\}$的所有 $\theta_s \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ 同余关系：

$$t_i^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, a_3)\ \theta_s\ \overline{t}_i^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, a_3)$$
$$\overline{t}_i^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, a_3)\ [\tau_s \wedge (\theta_s \vee \delta_s), \tau_s \wedge (\theta_s \vee \delta_s)]\ \overline{t}_j^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, a_3)$$
$$\overline{t}_i^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, a_3)\ \theta_s\ t_j^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, a_3)$$

其中，$\overline{t}_i(x_1, x_2, x_3) = t_i(\sigma_s(x_1)\ \sigma_s(x_2)\ \sigma_s(x_3))$，$\overline{t}_j(x_1, x_2, x_3) = t_j(\sigma_s(x_1)\ \sigma_s(x_2)\ \sigma_s(x_3))$，且 σ_s 是 $\mathrm{Eqv}(T_s^3(p))$ 的一个适当横截。因此，只要 $(z_i, z_j) \in E_{\mathbf{G}(p^{(k)})}$，就有 $(t_i^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, a_3)\ \ t_j^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, a_3)) \in \theta_s \circ [\tau_s \wedge (\theta_s \vee \delta_s), \tau_s \wedge (\theta_s \vee \delta_s)] \circ \theta_s$。由命题 3.2 的 (1)，可得 $(a_1, a_2) \in p^{(k)}(\alpha', \beta', \gamma') \subseteq p(\alpha', \beta', \gamma')$。

对于 (3)，$\Rightarrow$ (4) 可通过应用引理 4.2 得出。事实上，设 $\mathrm{F}_{\mathcal{V}}(3)$ 为由 $\mathcal{V}$ 上的 3 个生成元 $\{x, y, z\}$ 生成的自由代数。根据假设，(5.3) 在 $\mathrm{F}_{\mathcal{V}}(3)$ 中成立。令 $\alpha = \mathrm{Cg}(\{(x, z)\})$、$\beta = \mathrm{Cg}(\{(x, y)\})$，以及$\gamma = \mathrm{Cg}(\{(y, z)\})$。由引理 4.2 可知，$[\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)\ \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)] \leq \bigcup \alpha \wedge y^n(\alpha, \beta, \gamma) \bigcup \alpha \wedge y^n(\alpha, \gamma, \beta)$。因此，我们可以在 (5.3) 中将每个 $[\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)\ \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)]$ 替换为 $\bigcup \alpha \wedge y^n(\alpha, \beta, \gamma)$ 或 $\bigcup \alpha \wedge y^n(\alpha, \gamma, \beta)$，所得方程在 $\mathrm{F}_{\mathcal{V}}(3)$ 中成立。对变量进行置换后，我们可以将每个 $[\beta \wedge (\alpha \vee \gamma)\ \beta \wedge (\alpha \vee \gamma)]$ 替换为 $\bigcup \beta \wedge y^n(\beta, \alpha, \gamma)$ 或 $\bigcup \beta \wedge y^n(\beta, \gamma, \alpha)$，并将每个 $[\gamma \wedge (\alpha \vee \beta)\ \gamma \wedge (\alpha \vee \beta)]$ 替换为 $\bigcup \gamma \wedge y^n(\gamma, \beta, \alpha)$ 或 $\bigcup \gamma \wedge y^n(\gamma, \alpha, \beta)$。由于我们在方程 (5.3) 中进行了有限次替换，因此存在一个 $n \in \mathbb{N}$，使得方程 (5.4) 在 $\mathrm{F}_{\mathcal{V}}(3)$ 中成立。因此，通过标准的马尔采夫论证，方程 (5.4) 在 $\mathcal{V}$ 中成立。

(4) $\Rightarrow$(1)。令 $\mathcal{V}'$ 为由 $\mathcal{V}$的幂等约化中的阿贝尔代数生成的簇。由于方程 (5.4) 是一个同余方程，因此根据 Pixley-Wille 算法 [20, 24]，它生成一个在 $\mathcal{V}'$ 中成立的幂等 Mal'cev 条件，并且我们声称该 Mal'cev 条件是非平凡的。事实上，$\alpha \wedge (\beta \circ \gamma) \leq p(\alpha, \beta, \gamma)$ 是非平凡的，并且通过适当选取 α、β、γ，它在一个三元素集上不成立。此外，根据假设，α、β、γ可以选取得两两交为空，因此 $\alpha \wedge y^n(\alpha, \beta, \gamma) = 0$，对 α、β、γ进行置换后，同样的结论也成立。因此可以看出，如果 $\alpha \wedge (\beta \circ \gamma) \leq p(\alpha, \beta, \gamma)$ 在一个三元素集上不成立，那么选取相同的同余时，方程 (5.4) 也不成立。

令 $\mathrm{F}_{\mathcal{V}'}(\{x, y, z\})$ 为 $\mathcal{V}'$ 上由三个生成元生成的自由代数。令 $\overline{\alpha} = \mathrm{Cg}(\{(x, z)\})$、$\overline{\beta} = \mathrm{Cg}(\{(x, y)\})$ 和 $\overline{\gamma} = \mathrm{Cg}(\{(y, z)\})$。由于 $\mathrm{F}_{\mathcal{V}'}(\{x, y, z\})$ 满足 (5.4)，根据命题 3.2，存在 $l > 2$ 以及一个赋值 χ，从 $V_{\mathbf{G}(p^{(l)})} \to F_{\mathcal{V}'}(\{x, y, z\})$：$x_s \mapsto t_s$，使得对于 $\mathbf{G}(p^{(l)})$ 中所有标签为 X_k 的边 (x_i, x_j)，都有 $(t_i, t_j) \in \theta_k$，其中

θ_k 是代入 $p^{(l)}$ 的变量 X_k 的同余。不失一般性，假设 $\theta_k = \overline{\alpha}' = \overline{\alpha} \circ F(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}) \circ \overline{\alpha}$，即 $k = 1$。此外，假设 $(t_i, t_j) \in \overline{\alpha}'$。那么，存在 $s_i, s_j \in \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(\{x, y, z\})$，使得 $t_i \; \overline{\alpha} \; s_i \; F(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}) \; s_j \; \overline{\alpha} \; t_j$，从而 $t_i(x, y, x) \approx s_i(x, y, x)$、$t_j(x, y, x) \approx s_j(x, y, x)$，且 $s_i \; F(\overline{\alpha}, \beta, \overline{\gamma}) \; s_j$。我们可以看到，$s_i$ 和 s_j 满足引理 5.2 的假设，因此，在代数 $\mathbf{A} \in \mathcal{V}'$ 上实现它们时，只要在同一个 δ-类上并取 $[\delta, \delta]_{2T} = 0$，所得结果便相同。

设 A 是 $\mathcal{V}$ 的幂等约化中的一个阿贝尔代数。根据[13, 推论 4.5], $[\phi, \phi] = 0 \Rightarrow [\phi, \phi]_{2T} = 0$ 对于 Taylor 簇，因为$[\phi, \phi]_L = 0 \Rightarrow [\phi, \phi]_{2T} = 0$, 其中 $[\phi, \phi]_L$ 是线性交换子，因此对于所有 $\phi \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$，都有 $[\phi, \phi]_{2T} = 0$。

现在证明 A 满足 $\alpha \wedge (\beta \circ \gamma) \leq p(\alpha, \beta, \gamma)$。设 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$，且 $(a, c) \in \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$，则 $(a, c) \in \alpha$，并且存在$b \in A$ 使得 $(a, b) \in \beta$ 且 $(b, c) \in \gamma$。令 $\psi : V_{\mathbf{G}(p^{(l)})} \to A$为如下赋值：将实现$t \mapsto t^{\mathbf{A}}(a, b, c)$ 与 χ 复合，并扩展 $x_1 \mapsto a, x_2 \mapsto c$，使得对于 χ 的陪域中的所有 t_i，都有 $x_i \mapsto t_i^{\mathbf{A}}(a, b, c)$。考虑满足$t_i(x, y, x) \approx s_i(x, y, x)$、$t_j(x, y, x) \approx s_j(x, y, x)$ 且 $s_i \; F(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}) \; s_j$ 的 $t_i^{\mathbf{A}}$ 和 $t_j^{\mathbf{A}}$。于是我们有：

$$t_i^{\mathbf{A}}(a, b, c) \; \alpha \; t_i^{\mathbf{A}}(a, b, a) = s_i^{\mathbf{A}}(a, b, a) = s_j^{\mathbf{A}}(a, b, a) = t_j^{\mathbf{A}}(a, b, a) \; \alpha \; t_j^{\mathbf{A}}(a, b, c).$$

因此 $t_i^{\mathbf{A}}(a, b, c) \; \alpha \; t_j^{\mathbf{A}}(a, b, c)$。由此显然可知，我们可以消去出现在 $p^{(l)}(\alpha', \beta', \gamma')$ 中的项 F，从而将其化简为 $p^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma)$。我们可以证明关于 β 和 γ 的对称关系，因此根据命题 3.2，赋值 ψ 证明了 A 中 $\alpha \wedge (\beta \circ \gamma) \leq p(\alpha, \beta, \gamma)$ 的成立。于是，$\mathcal{V}$ 的幂等约化的阿贝尔代数满足 $\alpha \wedge (\beta \circ \gamma) \leq p(\alpha, \beta, \gamma)$，且 (1) 成立。□

我们可以看到，前一个定理要求限制同余方程 $p \leq q$：它在某个簇的幂等约化的阿贝尔代数所生成的簇中成立，并且具有 $p = \alpha \wedge (\beta \circ \gamma)$。尽管这一假设相当严格，但绝大多数已知且有意义的、由同余方程刻画的 Mal'cev 条件（模性、分配性以及许多其他条件）都满足这一假设。此外，如定理 4.4 所示，假设 $p = \alpha \wedge (\beta \circ \gamma)$ 还可以进一步放宽；但这样做的困难在于交换子方程所施加的约束，这些方程涉及同一 θ-类中的一组变量。这使得定理 5.3 中 (2) $\Rightarrow$ (3) 的证明无法推广。在更一般的情形下，对于同余方程 $p \leq q$，其中 p 和 q 是该语言的项

$\{\circ, \wedge, \vee\}$，我们仍然可以证明定理 5.3 中 (1) 和 (2) 两点等价。然而，若没有第 (4) 点，我们就无法找到一个在整个簇 $\mathcal{V}$ 中成立的弱 Mal'cev 条件，使其等价于这样一个性质：在幂等约化的阿贝尔代数所生成的簇中满足某个同余方程。

定理 5.4. 设 $\mathcal{V}$ 是一个簇，并假设 $p \leq q$ 是一个同余方程，其中 p、q 是语言 $\{\circ, \wedge, \vee\}$ 的项。则以下各项等价：

(1) $\mathcal{V}$ 的幂等约化中的阿贝尔代数满足 $p \leq q$；(2) $\mathcal{V}$ 满足交换子方程 $\mathrm{Eq}_C(p \leq q)$（见算法 5.1）。

我们先证明 (1) $\Rightarrow$ (2)。设 $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$，且 $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$。类似于定理 5.3，我们可以对 $[\theta, \theta]$ 取商，并验证 $\mathrm{Eq}(p \leq q)$ 在商的每个 $\theta/[\theta, \theta]$-块中成立，从而 $\mathrm{Eq}_C(p \leq q)$ 在 $\mathbf{A}$ 中成立。

对于 (2) $\Rightarrow$ (1)，我们注意到，由于 Pixley-Wille 算法给出的所有项都是幂等的，因此根据注 4.1，见证 $\mathrm{Eq}_C(p \leq q)$ 得以满足的项也是幂等的。考虑 $\mathcal{V}$ 的幂等约化中的一个阿贝尔代数 $\mathbf{A}$。由于见证 $\mathrm{Eq}_C(p \leq q)$ 得以满足的项是幂等的，因此 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathrm{Eq}_C(p \leq q)$。于是，由于 $\mathbf{A}$ 是阿贝尔代数，结论成立。

Conclusions

在本研究中，我们探讨了 Mal'cev 条件与交换子方程之间的关系。这一将弱差项所描述的 Mal'cev 条件加以推广的有趣联系，可能会在研究 Mal'cev 条件与交换子性质或 TCT 类型之间的关系时产生诸多成果，正如先前的结果 [13, 14, 15] 所示。

本文旨在为一类新型的良性方程奠定基础，这类方程有望带来关于 Mal'cev 条件的新见解。将定理 5.3 中概述的过程应用于已知的同余方程，或许可以取得进一步的发展。这种方法可以揭示由此得到的交换子方程是否对应于现有的 Mal'cev 条件，或者是否刻画出新的 Mal'cev 条件。后一种情况下，研究这些方程如何影响满足它们的簇中交换子的行为或可解性理论，将会很有意义。关于交换子和可解性理论的原型结果，可参见 [14,第 6]章中关于弱差项的内容。

最后，我们想强调，本文主要关注某个簇的幂等约化的阿贝尔代数所满足的性质。在温和假设下，这类性质通常会导出弱 Mal’cev 条件；这一事实表明，一个簇与其幂等约化的阿贝尔代数之间存在出人意料的深层联系。这使得我们能够在更易处理的阿贝尔代数背景下验证 Mal’cev 条件。

Acknowledgement

作者感谢 Paolo Aglian`o、Erhard Aichinger、Sebastian Kreinecker 和 Bernardo Rossi，感谢他们投入许多时间进行了富有成果的讨论。

References

[1] Bulatov, A. A.：《非一致约束满足问题的二分定理》。2017 年 IEEE 第 58 届计算机科学基础研讨会（FOCS），319–330（2017）[2] Burris, S., Sankappanavar, H.P.：《普适代数教程》。数学讲义，第 78 卷。施普林格出版社，纽约—柏林（1981）[3] Cz´edli, G.：关于同余格半分配性的一个 Mal’cev 型条件。Acta Sci. Math. (Szeged)，43(3-4)，267–272（1981）[4] Cz´edli, G., Day, A.：带有 (W) 的 Horn 句与弱 Mal’cev 条件。Algebra Universalis，19(2)，217–230（1984）[5] Day, A.：代数同余格模性的一个刻画。Canad. Math. Bull.，12，167–173（1969）[6] Fioravanti, S.：互素阶有限域乘积之间有限元函数的闭集。Algebra Universalis，82，61（2021）[7] Fioravanti, S.：阿贝尔无平方群的扩张。《代数与计算国际期刊》，31，4，623–638（2021）[8] Fioravanti, S.：与相容自反关系的恒等式相对应的 Mal’cev 条件。Algebra Universalis，82，10（2021）[9] Freese, R., McKenzie, R.：同余模簇的交换子理论。伦敦数学会讲义系列，[10] J´onsson, B.：同余格为分配格的代数。《斯堪的纳维亚数学》，21，110–121（1967）[11] Kearnes, K.A.：带有差项的簇。《代数杂志》，177，第 926–960 页（1995）[12] Kearnes, K.A.：某些交换子性质的相对 Maltsev 可定义性。https://arxiv.org/pdf/2202.10009.pdf[13] Kearnes, K.A., Szendrei, ˚A.：两个交换子之间的关系。《代数与计算国际期刊》，8(4)，497–531（1998）[14] Kearnes, K.A., Kiss, E.W.：同余格的形状。《美国数学会回忆录》，222(1046)（2013）[15] Lipparini, P.：带有差项的簇的一个刻画。《加拿大数学通报》，29(3)，308–315（1996）

[16] Lipparini, P.：从同余恒等式到容忍关系恒等式。Acta Sci. Math. (Szeged)，73(1-2)，31–51（2007）[17] Mal'cev, A.I.：关于代数系统的一般理论。Mat. Sb. N.S.，35(77)，3–20（1954）（俄文）[18] Olˇs´ak, M.：最弱的非平凡幂等方程。伦敦数学会会刊，49(6)，1028–1047（2017）[19] Pixley, A.F.：代数等式类中同余关系的分配性与可交换性。Proc. Amer. Math. Soc.，14，105–109（1963）[20] Pixley, A.F.：局部 Mal'cev 条件。Canad. Math. Bull.，15，559–568（1972）[21] Sparks, A.：关于 clonoid 的数量。Algebra Universalis，80(4)，53（2019）[22] Taylor, W：Mal'cev 条件的刻画，Algebra Universalis 3，351–397（1973）[23] Taylor, W.：满足同伦定律的簇。《加拿大数学杂志》，3，498–527，剑桥大学出版社（1977）[24] Wille, R.：同余类几何。数学讲义，第 113 卷。施普林格出版社，柏林—纽约（1970）[25] Zhuk, D.：约束满足问题二分猜想的证明。《J. ACM》，67(5)，30:1–30:78（2020）

Stefano Fioravanti, DIISM, Università di Siena, Via Roma 56, 53100Siena, Italy电子邮箱：stefano.fioravanti66@gmail.com