arXiv:2302.11516v1 [math.DG] 22 Feb 2023

6-伪球面中的全纯曲线与循环曲面

BRIAN COLLIER 和 J ´ER ´EMY TOULISSE

摘要。向量范数为 -1 的集合$\mathbf{H}^{4,2}$ 位于 $\mathbb{R}^4$ 中，具有自然的伪黎曼度量以及与之相容的近复结构。这两种结构的自同构群是分裂实形式 G_2'。本文研究$\mathbf{H}^{4,2}$ 中的一类全纯曲线，我们称之为交替全纯曲线。我们证明，这类曲线具有一种所谓的弗雷内标架。利用这一标架，我们证明，与曲面群等变的交替全纯曲线空间可由某些 G_2'-Higgs 丛自然参数化。这使得模空间可以全纯地描述为 Teichm¨uller 空间上的一个纤维化，并带有映射类群的全纯作用。随后，借助 Labourie 的循环曲面的一种推广，我们证明等变交替全纯曲线具有无穷小刚性。

目录

1. 引言2. 分裂八元数与李群G_2'3. 6-伪球面中的全纯曲线 4. Higgs 丛与等变交替全纯曲线 5. 紧曲面的模空间 6. 循环曲面与无穷小刚性 参考文献 1 5 8 17 24 33 40

1. 引言

伪双曲空间 $\mathbf{H}^{4,2}$ 是实向量空间中范数为 -1 的向量所构成的集合，该向量空间配备了一个符号差为 $(4,3)$的非退化二次型。在 $\mathbf{H}^{4,2}$上存在自然的符号差为 $(4,2)$ 伪黎曼度量。分裂八元数代数中的乘法在 $\mathbf{H}^{4,2}$ 上定义了一种与伪黎曼度量相容的不可积近复结构。这是著名的 6 维球面上近复结构的非紧致类比。保持这一结构的群是分裂实李群 G_2'，其类型为 G_2。本文研究 $\mathbf{H}^{4,2}$ 中的一类 **J**-全纯曲线，并称之为交替曲线。与 $\mathbb{R}^3$中的参数化曲线类似，$\mathbf{H}^{4,2}$ 中的全纯曲线通常具有弗雷内标架。交替条件涉及弗雷内标架中子丛的符号差，也可以用循环 Higgs 丛等价地描述。我们尤其关注受曲面群保持的交替全纯曲线，并描述由此得到的模空间。

设 Σ 是一个亏格为 $g \geq 2$ 的闭定向曲面。对于实半单李群 G，特征簇 $\mathcal{X}(\Sigma, \mathsf{G})$ 是以下对象的空间：从 的基本群到 Σ 的 G-共轭类约化群同态$\pi_1(\Sigma) \to \mathsf{G}$。对于某些李群，特征簇具有一些特殊的连通分支，它们推广了 Teichm¨uller 空间的许多特征，其中 Σ。这些分支将称为高秩 Teichm¨uller 空间。许多作者从不同角度对这些空间进行了详细研究，例如参见 [29, 35, 18, 14]。

当 G 的秩为二时，相关的李群局部同构于 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$、$\mathrm{SO}(2,n)$和 G_2'；相关空间称为 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$、$\mathrm{SO}(2,3)$ 和 G_2' 的 Hitchin 分支，

以及 SO(2,n)的极大表示空间。这些空间均允许一种映射类群不变的复解析参数化，并以 ¨ 的 Teichmüller 空间为底空间，构成一个 Σ纤维化。Loftin [23] 和 Labourie [20] 分别独立地描述了 SL(3, ℝ) 的情形，而 Labourie[19] 描述了 Hitchin 分支的情形；对于极大表示，Alessandrini 与第一作者 [2] 以及 Tholozan 与作者们 [7] 给出了相关描述。

复解析描述有两个要素：一是在固定黎曼曲面上利用 Higgs 丛对这些空间进行参数化，二是在该群的黎曼对称空间中，存在唯一的 $\pi_1(\Sigma)$-不变极小曲面。秩为 2 的分析中的一个核心工具，是将研究限制在具有循环群对称性的 Higgs 丛集合上。当群的秩至少为 3 时，相关的 Higgs 丛不一定具有循环对称性。事实上，Markovic、Sagman 和 Smillie 最近证明，在秩至少为 3 时，高秩 Teichm¨uller 空间中存在一些表示，它们在黎曼对称空间 [24, 25, 30]中对应多个 $\pi_1(\Sigma)$-不变极小曲面。这一突破还表明，循环 Higgs 丛所产生的表示值得特别关注。

对于 SL(3, ℝ) Hitchin 表示，极小曲面的唯一性是由不变仿射球面的唯一性推导出的。类似地，对于 SO(2,n) 极大表示，极小曲面的唯一性源于伪双曲空间 $\mathbf{H}^{2,n-1}$中不变极大类空曲面的唯一性。在这两种情况下，这些曲面刻画了相应的高秩 Teichm¨uller 空间。也就是说，这些曲面只存在于 SL(3, ℝ)-Hitchin 分支中的表示，或极大 SO(2, n)-表示中，分别如此。在 [4], Baraglia 开创性地运用循环 Higgs 丛研究秩 2 的 Hitchin 表示。具体而言，他重新得到了 SL(3, ℝ) 的仿射球面描述，并证明取值于 G_2' 的 Hitchin 表示定义了等变全纯曲线 $f\colon \widetilde{X} \to \mathbf{H}^{4,2}$。

Baraglia 构造的等变全纯曲线满足本文定义的交替条件。然而，我们证明，在$\mathbf{H}^{4,2}$中保持一条交替全纯曲线，并不能刻画 G_2' Hitchin 分支。因此，交替全纯曲线理论识别出一些表示 $\pi_1(\Sigma) \to \mathrm{G}_2'$，它们并非 Hitchin 表示，却具有 Hitchin 表示的某些特征。这与 SO(2, 3) 中的情况类似。也就是说，SO(2, 3) Hitchin 表示是极大的，因此会在$\mathbf{H}^{2,2}$,中保持一张极大类空曲面；但这并不能刻画 SO(2, 3) Hitchin 表示，因为还存在非 Hitchin 的极大 SO(2, 3) 表示。与 SO(2, 3) 的情况不同，群 G_2' 唯一的高秩 Teichm¨uller 空间就是 Hitchin 分支。尤其是，对于那些保持交替全纯曲线的非 Hitchin G_2'表示，人们知之甚少。确定这些 G_2' 表示是否为 Anosov，并研究交替全纯曲线的唯一性性质，将会很有意义。

1.1. **交替全纯曲线**。 设 S 是一个定向曲面，且 $(\mathbf{H}^{4,2}, \mathbf{J})$ 是上文所述的近复流形。若浸入 $f : S \to \mathbf{H}^{4,2}$ 的切丛之像具有 $\mathbf{J}$不变性，则称其为全纯曲线。这在 S上诱导出一个黎曼曲面结构。如上所述，$\mathbf{H}^{4,2}$ 中的全纯曲线一般都具有弗雷内标架。若$f\colon S \to \mathbf{H}^{4,2}$ 是 交替的 ，则 S 的切丛是正定的，且第二基本形式的像是负定的。事实证明，当第二基本形式非零时，其像定义了一个秩为二的子丛，详见 §3.4 。交替全纯曲线尤其是极大类空曲面。

根据构造，弗雷内标架定义了到齐性空间 $\mathbf{X}$ 的一个提升，我们称之为循环空间。由交替全纯曲线的弗雷内提升产生的 $\mathbf{X}$ 中的曲面具有非常特殊的性质，并定义了我们所称的 α_1-循环曲面，这是对 Labourie 于 [19]中引入的循环曲面的轻微推广。对弗雷内标架的全纯诠释，定义了由 G_2' 在黎曼曲面上诱导的一类特殊循环调和丛，f。也就是说，是配备循环调和度量的循环G_2'-Higgs 丛，见 §4.5。

为建立这些对象的同构类之间的一一对应，有必要考虑等变交替全纯曲线。此类对象是对 (ρ, f)，其中 $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{G}_2'$ 是一个表示，而 $f : \widetilde{S} \to \mathbf{H}^{4,2}$ 是一条ρ-等变交替全纯曲线。在这种情形下，同构有自然的定义。

定理 A. 设 S 是一个定向曲面。那么，*Frenet* 提升在以下对象的同构类之间建立一一对应：

(1) 在$\mathbf{H}^{4,2}$,(2) 等变 α_1-循环曲面，位于$\mathbf{X}$，以及(3)
G_2' 形如(24)的循环调和丛。

注 1.1. 请注意，定理 *A* 并未假设曲面 S 是紧致的。这就是我们考虑 G_2'-调和丛，而非多稳定的 G_2'-*Higgs* 丛的原因。特别是，所诱导的黎曼曲面可能与复平面双全纯。*Li* 和 *Mochizuki* 最近研究了循环调和度量的存在性 [22, 21]。

现在考虑一个亏格为$g \geq 2$的闭定向曲面 Σ。等变交替全纯曲线 (ρ, f) 的等价类集合记为

$$\mathcal{H}(\Sigma) = \{(\rho, f) \text{ equivariant alternating holomorphic curves}\} / \sim ,$$

其中，等价关系由 $\mathrm{G}_2' \times \mathrm{Diff}_0$（$\Sigma$）的自然作用给出。映射类群 Mod（$\Sigma$）自然作用于 Σ $\mathcal{H}$（Σ）。此外，忘掉映射 f，并取由 f 诱导的黎曼曲面结构，可定义到 G_2'-特征簇和 Σ的 Teichm¨uller 空间的 Mod（Σ）-等变映射

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(\Sigma) & \xrightarrow{\mathrm{Hol}} & \mathcal{X}(\Sigma, \mathrm{G}_2') \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ \mathcal{T}(\Sigma) & & \end{array}$$

对于闭曲面，固定黎曼曲面 $X = (\Sigma, \mathrm{j})$ 上的 G_2'-循环调和丛的同构类，与多稳定 G_2'-循环 Higgs 丛的同构类相对应。在定理5.4中，我们参数化了G_2'-Higgs 丛的多稳定同构类，这些丛源自等变交替全纯曲线。将这一描述与 Simpson 构造的族中 Higgs 丛模空间 [33]（另见 [2]）相结合，可在 $\mathcal{H}$（Σ）上赋予复解析结构。

定理 B. 模空间 $\mathcal{H}(\Sigma)$ 具有复解析空间的结构。对于这一结构，映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ 以解析方式作用，且投影映射 $\pi : \mathcal{H}(\Sigma) \to \mathcal{T}(\Sigma)$是一个具有光滑纤维的满射解析映射。此外，空间 $\mathcal{H}(\Sigma)$ 分解为

$$\mathcal{H}(\Sigma) = \coprod_{d \in \{0, \cdots, 6g-6\}} \mathcal{H}_d(\Sigma) ,$$

其中 $\mathcal{H}_d(\Sigma)$ 的复维数为 $d + 8g - 8$。映射 $\pi : \mathcal{H}_d(\Sigma) \to \mathcal{T}(\Sigma)$ 在黎曼曲面 X 上方的纤维为

- 一个秩为 $(2d - g + 1)$ 的全纯向量丛，位于 X 的 $(6g - 6 - d)$-对称积上，其中 $g \leq d \leq 6g - 6$，以及
- 一个丛，位于 X 的 $2d$-对称积的 $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$-覆盖上，其纤维在 $0 \leq d \leq g - 1$. 时为 $(\mathbb{C}^{5g-5-d} \setminus \{0\}) / \pm\mathrm{Id}$。

对于极值 $= 6$ 和 -6，以及 $= 0$，可以对全纯映射的像进行分类。当 $= 6 - 6$ 时，空间 $\mathcal{H}_{6g-6} \to \mathcal{T}$ (Σ) 是一个全纯向量丛，其在黎曼曲面 上的纤维为 6 次全纯微分。在这种情况下，全纯映射

建立了与 G_2'-Hitchin 分支之间的微分同胚。当 $d = 0$ 时，空间 $\mathcal{H}_0(\Sigma)$ 有2^{2g} 个连通分支，全纯映射的像由所有表示ρ：$\pi_1(\Sigma) \to G_2'$ 组成，这些表示可经由 $SL(3,\mathbb{R})$ 的非分裂 $\mathbb{Z}_2$-扩张因子化，且其 $SL(3,\mathbb{R})$-因子是 Hitchin 表示；更多详情请见 §5.5。对于 $0 < d < 6g - 6$，此前尚未研究过全纯映射像中的表示。

近复 6-球面中的全纯曲线最早由 Bryant 在 [5]进行了研究。他的工作可以视为我们对$\mathbf{H}^{4,2}$, 中交替全纯曲线的 Higgs 丛描述的一种类比，主要区别在于，我们研究的是等变情形和非紧对称空间，而非紧黎曼曲面和紧对称空间。在[12], 中，Eschenburg 和 Vlachos 证明，$\mathbf{S}^6$ 中的全纯曲线要么包含于$\mathbf{S}^2$（全测地情形）或某个全测地超曲面$\mathbf{S}^5 \subset \mathbf{S}^6$, 中，要么张成整个球面（一般情形）。$\mathbf{H}^{4,2}$ 中的等变交替全纯曲线也呈现出相同的现象：它们要么张成$\mathbf{H}^{4,2}$，要么位于某个全测地$\mathbf{H}^3$, $^2 \subset \mathbf{H}^{4,2}$, 中；后一种情形仅在 $\mathcal{H}_0(\Sigma)$ 中出现。此外，对于 $0 \leq d \leq g - 1$，分支 $\mathcal{H}_d(\Sigma)$ 包含交替全纯曲线的自然退化，这些曲线位于双曲圆盘的全测地子空间中。

最后，我们研究全纯映射 $\mathrm{Hol} : \mathcal{H}(\Sigma) \to \mathcal{X}(\Sigma, G_2')$的无穷小性质。具体而言，我们证明交替全纯曲线是无穷小刚性的。

定理 C. 对于 $t \in (-\epsilon, \epsilon)$，设 (ρ_t, f_t) 是一条等变交替曲线的光滑路径，满足$[\dot{\rho}_0] = 0$ 属于切空间 $T_{[\rho_0]}\mathcal{X}(\Sigma, G_2')$。那么，在 $t = 0$ 处，(ρ_t, f_t) 与经过 (ρ_0, f_0) 的 $(G_2' \times \mathrm{Diff}_0(\Sigma))$-轨道相切。

为了证明定理C，我们证明，Labourie 关于由分裂秩 2 李群中的 Hitchin 表示所产生的循环曲面之无穷小刚性的证明，可以推广到我们更一般的情形。在此过程中，我们精简了 [19]中的许多主要思想和计算。关于循环曲面与无穷小刚性的一般理论将见于 [8]。定理C 可理解为全纯映射是浸入。特别地，对于 Hol 的像中的一个表示ρ， ρ-等变交替全纯曲线不会构成单参数族。对于 G_2'-Hitchin 表示，无穷小刚性足以证明等变交替全纯曲线的整体唯一性；但对于分支 $\mathcal{H}_d(\Sigma)$，当 $0 < d < 6g - 6$ 时，情况并非如此。

1.2. 相关结果。在本文撰写期间，一些类似的结果得以证明。在 [27], Nie 研究了 $H^{p,q}$ 中当 $(p, q) = (2k, 2k)$ 或 $(2k, 2k - 2)$ 时的等变交替曲面。本文采用“交替”这一名称，是受 Nie 的工作启发。通过不同的方法，他在某些假设下证明了一个与定理 C 类似的无穷小刚性结果。对于 $H^{4,2}$, , Nie 的结果适用于 SO(4, 3) 表示的一个子集。有趣的是，该子集与 G_2'-表示的交集恰好是 G_2'-Hitchin 表示。尤其是，Nie 的结果与定理 C 重叠的部分，恰好是 Labourie [19] 最初研究的情形。

在 [13], Evans 研究了当底层曲面与复平面双全纯时的$\mathbf{H}^{4,2}$ 中的全纯曲线。他所研究的全纯曲线是交替的，在许多方面都类似于 Hitchin 表示对应的等变曲线。如果类似的分析也适用于来自复平面的一般交替全纯曲线，将会很有意思。

1.3. **文章结构**。 在第2节中，我们回顾分裂八元数的不同构造，并定义群 G_2'。第$\mathbf{H}^{4,2}$, 上的近复结构、交替全纯曲线的概念及其弗雷内标架将在第3节中介绍。在第4 节中，我们回顾 G-Higgs 丛和 G-调和丛的理论，随后专门讨论 $G = G_2'$ 的情形，并证明等变全纯向量丛与某些 G_2' 循环调和丛之间的等价性。第5节包含模空间 $\mathcal{H}_d(\Sigma)$ 的参数化以及极端情形的性质。在第6节中，我们发展循环曲面的概念，并证明定理 C。

1.4. **致谢：** 我们感谢 Sorin Dumitrescu、ParkerEvans、Franc¸ois Labourie、Xin Nie、Andy Sanders、Carlos Simpson 和 Richard Wentworth，就本文各个方面进行了富有洞见的交流。第一作者的研究部分得到了美国国家科学基金会数学科学部资助项目 2103685 的资助。

2. 分裂八元数与李群 G_2'

本节讨论分裂八元数的代数及其一些性质。更多详情请参见 [3, 11]。我们从四元数和分裂四元数开始。

2.1. **四元数与分裂四元数。** 回顾一下，四元数是实结合代数 $\mathbb{H}$，由 $\{1,$ 作为 $\mathbb{R}$-向量空间生成，其中生成元为 j、d、$e\}$，满足关系式[1]

$$j^2 = d^2 = e^2 = -1 \qquad \text{and} \qquad j \cdot d = -d \cdot j = e\,.$$

另一方面，分裂四元数是实结合代数 $\mathbb{H}'$，由 $\mathbb{R}$ 作为向量空间生成，其中生成元为 $\{1, j$、δ、$\epsilon\}$，满足关系式

$$j^2 = -\delta^2 = -\epsilon^2 = -1 \qquad \text{and} \qquad j \cdot \delta = -\delta \cdot j = \epsilon\,.$$

我们有一个向量空间直和分解

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \Im(\mathbb{H}) \qquad \text{and} \qquad \mathbb{H}' = \mathbb{R} \oplus \Im(\mathbb{H}')\,,$$

其中，$\mathbb{R}$ 是单位元 1 张成的空间，$\Im$ 是由其余生成元张成的空间。这些空间是共轭对合 $x \mapsto x$ 的 ± 1- 特征子空间。对这些特征子空间的投影可通过取实部和虚部给出：$x = \Re(x) + \Im(x)$，其中

$$\Re(x) = \tfrac{1}{2}(x + \overline{x}) \qquad \text{and} \qquad \Im(x) = \tfrac{1}{2}(x - \overline{x})\,.$$

在虚部子空间 $\Im(\mathbb{H})$ 和 $\Im(\mathbb{H}')$上，对乘积取实部和虚部，分别定义了非退化对称双线性型 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，其符号差分别为 (0,3) 和 (2,1)，以及一个斜对称乘积 $\times$。具体而言，对于 x_1,x_2 属于 $\Im(\mathbb{H})$ 或 $\Im(\mathbb{H}')$

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \Re(x_1 \cdot x_2) \qquad \text{and} \qquad x_1 \times x_2 = \Im(x_1 \cdot x_2)\,.$$

Comb这些结构定义了 Ω 上的体积形式 $\Im(\mathbb{H})$ 和 $\Im(\mathbb{H}')$，其定义为 by

$$\Omega(x_1, x_2, x_3) = \langle x_1 \times x_2, x_3 \rangle.$$

在这两种情况下，代数自同构群在实部上平凡作用，因此作用于虚部子空间。因此，群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ 和 $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}')$ 分别作用于 $\Im(\mathbb{H})$ 和$\Im(\mathbb{H}')$，并保持 $\langle \cdot$、$\cdot \rangle$、$\times$ 和 Ω 不变。因此，

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) < \mathsf{SO}(3) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Aut}(\mathbb{H}') < \mathsf{SO}(2,1)\,.$$

事实上，$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \mathsf{SO}(3)$ 以及 $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}')$ 是 $\mathsf{SO}_0(2,1)$ 的恒等连通分支 $\mathsf{SO}(2,1)$。

[1] 我们不使用 i、j、k，因为复化对象需要用到 i。我们的约定是，希腊字母的平方为 $+1$，罗马字母的平方为 -1。

2.2. **由分裂四元数构造分裂八元数**。分裂八元数 $\mathbb{O}'$ 可以通过对 $\mathbb{H}'$ 或 $\mathbb{H}$应用凯莱-迪克森过程来描述。这两种视角都很有用，但我们先从分裂四元数的描述开始。

定义 2.1. 分裂八元数 $\mathbb{O}'$ 是实代数，其底层向量空间为 $\mathbb{H}' \oplus \mathbb{H}'$，并配备乘积

$$\mathbb{O}' = \mathbb{H}' \oplus \mathbb{H}' \qquad \textit{with} \qquad (x_1, y_2) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - \overline{y}_2 \cdot y_1 \,,\; y_2 \cdot x_1 + y_1 \cdot \overline{x}_2) \,. \tag{1}$$

群 G_2' 定义为 $\mathbb{O}'$ 的代数自同构群。它是例外复单李群 $\mathsf{G}_2^{\mathbb{C}}$的分裂实形式。

我们将记作 $\ell = (0,1) \in \mathbb{O}'$，并将分裂八元数 $z = (x,y)$ 记作 $z = x + y\ell$。注意$\ell^2 = -1$，并且对于任意 $y \in \mathbb{H}'$，我们有

$$y\ell = y \cdot \ell = (y,0) \cdot (0,1) = (0,y) = -\ell \cdot y \,.$$

非结合性可通过考察 $(j \cdot \delta) \cdot \ell$ 和 $j \cdot (\delta \cdot \ell)$ 看出，因为

$$(j \cdot \delta) \cdot \ell = (\epsilon, 0) \cdot (0,1) = \epsilon\ell \qquad \text{and} \qquad j \cdot (\delta \cdot \ell) = (j,0) \cdot (0,\delta) = (0,-\epsilon) = -\epsilon\ell \,.$$

然而，可以验证，由 $\mathbb{O}'$ 中的两个元素生成的任意子代数都是结合的。特别地，对于任意 z_1,$z_2 \in \mathbb{O}'$，我们有

$$z_1 \cdot (z_1 \cdot z_2) = (z_1 \cdot z_1) \cdot z_2 \,. \tag{2}$$

我们有一个分解 $\mathbb{O}' = \mathbb{R} \oplus \Im(\mathbb{O}')$，其中 $\mathbb{R}$ 是单位元 1 与 $\Im(\mathbb{O}') = \Im(\mathbb{H}') \oplus \mathbb{H}'$的张成空间。这些是共轭对合的 ± 1-特征子空间

$$z = x + y\ell \longmapsto \overline{z} = \overline{x} - y\ell \,.$$

由于 $\Im(\mathbb{O}')$ 中的任意两个不同生成元 $\{j、\ \delta、\ \epsilon、\ \ell、\ j\ell、\ \delta\ell、\ \epsilon\ell\}$ 均反交换，对于所有 z_1,$z_2 \in \Im(\mathbb{O}')$，我们有

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_2 \cdot \overline{z}_1 = z_2 \cdot z_1 \,.$$

存在一个非退化对称双线性形式，以及一个斜对称乘积，其定义为

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \Re(z_1 \cdot z_2) = \tfrac{1}{2}(z_1 \cdot z_2 + \overline{z_1 \cdot z_2}) \qquad \text{and} \qquad z_1 \times z_2 = \Im(z_1 \cdot z_2) = \tfrac{1}{2}(z_1 \cdot z_2 - \overline{z_1 \cdot z_2}) \,.$$

令$\mathbf{q}$ 为 $\Im(\mathbb{O}')$ 上与 $\langle \cdot、\ \cdot \rangle$相关联的二次型。由$(\Im(\mathbb{O}')、\ \mathbf{q}、\ \times)$ 的这些定义可立即得到:

引理 2.2。
- $\mathbf{q}$ 的符号差为$(4,3)$，且 $\{j、\ \delta、\ \epsilon、\ \ell、\ j\ell、\ \delta\ell、\ \epsilon\ell\}$ 构成一个标准正交基。
- $z1、\ z_2 \in \Im(\mathbb{O}')$ 正交，当且仅当 $z_1 \times z_2 = z_1 \cdot z2$。
- $\Im(\mathbb{O}') = \Im(\mathbb{H}') \oplus \mathbb{H}'$ 是一个正交分解，并且将$\mathbf{q}$ 限制在 $\Im(\mathbb{H}')$ 和 $\mathbb{H}'$ 上的符号差分别为$(2,1)$ 和$(2,2)$。
- 对于 $z_1、\ z_2 \in \Im(\mathbb{H}')$ 和 $w_1、\ w_2 \in \mathbb{H}'$，有

$$z_1 \times z_2 \in \Im(\mathbb{H}') \qquad z_1 \times w_1 \in \mathbb{H}' \qquad \textit{and} \qquad w_1 \times w_2 \in \Im(\mathbb{H}') \,.$$

- 存在一个从 $\Omega \in \Lambda^3(\Im(\mathbb{O}')^*)$ 定义的三元组

$$\Omega(z_1, z_2, z_3) = \langle z_1 \times z_2, z_3 \rangle \,. \tag{3}$$

注 2.3。 $\mathbb{O}'$ 上的代数结构完全由 $(\Im(\mathbb{O}'),\ \mathbf{q},\ \times)$ 确定，因为对于 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ 和 z_1,$z_2 \in \Im(\mathbb{O}')$，我们有

$$(a_1 + z_1) \cdot (a_2 + z_2) = a_1 a_2 + \langle z_1, z_2 \rangle + a_2 z_1 + a_1 z_2 + z_1 \times z_2.$$

群 G_2' 在实部上的作用是平凡的。因此，G_2' 作用于 $\Im(\mathbb{O}')$，并保持 $\mathbf{q}$、$\times$ 和 Ω 不变。由于 $\mathbb{O}'$ 的代数结构完全由 $(\Im(\mathbb{O}')$、$\mathbf{q}$、$\times)$编码，G_2' 有如下描述。

命题 2.4。群 G_2' 同构于保持 $\Im(\mathbb{O}')$ 的线性变换群，其中保持 $\mathbf{q}$ 和 $\times$。这样的自同构也保持 Ω。$\times$ 的导子定义了李代数

$$\mathfrak{g}_2' = \{X \in \mathsf{End}(\Im(\mathbb{O}')) \mid X(z_1 \times z_2) = (X(z_1) \times z_2) + (z_1 \times X(z_2)) \textit{ for all } z_1, z_2 \in \Im(\mathbb{O}')\}.$$

特别地，$G_2' < \mathsf{O}(\Im(\mathbb{O}'), \mathbf{q}) \cong \mathsf{O}(4,3)$ 以及 $\mathfrak{g}_2' \subset \mathfrak{so}(4,3)$。

由 [11, 引理 4.2] 可知，存在唯一的 G_2'-不变体积形式 $\mathrm{vol} \in \Lambda^7(\Im(\mathbb{O}')^*)$，使得

$$\langle z_1, z_2\rangle \,\mathrm{vol} = \iota_{z_1}\Omega \wedge \iota_{z_2}\Omega \wedge \Omega \tag{4}$$

对于所有 $z_1, z_2 \in \Im(\mathbb{O}')$。因此 $G_2' < \mathsf{SO}(4,3)$。明确地，在基 $\{f1, \cdots, f_7\} = \{j, \delta, \epsilon, \ell, j\ell, \delta\ell, \epsilon\ell\}$中，我们有

$$\Omega = 6\Big[f_1^* \wedge (f_2^* \wedge f_3^* - f_4^* \wedge f_5^* - \wedge f_6^* \wedge f_7^*) + f_2^* \wedge (f_4^* \wedge f_6^* + f_5^* \wedge f_7^*) + f_3^* \wedge (f_4^* \wedge f_7^* - f_5^* \wedge f_6^*)\Big]$$

并且可以验证 $\mathrm{vol} = -\frac{1}{144} f_1^* \wedge f_2^* \wedge \cdots \wedge f_7^*$。

引理 2.5。保持直和分解 $\Im(\mathbb{O}') = \Im(\mathbb{H}') \oplus \mathbb{H}'$ 的 G_2' 的子群同构于 $\mathsf{SO}(2,2)$。

证明。设 $g = (g_1 \oplus g_2)$ 是 G_2' 中保持直和分解 $\Im(\mathbb{H}') \oplus \mathbb{H}'$ 的元素。由于 G_2' 保持二次型 $\mathfrak{q}$，因此 $(g_1, g_2) \in \mathsf{O}(\Im(\mathbb{H}'), \mathfrak{q}) \times \mathsf{O}(\mathbb{H}', \mathfrak{q})$。注意，3-形式 Ω 从 (3) 到 $\Lambda^3(\Im(\mathbb{H}'))$ 的限制是非零的。由于 G_2' 保持 Ω 以及来自 (4) 的体积形式，我们得出 $(g_1, g_2) \in \mathsf{SO}(\Im(\mathbb{H}'), \mathfrak{q}) \times \mathsf{SO}(\mathbb{H}', \mathfrak{q})$。

为完成证明，G_2' 保持乘积 $\times$ 并且

$$j = \ell \times j\ell\,, \qquad \delta = \ell \times \delta\ell \qquad \text{and} \qquad \epsilon = \ell \times \epsilon\ell\,.$$

因此，任意 $g_2 \in \in \mathsf{SO}(\mathbb{H}', \mathbf{q})$ 都唯一确定 $g_1 \in \mathsf{SO}(\Im(\mathbb{H}'), \mathbf{q})$。 □

2.3. **由四元数构造分裂八元数**。分裂八元数也可以用四元数定义：

$$\mathbb{O}' = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \qquad \text{with} \qquad (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2 + \overline{b}_2 \cdot b_1\,,\; b_2 \cdot a_1 + b_1 \cdot \overline{a}_2)\,. \tag{5}$$

我们将记作 $(a, b) = a + b\lambda$，其中 $\lambda = (0, 1)$。注意 $\lambda^2 = +1$。这两种表示之间的一个同构由下式给出

$$\{1, j, \delta, \epsilon, \ell, j\ell, \delta\ell, \epsilon\ell\} \to \{1, j, e\lambda, d\lambda, d, e, j\lambda, \lambda\}. \tag{6}$$

在这种表示下，$\Im(\mathbb{O}') = \Im(\mathbb{H}) \oplus \mathbb{H}$，并且 $\mathbf{q}$ 在直和项 $\Im(\mathbb{H})$ 和 $\mathbb{H}$ 上的限制分别具有符号差 $(0,3)$ 和 $(4,0)$。

引理 2.6. 设 K 是保持直和分解 $\Im(\mathbb{O}') = \Im(\mathbb{H}) \oplus \mathbb{H}$ 的 G_2' 的子群。那么我们有

$$K \cong \mathsf{SO}(\mathbb{H}, \mathbf{q}) \cong \mathsf{SO}(4).$$

证明。与引理 2.5的证明类似。 □

注 2.7。外积分解为 $\Lambda^2(\Im(\mathbb{O}')) \cong \Lambda^2(\Im(\mathbb{O}')) \oplus \Im(\mathbb{H}) \otimes \mathbb{H} \oplus \Lambda^2\mathbb{H}$。对 $\times$ 到 $\Im(\mathbb{H}) \otimes \mathbb{H}$ 的限制为零，而对其他直和项的限制则给出映射

$$\times|_{\Lambda^2\Im(\mathbb{H})} : \Lambda^2\Im(\mathbb{H}) \to \Im(\mathbb{H}) \qquad \textit{and} \qquad \times|_{\Lambda^2\mathbb{H}} : \Lambda^2\mathbb{H} \to \Im(\mathbb{H})\,.$$

第一个映射是一个同构。第二个映射定义了一个同构：它将关于 $\mathbf{q}_{\mathbb{H}}$ 的自对偶二形式向量空间 $\Lambda^2_+\mathbb{H}$ 映射到体积形式 $\lambda \wedge (j\lambda) \wedge (d\lambda) \wedge (e\lambda)$ 和 $\Im(\mathbb{H})$。

2.4. (O′)的复化。 令 $\mathfrak{s}(\mathbb{O}')_{\mathbb{C}}$ 表示 $\mathfrak{s}(\mathbb{O}')$ 的复化，并将$\mathbf{q}$ 和 $\times$ 的复线性延拓记作相同的符号。$\mathfrak{s}(\mathbb{O}')_{\mathbb{C}}$ 的元素写作$w + \mathrm{i}z$，其中w、$z \in \mathfrak{s}(\mathbb{O}')$。

以下基 $\{f_{-3}, f_{-2}, \cdots, f_3\}$ of $\mathfrak{s}(\mathbb{O}')_{\mathbb{C}}$ 将经常使用：

$$(7)\qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\delta\ell + \mathrm{i}\epsilon\ell),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\ell + \mathrm{i}j\ell),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta + \mathrm{i}\epsilon),\ j,\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta - \mathrm{i}\epsilon),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\ell - \mathrm{i}j\ell),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta\ell - \mathrm{i}\epsilon\ell)\right)$$

该基的乘法表如下：

列 $\times$行	f_{-3}	f_{-2}	f_{-1}	f_0	f_1	f_2	f_3
f_{-3}	0	0	0	$-if_{-3}$	$-\sqrt{2}f_{-2}$	$-\sqrt{2}f_{-1}$	$-if_0$
f_{-2}	0	0	$-\sqrt{2}f_{-3}$	if_{-2}	0	$-if_0$	$\sqrt{2}f_1$
f_{-1}	0	$\sqrt{2}f_{-3}$	0	if_{-1}	if_0	0	$\sqrt{2}if_2$
f_0	if_{-3}	$-if_{-2}$	$-if_{-1}$	0	if_1	if_2	if_3
f_1	$\sqrt{2}f_{-2}$	0	if_0	$-if_1$	0	$\sqrt{2}f_3$	0
f_2	$\sqrt{2}f_{-1}$	if_0	0	$-if_2$	$-\sqrt{2}f_3$	0	0
f_3	if_0	$-\sqrt{2}f_1$	$-\sqrt{2}f_2$	if_3	0	0	0

二次型 $\mathbf{q}$和自同态 $J^{f_0}(\cdot) = f_0 \times (\cdot)$定义如下

$$(8)\qquad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} & & & & & & 1 \\ & & & & & -1 & \\ & & & & 1 & & \\ & & & -1 & & & \\ & & 1 & & & & \\ & -1 & & & & & \\ 1 & & & & & & \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad J_{f_0} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & & & & & & \\ & -\mathrm{i} & & & & & \\ & & -\mathrm{i} & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & +\mathrm{i} & & \\ & & & & & +\mathrm{i} & \\ & & & & & & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

备注 *2.8*。注意，$span(f_{-1}, f_0, f_1)$ 等于 $\mathfrak{s}(\mathbb{H}')_{\mathbb{C}}$，$span(f_{-3}, f_{-2}, f_2, f_3)$ 等于 $\mathbb{H}'_{\mathbb{C}}$。关于由 *(6)* 给出的同构 $\mathfrak{s}(\mathbb{H}') \oplus \mathbb{H}' \to \mathfrak{s}(\mathbb{H}) \oplus \mathbb{H}$，我们有

$$\mathrm{span}(f_{-2}, f_0, f_2) = \mathfrak{s}(\mathbb{H})_{\mathbb{C}} \qquad \textit{and} \qquad \mathrm{span}(f_{-3}, f_{-1}, f_1, f_3) = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}\,.$$

3. 6-伪球面中的全纯曲线

设有一个光滑、连通且定向的曲面S。本节中，我们引入交替全纯曲线在$\mathbf{H}^{4,2}$中的概念。这些曲线具有自然定义的弗雷内标架，该标架用于在定理3.23中给出交替全纯曲线的全纯描述。我们首先介绍相关的齐性空间。

3.1. 伪球面。考虑一个实向量空间V，其上配备一个符号差为(p,q)的非退化二次型Q。符号差为$(p-1, q)$ 的伪球面定义为

$$\mathbf{S}^{p-1,q} = \{z \in V\,,\ Q(z) = 1\}\,.$$

点z 处$\mathbf{S}^{p-1,q}$ 的切空间自然地可识别为

$$\mathrm{T}_z\mathbf{S}^{p-1,q} = \{x \in V\,,\ \langle z, x\rangle = 0\} = z^{\perp}\,.$$

特别地，二次型Q 在$\mathbf{S}^{p-1,q}$上的限制给出一个符号差为$(p-1,q)$ 的伪黎曼度量$\mathbf{g}$ 。该度量具有常曲率 $+1$，且正交群 $\mathrm{O}(V,Q)$ 通过等距变换作用于$(\mathbf{S}^{p-1,q},\mathbf{g})$。

类似地，符号差 $(p,q-1)$ 伪双曲空间 是二次曲面

$$\mathbf{H}^{p,q-1} = \{z \in V\,,\ Q(z) = -1\}\,.$$

与伪球面的情形相同，$\mathbf{H}^{p,q-1}$ 继承了一个符号差为$(p, q-1)$、曲率为 -1 的伪黎曼度量$\mathbf{g}$。

注 3.1。 将二次型从 Q 改为 $-Q$，可定义 $H^{p,q-1}$ 与$\mathbf{S}^{q-1,p}$之间的反等距变换。因此，我们也将 $\mathbf{H}^{p,q-1}$ 称为伪球面。

我们将考虑$(V, Q) = (\Im(\mathbb{O}'), \mathbf{q})$，其中$\mathbf{q}(z) = z \cdot z$。由于$\mathbf{q}$的符号差为$(4, 3)$，相关的伪球面为$\mathbf{H}^{4,2}$和$\mathbf{S}^{3,3}$。乘积 $\times$ 在 $\Im(\mathbb{O}')$ 上将诱导$\mathbf{H}^{4,2}$ 和$\mathbf{S}^{3,3}$上的额外 G_2'-不变结构。

3.2. **空间 $\mathbf{H}^{4,2}$**。 考虑左乘映射

$$L: \Im(\mathbb{O}') \longrightarrow \mathsf{End}(\Im(\mathbb{O}')) \quad . \tag{9}$$
$$z \longmapsto L_z : w \mapsto z \times w$$

对于 $z \in \mathbf{H}^{4,2}$, , L_z 的核由 z 张成；并且，由于 Ω 式（3）中的形式是反对称的，L_z 的像为 $z^\perp$。特别地，L_z 限制在 T 上是一个自同态$_z\mathbf{H}^{4,2}$。

引理3.2. 设$\mathbf{J} : \mathrm{T}\mathbf{H}^{4,2} \to \mathrm{T}\mathbf{H}^{4,2}$ 是由$\mathbf{J}_z = L^{z|_{z^\perp}} : \mathrm{T}_z\mathbf{H}^{4,2} \to \mathrm{T}_z\mathbf{H}^{4,2}$定义的自同态。那么$\mathbf{J}$ 定义了$\mathbf{H}^{4,2}$ 上的一个G_2'-不变近复结构，且与度量$\mathbf{g}$相容。

证明. 由于J是利用 $\Im(\mathbb{O}')$上的G_2'-不变乘积 $\times$ 构造的，因此J是G_2'-不变的。由于$\mathrm{T}_z\mathrm{H}^{4,2} = \mathrm{z}^\perp$，我们有$\mathrm{J}_z(\mathrm{w}) = \mathrm{z} \times \mathrm{w} = \mathrm{z} \cdot \mathrm{w}$。由(2)，J是一个近复结构：

$$\mathbf{J}_z^2(w) = z \cdot (z \cdot w) = (z \cdot z) \cdot w = -w \, .$$

为了验证$\mathbf{J}$ 保持度量$\mathbf{g}$，我们计算

$$\mathbf{q}(\mathbf{J}_z(w)) = (z \cdot w) \cdot (z \cdot w) = z \cdot ((w \cdot z) \cdot w) = -z \cdot ((z \cdot w) \cdot w) = -z^2 \cdot w^2 = \mathbf{q}(w) \, ,$$

其中我们用到z,w 张成了 $\mathbb{O}'$ 的一个结合子代数，且$z \cdot w = z \times w = -w \cdot z$。 □

现在我们通过计算 $\nabla\mathbf{J}$来证明$\mathbf{J}$ 不可积，其中 ∇ 是$\mathbf{H}^{4,2}$的列维-奇维塔联络。由于(9)中的映射 L 是线性的，在 $\Im(\mathbb{O}')$ 上利用平凡平坦联络D 计算其协变导数，得到

$$(D_X L)_z(Y) = X(z) \times Y(z) \, ,$$

其中，X、Y 是 $\Im(\mathbb{O}')$ 上的向量场。由于 $\mathbf{H}^{4,2}$ 上的列维-奇维塔联络 ∇ 是由 D 诱导的，且 $\mathbf{J}$ 是 L 在 $\mathbf{H}^{4,2}$, 上的限制，我们得到

$$(\nabla_X \mathbf{J})_z(Y) = \big(X(z) \times Y(z)\big)^{z^\perp} \tag{10}$$

其中 $(\,)^{z^\perp}$ 是 $\Im(\mathbb{O}')$ 到 $z^\perp$ 上的正交投影。

引理 3.3。 对于任意 $z \in \mathbf{H}^{4,2}$，以及任意非零 $w \in \mathrm{T}_z\mathbf{H}^{4,2}$, ， $\times$ 在复直线 $\mathrm{span}(w, \mathbf{J}_z(w))$ 上的限制为零。

证明。 由于 z、w 张成 $\mathbb{O}'$ 的一个结合子代数，因此我们有

$$\mathbf{J}_z(w) \times w = \big((z \cdot w) \cdot w\big)^{z^\perp} = \big(z \cdot (w \cdot w)\big)^{z^\perp} = \big(\mathbf{q}(w) z\big)^{z^\perp} = 0 \, .$$

□

现在考虑 $\mathbf{H}^{4,2}$ 上由 $\boldsymbol{\omega}$ 定义的非退化 2-形式

$$\boldsymbol{\omega}(X, Y) = \mathbf{g}(\mathbf{J}X, Y) \, .$$

由于 $\mathbf{J}$ 不可积，$d\boldsymbol{\omega} \neq 0$。事实上，$d\boldsymbol{\omega}$ 是来自 Ω from (3) 的三形式在 $\mathbf{H}^{4,2}$上的限制。

引理 3.4。 设 W，X，Y 是$\mathbf{H}^{4,2}$ 上的向量场。那么

$$d\boldsymbol{\omega}(W, X, Y) = \Omega(W, X, Y) = \mathbf{g}(W \times X, Y) \, .$$

证明。 根据外微分的定义，$3d\omega(W、X、Y)$ 可表示为

$$W(\omega(X,Y)) - X(\omega(W,Y) + Y(\omega(W,X)) - \omega([W,X],Y) + \omega([W,Y],X) - \omega([X,Y],W$$

根据定义，我们有

$$W(\omega(X,Y)) = W(\mathbf{g}(\mathbf{J}X,Y)) = \mathbf{g}((\nabla_W \mathbf{J})X,Y) + \mathbf{g}(\mathbf{J}(\nabla_W X),Y) + \mathbf{g}(\mathbf{J}X,\nabla_W Y)\,.$$

利用等式（10），我们有

$$W(g(\mathbf{J}X,Y)) = \Omega(W,X,Y) + \omega(\nabla_W X,Y) + \omega(X,\nabla_W Y).$$

由于列维-奇维塔联络无挠，将各项相加可得

$$d\omega(W,X,Y) = \frac{1}{3}(\Omega(W,X,Y) - \Omega(X,W,Y) + \Omega(W,Y,X)) = \Omega(W,X,Y)\,.$$

□

将$d\omega$ 视为$(\mathbf{H}^{4,2},\mathbf{J})$上的复三形式，我们可以将其分解为各类型：

$$d\omega = \theta + \zeta + \overline{\zeta} + \overline{\theta}\,,$$

其中 θ的类型为$(3,0)$，而 ζ的类型为$(2,1)$。

L引理 3.5. $(3,0)$-形式 θ处处非零，而$(2,1)$-形式 ζ恒等于零 *ro.*

证明。 G_2' 在$\mathbf{H}^{4,2}$ 上的传递作用保持$\mathbf{J}$ 和 $\Omega = d\omega$，因此也保持$d\omega$的类型分解。因此，只需在一点处计算 θ和 ζ。

虚八元数 $z = j$的范数为 -1，因此 $j \in \mathbf{H}^{4,2}$。回忆一下，来自 $(\{f_{-3},\cdots,f_3\}$ 的基$\Im(\mathbb{O}')^{\mathbb{C}}$ （见 7）。复化切空间为

$$\mathrm{T}_j^{\mathbb{C}}\mathbf{H}^{4,2} = j^{\perp} \otimes \mathbb{C} = \mathrm{span}(f_{-3},f_{-2},f_{-1},f_1,f_2,f_3).$$

二次型 q 和 $\mathsf{J}^j : \mathrm{T}_j^{\mathbb{C}}\mathrm{H}^{4,2} \to \mathrm{T}_j^{\mathbb{C}}\mathrm{H}^{4,2}$ 由 (8) 给出。特别地，J 在 f_{-3}、$\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2$ 上以特征值 $+\mathrm{i}$ 作用，在 f_{-2}、f_{-1}、f_3上以特征值 $-\mathrm{i}$ 作用。

为确认形式 θ 在$j \in \mathbf{H}^{4,2}$ 处非零，我们计算

$$\theta_j(f_{-3},f_1,f_2) = \Omega(f_{-3},f_1,f_2) = \langle f_{-3} \times f_1, f_2\rangle = -\sqrt{2}\langle f_{-2},f_2\rangle = \sqrt{2}.$$

对于 ζ_j，只需 考虑 $\Omega(f_a、f_b、f_c)$，其中$a < b \in \{-3,1,2\}$ 且$c \in \{-2,-1,3\}$。我们有

$$f_{-3} \times f_1 = -\sqrt{2}f_{-2}\ ,\quad f_{-3} \times f_2 = -\sqrt{2}f_{-1}\quad \text{and}\quad f_1 \times f_2 = \sqrt{2}f_3\,,$$

它们都与张成空间$(f_{-2}、f_{-1}、f_3)$正交。因此 $\zeta_j = 0$。 □

回顾一下，$H^{4,2}$ 的**典范丛** 是$\mathbf{H}^{4,2}$的全纯余切丛的行列式。其截面是复$(3,0)$-形式。由于 θ 处处不消失，我们得到

推论 3.6. 该$(3,0)$-形式 θ给出了$(\mathbf{H}^{4,2},\mathbf{J})$的典范丛的平凡化。

推论 3.7. 点 $z \in \mathbf{H}^{4,2}$ 的 G_2'-稳定子同构于 $\mathrm{SU}(2,1)$。

证明。对于 $\mathsf{z} \in \mathrm{H}^{4,2}$,，稳定子 $\mathrm{Stab}^{\mathsf{G}_2'}(\mathsf{z})$ 保持符号差为 $(2,1)$ 的厄米形式 $\mathsf{h}_z = \mathsf{g}_z + \mathrm{i}\omega_z$。由于 G_2' 也保持体积形式 $\theta \wedge \bar{\theta}$，因此 $\mathrm{Stab}^{\mathsf{G}_2'}(\mathsf{z}) < \mathrm{SU}(2,1)$。由 $\mathrm{SU}(2,1)$ 的连通性和维数计数可得等式。具体而言，$\dim(\mathrm{H}^{4,2}) = 6$ 且 $\dim(\mathsf{G}_2') = 14$，因此 $\dim(\mathrm{Stab}^{\mathsf{G}_2'}(\mathsf{z})) = 8 = \dim(\mathrm{SU}(2,1))$。□

3.3. **空间 $\mathbf{S}^{3,3}$**。 回顾一下，流形 M 上的近似超复结构 是一个端omorphism $\psi : TM \to TM$，满足 $\psi^2 = \mathrm{Id}$，且 $\dim(\ker(\mathrm{Id} - \psi)) = \dim(\ker(\mathrm{Id} + \psi))$。流形 M 上的伪黎曼度量g 与 ψ 相容，当且仅当 ψ 是g的反等距变换。这样的g 必须具有中性号差，而分布 $\mathcal{D}^{\pm} = \ker(\psi \mp \mathrm{Id})$ 定义一对横截的、半维全纯线性子空间。保持一对横截半维全纯线性子空间的 $\mathrm{O}(n,n)$ 的子群与 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$同构，其中相应的表示在 $\mathcal{D}^+$ 和 $\mathcal{D}^-$ 上互为对偶。

对于每个$z \in \mathbf{S}^{3,3}$, 乘法映射 (9) 定义了 $L_z : T_z\mathbf{S}^{3,3} \to T_z\mathbf{S}^{3,3}$的一个自同态。

引理3.8。 令 $\psi : T\mathbf{S}^{3,3} \to T\mathbf{S}^{3,3}$ 为由 $\psi_z = L_z : T_z\mathbf{S}^{3,3} \to T_z\mathbf{S}^{3,3}$定义的自同态。则 ψ在$\mathbf{S}^{3,3}$ 上定义了一个与度量$\mathbf{g}$相容的G_2'-不变拟复结构。

证明。 证明与引理 3.2 的证明类似，唯一不同之处在于，对于 $z \in \mathbf{S}^{3,3}$，我们有 $z \cdot z = +1$。 □

每个点$z \in \mathbf{S}^{3,3}$ 都定义了两个横截的各向同性3维平面 $\mathcal{D}^{\pm}_z \subset z^{\perp} \subset \Im(\mathbb{O})$。$\mathbf{S}^{3,3}$ 上的对$\mathbf{S}^{3,3}$ 踵映射交换 $\mathcal{D}^+$ 与 $\mathcal{D}^-$。将$\mathbf{S}^{3,3}$ 对对踵映射取商，记为$\mathbf{P}_+(\Im(\mathbb{O}'))$ （也就是说，$\mathbf{P}_+(\Im(\mathbb{O}'))$ 是 $\Im(\mathbb{O}')$中正定直线的空间）。

引理3.9。 3-形式 Ω 对分布 $\mathcal{D}^+$ 的限制处处非零 .

证明。 G_2' 在$\mathbf{S}^{3,3}$ 上的作用是传递的，并保持三形式 Ω不变。因此，只需在$\mathbf{S}^{3,3}$的任意一点计算 Ω 。特别地，虚八元数 δ 的范数为 $+1$。因此，$\delta \in \mathbf{S}^{3,3}$ 和 $\psi_\delta = \delta \times (\cdot) : \delta^{\perp} \to \delta^{\perp}$。

使用 $z = x + y\ell$ 在第 2.2 节中的记号，我们计算

$$\delta \cdot (j - \epsilon) = -\epsilon + j\,, \qquad \delta \cdot (\ell + \delta\ell) = \delta\ell + \ell \qquad \text{and} \qquad \delta \cdot (j\ell + \epsilon\ell) = \epsilon\ell + j\ell\,.$$

因此，$\mathcal{D}^+_\delta =$张成$(j - \epsilon、\ \ell + \delta\ell、\ j\ell + \epsilon\ell)$。由于$(j - \epsilon)\cdot(\ell + \delta\ell) = 2(j\ell - \epsilon\ell)$，$\Omega$对$\mathcal{D}^+_\delta$ 的限制为

$$\Omega(j - \epsilon, \ell + \delta\ell, j\ell + \epsilon\ell) = 2\langle j\ell - \epsilon\ell, j\ell + \epsilon\ell\rangle = -4.$$

我们得出 Ω_δ 非零。 □

推论 3.10。 点 $z \in \mathbf{S}^{3,3}$ 的G_2'-稳定子同构于$\mathsf{SL}(3,\mathbb{R})$。

证明。 对于$z \in \mathbf{S}^{3,3}$,，稳定子 $\mathrm{Stab}^{\mathsf{G}_2'}(z)$ 保持分布 $\mathcal{D}^+_z \oplus \mathcal{D}^-_z$。由于 G_2' 保持 3-形式 Ω，且 $\Omega|_{\mathcal{D}^+_z}$ 非零，因此 $\mathrm{Stab}^{\mathsf{G}_2'}(z) < \mathrm{SL}(\mathcal{D}^+_z)$。与推论3.7中一样，由 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ 的连通性和维数计数可得等号。 □

注 3.11。 由于对踵映射交换 $\pm$ 分布，点 $[x] \in \mathbf{P}_+(\Im(\mathbb{O}'))$ 的 G_2'-稳定子同构于唯一的非分裂扩张

$$1 \to \mathrm{SL}(3,\mathbb{R}) \to \widehat{\mathrm{SL}}(3,\mathbb{R}) \to \mathbb{Z}_2\,.$$

3.4. **到 $\mathbf{H}$ 中的交替全纯曲线**^{4,2}。 设S 是一个连通定向曲面。

定义 3.12。 $H^{4,2}$ 中的全纯曲线 是一个浸入$f\colon\ S \to (\mathbf{H}^{4,2}, \mathbf{J})$，其中 S 的切丛是$\mathbf{J}$-不变的，即

$$\mathbf{J}(df(TS)) = df(TS)\,,$$

且$\mathbf{J}$ 在TS 上的相应作用是保定向的。

给定一条全纯曲线f，存在唯一的复结构 j 作用于S，使得

$$df \circ \mathrm{j} = \mathbf{J} \circ df.$$

我们将 j 称为诱导复结构。

引理 3.13. 映入 $\mathbf{H}^{4,2}$ 的全纯曲线是解析的。

证明。 由于 G_2' 在 $\mathbf{H}^{4,2}$, 上的作用是解析的，近复结构 $\mathbf{J}$ 依赖于基点且具有解析性。此外，映入 $\mathbf{H}^{4,2}$ 的全纯曲线是柯西-黎曼方程 $df \circ \mathrm{j} = \mathbf{J} \circ df$的解，该方程是一个非线性椭圆方程。于是，由 [26]的主要结果可得结论：具有解析系数的非线性椭圆方程的解是解析的。 □

设全纯曲线 f 从 S 映入 $\mathbf{H}^{4,2}$,，拉回丛 $f^*\mathrm{T}\mathbf{H}^{4,2}$ 配备拉回度量、联络和复结构，分别仍记作 $\mathbf{g}$、 ∇ 和 $\mathbf{J}$。

若全纯曲线 f 在 S 上诱导的度量为黎曼度量，则称其为类空。此时，将 $\mathrm{T}S$ 与 $df(\mathrm{T}S) \subset f^*\mathrm{T}\mathbf{H}^{4,2}$, 等同，可得关于 $\mathbf{g}$ 的正交分解

$$f^*\mathrm{T}\mathbf{H}^{4,2} = \mathrm{T}S \oplus (\mathrm{T}S)^{\perp} .$$

由于近复结构 $\mathbf{J}$ 与度量 $\mathbf{g}$相容，此直和分解在$\mathbf{J}$作用下不变。f的第二基本形式是 1-形式 $\mathrm{II} \in \Omega^1(S, \mathrm{Hom}(\mathrm{T}S, (\mathrm{T}S)^{\perp}))$，定义如下：

$$\mathrm{II}(X, Y) = (\nabla_X Y)^{\perp} .$$

回顾一下，II 是对称的，并且 f 是全测地的，当且仅当 $\mathrm{II} = 0$。

引理 3.14. 设 $f : S \to \mathbf{H}^{4,2}$ 是具有诱导复结构 j 和第二基本形式 II的类空全纯曲线。则对 S 上任意向量场 X,Y，有

$$\mathrm{II}(\mathrm{j}(X), Y) = \mathrm{II}(X, \mathrm{j}(Y)) = \mathbf{J}(\mathrm{II}(X, Y)) .$$

证明。 根据定义，我们有

$$\mathrm{II}(X, \mathrm{j}(Y)) = \left(\nabla_X(\mathbf{J}(Y))\right)^{\perp} = \left((\nabla_X \mathbf{J})(Y) + \mathbf{J}(\nabla_X Y)\right)^{\perp} .$$

由于 X 和 Y 包含在复直线中，引理 3.3 推出 $X \times Y = 0$。因此，$(\nabla_X \mathbf{J})(Y) = 0$由方程（10）可知。由于 $\mathbf{J}$ 与度量相容，我们有

$$\mathrm{II}(X, \mathrm{j}(Y)) = (\mathbf{J}(\nabla_X Y))^{\perp} = \mathbf{J}(\nabla_X Y)^{\perp} = \mathbf{J}(\mathrm{II}(X, Y)) .$$

由于 II 是对称的，我们有

$$\mathbf{J}(\mathrm{II}(X, Y)) = \mathbf{J}(\mathrm{II}(Y, X)) = \mathrm{II}(Y, \mathrm{j}(X)) = \mathrm{II}(\mathrm{j}(X), Y) .$$

□

命题 3.15。 设 f 是一条非全测地的类空全纯曲线。那么

（1）f 的平均曲率为零，且（2）存在唯一的 $\mathbf{J}$-不变秩 2 子丛 $\mathrm{N}S \subset (\mathrm{T}S)^{\perp}$，使得II的像包含在$\mathrm{N}S$ 中。

我们将丛 $\mathrm{N}S$ 称为f 的法丛。

证明。 设 (X_1, X_2) 是 $\mathrm{T}S$ 的局部正交标架，且 $\mathrm{j}(X_1) = X_2$。引理 3.14 给出

$$\mathrm{II}(X_2, X_2) = \mathrm{II}(X_2, \mathrm{j}(X_1)) = \mathbf{J}(\mathrm{II}(X_2, X_1)) = \mathbf{J}^2(\mathrm{II}(X_1, X_1)) = -\mathrm{II}(X_1, X_1) .$$

特别地，II 的迹为零，因此f 的平均曲率为零。

对于第（2）项，存在一个开集 U ⊂ S，在该开集上 II 的像具有最大维数。在局部地，II 的像由 {II(X_1, X_1)、II(X_1, X_2)、II(X_2, X_2)} 张成。II 的像在 U 上的秩为 2，因为 $\mathrm{II}(X_1, X_1) = -\mathrm{II}(X_2, X_2) = -\mathrm{J}(\mathrm{II}(X_1, X_2))$，且 f 不是全测地的。

我们断言U 是稠密的。若不稠密，则存在一个开集，在其上 II 的秩为 0，这意味着$f(S)$ 在某个开集上是全测地的。然而，根据引理3.13，$\mathbf{H}^{4,2}$ 中的全纯曲线是解析的，因此$f(S)$ 处处都是全测地的。因此，II 的像在一个稠密开集上定义了一个复直线丛，从而可延拓为S 上的复直线丛 $\mathrm{N}S$。
□

现在我们定义 $\mathbf{H}^{4,2}$ 中交替全纯曲线的概念。

定义 3.16. 交替全纯曲线是全纯曲线 $f: S \to \mathbf{H}^{4,2}$，它是类空的、非全测地的，并且具有负定法丛 $\mathrm{N}S$。

我们将交替全纯映射 f 的副法丛 $\mathrm{B}S$ 定义为秩为二的丛

$$\mathrm{B}S = (\mathrm{T}S \oplus \mathrm{N}S)^{\perp}.$$

因此，交替全纯曲线定义了一个正交分解

$$f^*\mathrm{T}\mathbf{H}^{4,2} = \mathrm{T}S \oplus \mathrm{N}S \oplus \mathrm{B}S.$$

由于 $\mathbf{J}$ 保持 $\mathbf{g}$、$\mathrm{T}S$ 和 $\mathrm{N}S$，$\mathbf{J}$ 也保持副法丛 $\mathrm{B}S$。

注 3.17。 在 [27], *Nie* 在 $\mathbf{H}^{p,q}$ 中定义了 A-曲面的概念。此类曲面被假定为类空，并具有秩为二、“更高阶”的法丛，其符号差为交替符号。特别地，对于 $\mathbf{H}^{4,2}$ 中的 A-曲线，假定第二基本形式 II 的像定义了一个秩为二的子丛，且该子丛为负定。因此，交替全纯曲线在 $\mathbf{H}^{4,2}$ 中定义了 A-曲面。

3.5. **弗雷内标架。** 平凡丛 $\underline{\Im}(\mathbb{O}') = \mathbf{H}^{4,2} \times \Im(\mathbb{O}') \to \mathbf{H}^{4,2}$ 具有一个典范截面 σ，它定义了一个直和分解 $\underline{\Im}(\mathbb{O}') = \underline{\mathbb{R}} \oplus \mathrm{T}\mathbf{H}^{4,2}$,，其中 $\sigma(x) = (1,0)$。在此直和分解下，度量 $g_{\Im(\mathbb{O}')} = -1 \oplus \mathbf{g},2$，而平凡联络 D 分解为

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} d & \mathbb{1}^* \\ \mathbb{1} & \nabla \end{pmatrix},$$

其中，∇ 是 $\mathbf{H}^4$ 上的列维-奇维塔联络，$^2, \mathbb{1} \in \Omega^1(\mathbf{H}^{4,2}, \mathrm{Hom}(\underline{\mathbb{R}}, \mathrm{T}\mathbf{H}^{4,2}))$ 是恒等映射，$\mathbb{1}^*$ 是相对于度量 $g_{\Im(\mathbb{O}')}$ 的伴随。按构造，与典范截面 σ 的乘积定义了 $\mathrm{T}\mathbf{H}^{4,2}$, 上的近复结构 $\mathbf{J}$

$$(1,0) \times (u,v) = (0, \mathbf{J}(v)).$$

给定映射 $f: S \to \mathbf{H}^{4,2}$,，令 $(E, D, \mathbf{g}, \times)$ 表示平凡丛 $\underline{\Im}(\mathbb{O}')$、平凡联络 D、符号差为 $(4,3)$ 的度量 $g_{\Im(\mathbb{O}')}$ 以及乘积 $\times : \Lambda^2\Im(\mathbb{O}') \to \Im(\mathbb{O}')$ 的拉回。我们有如下分解

$$E = \underline{\mathbb{R}} \oplus f^*T\mathbf{H}^{4,2}, \quad D = \begin{pmatrix} d & df^* \\ df & f^*\nabla \end{pmatrix} \quad and \quad \mathbf{g} = -1 \oplus f^*\mathbf{g}_{\mathbf{H}^{4,2}}.$$

映射 f 与典范截面 $f^*\sigma: S \to \underline{\mathbb{R}}$ 的拉回相对应，并且 $(1,0) \times (u,v) = (0, f^*\mathbf{J}(v))$。

定义 3.18。 当 $f: S \to \mathbf{H}^{4,2}$ 是交替全纯曲线时，$E = f^*\underline{\Im}(\mathbb{O}')$ </style}分解为

$$E = \underline{\mathbb{R}} \oplus \mathrm{T}S \oplus \mathrm{N}S \oplus \mathrm{B}S. \tag{11}$$

我们将此分解称为 f 的弗雷内标架。

在弗雷内标架下，度量分解为 $\mathbf{g} = -1 \oplus \mathbf{g}_{\mathrm{T}} \oplus \mathbf{g}_{\mathrm{N}} \oplus \mathbf{g}_{\mathrm{B}}$，其中 $1 \oplus \mathbf{g}_{\mathrm{T}} \oplus (-\mathbf{g}_{\mathrm{N}}) \oplus \mathbf{g}_{\mathrm{B}}$ 是正定的，而近复结构分解为 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\mathrm{T}} \oplus \mathbf{J}_{\mathrm{N}} \oplus \mathbf{J}_{\mathrm{B}}$。特别地，

$$(1,0,0,0) \times (a,t,n,b) = (0, \mathbf{J}_{\mathrm{T}}(t), \mathbf{J}_{\mathrm{N}}(n), \mathbf{J}_B(b)). \tag{12}$$

此外，在弗雷内标架下，联络 D 分解为

$$D = \begin{pmatrix} d & \mathbb{1}^* & 0 & 0 \\ \mathbb{1} & \nabla^{\mathrm{T}} & S_2 & 0 \\ 0 & \mathrm{II} & \nabla^{\mathrm{N}} & S_3 \\ 0 & 0 & \mathrm{III} & \nabla^{\mathrm{B}} \end{pmatrix} \tag{13}$$

其中：

- ∇^{T}、 ∇^{N}、 ∇^{B}分别是$(\mathrm{T}S, \mathbf{g}^{\mathrm{T}}, \mathbf{J}^{\mathrm{T}})$、$(\mathrm{N}S, -\mathbf{g}^{\mathrm{N}}, \mathbf{J}^{\mathrm{N}})$、$(\mathrm{B}S, \mathbf{g}^{\mathrm{B}}, \mathbf{J}^{\mathrm{B}})$上的度量联络；相对于诱导的厄米度量，它们是酉的。
- $\mathbb{1} \in \Omega^1(\underline{\mathbb{R}}, \mathrm{T}S)$ 是切丛S与 $\mathrm{T}S \cong df(\mathrm{T}S) \subset f^*\mathbf{T}\mathbf{H}^{4,2}$之间的恒等映射。
- $\mathrm{II} \in \Omega^1(S, \mathrm{Hom}(\mathrm{T}S, \mathrm{N}S))$ 是f的第二基本形式。
- $\mathrm{III} \in \Omega^1(S, \mathrm{Hom}(\mathrm{N}S, \mathrm{B}S))$ 将称为f的第三基本形式 。
- $S_2 \in \Omega^1(S, \mathrm{Hom}(\mathrm{N}S, \mathrm{T}S))$ 和$S_3 \in \Omega^1(S, \mathrm{Hom}(\mathrm{B}S, \mathrm{N}S))$ 满足

$$-\mathbf{g}^{\mathrm{N}}(\mathrm{II}(X,Y),\nu) = \mathbf{g}^{\mathrm{T}}(Y, S_2(X,\nu)) \qquad \text{and} \qquad \mathbf{g}^{\mathrm{B}}(\mathrm{III}(X,\nu),\beta) = -\mathbf{g}^{\mathrm{N}}(\nu, S_3(X,\beta)) ,$$

其中X、Y是S上的向量场，而 ν、 β 分别是 $\mathrm{N}S$ 和 $\mathrm{B}S$的截面。

引理 3.19。 张量 II、III、S_2,和 S_3 均为协变常数。

证明。 我们证明 III 是协变常数；关于 II、S_2 和 S_3 的计算类似。这是该情形下的 Codazzi 方程的推论。由于 $\mathbf{H}^{4,2}$ 具有常截面曲率，其曲率张量 R 满足 $R(X, Y)(\nu) = 0$。因此，

$$0 = \pi^{\mathrm{B}}(R(X,Y)\nu) = \pi^{\mathrm{B}}(\nabla_X\nabla_Y\nu - \nabla_Y\nabla_X\nu - \nabla_{[X,Y]}\nu)$$

利用弗雷内标架（13）进行计算可得

$$\pi^{\mathrm{B}}(\nabla_X\nabla_Y\nu) = \mathrm{III}(X, \nabla_Y\nu) + \nabla^{\mathrm{B}}_X(\mathrm{III}(Y,\nu)).$$

因此，

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{III}(X, \nabla_Y\nu) + \nabla^{\mathrm{B}}_X(\mathrm{III}(Y,\nu)) - \mathrm{III}(Y, \nabla_X\nu) + \nabla^{\mathrm{B}}_Y(\mathrm{III}(X,\nu) - \mathrm{III}([X,Y],\nu) \\ &= \nabla^{\mathrm{NB}}_X(\mathrm{III}(Y,\nu)) - \nabla^{\mathrm{NB}}_Y(\mathrm{III}(X,\nu)) - \mathrm{III}([X,Y],\nu) = 2(\nabla^{\mathrm{NB}}\mathrm{III})(X,Y,\nu). \end{aligned}$$

其中 ∇^{NB} 是 $\mathrm{Hom}(\mathrm{N}S, \mathrm{B}S)$ 上的诱导联络。 □

引理 3.20。 张量 $\mathrm{III}(\cdot, \mathrm{II}(\cdot, \cdot))$ 是对称的。

证明。L 设X、Y、Z为S上的向量场。由于 $\mathrm{II}(Y, Z) = \mathrm{II}(Z,Y)$，只需计算

$$\mathrm{III}(X, \mathrm{II}(Y,Z)) - \mathrm{III}(Y, \mathrm{II}(X,Z)) = \pi^{\mathrm{B}}\big(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z\big) = \pi^{\mathrm{B}}\big(R^{\nabla}(X,Y)Z - \nabla_{[X,Y]}Z\big) .$$

由于 ∇ 是常曲率度量的拉回，$R^{\nabla}(X,Y)Z \in \Omega^0(S, \mathrm{T}S)$。此外，$\nabla_{[X,Y]}Z \in \Omega^0(S, \mathrm{T}S \oplus \mathrm{N}S)$ 因此 $\pi^{\mathrm{B}}\big(R^{\nabla}(X,Y)Z - \nabla_{[X,Y]}Z\big) = 0$。 □

3.6. **复化弗雷内标架**。 设$f\colon S \to \mathbf{H}^{4,2}$ 为一条交替全纯曲线，并令$X = (S, \mathrm{j})$ 为由诱导复结构定义的黎曼曲面。f 的弗雷内标架的复化为

$$E^{\mathbb{C}} = \underline{\mathbb{C}} \oplus \mathrm{T}' \oplus \mathrm{T}'' \oplus \mathrm{N}' \oplus \mathrm{N}'' \oplus \mathrm{B}' \oplus \mathrm{B}'',$$

其中 $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}S = \mathrm{T}' \oplus \mathrm{T}''$ 是 $\mathrm{T}S$ 复化后按复线性延拓$\mathbf{J}^{\mathrm{T}}$的 $\pm\mathrm{i}$ 特征子空间所作的分解；类似地，$\mathrm{N}^{\mathbb{C}}S = \mathrm{N}' \oplus \mathrm{N}''$ 和 $\mathrm{B}^{\mathbb{C}}S = \mathrm{B}' \oplus \mathrm{B}''$。

引理 3。 21. 在复化弗雷内标架中，乘积 $\times$ 满足以下性质 :

(1) 对于 $E^{\mathbb{C}}$ 的截面 $s_0 = (1, 0, \cdots, 0)$， 自同态 $s_0 \times (\cdot)$ 由下式给出

$$s_0 \times (\cdot) = \mathrm{diag}(0, +\mathrm{i}, -\mathrm{i}, +\mathrm{i}, -\mathrm{i}, +\mathrm{i}, -\mathrm{i}).$$

(2) 对于截 面 $s' = (t', b', n')$ *of* $\mathrm{T}' \oplus \mathrm{N}' \oplus \mathrm{B}'$ 以及 $s'' = (t'', n'', b'')$ *of* $\mathrm{T}'' \oplus \mathrm{N}'' \oplus \mathrm{B}''$，有

$$s' \times s'' = t' \times t'' + n' \times n'' + b' \times b'' = -\mathrm{i}(\mathbf{g}^{\mathbb{C}}_{\mathrm{T}}(t', t'') + \mathbf{g}^{\mathbb{C}}_{\mathrm{N}}(n', n'') + \mathbf{g}^{\mathbb{C}}_{\mathrm{B}}(b', b''))s_0 .$$

(3) 该乘积定义了同构 $\mathrm{T}' \otimes \mathrm{B}' \cong \mathrm{N}''$ 和 $\mathrm{T}'' \otimes \mathrm{B}'' \cong \mathrm{N}'$。

证明。 第一点由公式（12）以及 $\pm\mathrm{i}$-特征子空间的定义得出。其余各点由引理 3.5 以及以下事实得出：$\mathbf{g}^{\mathbb{C}}(s_0, s_0) = -1$。 □

复线性延拓 $\mathrm{II}_{\mathbb{C}} \in \Omega^1(\mathrm{Hom}(\mathrm{T}' \oplus \mathrm{T}'', \mathrm{N}' \oplus \mathrm{N}''))$ 由下式给出

$$\mathrm{II}_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \mathrm{II}' & \overline{\mathrm{II}''} \\ \mathrm{II}'' & \overline{\mathrm{II}'} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathrm{II}' \in \Omega^1(\mathrm{Hom}(\mathrm{T}',\mathrm{N}'))$、$\mathrm{II}'' \in \Omega^1(\mathrm{Hom}(\mathrm{T}',\mathrm{N}''))$，以及 II' 和 $\overline{\mathrm{II}''}$ 是共轭映射。张量 $\mathrm{III}_{\mathbb{C}}$、$(S_2)_{\mathbb{C}}$ 和 $(S_3)_{\mathbb{C}}$ 具有类似的分解。

命题 3.22。 采用上述记号，有

(1) $\mathrm{II}'' = 0$和 $S_2'' = 0$，以及(2) 对于 S 上的任意向量场 X，以及 $\mathrm{N}'S$,$\mathrm{B}'S$ 的截面 ν、β，分别有

$$\mathrm{III}''(X,\nu) = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}(X \times \nu) \qquad \textit{and} \qquad S_3''(X,\beta) = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}(X \times \beta)\ .$$

证明。 注意到 $\mathrm{II}'' = 0$ 当且仅当 $\mathrm{II} \circ \mathbf{J}_{\mathrm{T}} = \mathbf{J}_{\mathrm{N}} \circ \mathrm{II}$。因此，第一项直接由引理 3.14 以及$S_2$ 与 II 之间的对偶性得到。

对于第二项，记到 $\mathrm{B}S$ 上的正交投影为 π_{B}，注意到 π_{B} 与$\mathbf{J}$交换。根据定义，$\mathrm{III}(X、\nu) = \pi_{\mathrm{B}}(\nabla_X \nu)$，并且

$$\mathrm{III}''(X,\nu) = \frac{1}{2}(\mathrm{III}_{\mathbb{C}}(X,\nu) + \mathrm{i}\mathbf{J}(\mathrm{III}_{\mathbb{C}}(X,\nu)))\,.$$

利用方程（10），$\mathbf{J}(\nu) = \mathrm{i}\nu$ 以及$\mathbf{J} \circ \pi_{\mathrm{B}} = \pi_{\mathrm{B}} \circ \mathbf{J}$，可得

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\mathbf{J}(\mathrm{III}_{\mathbb{C}}(X,\nu)) = \mathbf{J}(\mathrm{III}_{\mathbb{C}}(X,\mathbf{J}\nu)) &= \mathbf{J}(\pi_{\mathrm{B}}((\nabla_X \mathbf{J})(\nu) + \mathbf{J}(\nabla_X \nu))) \\ &= \mathbf{J}(\pi_{\mathrm{B}}(X \times \nu)) - \mathrm{III}_{\mathbb{C}}(X,\nu). \end{aligned}$$

因此，$\mathrm{III}''(X,\ \nu) = \frac{1}{2}\mathbf{J}(\pi_{\mathrm{B}}(X \times \nu))$。由引理3.21，$X \times \nu \in \mathrm{B}''$，因为$X \in \mathrm{T}S$ 且 $\nu \in \mathrm{N}'$。因此，$\mathrm{III}''(X,\ \nu) = -\mathrm{i}\,2(X \times \nu)$。关于$S_3$的计算现在可由III与$S_3$之间的对偶性得出。□

$(\mathrm{T}S, g_{\mathrm{T}}, \mathbf{J}_{\mathrm{T}})$ 上的厄米度量诱导出$\mathrm{T}' \oplus \mathrm{T}''$上的厄米度量$h_{\mathrm{T}'} \oplus h_{\mathrm{T}''}$。 ∇^T 的复线性延拓分别在T' 和 T''上诱导出厄米联络 $\nabla^{\mathrm{T}'}$ 和 $\nabla^{\mathrm{T}''}$。这些联络的$(0,1)$部分分别在T' 和T''上定义全纯结构 $\bar\partial_{\mathrm{T}'}$ 和 $\bar\partial_{\mathrm{T}''}$。令 $\mathcal{T}$和 $\overline{\mathcal{T}}$表示黎曼曲面X上的相应全纯线丛。由于 $\mathcal{T}$和$\overline{\mathcal{T}}$相对于$\mathbf{g}_{\mathrm{T}}^{\mathbb{C}}$是全纯线性的，厄米度量定义了$\overline{\mathcal{T}}$与对偶全纯线丛 $\mathcal{T}^{-1}$之间的一个同构；在这一识别下

$$(\mathcal{T} \oplus \overline{\mathcal{T}}, \mathbf{g}_{\mathrm{T}}^{\mathbb{C}}) = \left(\mathcal{T} \oplus \mathcal{T}^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

对丛 $\mathrm{N}_{\mathbb{C}}S$ 和 $\mathrm{B}_{\mathbb{C}}S$重复上述讨论，我们看到，度量联络$d, \nabla^{\mathrm{T}}, \nabla^{\mathrm{N}}, \nabla^{\mathrm{B}}$ 的复线性延拓的$(0,1)$部分定义了$E_{\mathbb{C}}$ 上的全纯结构$\bar\partial_{E_{\mathbb{C}}}$，其分解为

$$\mathcal{E} = (E_{\mathbb{C}}, \bar\partial_{E_{\mathbb{C}}}) = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{T} \oplus \mathcal{T}^{-1} \oplus \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^{-1} \oplus \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^{-1}, \tag{14}$$

其中 $\mathcal{O}_X$ 是平凡全纯线丛。相对于此分解，正定度量的复线性延拓和厄米度量分别为

$$(1 \oplus \mathbf{g}_{\mathrm{T}} \oplus (-\mathbf{g}_{\mathrm{N}}) \oplus \mathbf{g}_{\mathrm{B}})^{\mathbb{C}} = 1 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h = h_0 \oplus h_{\mathcal{T}} \oplus h_{\mathcal{T}}^{-1} \oplus h_{\mathcal{N}} \oplus h_{\mathcal{N}}^{-1} \oplus h_{\mathcal{B}} \oplus h_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

由于同构 $\mathcal{T}^{-1} \cong \overline{\mathcal{T}}$、$\mathcal{N}^{-1} \cong \overline{\mathcal{N}}$ 和 $\mathcal{B}^{-1} \cong \overline{\mathcal{B}}$ 由厄米度量给出，第二基本形式可分解为

$$\mathrm{II}_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \mathrm{II}' & (\mathrm{II}'')^{*_h} \\ \mathrm{II}'' & (\mathrm{II}')^{*_h} \end{pmatrix},$$

其中$(\mathrm{II}')^{*_h}$、$(\mathrm{II}'')^{*_h}$ 是 II' 和 II'' 的厄米伴随。张量 $\mathrm{III}_{\mathbb{C}}$、$S_2$ 和 S_3 也可类似地分解。

在复 Frenet 标架中，平坦联络D 分解如下。

定理 3.23. 设 $f\colon S \to \mathbf{H}^{4,2}$ 是交替全纯曲线，$X = (S,\mathrm{j})$ 是诱导的黎曼曲面。设$(E,D) = (f^*\underline{\mathfrak{I}}(\mathbb{O}'), f^*D)$ 是$\mathbf{H}^{4,2}$.上带平凡联络的平凡丛的拉回。那么，相对于复化弗雷内标架

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{T} \oplus \mathcal{T}^{-1} \oplus \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^{-1} \oplus \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^{-1},$$

平坦联络 D 分解为

$$D = \begin{pmatrix} d & 1^{*_h} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \nabla_{h_{\mathcal{T}}} & 0 & \beta^{*_h} & 0 & 0 & 0 \\ 1^{*_h} & 0 & \nabla_{h_{\mathcal{T}}^{-1}} & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \nabla_{h_{\mathcal{N}}} & 0 & \delta^{*_h} & \alpha^{*_h} \\ 0 & 0 & \beta^{*_h} & 0 & \nabla_{h_{\mathcal{N}}^{-1}} & \alpha & \delta \\ 0 & 0 & 0 & \delta & \alpha^{*_h} & \nabla_{h_{\mathcal{B}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \delta^{*_h} & 0 & \nabla_{h_{\mathcal{B}}^{-1}} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

其中

- $1 \in \Omega^{1,0}(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{T}))$ 是 $\mathrm{T}'X$ 与 $\partial f(\mathrm{T}'X) \cong \mathcal{T} \subset f^*(\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathbf{H}^{4,2})$之间的恒等映射，
- $\beta \in \Omega^{1,0}(\mathrm{Hom}(\mathcal{T}, \mathcal{N}))$ 是全纯的，
- $\delta \in \Omega^{1,0}(\mathrm{Hom}(\mathcal{N}, \mathcal{B}))$ 是全纯的，
- $\alpha \in \Omega^{1,0}(\mathrm{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{N}^{-1}))$ 是非零的全纯对象，由下式给出：$\alpha(b)(Y) = \mathrm{i}\mathbf{b} \times Y$，其中 b 是 $\mathcal{B}$ 的任意截面，Y 是任意向量场。
- 1^{*_h}、β^{*_h}、δ^{*_h} 和 α^{*_h} 分别是$\mathbf{1}$，β、δ 和 α 的厄米共轭。

注 3.24。线丛 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}^{-1}$ 分别是黎曼曲面 X 的全纯切丛和余切丛。在交替全纯曲线的定义中去掉浸入假设，将得到同类型的标架，只需将 $\mathcal{T}$ 替换为 $\mathcal{T} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{D}}$，其中 $\mathrm{D} \subset X$ 是微分 ∂f 消失处的除子。

证明。弗雷内标架中的平坦联络由对表达式（13）作复线性延拓给出。项 $\mathbb{1}_{\mathbb{C}} \in \Omega^1(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{T} \oplus \mathcal{T}^{-1}))$ 是对 $d_{\mathbb{C}}(\mathrm{T}'S \oplus \mathrm{T}''S) = \mathcal{T} \oplus \mathcal{T}^{-1} \subset f^*\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathbf{H}^{4,2}$的识别。由于$f$是全纯浸入，$\mathbb{1}_{\mathbb{C}} = 1 \in \Omega^{1,0}(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{T}))$。

对于第二基本形式 $\mathrm{II}_{\mathbb{C}}$，由命题 3.22可得 $\mathrm{II}'' = 0$。张量 β 就是 II'；根据引理 3.14，它是一个(1,0)-形式。具体而言，

$$\mathrm{II}'(Y,t') = \frac{1}{2}(\mathrm{II}_{\mathbb{C}}(Y,t') - \mathrm{i}\mathbf{J}\mathrm{II}_{\mathbb{C}}(Y,t')) = \frac{1}{2}(\mathrm{II}_{\mathbb{C}}(Y,t') - \mathrm{i}\mathrm{II}_{\mathbb{C}}(\mathrm{j}(Y),t')),$$

并且 $\mathrm{II}'(Y,t')$ 在 $\mathrm{j}(Y) = -\mathrm{i}Y$时为零。命题 3.22 的第 3 部分表明 β 是全纯的。

张量 α 是 $\mathrm{III}''_{\mathbb{C}}$；由于 $\mathrm{T}'' \times \mathrm{N}' = 0$，它的类型为 $(1,0)$。张量 δ 是 $\mathrm{III}'_{\mathbb{C}}$。在黎曼曲面上一点一般的位置处，我们有 $\mathrm{III}'(\mathrm{Y}, \nu) = \mathrm{III}'(\mathrm{Y}, \mathrm{II}'(\mathrm{Z}, \tau))$，其中 τ是 $\mathcal{T}$的一个截面。根据引理 3.20

$$\mathrm{III}'(Y,\nu) = \mathrm{III}'(Y, \mathrm{II}'(Z,\tau)) = \mathrm{III}'(Z, \mathrm{II}'(Y,\tau)).$$

因此，III'是一个$(1,0)$-形式，因为 II'是一个$(1,0)$-形式。命题3.22 的第 3 部分表明 δ是全纯的。最后，注意到$(S_2)_{\mathbb{C}}$ 和$(S_3)_{\mathbb{C}}$ 可表示为

$$(S_2)_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{*_h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad (S_3)_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & \alpha \\ \alpha^{*_h} & \delta^{*_h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

群 G_2' 通过 $(g \cdot f)(x) = g \cdot f(x)$ 作用于交替全纯曲线集合。此作用不会改变诱导的黎曼曲面，但可能会略微改变定理 3.23 中的弗雷内标架。具体而言，若 $(\mathcal{E}, h)$ 和 $(\hat{\mathcal{E}}, \hat{h})$ 分别是与 f 和 $g \cdot f$ 相关联、带有诱导厄米度量的全纯向量丛，则 $f^* g$ 定义了一个同构 $(\mathcal{E}, h) \cong (\hat{\mathcal{E}}, \hat{h})$。在此同构下，全纯切丛相同，而全纯法丛和副法丛分别对应为 $(\mathcal{N}, h_{\mathcal{N}}) \cong (\hat{\mathcal{N}}, \hat{h}_{\hat{\mathcal{N}}})$ 和 $(\mathcal{B}, h_{\mathcal{B}}) \cong (\hat{\mathcal{B}}, \hat{h}_{\hat{\mathcal{B}}})$。由于这种同构保持乘积，且乘积确定了 $\mathcal{N} \cong \mathcal{B}^{-1}\mathcal{T}$，因此这类对应构成一个 U(1)-挠子。在这种同构下，存在 $\lambda \in U(1)$，使得由 (15) 给出的相关全纯截面 (α, β, δ) 变为

$$(\alpha, \beta, \delta) \mapsto (\alpha, \lambda\beta, \lambda^{-2}\delta)\,. \tag{16}$$

4. Higgs 丛与等变交替全纯曲线

取一个黎曼曲面 $X = (S, j)$，并将其全纯余切丛记为 $\mathcal{K}$。直到 §5，我们都不假设 X 是紧致的。本节介绍本文相关的 Higgs 丛与调和丛基础知识。随后，我们说明某些 G_2'-循环调和丛如何确定交替全纯曲线，以及这些曲线如何由表示 $\rho\colon \pi_1(S) \to G_2'$ 的等变性确定。首先回顾一些李理论。

4.1. 嘉当分解。 每个半单实李群 G 都有一个极大紧子群 K，且该子群在共轭意义下唯一；G 与 K 同伦等价。选取一个极大紧子群可定义一个李代数对合 $\theta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，称为嘉当对合。嘉当对合的 $+1$-特征子空间是极大紧子群 K 的李代数 $\mathfrak{k}$，而 (-1)-特征子空间 $\mathfrak{p}$ 是相对于 Killing 型与 $\mathfrak{k}$ 垂直的子空间。因此，选取极大紧子群可定义一个嘉当分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$。嘉当分解满足以下括号关系

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}\,, \qquad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p} \qquad \text{and} \qquad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}\,.$$

复化后，定义复化的嘉当分解 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$。

注 4.1。 若 $G_0 < G$是约化子群，则可以选取一个极大紧子群 $K < G$ 使得$K_0 = G_0 \cap K$ 是 G_0的极大紧子群。反过来，若 $K_0 < G_0$ 是极大紧子群，则可以将其扩展为极大紧子群 $K < G$，例如参见 [1, §3]。

若 $(E, \mathbf{q})$ 是一个 7 维实向量空间，配备有符号差为 $(4, 3)$ 的二次型，则 $SO_0(E, \mathbf{q}) \cong SO_0(4, 3)$ 的极大紧子群同构于 $SO(4) \times SO(3)$。选取正交分解 $E = U \oplus V$ 可得到一个极大紧子群，使得将 $\mathbf{q}$ 限制在 U 和 V 上的 $\mathbf{q}_U$ 和 $\mathbf{q}_V$ 的符号差分别为 $(4, 0)$ 和 $(0, 3)$。相对于此直和分解，李代数 $\mathfrak{so}(4, 3)$ 为

$$\mathfrak{so}(4,3) = \left\{ X = \begin{pmatrix} A & \eta^\dagger \\ \eta & B \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{so}(U, \mathbf{q}_U),\ B \in \mathfrak{so}(V, \mathbf{q}_V),\ \eta \in \mathrm{Hom}(U, V),\ \eta^\dagger = -\mathbf{q}_U^{-1}\eta^T\mathbf{q}_V \right\}.$$

因此，$\mathfrak{so}(4, 3)$ 的嘉当分解为

$$\mathfrak{so}(4,3) \cong \big(\mathfrak{so}(U, \mathbf{q}_U) \oplus \mathfrak{so}(V, \mathbf{q}_V)\big) \oplus \mathrm{Hom}(U, V). \tag{17}$$

由引理2.6，G_2' 的极大紧子群同构于 $SO(4)$。选择极大紧子群的一种方式是选取一个分解 $\Im(\mathbb{O}') = \Im(\mathbb{H}) \oplus \mathbb{H}$，其中乘法由（5）给出。相应的 $\mathfrak{g}_2'$ 的嘉当分解可通过与 $\mathfrak{so}(4, 3) = \mathfrak{so}(\Im(\mathbb{O}'), \mathbf{q})$的嘉当分解取交得到。具体来说，如果

$$(\Im(\mathbb{O}'), \mathbf{q}) = (\mathbb{H}, \mathbf{q}_{\mathbb{H}}) \oplus (\Im(\mathbb{H}), \mathbf{q}_{\Im(\mathbb{H})}) = (U, \mathbf{q}_U) \oplus (V, \mathbf{q}_V),$$

那么，$\mathfrak{g}_2'$ 的嘉当分解为 $\mathfrak{g}_2' = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$，其中

$$\mathfrak{k} = \left\{ X = \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{so}(U, \mathbf{q}_U)\,,\ B \in \mathfrak{so}(V, \mathbf{q}_V)\,,\ X(z_1 \times z_2) = X(z_1) \times z_2 + z_1 \times X(z_2) \right\}$$

$$\mathfrak{p} = \left\{ X = \begin{pmatrix} & \eta^\dagger \\ \eta & \end{pmatrix} \mid \eta^\dagger = -\mathbf{q}_U^{-1} \eta^T \mathbf{q}_V\,,\ X(z_1 \times z_2) = X(z_1) \times z_2 + z_1 \times X(z_2) \right\}.$$

4.2. **Higgs 丛的定义。** 设 $X = (S, \mathrm{j})$ 为黎曼曲面。固定一个极大紧子群 $\mathrm{K} < \mathrm{G}$，并考虑 G 的李代数的嘉当分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$。令 $\mathrm{K}_{\mathbb{C}} < \mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ 为 K 的复化，并将复化后的嘉当分解记为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$。注意，$\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$ 作用于 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$；给定一个主 $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$-丛 $P \to X$，我们将伴随向量丛 $P \times_{\mathrm{K}_{\mathbb{C}}} \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ 记为 $P[\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}]$，其纤维为 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$。

定义 4.2。 采用上述记号，X 上的一个G-*Higgs* 丛是一个对$(\mathcal{P}, \Phi)$，其中

- $\mathcal{P}$ 是 X 上的全纯主$\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$-丛，并且
- Φ 是 $\mathcal{P}[\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}] \otimes \mathcal{K}$ 的全纯截面，称为 *Higgs* 场。

若固定底层光滑 $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$-丛 P，则两个 G-Higgs 丛$(\mathcal{P}, \Phi)$和$(\mathcal{P}', \Phi')$同构，当且仅当它们相差一个 $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$-规范变换群的作用。也就是说，存在 P的光滑丛同构，它定义了一个全纯同构$(\mathcal{P}, \Phi) \cong (\mathcal{P}', \Phi')$。

复群 $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ 是 $\mathrm{G}_{\mathbb{C}} \times \mathrm{G}_{\mathbb{C}}$的一个实形式。在这种情况下，$\mathrm{K}_{\mathbb{C}} \cong \mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ 和 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，而一个 $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$-Higgs 丛是一个对 $(\mathcal{P}, \Phi)$，其中 $\mathcal{P}$是定义在X 上的全纯 $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$-丛，Φ 是伴随丛 $\mathcal{P}[\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}] \otimes \mathcal{K}$的全纯截面。利用 $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$的忠实表示，我们可以使用向量丛来处理。下面给出几个相关例子：

例 1. 定义在X 上的 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$-Higgs 丛是一个元组 $(\mathcal{E}, \mathrm{vol}_{\mathcal{E}}, \Phi)$，其中

- $\mathcal{E} \to X$ 是一个秩为n的全纯向量丛，
- $\mathrm{vol}_{\mathcal{E}} \colon \Lambda^n \mathcal{E} \to \mathcal{O}_X$ 是一个全纯同构，并且
- Φ 是 $\mathrm{End}(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{K}$ 的全纯截面，且 $\mathrm{tr}(\Phi) = 0$。

类似地，一个 $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$-Higgs 丛是一个配备了对称幂$S^2\mathcal{E}^*$的非退化全纯截面$Q_{\mathcal{E}}$的 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ Higgs 丛，该截面满足 $\Phi^T Q_{\mathcal{E}} + Q_{\mathcal{E}} \Phi = 0$；其中$Q_{\mathcal{E}}$视为一个同构$Q_{\mathcal{E}} \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}^*$，且 $\Phi^T \colon \mathcal{E}^* \to \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{K}$。

例 2. 对 $\mathfrak{so}(4,3)$ 的嘉当分解进行复化，得到 17 的复化形式。$\mathrm{SO}_0(4, 3)$-Higgs 丛因此是一个元组 $(\mathcal{U}, Q_{\mathcal{U}}, \mathrm{vol}_{\mathcal{U}}, \mathcal{V}, Q_{\mathcal{V}}, \mathrm{vol}_{\mathcal{V}}, \eta)$，其中

- $(\mathcal{U}, Q_{\mathcal{U}}, \mathrm{vol}_{\mathcal{U}})$和$(\mathcal{V}, Q_{\mathcal{V}}, \mathrm{vol}_{\mathcal{V}})$分别是秩为 4 和 3 的全纯向量丛，配备了全纯正交结构$Q_{\mathcal{U}}$、$Q_{\mathcal{V}}$以及体积形式 $\mathrm{vol}_{\mathcal{U}}$、$\mathrm{vol}_{\mathcal{V}}$，并且
- $\eta \colon \mathcal{U} \to \mathcal{V} \otimes \mathcal{K}$ 是一个全纯丛映射。

相应的 $\mathrm{SO}(7, \mathbb{C})$-Higgs 丛为$(\mathcal{E}, \mathrm{vol}_{\mathcal{E}}, Q_{\mathcal{E}}, \Phi) = (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}, \mathrm{vol}_{\mathcal{U}} \wedge \mathrm{vol}_{\mathcal{V}}, Q_{\mathcal{U}} \oplus -Q_{\mathcal{V}}, \Phi)$，其中对于 $\eta^\dagger = Q_{\mathcal{U}}^{-1} \circ \eta^T \circ Q_{\mathcal{V}}$，有

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \eta^\dagger \\ \eta & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \to (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \otimes \mathcal{K}\,. \tag{18}$$

现在我们来描述 G_2'-Higgs 丛。回顾一下，$\mathfrak{g}_2' \subset \mathfrak{so}(\Im(\mathbb{O}'), \mathbf{q}) \cong \mathfrak{so}(4, 3)$ 是$(\Im(\mathbb{O}'), \times)$的导子子代数。我们将在记号中省略体积形式。

定义 4.3。 X 上的一个G_2'-*Higgs* 丛是一个$\mathrm{SO}_0(4,3)$-*Higgs* 丛$(\mathcal{U}, Q_{\mathcal{U}}, \mathcal{V}, Q_{\mathcal{V}}, \eta)$，并配备一个全纯丛映射 $\times \colon \Lambda^2(\mathcal{V} \oplus \mathcal{U}) \to \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$，使得

- $(\mathcal{V}p \oplus \mathcal{U}p, \times p) \cong (\Im(\mathbb{H})_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{H}_{\mathbb{C}}, \times)$ 对于每个 $p \in X$，且
- $\Phi(s \times t) = \Phi(s) \times t + s \times \Phi(t)$，其中 Φ 由以下公式给出 (18)，且 s、t 是 $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ 的任意截面。

注 4.4。 根据注 2.7，这意味着 $\times|_{\Lambda^2\mathcal{U}}:\ \Lambda^2\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ 定义了 $\mathcal{V}$ 与二阶外积的自对偶部分 $\Lambda^2_+\mathcal{U}$ 之间的全纯同构。

注 4.5. 考虑由交替全纯曲线导出的平坦联络 D。使用定理 3.23 $(\mathcal{E},\ \times,\ \Phi)$ 中的记号，它是一个 G_2'-*Higgs* 丛，其中 Φ 是 $D\ -\nabla$的$(1,0)$部分。

4.3. **一个例子**。 本文所涉及的 Higgs 丛还具有一项额外性质：该丛可全纯约化至极大环面。这意味着该向量丛分解为全纯线丛的直和。具体而言，

$$\mathcal{E}=\mathcal{L}_{-3}\oplus\mathcal{L}_{-2}\oplus\mathcal{L}_{-1}\oplus\mathcal{L}_0\oplus\mathcal{L}_1\oplus\mathcal{L}_2\oplus\mathcal{L}_3, \tag{19}$$

其中每个 $\mathcal{L}_i$ 都是全纯线丛。此外，我们还要求 $\mathcal{L}_{-i}=\mathcal{L}^{-1}{}_i$ 且 $\mathcal{L}_0=\mathcal{O}$。相对于直和分解（19），Higgs 场 $\Phi:\ \mathcal{E}\to\mathcal{E}\otimes\mathcal{K}$ 可以写成一个 7×7矩阵，其各项都是相应线丛的全纯截面。我们将考虑如下形式的 Higgs 场：

$$\Phi=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&\delta&0\\ \alpha&0&0&0&0&0&\delta\\ 0&\beta&0&0&0&0&0\\ 0&0&\gamma&0&0&0&0\\ 0&0&0&\gamma&0&0&0\\ 0&0&0&0&\beta&0&0\\ 0&0&0&0&0&\alpha&0\end{pmatrix}:\mathcal{E}\to\mathcal{E}\otimes\mathcal{K}, \tag{20}$$

其中，α、β、γ、δ 分别是 $\mathcal{L}_3\mathcal{L}_{-2}\mathcal{K}$、$\mathcal{L}_2\mathcal{L}_{-1}\mathcal{K}$、$\mathcal{L}_1\mathcal{L}_0\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{K}$的全纯截面。为避免书写 7×7 矩阵，我们将此类对象表示为

$$(\mathcal{E},\Phi):=\ \mathcal{L}_{-3}\xrightarrow[\alpha]{}\mathcal{L}_{-2}\xrightarrow[\beta]{}\mathcal{L}_{-1}\xrightarrow[\gamma]{}\mathcal{L}_0\xrightarrow[\gamma]{}\mathcal{L}_1\xrightarrow[\beta]{}\mathcal{L}_2\xrightarrow[\alpha]{}\mathcal{L}_3\ .\qquad\overset{\delta}{\frown}\qquad\overset{\delta}{\frown} \tag{21}$$

由于 $\mathrm{tr}(\Phi)=0$和 $\Lambda^7\mathcal{E}$可平凡化，$(\mathcal{E},\Phi)$ 是一个 $\mathrm{SL}(7,\mathbb{C})$-Higgs 丛。

In 事实上，此例定义了一个 $\mathrm{SO}_0(4,3)$-Higgs 丛$(\mathcal{U},Q_{\mathcal{U}},\mathcal{V},Q_{\mathcal{V}},\eta)$，其中 re

- $\mathcal{U}=\mathcal{L}_{-3}\oplus\mathcal{L}_{-1}\oplus\mathcal{L}_1\oplus\mathcal{L}_3$和 $\mathcal{V}=\mathcal{L}_{-2}\oplus\mathcal{L}_0\oplus\mathcal{L}_2$,
- $Q_{\mathcal{U}}$、$Q_{\mathcal{V}}$是$\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$ 上的正交结构，由下式定义

$$Q_{\mathcal{U}}=\begin{pmatrix}&&1\\ &\iddots&\\ 1&&\end{pmatrix}:\mathcal{U}\to\mathcal{U}^*\quad\text{and}\quad Q_{\mathcal{V}}=\begin{pmatrix}&1&\\ 1&&\end{pmatrix}:\mathcal{V}\to\mathcal{V}^*,$$

- $\eta=\begin{pmatrix}\alpha&0&0&\delta\\ 0&\gamma&0&0\\ 0&0&\beta&0\end{pmatrix}:\mathcal{U}\to\mathcal{V}\otimes K.$

要使此例成为一个 G_2'-Higgs 丛，我们需要一个全纯映射

$$\times:\Lambda^2(\mathcal{U}\oplus\mathcal{V})\to\mathcal{U}\oplus\mathcal{V},$$

使得 $(\mathcal{U}_p\oplus\mathcal{V}_p,\times)\ \cong(\Im(\mathbb{H})_{\mathbb{C}}\oplus\mathbb{H}_{\mathbb{C}},\times)$ 对每个 $p\ \in X$。这意味着 $\mathcal{V}\ \cong\ \Lambda^2_+\mathcal{U}$。我们将按照交替全纯曲线的复 Frenet 标架（14）来定义乘积。

利用 $\mathcal{L}_0=\mathcal{O}$，如果 $s_0=1\in H^0(\mathcal{L}_0)$，那么定义

$$s_0\times(\cdot)=\mathrm{diag}(+\mathrm{i},-\mathrm{i},-\mathrm{i},0,+\mathrm{i},+\mathrm{i},-\mathrm{i}):\mathcal{L}_{-3}\oplus\cdots\oplus\mathcal{L}_3\to\mathcal{L}_{-3}\oplus\cdots\oplus\mathcal{L}_3.$$

如果我们设定 $\mathcal{L}_{-2}=\mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_1$，那么任意非零复数 ξ 都确定一个同构

$$\xi:\mathcal{L}_{-3}\otimes\mathcal{L}_1\to\mathcal{L}_{-2}=\mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_1.$$

利用该同构，我们可以定义一个乘积，如引理 3.21 所述。具体而言，给定截面 s_{-3}，s_1，它们属于 $\mathcal{L}_{-3}$ 和 $\mathcal{L}_1$:

$$s_{-3} \times s_1 = \xi \cdot s_{-3} \otimes s_1.$$

乘法表与 $\{f_{-3}, \ldots\ldots, f_3\}$ 的乘法表相同，其中 $\mathfrak{I}(\mathfrak{O}')_{\mathbb{C}}$ 取自（7），但将 $\sqrt{2}$ 替换为 ξ。

引理 4.6. 采用上述乘积的选取 $\times\colon \Lambda^2(\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \to \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$，*Higgs* 丛 (20) 是一个$\mathsf{G}_2'$-*Higgs* 丛，当且仅当在 H 中满足以下方程$^0(\mathcal{K} \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{L}_{-3}, \mathcal{L}_{-2}))$

$$\alpha(\cdot) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma(s_0) \times (\cdot),$$

其中 $s_0 = 1 \in H^0(X, \mathcal{L}_0)$ 是一个平凡化单位截面。

证明。要成为一个 G_2'-Higgs 丛，Higgs 场 Φ 必须是一个导子。我们计算 $\Phi(s_0 \times s_{-3}) = \Phi(s_0) \times s_{-3} + s_0 \times \Phi(s_{-3})$ 这意味着 $\alpha(s_{-3}) = -\mathrm{i}\,\bar{z}\gamma(s_0) \times s_{-3}$。确实，

$$\Phi(s_0) \times s_{-3} + s_0 \times \Phi(s_{-3}) = \gamma(s_0) \times s_{-3} - \mathrm{i}\alpha(s_{-3}),$$

当 $\Phi(\mathsf{s}_0 \times \mathsf{s}_{-3}) = \mathrm{i}\Phi(\mathsf{s}_{-3}) = \mathrm{i}\alpha(\mathsf{s}_{-3})$ 时。为了说明这就是对 Higgs 场的唯一条件，我们使用乘法表 (7) 计算 $\Phi(\mathsf{s}_a \times \mathsf{s}_b)$ 和 $\Phi(\mathsf{s}_a) \times \mathsf{s}_b + \mathsf{s}_a \times \Phi(\mathsf{b})$，具体计算留给读者。□

注 4.7。注意，如果 $\mathcal{L}_{-2} = \mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_1$ 和 α 是 γ的标量倍数，那么我们可以定义乘积 $\times$，从而得到形如 (21) 的 G_2'-*Higgs* 丛。

4.4. **调和丛**。G-调和丛是装备了一个度量的 G-Higgs 丛，该度量满足一个与联络的平坦性相关的偏微分方程。我们将重点讨论向量丛描述。

定义 4.8。在 X 上的一个 $\mathsf{SL}(n, \mathbb{C})$-调和丛，是一个 $\mathsf{SL}(n, \mathbb{C})$-*Higgs* 丛 $(\mathcal{E}, \Phi)$，配备了一个厄米度量 h，该度量在 $\Lambda^n\mathcal{E}$ 上诱导平凡度量，并满足 *Hitchin* 方程

$$F_h + [\Phi, \Phi^*] = 0\,, \tag{22}$$

其中 F_h 是 h 的 *Chern* 联络 ∇_h 的曲率，而 Φ^* 是 Φ 的厄米伴随 .

令 (E, h) 为一个带酉度量的光滑丛。若两个调和丛 $(\mathcal{E}, \Phi, h)$ 和 $(\mathcal{E}', \Phi', h)$相差一个酉丛自同构，则它们在 (E,h) 上同构。

给定一个 $\mathsf{SL}(n, \mathbb{C})$-调和丛 $(\mathcal{E}, \Phi, h)$，Hitchin 方程（22）等价于联络的平坦性

$$D = \nabla_h + \Phi + \Phi^*\,.$$

因此，一个 $\mathsf{SL}(n, \mathbb{C})$-调和丛定义了一个表示 ρ （的共轭类）：$\pi_1(X) \to \mathsf{SL}(n, \mathbb{C})$，使得 $E \cong X \times_\rho \mathbb{C}^n$。给定一个表示 $\rho\colon \pi_1(X) \to \mathsf{SL}(n, \mathbb{C})$，度量 h^ρ 在平坦丛 $X \times_\rho \mathbb{C}^n$ 上可解释为到黎曼对称空间的一个 ρ-等变映射：

$$h_\rho : \widetilde{X} \to \mathsf{SL}(n, \mathbb{C})/\mathsf{SU}(n).$$

~度量h^ρ 称为调和度量，若对于$K \subset X$的每个紧子集，它都是能量的临界点

$$\mathcal{E}_K(h_\rho) = \frac{1}{2}\int_K |dh_\rho|^2.$$

这是合理的，因为对于二维定义域，能量仅取决于定义域的共形结构。事实证明，度量h 满足 Hitchin 方程（22）当且仅当 ρ-等变映射h^ρ 是调和的。

对于具有与 G-Higgs 丛相关的额外结构的 $\mathsf{SL}(n, \mathbb{C})$-Higgs 丛，假设调和度量 h 与这些结构相容，即 Chern 联络∇_h 的单值化群包含于紧群 $\mathsf{K} < \mathsf{K}_{\mathbb{C}}$中，因此相应的平坦联络 D

的单值化群包含于 G 中。就调和映射而言，相应的调和映射会经过对称空间 $G/K \subset SL(n,\mathbb{C})/SU(n)$ 的一个副本分解。例如，若厄米度量 h 定义在 $\mathcal{E}$上，则它与非退化对称双线性形式 $Q_{\mathcal{E}}$ 相容，当且仅当存在共轭线性对合 $\lambda:\mathcal{E}\to\overline{\mathcal{E}}$，使得 $h(e_1,e_2)=Q(e1,\lambda(e_2))$。特别地，将 h 视为同构 $H:\mathcal{E}\to\overline{\mathcal{E}}^*$，并将 $Q_{\mathcal{E}}$视为同构 $Q:\mathcal{E}\to\mathcal{E}^*$，我们有 $\lambda=Q^{-1}\circ H$；因此 $H\circ Q^{-1}\circ H=Q$。 —

$SO_0(4,3)$-Higgs 丛 $(\mathcal{U},Q_{\mathcal{U}},\mathcal{V},Q_{\mathcal{V}},\eta)$ 上的 $SO_0(4,3)$-调和度量由两个厄米度量 $h_{\mathcal{U}},h_{\mathcal{V}}$ 组成，它们分别定义在 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 上，并分别与 $Q_{\mathcal{U}},Q_{\mathcal{V}}$ 相容。注意，相应平坦丛 E 分解为 $E=U\oplus V$，其中 $U\subset\mathcal{U}$ 且 $V\subset\mathcal{V}$。此外，$Q_{\mathcal{U}}|_U\oplus(-Q_{\mathcal{V}})|_V$ 在 E 上定义了一个符号差为 (4, 3) 的平行度量。

对于一个同时也是 G_2'-Higgs 丛的 $SO_0(4,3)$-Higgs 丛，二次型 $Q_{\mathcal{V}}$由 $Q_{\mathcal{U}}$和乘积 $\times$确定。我们有如下定义。

定义 4.9。 在 $(\mathcal{U},Q_{\mathcal{U}},\mathcal{V},Q_{\mathcal{V}},\times,\eta)$ 这一 G_2'-*Higgs* 丛上的 G_2'-调和度量是一对相容度量 $h_{\mathcal{U}},h_{\mathcal{V}}$，分别定义在 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 上，并满足对合 $\lambda_{\mathcal{V}},\lambda_{\mathcal{U}}$ 满足

$$\lambda_{\mathcal{V}}(u_1\times u_2)=\lambda_{\mathcal{U}}(u_1)\times\lambda_{\mathcal{U}}(u_2).$$

注 4.10. 注意，与G_2'-调和丛相关联的平坦丛 E 分解为 $E=U\oplus V$，并且具有平行乘积 $\times:\ \Lambda^2 E\to E$，它将纤维识别为 $\Im(\mathbb{O}')$。

4.5. **循环 Higgs 丛与调和丛**。 第 4.3 节中讨论的显式 Higgs 丛具有额外的对称性，使其成为 6-循环 Higgs丛。

定义 4.11. 若一个$SL(n,\mathbb{C})$-*Higgs* 丛$(\mathcal{E},\Phi)$ 存在全纯分解 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{E}_k$，使得 $\Phi(\mathcal{E}_i)\subset\mathcal{E}_{i+1}\otimes\mathcal{K}$，其中 $i+1$ 按模 k 取值。 则称其为 k-循环。分解 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{E}_k$称为循环分解。

定义 4.12. 若一个$SL(n,\mathbb{C})$-调和丛$(\mathcal{E},\Phi,h)$ 满足$(\mathcal{E},\Phi)$ 为 k-循环，且循环分解关于度量 h 正交，则称其为 k-循环调和丛。

两个k-循环 Higgs 丛$(\mathcal{E}_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{E}_k、\ \Phi)$和$(\mathcal{E}_1'\oplus\cdots\oplus\mathcal{E}'_k、\ \Phi')$同构，当且仅当存在一个全纯丛自同构，对所有$j$ 都将 $\mathcal{E}_j\cong\mathcal{E}_j'$ 以及 Φ 和 Φ' 对应起来。类似地，如果该同构是酉的，则两个 k-循环调和丛同构。我们注意到，循环 Higgs 丛和循环调和丛具有循环群对称性。具体而言，若$(\mathcal{E}、\ \Phi)$ 是一个k-循环 Higgs 丛，则考虑酉全纯丛自同构

$$g=\mathrm{diag}(\zeta^a\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_1},\zeta^{a-1}\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2},\ldots,\zeta^{a-k+1}\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_k}):\mathcal{E}_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{E}_k\to\mathcal{E}_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{E}_k,$$

其中 ζ 是一个本原的k^{th} 次单位根，并选择a 使得 $\det(g)=1$。于是g 通过以下方式作用于 Φ

$$g\cdot\Phi=g^{-1}\circ\Phi\circ g=\zeta\cdot\Phi.$$

注 4.13。 当 X 紧致时，上述 *Higgs* 丛的多项式稳定性自动蕴含循环调和度量的存在性，参见命题 5.3。当 X 非紧致时，参见 [21, 22]，其中讨论了循环调和度量的存在性与唯一性结果。

引理 4.14. 由 (21) 得到的 *Higgs* 丛是 6-循环的，具有循环分解

$$\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}_2\oplus\mathcal{E}_3\oplus\mathcal{E}_4\oplus\mathcal{E}_5\oplus\mathcal{E}_6=(\mathcal{L}_{-3}\oplus\mathcal{L}_3)\oplus\mathcal{L}_{-2}\oplus\mathcal{L}_{-1}\oplus\mathcal{L}_0\oplus\mathcal{L}_1\oplus\mathcal{L}_2.$$

此外，若 h 是一个循环的$SO_0(4,3)$-调和度量，则 $h=h_{-3}\oplus h_{-2}\oplus\cdots\oplus h_2\oplus h_3$ 其中 h_a 是 $\mathcal{L}_a$ 上的厄米度量，且 $h_{-a}=h_a^{-1}$。

证明。 由于将（21）中的直和项重新排列可得，Higgs 丛是 6-循环的

$$\mathcal{L}_{-3}\oplus\mathcal{L}_3\xrightarrow[(\alpha\quad\delta)]{}\mathcal{L}_{-2}\xrightarrow[\beta]{}\mathcal{L}_{-1}\xrightarrow[\gamma]{}\mathcal{L}_0\xrightarrow[\gamma]{}\mathcal{L}_1\xrightarrow[\beta]{}\mathcal{L}_2\ ,\qquad \overset{(\delta\quad\alpha)^T}{\curvearrowleft}$$

回顾一下，这是一个 SO_0（4,3）-Higgs 丛，具有 $\mathcal{U} = \mathcal{L}_{-3} \oplus \mathcal{L}_{-1} \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_3$、$\mathcal{V} = \mathcal{L}_{-2} \oplus \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_2$和二次型

$$Q_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \iddots & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad Q_{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \tag{23}$$

因此，$\mathrm{SO}_0(4,3)$-循环调和度量 $h_{\mathcal{U}} \oplus h_{\mathcal{V}}$在循环分解中是对角的。 $\lambda_{\mathcal{U}} = Q_{\mathcal{U}}^{-1} \circ h_{\mathcal{U}}$和 $\lambda_{\mathcal{V}} = Q_{\mathcal{V}}^{-1} \circ h_{\mathcal{V}}$分别是 $\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$上的共轭线性对合这一条件，意味着 $\mathcal{L}_{-3} \oplus \mathcal{L}_3$ 上的度量分解为$h_{-3} \oplus h_3$，，其中$h_3^{-1} = h_{-3}$，并且$\mathcal{L}_j$ 上的度量h^j 满足$h^{-1}{}_j = h^{-j}$。□

引理 4.15. 当 $\mathcal{L}_{-2} = \mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_1$ 和 α 是 γ的标量倍数时，一个G_2'-循环调和度量是一个$\mathrm{SO}_0(4,3)$-循环调和度量，其中 $\mathcal{L}_{-2}$ 上的度量 h_{-2} 为 $h_{-3}h_1$，而 $\mathcal{L}_2$ 上的度量 h_2 为 h_3h_{-1}。

证明。 回忆备注 4.7 指出，当 $\mathcal{L}_{-2} = \mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_1$ 和 α 以及 γ 彼此互为标量倍数时，所考虑的 Higgs 丛是一个 G_2'-Higgs 丛。因此，与 $\lambda_{\mathcal{U}} = Q_{\mathcal{U}}^{-1} \circ h_{\mathcal{U}}$和 $\lambda_{\mathcal{V}} = Q_{\mathcal{V}}^{-1} \circ h_{\mathcal{V}}$相关联的 G_2'-调和度量所对应的共轭线性对合满足

$$\lambda_{\mathcal{U}}(u_1) \times \lambda_{\mathcal{U}}(u_2) = \lambda_{\mathcal{V}}(u_1 \times u_2),$$

对所有 $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$。若 $\alpha = \frac{\xi}{2}\gamma$，则 $s_{-3} \times s_1 = \xi \cdot s_{-3} \otimes s_1$。利用引理 4.14中的度量分解，我们有

$$\lambda_{\mathcal{U}}(s_{-3}) \times \lambda_{\mathcal{U}}(s_1) = h_{-3}h_1 s_3 \times s_{-1} = h_{-3}h_1\xi(s_3 \otimes s_{-1}),$$

$$\lambda_{\mathcal{V}}(s_{-3} \times s_1) = \lambda_{\mathcal{V}}(\xi(s_{-3} \otimes s_1)) = h_{-2}\xi(s_3 \otimes s_1).$$

因此，$h_{-2} = h_{-3}h_1$ 以及 $h_2 = h_3h_{-1}$。 □

现在我们推导出与这些 G_2'-循环调和丛相关联的平坦丛的分解，这与 [7, 定理 2.33] 类似。设 $\mathrm{D} = \nabla_h + \Phi + \Phi^*$ 为相应的平坦联络。由于度量是对角的，在直和分解 $\mathcal{E} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_{-1} \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_{-2} \oplus \mathcal{L}_{-3} \oplus \mathcal{L}_3$中，联络 D 如定理 3.23 的 (15) 式所示分解，其中 $\mathcal{T}$由 $\mathcal{L}_1$替代， $\mathcal{B}$ 由 $\mathcal{L}_{-3}$替代，而 1 和 1^* 由 α 和 α^*替代。相应的 G_2'-平坦丛 $\mathrm{E}_D \subset \mathcal{E}$ 是由反线性对合 $\lambda : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ 定义的不动点轨迹，该对合由 $\mathrm{h(u, v)} = \mathrm{Q(u, \lambda(v))}$ 给出。丛 E_D 分解为 $\mathrm{E}_D = \mathrm{U} \oplus \mathrm{V}$，其中 $\mathrm{U} \subset \mathcal{L}_{-3} \oplus \mathcal{L}_{-1} \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_3$ 且 $\mathrm{V} \subset \mathcal{L}_{-2} \oplus \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_2$。

命题 4.16. 平坦丛 E_D 对应于一个G_2'-循环调和丛，其形式为(21)，它分解为

$$E_D = \ell \oplus U_1 \oplus V_1 \oplus U_2,$$

其中， $\ell \subset \mathcal{L}_0$ 和 $V_1 \subset \mathcal{L}_{-2} \oplus \mathcal{L}_2$ 分别是秩为 *1* 和 *2* 的负定子丛，而$\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{L}_{-1} \oplus \mathcal{L}_1$ 和 $U_2 \subset \mathcal{L}_{-3} \oplus \mathcal{L}_3$ 是秩为 *2* 的正定子丛。

证明. 复双线性形式 $Q_{\mathcal{U}}$ 和 $Q_{\mathcal{V}}$ 由 (23) 给出。由于度量 h 是对角的，在直和分解 $\mathcal{E} = \mathcal{L}_0 \oplus (\mathcal{L}_{-1} \oplus \mathcal{L}_1) \oplus (\mathcal{L}_{-2} \oplus \mathcal{L}_2) \oplus (\mathcal{L}_{-3} \oplus \mathcal{L}_3)$中，对合 λ 由下式给出

$$\lambda = -h_0 \oplus \begin{pmatrix} & h_1 \\ h_1^{-1} & \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} & -h_2 \\ -h_2^{-1} & \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} & h_3 \\ h_3^{-1} & \end{pmatrix},$$

其中，$h^j(w)$： $\mathcal{L}_j \to \mathcal{L}_{-j}$ 是由$h^j(w)(w') = h^j(w,w')$定义的反线性映射 . □

4.6. 循环调和丛与等变交替全纯映射。 现在我们建立某些 G_2'-循环调和丛的同构类与等变交替全纯曲线之间的一一对应。固定基点$x_0 \in S$，并令 $\pi_1(S) = \pi_1(S,x_0)$~表示S的基本群。再固定一个万有覆盖$S \to S$，以及基点的一个提升 $\tilde{x}_0$。我们将在记号中省略基点。

定义 4.17。S 上的等变交替全纯曲线是一个数对 (ρ, f)，由一个表示 $\rho: \pi_1(S) \to G_2'$ 和一条交替全纯曲线 $f: \tilde{S} \to H^{4,2}$ 组成，其中 f 是 ρ-等变的；也就是说，对所有 $x \in S$ 以及所有 $\gamma \in \pi_1(S)$，都有 $f(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot f(x)$。

当S 是单连通的，交替全纯曲线当然与等变交替全纯曲线相同。例如，(S,j) 可能与复~ ~平面同构，如 [13]所示。注意，由等变交替全纯曲线(ρ, f) 诱导的黎曼曲面结构$X = (S,j)$，会下降为$X = (S,j)$上的黎曼曲面结构。

定义 4.18. 两个等变交替全纯曲线(ρ_1, f_1) 和(ρ_2, f_2) 若存在 $g \in G_2'$ 以及 $\psi \in \mathrm{Diff}_0(S)$ 使得……，则称它们同构

$$(\rho_1, f_1) = (\mathrm{Ad}_g \circ \rho_2, (g \cdot f) \circ \tilde{\psi}),$$

其中，$\tilde{\psi}$ 是 ψ 在 $\tilde{S}$.上的拉回。

注 4.19. 由于$\mathrm{Diff}_0(S)$ 在 S 上的复结构空间上自由作用，因此，诱导出相同黎曼曲面 X 的两个等变全纯曲线(ρ_1, f_1) 和(ρ_2, f_2) 同构，当且仅当存在 $g \in G_2'$ 使得……

$$(\rho_1, f_1) = (\mathrm{Ad}_g \circ \rho_2, g \cdot f_2).$$

以下讨论中，令 $\mathcal{B}$ 为 X 上的一个全纯线丛，并考虑一个 G_2'-循环调和丛 $(\mathcal{E}, \times, \Phi, h)$，其形式如式 (21) 所示，其中 $\mathcal{L}_{-3} = \mathcal{B}$且 $\mathcal{L}_{-1} = \mathcal{K}$，并假设 β非零。Higgs 丛可示意地写作

(24)
$$\mathcal{B} \xrightarrow[-\frac{i}{2}]{} \mathcal{B}\mathcal{K}^{-1} \xrightarrow[\beta]{} \mathcal{K} \xrightarrow[1]{} \mathcal{O} \xrightarrow[1]{} \mathcal{K}^{-1} \xrightarrow[\beta]{} \mathcal{B}^{-1}\mathcal{K} \xrightarrow[-\frac{i}{2}]{} \mathcal{B}^{-1}.$$

这里，映射 $1: \mathcal{O} \to \mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{K}$ 是恒等映射，而 $-\frac{i}{2}: \mathcal{B} \to \mathcal{B}\mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{K}$ 由乘积 $\times$决定。具体而言，对于 $\mathcal{B}$ 的截面b 以及$s_0 = 1 \in H^0(\mathcal{O})$，我们有

$$-\frac{i}{2}(b) = -\frac{i}{2} \cdot 1(s_0) \times b\,.$$

命题 4.20。 由 (24) 的形式 G_2-循环调和丛，分别由 $((\mathcal{B}, \beta, \delta)$ 和 $(\mathcal{B}', \beta', \delta')$决定，当且仅当 $((\mathcal{B}, \beta, \delta) = (\mathcal{B}', \lambda\beta, \lambda^{-2}\delta)$ 对某个 $\lambda \in U(1)$ 时同构。

证明。 这样的同构由一个对角酉规范变换g 给出，其行列式 $\det(g) = 1$，并保持正交结构$Q_{\mathcal{U}}$和$Q_{\mathcal{V}}$以及乘积不变。因此

$$g = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda\mu^{-1}, \mu^{-1}, 1, \mu, \lambda^{-1}\mu, \lambda^{-1}),$$

其中 $\lambda, \mu \in U(1)$。这样的规范变换保持映射 $1: \mathcal{K} \to \mathcal{O} \otimes \mathcal{K}$ 当且仅当$\mu = 1$。因此，这样的规范变换通过 $\beta \mapsto \lambda^{-1}\beta$ 和 $\delta \mapsto \lambda^2\delta$作用于$(\beta, \delta)$。□

定理 4.21. 诱导黎曼曲面为 X 的等变交错全纯曲线的同构类，与下列形式的G_2'-循环调和丛的同构类之间存在一一对应(24)其定义在 X 上。

证明。一方面基本上可由定理 3.23 中对复 Frenet 标架的描述得出。如 §3.6 所述，设 $(E, \times, D)$ 是由 f 拉回到 $\widetilde{X}$ 上的平凡 $\Im(\mathbb{O}')$-丛及其在 $H^{4,2}$ 上的联络。回顾一下，f 的 Frenet 标架诱导出分解 $E = \underline{\mathbb{R}} \oplus TS \oplus NS \oplus BS$，该分解关于正定度量 $g = 1 \oplus g_T \oplus (-g_N) \oplus g_B$是正交的。根据定理 3.23，f 的复 Frenet 标架定义了 $E_{\mathbb{C}}$ 上的全纯结构 $\mathcal{E}$，其分解为

$$\mathcal{E} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{K}^{-1} \oplus \mathcal{K} \oplus \mathcal{B}^{-1}\mathcal{K} \oplus \mathcal{B}\mathcal{K}^{-1} \oplus \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^{-1},$$

其中我们用 $\mathcal{K}^{-1}$ 代替了 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{N} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{K}$。相对于诱导的厄米度量 h，此直和分解是正交的，并且 $\Phi = (D - \nabla_h)^{1,0}$ 是全纯的。特别地，$(\mathcal{E}, \times, \Phi, h)$ 定义了一个 G_2'-循环调和丛。重新排列直和分解中的各个直和项，X 上的$\widetilde{}$循环 Higgs 丛便具有所需的形式。一切都下降到 X 的等变性。根据 (16) 和命题 4.20，两个诱导出黎曼曲面 X 的等变全纯曲线同构，当且仅当其关联的 G_2'-循环调和丛同构。

现在，我们从形如 (24) 的 G_2'-循环调和丛构造一个等变交替全纯曲线的同构类。根据命题 4.16，丛 $E_D \subset \mathcal{E}$ 分解为 $\ell \oplus U_1 \oplus V_1 \oplus U_2$。其中 $\ell \subset \mathcal{O}$ 是一个负定线子丛。此外，ℓ 由截面 $s_0 = 1 : X \to \mathcal{O} \subset \mathcal{E}$张成，因此 $s_0(x)$ 是 E_D 中的一个范数为 -1的向量。

$\widetilde{}$通过平行移动，E_D 的拉回E_D 在万有覆盖上被D平凡化。在此平凡化下，s_0 的拉回定义了一个映射，等变于 ρ，其值落在$\widetilde{}$ $\widetilde{}$基点$E_{\tilde{x}_0}$上纤维中的范数为 -1的向量空间内。选择一个识别$(E_{\tilde{x}_0}, \times) \cong \Im(\mathbb{O}')$，便定义了一条等变曲线$f : \widetilde{X} \to \mathbf{H}^{4,2}$。根据构造，$f$ 的复 Frenet 标架给出了平坦联络D 在直和分解 $\mathcal{O} \oplus \mathcal{K}^{-1} \oplus \mathcal{K} \oplus \mathcal{B}^{-1}\mathcal{K} \oplus \mathcal{B}\mathcal{K} \oplus \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^{-1}$中的分解。特别地，$f$是一条交替全纯曲线。改变与 $\Im(\mathbb{O}')$ 的识别，会得到同构的等变交替全纯曲线。□

5. 紧曲面的模空间

固定一个闭曲面 Σ，其亏格为$g \geq 2$，并设X 表示其上的一个黎曼曲面结构Σ。本节证明定理5.4，该定理给出了由G_2'-Higgs 丛的全纯描述，这些丛源自 Σ 上的等变全纯曲线，且诱导的黎曼曲面X固定。特别地，相应的模空间有许多连通分支。随后，在定理5.9中，我们将描述 Σ上的等变交替全纯曲线模空间；其中诱导的黎曼曲面可以变化。该模空间是一个复解析空间，并带有一个到的 Teichm¨uller 空间的满射全纯映射，以及映射类群的全纯作用；这里的纤维由定理5.4描述。最后，我们将说明其中一些连通分支如何对应于群G_2' 和$\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$的 Hitchin 表示，并在§5.7讨论全测地情形。我们首先回顾紧黎曼曲面上的 Higgs 丛模空间以及非阿贝尔霍奇对应。

5.1. **固定黎曼曲面的模空间**。 要构造X上的希格斯丛模空间，我们需要稳定性的概念。若X 上的 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$-希格斯丛$(\mathcal{E}, \Phi)$ 称为

- 半稳定，如果对每个真全纯子丛 $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$，只要满足 $\Phi(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F} \otimes \mathcal{K}$，就有 $\deg(\mathcal{F}) \leq 0$，
- 稳定，如果上述不等式始终是严格不等式，并且
- 多稳定，如果它是次数为 0 的稳定希格斯丛的直和，也就是说，$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_k$，并且对所有 i，$\deg(\mathcal{E}_i) = 0, \Phi(\mathcal{E}_i) \subset \mathcal{E}_i \otimes \mathcal{K}$，且$(\mathcal{E}_i, \Phi|_{\mathcal{E}_i})$ 是稳定希格斯丛。

以下定理由 Nitsure 证明 [28]，Simpson 也证明了 [33]。

定理 5.1. 存在一个拟射影簇 $\mathcal{M}(X,\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}))$，称为 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$-*Higgs* 丛的模空间，其点参数化了紧黎曼曲面 X 上多稳定 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$-*Higgs* 丛的同构类。

存在适用于 G-Higgs 丛及其相关模空间的稳定性概念$\mathcal{M}(X,\mathrm{G})$，参见 [33, 15]。当 G 为复约化群时，模空间 $\mathcal{M}(X,\mathrm{G})$ 是拟射影的。

由于将 Higgs 场乘以 $\lambda \in \mathbb{C}^*$ 不会改变（多）稳定性，因此模空间 $\mathcal{M}(X,\mathrm{G})$上存在自然的代数 $\mathbb{C}^*$-作用。于是， $\mathbb{C}^*$ 的任意子群的不动点集构成一个代数子簇。

下面的定理将稳定性概念与调和度量的存在性联系起来。该定理由 Hitchin [16] 在 $=2$ 中针对 n 的情形证明，并由 Simpson [32] 在一般情形下证明。

定理 5.2。设 X 是亏格为 g 的紧黎曼曲面 ≥ 2。X 上的一个 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$-*Higgs* 丛 $(\mathcal{E},\Phi)$是多稳定的，当且仅当在 $\mathcal{E}$ 上存在一个厄米度量 h，使其满足 *Hitchin* 方程 (22)。特别地，$(\mathcal{E},\Phi,h)$ 是一个 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$-调和丛，而 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$-调和丛定义了多稳定 *Higgs* 丛。

对于 G-Higgs 丛在紧黎曼曲面上的情形，也有类似的定理。也就是说，如果 $(\mathcal{P},\Phi)$是一个 G-Higgs 丛，那么它是多稳定的，当且仅当存在一个度量 h 使得 $(\mathcal{P},\Phi,h)$ 是一个 G-调和丛。这一对应通常称为 *Kobayashi–Hitchin*对应。对于具有与作为 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$-Higgs 丛相关的额外结构的 G-Higgs 丛，求解 Hitchin 方程的度量与这些结构相容，详情见 [15] 。

对于黎曼曲面上的 k-循环 Higgs 丛，我们有 Simp- son 的如下结果，它表明紧黎曼曲面上的多稳定 k-循环 Higgs 丛自动是 k-循环调和丛。

命题 *5.3.* [31]设 $(\mathcal{E},\Phi)$ 是一个满足 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{E}_k$ 的 *k*-循环 *Higgs* 丛。那么 $(\mathcal{E},\Phi)$ 稳定，当且仅当对于所有满足 $\mathcal{F}_i\subset\mathcal{E}_i$ 且$\Phi(\mathcal{F})\subset\mathcal{F}\otimes\mathcal{K}$ 的真全纯子丛 $\mathcal{F}=\mathcal{F}_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{F}_k\subset\mathcal{E}$，都有 $deg(\mathcal{F})<0$。此外，当 $(\mathcal{E},\Phi)$ 稳定时，直和分解 $\mathcal{E}_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{E}_k$ 相对于求解 *Hitchin* 方程 *(22)* 的厄米度量 h 是正交的。

表示 $\rho:\ \pi_1(\Sigma)\ \to \mathrm{G}$ 称为约化的，如果将 ρ 与 G 的伴随表示复合后，可分解为不可约表示的直和。表示 $\pi_1(\Sigma)\ \to \mathrm{G}$ 的 G-共轭类的模空间称为特征簇，记作

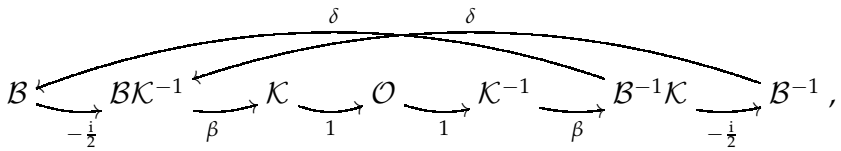
$$\mathcal{X}(\Sigma,\mathrm{G})=\mathrm{Hom}^{\mathrm{red}}(\pi_1(\Sigma),\mathrm{G})/\mathrm{G}\,.$$

Corlette定理[9]（Donaldson [10] 对 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$证明）断言，给定表示 $\rho:\ \pi_1(\Sigma)\ \to \mathrm{G}$，当且仅当 ρ 是约化的，存在一个 ρ-等变调和映射 $h^\rho: X\ \to \mathrm{G/K}$。将 Corlette定理与 Kobayashi–Hitchin对应结合起来，可在 X 上的 G-Higgs 丛模空间、X 上的 G-调和丛模空间以及 G-特征簇之间建立实解析同构。这称为非阿贝尔 *Hodge* 对应。

5.2. **紧黎曼曲面的全纯曲线模空间**。对于紧黎曼曲面 X，将诱导黎曼曲面为 X 的等变交替全纯曲线 (ρ,f) 的同构类集合记为

$$\mathcal{H}(X)\ =\{\ (\rho,\ f)\ \text{等价地，具有诱导复结构}X\}/\mathrm{G}_2'\text{的全纯曲线}\qquad .$$

根据非阿贝尔霍奇对应和定理4.21， $\mathcal{H}(X)$ 与X 上形如以下形式的多稳定 G_2'-Higgs 丛的同构类一一对应

(25)


其中 $\mathcal{B}$ 是全纯线丛， $\beta \in H^0(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{K}^3) \setminus \{0\}$，$1\colon \mathcal{O} \to \mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{K}$ 是恒等映射，而 $-\mathrm{i}\,2\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}\mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{K}$ 由 $-\mathrm{i}\,2(b) = \mathrm{i}_{\frac{1}{2}} \cdot 1(s_0) \times b$定义，其中 $s_0 = 1 \in H^0(\mathcal{O})$。此对应关系赋予 $\mathcal{H}(X)$ 一个复解析结构。

线丛 $\mathcal{B}$ 的次数定义了一个连续映射 $\deg\colon \mathcal{H}(X) \to \mathbb{Z}$。特别地，

$$\mathcal{H}(X) = \coprod_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_d(X),$$

其中 $\mathcal{H}_d(X) = \deg^{-1}(d)$。空间 $\mathcal{H}_d(X)$ 的参数化如下。

定理 5.4. 设 X 是亏格为 $g \geq 2$的紧黎曼曲面。

(1) 若 $g \leq d \leq 6g-6$，则 $\mathcal{H}_d(X)$ 与 X 的 $(6g-6-d)$-对称积上的一个秩为 $(2d-g+1)$ 的全纯向量丛双全纯。*(2)* 若 $0 \leq d \leq g-1$，则 $\mathcal{H}_d(X)$ 与一个丛双全纯，该丛位于 X 的 $2d$-对称积的 $H^1(X,\mathbb{Z}_2)$-覆盖上，其纤维为 $(\mathbb{C}^{5g-5-d} \setminus \{0\})/\pm Id$。*(3)* 若 $d \notin \{0,\dots,6g-6\}$，则 $\mathcal{H}_d(X)$ 为空。

注 5.5. d 的上界直接由以下假设得出： $\beta \in H^0(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{K}^3) \setminus \{0\}$而下界则来自多项式稳定性。为证明前两点，我们将满足多项式稳定性的、形如G_2'-*Higgs* 丛 (25) 的同构类参数化。证明给出了相应对称积上的纤维化的显式描述。

下面的命题描述了相应的 $\mathrm{SL}(7,\mathbb{C})$-Higgs 丛何时是多稳定的。

命题 5.6. 对于形如G_2'-*Higgs* 丛(25)，令 $d = deg(\mathcal{B})$。 则 $0 \leq d \leq 6g-6$，并且，

- 当 $g \leq d \leq 6g-6$ 时，相应的 $\mathrm{SL}(7,\mathbb{C})$-*Higgs* 丛是稳定的，
- 当 $0 < d \leq g-1$ 时，相应的 $\mathrm{SL}(7,\mathbb{C})$-*Higgs* 丛是多稳定的，当且仅当 $\delta \neq 0$；此时它是稳定的，
- 当 $d = 0$时，相关的 $\mathrm{SL}(7,\mathbb{C})$-*Higgs* 丛是多稳定的，当且仅当 $\delta \neq 0$，*</style}*在此情形下它是严格多稳定的。

证明。 回顾一下，$\mathrm{SL}(7,\mathbb{C})$-Higgs 丛是具有循环分解的 6-循环 Higgs 丛

$$(\mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^{-1}) \oplus \mathcal{B}\mathcal{K}^{-1} \oplus \mathcal{K} \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{K}^{-1} \oplus \mathcal{B}^{-1}\mathcal{K}.$$

根据命题 5.3，要检验 $\mathrm{SL}(7,\mathbb{C})$-Higgs 丛的稳定性，只需考虑与循环分解相容的不变子丛。

当 $\delta = 0$, $\mathcal{B}^{-1} \oplus \mathcal{B}^{-1}\mathcal{K}$ 是这样的不变丛时。若 $d < g-1$，则 $\mathcal{B}^{-1} \oplus \mathcal{B}^{-1}\mathcal{K}$ 的次数为正且不变，因此底层Higgs丛不稳定；而当 $d = g-1$时，$\mathcal{B}^{-1} \oplus \mathcal{B}^{-1}\mathcal{K}$ 是一个次数为零的不变子丛，但它没有不变补丛，因此 $\mathrm{SL}(7,\mathbb{C})$-Higgs 丛不是多稳定的。由此，具有 $\delta = 0$ 的 Higgs 丛是多稳定的，当且仅当 $d > g-1$；在此情形下，它们是稳定的。

当 $\delta \neq 0$ 时，唯一的不变子丛是次数为 $-d$ 的核

(26)
$$\begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{i}}{2} \\ \delta \end{pmatrix} : \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^{-1} \to (\mathcal{B}\mathcal{K}^{-1}) \otimes \mathcal{K}\,.$$

因此， 当 $0 < d \leq 6g-6$ 且 $\delta \neq 0$ 时，相应的 $\mathrm{SL}(7,\mathbb{C})$-Higgs 丛是稳定的 .

最后，当 $d = 0, \delta \in H^0(\mathcal{B}^2) \setminus \{0\}$ 定义了一个同构 $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}^{-1}$。记 (26) 的核为 $\mathcal{I}$。由于 $\delta \neq 0, \mathcal{I} \subset \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^{-1}$ 是一个与 $\mathcal{B}$ 同构的正交子丛。因此，取正交补后，我们得到一个新的直和分解 $\mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^{-1} \cong \mathcal{I} \oplus \mathcal{I}^{\perp}$。在此直和分解下，SL(7,ℂ)-Higgs 丛由 $(\mathcal{E}, \Phi) = (\mathcal{I} \oplus \mathcal{E}', 0 \oplus \Phi')$ 给出，其中 $(\mathcal{E}', \Phi')$ 是一个 6-循环Higgs丛

(27)
$$(\mathcal{E}', \Phi') = \mathcal{B}\mathcal{K}^{-1} \xrightarrow[\beta]{} \mathcal{K} \xrightarrow[1]{} \mathcal{O} \xrightarrow[1]{2} \mathcal{K}^{-1} \xrightarrow[\beta]{2} \mathcal{B}^{-1}\mathcal{K} \xrightarrow{3} \mathcal{I}^{\perp}, \quad \overset{\epsilon}{\curvearrowleft}$$

其中 ϵ 是（26）在 $\mathcal{I}^{\perp}$ 上的限制。由于 $\epsilon \neq 0$，循环 Higgs 丛 $(\mathcal{E}', \Phi')$ 是稳定的，因此 $(\mathcal{E}, \Phi)$ 是严格多项式稳定的。□

注记 5.7. 请注意，在 $0 \leq d \leq g-1$ 的情况下，与上述 G_2'-*Higgs* 丛相关联的 $\mathrm{SL}(7,\mathbb{C})$-*Higgs* 丛是多稳定的，当 $\beta = 0$ 时。这类 *Higgs* 丛定义了等变全纯曲线 $f: \tilde{X} \to \mathbf{H}^{4,2}$，它们是全测地的。

定理 5.4 的证明。 将 X 上次数为 n 的线丛集合记为 $\mathrm{Pic}^n(X)$，将 n^{th} 重对称积记为 $\mathrm{Sym}^n(X)$。取除子 $\mathrm{div}(\sigma)$，即可定义 $\mathrm{Sym}^n(X)$ 与以下数对空间之间的双全纯同构：$(\mathcal{N}, [\sigma])$，其中 $\mathcal{N} \in \mathrm{Pic}^n(X)$，且 $[\sigma] \in \mathbf{P}(H^0(\mathcal{N}))$。

首先考虑 $d = \deg(\mathcal{B})$ 满足 $g \leq d \leq 6g-6$ 的情形。证明与 Hitchin 对 $\mathcal{M}(X, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ 中具有非零欧拉数的分支进行参数化的证明类似[16]。根据命题 4.20 和命题 5.6，可得

$$\mathcal{H}_d(X) = \{(\mathcal{B}, \beta, \delta)\} / \sim,$$

其中 $\mathcal{B} \in \mathrm{Pic}^d(\mathrm{X})$、$\beta \in \mathrm{H}^0(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{K}^3) \setminus \{0\}$ 和 $\delta \in \mathrm{H}^0(\mathcal{B}^2)$，且对于 $\lambda \in \mathbb{C}^*$，$(\mathcal{B}, \beta, \delta) \sim (\mathcal{B}, \lambda\beta, \lambda^{-2}\delta)$。定义丛 $\pi: \mathcal{Y} \to \mathrm{Sym}^{6g-6-d}(\mathrm{X})$，使得 $\pi^{-1}(\mathrm{D}) = \mathrm{H}^0(\mathcal{K}^6(-2\mathrm{D}))$。由于 $\mathrm{d} \geq \mathrm{g}$，黎曼–罗赫定理和塞尔对偶表明 $\dim(\pi^{-1}(\mathrm{D})) = 2\mathrm{d} - (\mathrm{g}-1)$。因此，$\mathcal{Y} \to \mathrm{Sym}^{6g-6-d}(\mathrm{X})$ 是一个秩为 $2\mathrm{d} - (\mathrm{g}-1)$ 的向量丛。存在一个定义良好的单射映射

$$\begin{aligned} \Psi: \quad \mathcal{H}_d(X) &\longrightarrow \mathcal{Y} \\ [(\mathcal{B}, \beta, \delta)] &\longmapsto \left(\mathrm{div}(\beta), \beta^2\delta\right) \end{aligned} \quad .$$

此外，该映射 Ψ 是满射。事实上，一个点 $(\mathrm{D}, \theta) \in \mathcal{Y}$ 确定了 $(\mathcal{L}, [\beta])$，其中 $\beta \in \mathbf{P}(\mathrm{H}^0(\mathcal{L}))$，满足 $\mathrm{div}(\beta) = \mathrm{D}$，且 $\theta \in \mathrm{H}^0(\mathcal{K}^6(-2\mathrm{D}))$。考虑 $\mathcal{B} = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{K}^3 \in \mathrm{Pic}^d(\mathrm{X})$，由于 θ 是一个在 2D 上消失的六次全纯微分，它可以写成 $\theta = \beta^2\delta$，其中 $\delta \in \mathrm{H}^0(\mathcal{B}^2)$。结论由全纯双射是双全纯同构得出。

现在假设 $0 \leq d \leq g-1$。根据命题 4.20 和命题 5.6，我们得到

$$\mathcal{H}_d(X) = \{(\mathcal{B}, \beta, \delta)\} / \sim,$$

其中 $\mathcal{B} \in \mathrm{Pic}^d(\mathrm{X})$、$\beta \in \mathrm{H}^0(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{K}^3) \setminus \{0\}$、$\delta \in \mathrm{H}^0(\mathcal{B}^2) \setminus \{0\}$，且 $(\mathcal{B}, \beta, \delta) \sim (\mathcal{B}, \lambda\beta, \lambda^{-2}\delta)$，对于 $\lambda \in \mathbb{C}^*$。注意，$\dim(\mathrm{H}^0(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{K}^3) = 5\mathrm{g} - 5 - \mathrm{d}$。

回顾一下，X 上偶数次数线丛的平方根集合是一个 $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathbb{Z}_2)$-主齐性空间。因此，2d-对称积 $\mathrm{Sym}^{2d}(\mathrm{X})$ 有一个 $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathbb{Z}_2)$-覆盖 $\widehat{\mathrm{Sym}}^{2d}(\mathrm{X})$，其参数化由 $(\mathcal{B}, [\delta])$ 组成的对，其中 $\mathcal{B} \in \mathrm{Pic}^d(\mathrm{X})$，且 $[\delta] \in \mathrm{P}(\mathrm{H}^0(\mathcal{B}^2) \setminus \{0\})$。存在一个定义良好的单射映射

$$\begin{aligned} \Theta: \quad \mathcal{H}_d(X) &\longrightarrow \widehat{\mathrm{Sym}}^{2d}(X) \times H^0(\mathcal{K}^6) \\ [(\mathcal{B}, \beta, \delta)] &\longmapsto \left((\mathcal{B}, [\delta]), \beta^2\delta\right) \end{aligned}$$

令 $\mathcal{W}$ 表示 Θ 的像。向第一个因子的投影定义了一个满射映射 $\pi\colon \mathcal{W} \to \widehat{\ }\mathrm{Sym}^{2d}(X)$。纤维 $\pi^{-1}((\mathcal{B},[\delta]))$ 由 $\mathcal{K}^6$ 的所有非零全纯截面组成，这些截面是截面 $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{K}^3$ 的平方，并且在 $\mathrm{div}(\delta)$ 上消失。换言之，该纤维是由 $\beta \mapsto \beta^2$ 定义的二次映射 $\mathrm{H}^0(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{K}^3)\setminus\{0\} \to \mathrm{H}^0(\mathcal{B}^{-2}\mathcal{K}^6) \subset \mathrm{H}^0(\mathcal{K}^6)$ 的像。特别地，它与 $(\mathbb{C}^{5g-5-d}\setminus\{0\})/\pm\mathrm{Id}$ 双全纯。□

注5.8。 根据注 5.7，当 $0 \leq d \leq g-1$ 且 $\beta = 0$ 时，所得的 *Higgs* 丛也都是多稳定的。根据上述证明，这类 *Higgs* 丛的空间双全纯于 $\widehat{\ }\mathrm{Sym}^{2d}(X)$ 上的一个秩$(5g-5-d)$ 向量丛模去 $\pm$ Id. 的逐纤维作用所得的商空间。

5.3. **改变黎曼曲面**。 Σ 上等变交替全纯曲线的模空间 $\mathcal{H}(\Sigma)$ 定义为

$$\mathcal{H}(\Sigma) = \{(\rho, f) \text{ equivariant alternating holomorphic curve }\}/\sim,$$

其中，若存在 $g \in \mathrm{G}_2'$ 和 $f \in \mathrm{Diff}_0(\Sigma)$，使得 $(\rho_1, f_1) = (\mathrm{Ad}_g \circ \rho_2, g\cdot f_2)$，则 $(f1,\rho_1) \sim (f2,\rho_2)$。

回顾一下，Σ 的*Teichm¨uller* 空间 $\mathcal{T}(\Sigma)$ 是与定向相容的Σ 上的复结构空间除以群 $\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ 所得的商空间。取等变全纯曲线所诱导的黎曼曲面，定义了一个满射映射

$$\begin{aligned}\pi\colon\ \mathcal{H}(\Sigma) &\longrightarrow \mathcal{T}(\Sigma)\,.\\ [(\rho,f)] &\longmapsto [(S,\mathrm{j})]\end{aligned}$$

还要回忆一下，Σ 的映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ 是商群$\mathrm{Mod}(\Sigma) = \mathrm{Diff}^+(\Sigma)/\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$。映射类群自然地作用于 $\mathcal{H}(\Sigma)$ 和 $\mathcal{T}(\Sigma)$，且映射 π 关于这些作用是等变的。

最后，回忆一下，复解析集 是子集$V \subset \mathbb{C}^n$，它在局部上是有限个全纯函数的零点集。在开集$U \subset V$ 上定义的全纯函数，是定义在U 于 $\mathbb{C}^n$中的某个邻域上的全纯函数的限制。这定义了V 上的结构层$\mathcal{O}_V$，我们称环化空间$(A,\mathcal{O}_A)$ 为复解析空间，如果它在局部上同构于一个配备其结构层的解析集。复解析空间之间的环化空间态射称为全纯映射。

定理5.9。 模空间 $\mathcal{H}(\Sigma)$ 具有复解析空间的结构。在此结构下，映射类群$\mathrm{Mod}(\Sigma)$ 全纯地作用，而到 *Teichm¨uller* 空间$\pi\colon \mathcal{H}(\Sigma) \to \mathcal{T}(\Sigma)$ 的投影是满射全纯映射。此外，

$$\mathcal{H}(\Sigma) = \coprod_{d\in\{0,\dots,6g-6\}} \mathcal{H}_d(\Sigma)\,,$$

其中，对于每个 $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$，$\mathcal{H}_d(\Sigma) \cap \pi^{-1}(X)$ 都与定理 5.4中的空间 $\mathcal{H}_d(X)$ 双全纯。

证明。现在回想一下，第 4 节给出了$\mathcal{H}(\Sigma)$中的点与点对 $(\mathrm{X},(\mathcal{E},\Phi))$ 之间的一一对应，其中 $\mathrm{X} \in \mathcal{T}(\Sigma)$，且 $(\mathcal{E},\Phi) \in \mathcal{M}(\Sigma,\mathrm{G}_2^{\mathbb{C}})$ 是一个具有方程 (24) 形式的稳定 $\mathrm{G}_2^{\mathbb{C}}$-Higgs 丛。

考虑空间

$$\mathcal{M}(\Sigma,\mathrm{G}_2^{\mathbb{C}}) = \coprod_{X\in\mathcal{T}(\Sigma)} \mathcal{M}(X,\mathrm{G}_2^{\mathbb{C}})\,,$$

其中，$\mathcal{M}(\mathrm{X},\mathrm{G}_2^{\mathbb{C}})$ 是 X 上多稳定 $\mathrm{G}_2^{\mathbb{C}}$-Higgs 丛的模空间。由于 $\mathrm{G}_2^{\mathbb{C}}$是一个复约化代数群 G，基于 Simpson 的构造 [34]，，已在[2, 定理 7.5] 中证明，$\mathcal{M}(\Sigma,\mathrm{G}_2^{\mathbb{C}})$ 具有一个 $\mathrm{Mod}(\Sigma)$-不变的复解析结构，使得自然投影映射 $\pi\colon \mathcal{M}(\Sigma,\mathrm{G}_2^{\mathbb{C}}) \to \mathcal{T}(\Sigma)$ 是全纯的，并且 $\pi^{-1}(\mathrm{X})$ 与$\mathcal{M}(\mathrm{X},\mathrm{G}_2^{\mathbb{C}})$ 双全纯。

在每个 $\mathcal{M}(X, G_2^{\mathbb{C}})$ 上的 $\mathbb{C}^*$-作用在 $\mathcal{M}(\Sigma, G_2^{\mathbb{C}})$ 上诱导出一个 $\mathbb{C}^*$ 作用，根据 [34]，该作用是解析的。给定一个本原的 6th 单位根 ζ，不动点集 $\mathcal{M}(\Sigma, G_2^{\mathbb{C}})^{\zeta}$ 因此是解析的。为完成证明，注意，具有形式 (24) 是 6-循环 $G_2^{\mathbb{C}}$-Higgs 丛空间中的一个开条件。由于解析空间的开子集仍是解析的，结论得证。□

注记 5.10. *Simpson* 向我们说明了一个证明：投影 $\pi: \mathcal{M}(\Sigma,G_2^{\mathbb{C}}) \to \mathcal{T}(\Sigma)$ 限制到稳定 *Higgs* 丛后是一个平坦族。这特别意味着总空间 $\mathcal{M}(\Sigma,G_2^{\mathbb{C}})$，因此 $\mathcal{H}(\Sigma)$是光滑的。由于证明中的技术细节与本文的主要观点无关，我们决定不在此处给出。我们将在 [8]中明确讨论光滑性。

5.4. **情形** $d = 6g-6$。回忆一下，*Fuchsian*表示 是一个态射 $\rho: \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$，它是 Σ 上双曲结构的单值化（与定向相容）。Fuchsian 表示空间构成特征簇 $\mathcal{X}(\Sigma, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ 的一个连通分支，该分支自然地同一于 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(\Sigma)$。

对于 $G_{\mathbb{C}}$ 这一复半单李群的伴随型，有一个特殊的嵌入 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \to G_{\mathbb{C}}$，称为主嵌入。将主嵌入限制在 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 上，便定义了一个嵌入到 G 的分裂实形式中的映射，其中 G 为 $G_{\mathbb{C}}$的分裂实形式。因此，将 Fuchsian 表示与主嵌入复合可定义表示 $\rho: \pi_1(\Sigma) \to G$。在 [17], Hitchin 利用固定黎曼曲面上的 Higgs 丛，通过全纯微分的一个向量空间来参数化包含这类表示的连通分支 $\mathrm{Hit}(\Sigma, G) \subset \mathcal{X}(\Sigma, G)$。因此，$\mathrm{Hit}(\Sigma, G)$ 被称为 *Hitchin* 分支，其中的表示称为 G-*Hitchin* 表示。

将次数为 6 的全纯微分向量丛记为$p: \mathcal{Q}_6(\Sigma) \to \mathcal{T}(\Sigma)$，即$p^{-1}(X) \cong H^0(\mathcal{K}_X^6)$。对于$d = 6g-6$的情形，我们有以下关于 $\mathcal{H}_{6g-6}(\Sigma)$ 的描述。

定理5.11。空间 $\pi: \mathcal{H}_{6g-6}(\Sigma) \to \mathcal{T}(\Sigma)$ 与向量丛 $p: \mathcal{Q}_6 \to \mathcal{T}(\Sigma)$双全纯。此外，$\mathcal{H}_{6g-6}(\Sigma)$ 中的点对应于交替全纯曲线(ρ, f) 的同构类，其中 ρ 为 *a* G_2'-*Hitchin* 表示。

证明。对于固定的黎曼曲面 X，空间 $\mathcal{H}_{6g-6}(X)$ 由形如 (25) 且满足 $\deg(\mathcal{B}) = 6g-6$ 的 G_2'-Higgs 丛的同构类参数化。此类 Higgs 丛由三元组 $(\mathcal{B}, \beta, \delta)$ 决定，其中 $\mathcal{B} \in \mathrm{Pic}^{6g-6}(X)$、$\beta \in H^0(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{K}^3) \setminus \{0\}$ 以及 $\delta \in H^0(\mathcal{B}^2)$。由于 $\deg(\mathcal{B}) = 6g-6$ 且 $\beta \neq 0$，我们有 $\mathcal{B} = \mathcal{K}^3$，因此 $\delta \in H^0(\mathcal{K}^6)$。此外，根据定理 5.4，固定 $\beta = 1 \in H^0(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{K}^3)$ 即可确定此类 Higgs 丛的同构类。在非阿贝尔霍奇对应下，此类 Higgs 丛定义 G_2'-Hitchin 表示，见[17]。注意到 π 的纤维：$\mathcal{H}_{6g-6}(\Sigma) \to \mathcal{T}(\Sigma)$ 根据定理 5.4 由全纯截面 $\delta \in H^0(\mathcal{K}^6)$ 定义，故证明得证。□

注 *5.12.* 在 [19], *Labourie* 证明，自然映射 $\mathcal{H}_{6g-6}(\Sigma) \to Hit(\Sigma, G_2')$ 是一个微分同胚。维数计数表明，$\mathcal{H}_d(\Sigma) \to \mathcal{X}(\Sigma, G_2')$ 映到 $\mathcal{X}(\Sigma, G_2')$ 的一个连通分支，当且仅当 $d = 6g-6$。在 *§6* 中，我们将讨论一般 d 情形下映射 $\mathcal{H}_d(\Sigma) \to \mathcal{X}(\Sigma, G_2')$ 的局部结构。

5.5. **情形** $d = 0$。回忆一下，元素 $\omega \in H^1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ 对应于表示 $\rho_\omega: \pi_1(\Sigma) \to \mathbb{Z}_2$，也对应于黎曼曲面上的全纯线丛 $\mathcal{I}_\omega$，满足条件 $\mathcal{I}_\omega^2 = \mathcal{O}$。给定 ω 和黎曼曲面 X，一个 ω-扭曲全纯三次微分 是 $\mathcal{K}_X^3 \otimes \mathcal{I}_\omega$ 的一个全纯截面。我们将 Teichm¨uller 空间上 ω-扭曲全纯三次微分构成的向量丛记为 $\mathcal{Q}_3^\omega$。对于情形 $d = 0$，我们对 $\mathcal{H}_0(\Sigma)$ 有如下描述。

引理 5.13. 空间 $\pi: \mathcal{H}_0(\Sigma) \to \mathcal{T}(\Sigma)$ 分解为

$$\mathcal{H}_0(\Sigma) = \coprod_{\omega \in H^1(\Sigma,\mathbb{Z}_2)} \mathcal{H}_0^\omega(\Sigma),$$

其中 $\mathcal{H}_0^\omega(\Sigma)$ 与 $\mathcal{Q}_3^\omega$零截面的补集关于 $\pm\mathrm{Id}$的商空间双全纯 .

证明。对于固定的黎曼曲面 X，空间 $\mathcal{H}_0(X)$ 由形如 (25) 的 G_2'-Higgs 丛的同构类参数化，其中 $\deg(\mathcal{B}) = 0$。此类 Higgs 丛由三元组 $(\mathcal{B}, \beta, \delta)$ 确定，其中 $\mathcal{B} \in \mathrm{Pic}^0(X)$，$\beta \in H^0(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{K}^3) \setminus \{0\}$ 且 $\delta \in H^0(\mathcal{B}^2) \setminus \{0\}$。由于 $\delta \neq 0, \mathcal{B}^2 \cong \mathcal{O}_X$。因此，$H^1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ 参数化了 $\mathcal{B}$ 的选择，由此得到分解为分支 $\mathcal{H}_0^\omega(\Sigma)$。注意，$\beta$ 是一个 ω-扭曲全纯三次微分，因为 $\beta \in H^0(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{K}^3)$ 且 $\mathcal{B}^{-1} \cong \mathcal{B}$。由定理 5.4 的证明可知，固定 $\delta \in H^0(\mathcal{B}^2)$ 后，Higgs 丛的同构类除去 $\beta \mapsto -\beta$ 外均被确定。因此，$\mathcal{H}_0^\omega(\Sigma)$ 双全纯于 $\mathcal{Q}_3^\omega$ 零截面的补集关于 $\pm\mathrm{Id}$ 的商空间。□

现在我们更详细地描述 $\mathcal{H}_0^\omega$（Σ）中的等变全纯曲线。回顾 §3.3，$\mathbf{S}^{3,3}$ 是 $\mathbb{R}^{4,3}$ 中范数为 1 的向量空间，而$\mathbf{P}+$（$\mathbb{R}^{4,3}$）是 $\mathbb{R}^{4,3}$中正定直线的空间。群 G_2' 在$\mathbf{S}^{3,3}$ 和$\mathbf{P}+$（$\mathbb{R}^{4,3}$）上均传递作用，点的稳定子分别同构于 SL（3, $\mathbb{R}$）和非分裂扩张

$$1 \to \mathrm{SL}(3,\mathbb{R}) \to \widehat{\mathrm{SL}}(3,\mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_2 \to 1\,.$$

由于取正交补在$\mathbf{P}+$（$\mathbb{R}^{4,3}$）中的点与$\mathbf{H}^{3,2}$ 在$\mathbf{H}^{4,2}$, 中的全测地子空间之间定义了一个双射，因此 G_2'对一个$\mathbf{H}^{3,2} \subset \mathbf{H}^{4,2}$ 的稳定子同构于 $\widehat{\ }$SL（3, $\mathbb{R}$）。最后，注意给定一个表示 $\hat{\rho}\colon \pi_1$（Σ）$\to \widehat{\ }$SL（3, $\mathbb{R}$），我们得到

- 一个诱导的 $\mathbb{Z}_2$-表示 $\rho_\omega = \varphi \circ \hat{\rho}\colon \pi_1(\Sigma) \to \mathbb{Z}_2$，以及
- 一个 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$-表示 $\hat{\rho}\colon \ker(\rho_\omega) \to \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$。

定理 5.14。对于 $\omega \in H^1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$，等变交替全纯曲线 $[\rho, f]$ 的同构类属于 $\mathcal{H}_0^\omega(\Sigma)$ 当且仅当 $f(\widetilde{\Sigma})$ 包含在$\mathbf{H}^{3,2}$ 内部$\mathbf{H}^{4,2}$ 的唯一一个全测地副本中，并且

$$\rho = \iota \circ \hat{\rho} : \pi_1(\Sigma) \to \widehat{\mathrm{SL}}(3,\mathbb{R}) \to G_2'\,,$$

其中 $\iota\colon \widehat{\ }SL(3,\mathbb{R}) \to G_2'$ 由包含 $f(\widetilde{\Sigma})$ 的唯一 $H^{3,2}$ 的稳定子给出，而 $\hat{\rho}\colon \pi_1(\Sigma) \to \widehat{\ }SL(3,\mathbb{R})$ 具有如下性质：诱导的 $\mathbb{Z}_2$-表示为 ρ_ω，且相关联的 $SL(3,\mathbb{R})$ 表示 $\hat{\rho}\colon ker(\rho_\omega) \to SL(3,\mathbb{R})$ 是一个非 *Fuchsian* 的 $SL(3,\mathbb{R})$-*Hitchin* 表示。

注记 5.15. 注意，等变全纯曲线 $[\rho, f]$ 位于 $\mathbf{H}^{3,2} \subset \mathbf{H}^{4,2}$ 的一个全测地副本中，当且仅当该表示在 $\mathbb{R}^{4,3}$ 中固定一条正定直线；这等价于 ρ经由一条正定直线的稳定子分解。

证明。首先设 $[\rho, \mathrm{f}] \in \mathcal{H}_0^\omega$。令 X 为诱导的黎曼曲面，$\mathcal{I}$ 为 X 上与 ω 相关联的全纯线丛。与命题 5.6 的证明相同，与 $[\rho, \mathrm{f}]$ 相关联的 SL(7, $\mathbb{C}$)-Higgs 丛是严格多项式稳定的，且同构于 $(\mathcal{E}, \Phi) \cong (\mathcal{I} \oplus \mathcal{E}', 0 \oplus \Phi')$，其中 $\mathcal{I} \cong \mathcal{B}$ 是由 (26) 的核定义的 $\mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^{-1}$ 的正交子丛，而 $(\mathcal{E}', \Phi')$ 由 (27) 给出。注意，$(\mathcal{E}', \Phi')$ 定义了一个 O(3, 3)-Higgs 丛，而 $(\mathcal{E}, \Phi)$ 定义了一个 S(O(1) $\times$O(3, 3))-Higgs 丛。这意味着经由非阿贝尔霍奇对应得到的 $\mathrm{SO}_0(4,3)$ 表示 ρ 在 $\mathbb{R}^{4,3}$ 中固定一条正定直线。因此，f 的像位于与正定直线丛 $\mathcal{I}$ 相关联的 $\mathrm{H}^{3,2} \subset \mathrm{H}^{4,2}$ 全测地副本中，并且 ρ 经由 $\mathbb{R}^{4,3}$ 中一条正定直线的稳定子分解。

由于 $\mathcal{B} \cong \mathcal{I}$，表示 $\mathbb{Z}_2$-因子由 ρ 给出，它是由 $\omega \in H^1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ 确定的$\mathcal{B}$。由于 $\mathcal{I}$和 $\mathcal{I}^\perp$ 都同构于 $\mathcal{B}$，因此来自 $((\mathcal{E}', \Phi')$ 的 Higgs 丛27) 可以写成

$$(\mathcal{E}', \Phi') = \mathcal{I}\mathcal{K}^{-1} \xrightarrow[\beta]{} \mathcal{K} \xrightarrow[1]{} \mathcal{O} \xrightarrow[1]{2} \mathcal{K}^{-1} \xrightarrow[\beta]{3} \mathcal{I}\mathcal{K} \xrightarrow[1]{} \mathcal{I}\,, \qquad \text{(1 over the whole arc)}\ .$$

首先考虑情形 $\mathcal{I}=\mathcal{O}$。在这种情形下， ρ_ω 是平凡表示，而 $\hat{}\rho$ 是一个 SL$(3,\mathbb{R})$-表示。考虑以下单射全纯丛映射

$$\begin{aligned}\theta_\pm:\ \mathcal{K}\oplus\mathcal{O}\oplus\mathcal{K}^{-1} &\longrightarrow \mathcal{E}' \\ (x,y,z) &\longmapsto (\pm z,x,y,z,\pm x,\pm y)\end{aligned}\quad .$$

$\theta_\pm$的像定义了全纯子丛 $\mathcal{F}_\pm\subset\mathcal{E}'$，使得 $\mathcal{E}'=\mathcal{F}_+\oplus\mathcal{F}_-$。丛 $\mathcal{F}_\pm$ 均为 Φ'-不变的，因为

$$\begin{aligned}\Phi(\theta_\pm(x,y,z))=\Phi(\pm z,x,y,z,\pm x,\pm y)&=(\pm(1),\pm\beta(z),1(x),1(y),\beta(z),\pm 1(x))\\&=\theta_\pm(\phi_\pm(x,y,z))\,,\end{aligned}$$

其中

$$\phi_\pm=\begin{pmatrix}0&0&\pm\beta\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\in \mathrm{End}(\mathcal{K}\oplus\mathcal{O}\oplus\mathcal{K}^{-1})\otimes\mathcal{K}.$$

此外，$(\mathcal{F}_\pm,\ \phi_\pm)$ 是 Hitchin 分支中由三次SL$(3,\ \mathbb{R})$-Higgs 丛，$\widehat{\ }$其对应的微分为 $\pm\beta$，见[17]。因此，当 $\omega=0$ 时，表示 $\hat{}\rho:\ \pi_1(\Sigma)\to$ SL$(3,\mathbb{R})$-可分解为一个 SL$(3,\mathbb{R})$-Hitchin 表示。由于假设 β 非零，$\hat{}\rho$ 不是 Fuchsian。

当 $\omega\neq 0$ 时， $\mathbb{Z}_2$-表示 ρ_ω 是非平凡的。然而，将 Higgs 丛拉回到连通二重覆盖 $X_\omega\to X$ 后，定义了 $\mathcal{H}^0_0(X_\omega)$ 中的一个点。因此，$\hat{}\rho$ 在 ρ_ω 的核上的限制是一个非 Fuchsian 的 SL$(3,\mathbb{R})$-Hitchin 表示。

$\widetilde{\ }$反过来，设 $[\rho,\mathrm{f}\,]$是一个等变全纯曲线，且 $\mathrm{f}(\Sigma)$ 包含于一个全测地子空间 $\mathrm{H}^{3,2}\subset\mathrm{H}^{4,2}$中。设 $\widetilde{\ }\mathrm{W}$ 为 $\mathrm{H}^{3,2}$ 在 $\mathrm{H}^{4,2}$中的法丛。若记 $\widetilde{\ }\mathrm{M}$ 为 $\mathrm{T}\widetilde{\Sigma}\oplus\mathrm{N}\widetilde{\Sigma}$ 在 $\mathrm{f}^*\mathrm{TH}^{3,2}$,中的正交补，则 $\mathrm{f}^*\widetilde{\ }\mathrm{W}$ 和 $\widetilde{\ }\mathrm{M}$ 分别下降为 Σ上的实线丛 W 和 M。因此，$\mathrm{B}\Sigma=\mathrm{W}\oplus\mathrm{M}$ 是拓扑平凡的，故其次数为 0。因此，$[\rho,\mathrm{f}]$ 在 $\mathcal{H}_0$中定义了一个点。□

5.6. 与仿射球面的联系。SL$(3,\mathbb{R})$ 中 Hitchin 表示的理论与 $\mathbb{R}^3$中的仿射球面理论密切相关。具体而言，Loftin [23] 和 Labourie [20] 证明，对于给定的 Hitchin 表示 $\rho:\ \pi_1(\Sigma)\to$ SL$(3,\mathbb{R})$，存在唯一的 ρ-等变仿射球面 $\mathrm{u}^\rho:\widetilde{\Sigma}\to\mathbb{R}^3$。这样的仿射球面定义了 Σ 上的一个度量 g（称为布拉施克度量）和一个全纯三次微分 $\mathrm{q}_3\in\mathrm{H}^0(\mathrm{X},\mathcal{K}^3)$，称为 Pick形式，其中 X 是与 g 相关联的黎曼曲面。这定义了一个从 Hit(Σ, SL$(3,\mathbb{R})$) 到 $\mathcal{Q}^0_3\to\mathcal{T}(\Sigma)$ 的映射，他们证明该映射是一个同胚。

定理5.14 意味着，分支 $\mathcal{H}^0_0(\Sigma)$ 由交错等变全纯曲线$[\rho,f]$ 组成，这些曲线$[\rho,$ 位于 $\mathbf{H}^{3,2}$ 中的 $\mathbf{H}^{4,2}$ 的一个全测地副本内，并且其底层表示来自一个非 Fuchsian Hitchin 表示 $\hat{}\rho:\ \pi_1(\Sigma)\to$ SL$(3,\mathbb{R})$。下一定理描述了全纯曲线 f 与仿射球面 $u^{\hat{\rho}}$之间的联系。

定理 5.16。 设 (ρ,f) 是一个交错等变全纯曲线，其等价类属于$\mathcal{H}^0_0$，z 是 $\mathbf{S}^{3,3}$ 中由 ρ固定的一个点， $\mathcal{D}^+_z$ 是第 3.3 小节中定义的全纯线性3平面，并记 $\hat{}\rho$ 为对应的、取值于 $Fix^{G'_2}(x)\cong$SL$(3,\mathbb{R})$中的 *Hitchin* 表示。那么映射

$$\begin{aligned}u_z:\ \widetilde{\Sigma}&\longrightarrow \mathcal{D}^+_z\\ x&\longmapsto f(x)+z\cdot f(x)\end{aligned}$$

是一个 $\hat{}\rho$-等变仿射球面。

证明。 由于 f 取值于 $z^\perp$，容易验证 u_z 也如此。此外，我们有

$$\psi_z(u_z(x))=z\cdot u_z(x)=z\cdot f(x)+z^2\cdot f(x)=u_z(x)\,,$$

因此，u_z 取值于 $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-\psi_z)=\mathcal{D}^+_z$。

为了说明 u_z 是一个仿射球面，注意到 u_z 是通过考虑 $\mathcal{O}$在 $\mathcal{F}_+$ 中的截面 1 得到的；根据 Baraglia [4, 第 3.4 节，2] □

注 5.17. 注意，表示 ρ 固定了 $\mathbf{S}^{3,3}$ 中的两个点 z 和 $-z$。取 $-z$ 而非 z，等价于考虑映射 $(f, -z\cdot f)$，其取值于 $\mathcal{D}_z^-$。其底层表示是$\hat{}\rho$ 的逆变表示。

5.7. **全测地曲面**。 在交替全纯曲线与 G_2'-调和丛（形式如方程（25））之间的对应关系中，截面 β 是该全纯曲线第二基本形式的$(1,0)$-部分。由于交替全纯曲线被假定为非全测地的，β 非零。

在等变情形下，当$0 \leq \deg(\mathcal{B}) \leq g-1$时，Higgs 丛的稳定性意味着截面 δ 非零，见命题 5.6。另一方面，令 $\beta = 0$，当且仅当 $0 \leq \deg(\mathcal{B}) \leq g-1$时，便得到多稳定Higgs丛。这类Higgs丛由下式给出

$$\mathcal{K} \xrightarrow[1]{} \mathcal{O} \xrightarrow[1]{} \mathcal{K}^{-1} \;\oplus\; \mathcal{B} \underset{-\frac{i}{2}}{\rightleftarrows} \mathcal{K}^{-1}\mathcal{B} \overset{\delta}{\underset{\delta}{\rightleftarrows}} \mathcal{K}\mathcal{B}^{-1} \xrightarrow[-\frac{i}{2}]{} \mathcal{B}^{-1}\,,$$

它们对应于第二基本形式为零的等变全纯曲线(ρ, f)，因此f的像是 $\mathbf{H}^{4,2}$中的一个全测地全纯圆盘。这样的全纯圆盘是 $\mathbf{H}^{4,2}$ 与一个 $\Im(\mathbb{H}')$的副本的交集，其中 $\mathbb{H}'$ 是 $\mathbb{O}'$的一个分裂四元数子代数。特别地，ρ 可经由 $\mathbb{H}'$ 的稳定子分解，该稳定子由引理 $\mathsf{SO}(2,2)$ 知同构于 2.5。

由此得到的 $\mathsf{SO}(2,2)$-表示可以明确描述。选取典范丛的一个平方根 $\mathcal{K}^{\frac{1}{2}}$，并令 $(\mathcal{F}_1, \varphi_1)$ 和 $(\mathcal{F}_2, \varphi_2)$ 为以下 $\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$ Higgs 丛

$$(\mathcal{F}_1, \varphi_1) := \mathcal{K}^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[-\frac{i}{2}]{} \mathcal{K}^{-\frac{1}{2}}\,,\quad (\mathcal{E}_2, \varphi_2) := \mathcal{K}^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}^{-1} \xrightarrow[\delta]{} \mathcal{K}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{B}\,.$$

$(\mathcal{E}_1, \Phi_1)$ 是对应于 Fuchsian 表示 ρ_1 并使 X一致化的 Higgs 丛，而第二个对应于一个表示 $\rho_2 : \pi_1\Sigma \to \mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$，其欧拉类为 $g-1-d$。此外，我们有

$$\mathcal{B} \underset{-\frac{i}{2}}{\rightleftarrows} \mathcal{K}^{-1}\mathcal{B} \overset{\delta}{\underset{\delta}{\rightleftarrows}} \mathcal{K}\mathcal{B}^{-1} \xrightarrow[-\frac{i}{2}]{} \mathcal{B}^{-1} = (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \varphi_1 \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \varphi_2)\,.$$

这意味着，在由标准表示的张量积得到的 2-to-1 覆盖 $\mathsf{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathsf{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathsf{SO}_0(2,2)$ 下，我们有 $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$。

最后，我们描述这些全测地全纯曲线如何作为交替曲线的极限出现。给定一个形如（25）且满足 $0 \leq \deg(\mathcal{B}) \leq g-1$ 的 G_2'-Higgs 丛 $(\mathcal{E}, \Phi)$，考虑由 $[\mathcal{E}, t\Phi]$ 给出的 $\mathbb{C}^*$-族，其中 $t \in \mathbb{C}^*$。施加规范变换 $g_t = \mathrm{diag}(1, t^{-1}, t, 1, t^{-1}, t, 1)$ 后，我们看到$(\mathcal{E}, t\Phi)$ 等价于

$$\mathcal{B} \underset{-\frac{i}{2}}{\rightleftarrows} \mathcal{B}\mathcal{K}^{-1} \xrightarrow[t^3\beta]{} \mathcal{K} \xrightarrow[1]{} \mathcal{O} \xrightarrow[1]{} \mathcal{K}^{-1} \xrightarrow[t^3\beta]{} \mathcal{B}^{-1}\mathcal{K} \xrightarrow[-\frac{i}{2}]{} \mathcal{B}^{-1}\,.$$

特别地，$[\mathcal{E}, t\Phi]$ 对应于等变交替全纯曲线 $[\rho_t, f_t] \in \mathcal{H}_d(\Sigma)$，其中 $0 \leq d \leq g-1$。令t 趋于 0，取极限可得，$[\rho_t, f_t]$ 收敛到一条等变全测地全纯曲线。

回顾定理 5.4，对于 $0 \leq d \leq g-1$，空间 $\mathcal{H}_d(X)$ 双全纯于一个秩为 $5g-5-d$ 向量丛的零截面补集对±Id作用取商所得的空间。根据以上讨论可知，全测地全纯曲线对应于该向量丛的零截面。特别地，

$$\mathcal{H}_d(\Sigma) \subset \widehat{\mathcal{H}}_d(\Sigma) \to \mathcal{T}(\Sigma)\,, \tag{28}$$

其中，$\widehat{\mathcal{H}}_d(\Sigma)$ 上的点 $\in \mathcal{T}X\,\Sigma)$ 所对应的纤维，是秩为 5 的向量丛除以 $\pm\mathrm{Id}$ 后所得的商。根据构造，$\widehat{\mathcal{H}}_d(\Sigma) \setminus \mathcal{H}_d(\Sigma)$ 是该向量丛的零截面，对应于全测地的等变全纯曲线。

6. 循环曲面与无穷小刚性

本节中，我们引入循环曲面的概念（定义 6.4），这比 Labourie 在 [19]中引入的概念稍广。循环曲面是齐性空间 **X** 中的一类特殊全纯曲线，我们称该空间为循环空间（定义 6.2）。循环空间尤其纤维化于 $\mathbf{H}^{4,2}$ 以及黎曼对称空间 $\mathbf{Sym}(G_2')$之上。循环曲面的一个重要性质是，它们投影到 $\mathbf{H}^{4,2}$ 后是（可能分支的）交错全纯曲线，投影到 $\mathbf{Sym}(G_2')$ 后则是（可能分支的）极小曲面，其底层调和丛具有循环性。

为确保两种情形下的浸入均无分支，我们将范围限制在 α_1-循环曲面这一类中。我们在定理 α_1 6.7 中证明，-循环曲面源自唯一一条交替全纯曲线的 Frenet 提升。随后，我们利用这一解释，在定理 *6.8* 中证明，等变交替全纯曲线 $[\rho, f]$ 具有无穷小刚性。6.8。

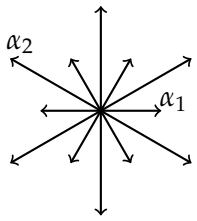
6.1. **李理论**。取 $G_2^{\mathbb{C}}$ 中的极大环面 $T^{\mathbb{C}}$，并将其李代数记为 $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$。令 $\Delta \subset (\mathfrak{t}^{\mathbb{C}})^*$ 为根的集合；对于任意 $\gamma \in \Delta$，将相应的根空间记为 $\mathfrak{g}_\gamma$。于是根空间分解为

$$\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\gamma\in\Delta} \mathfrak{g}_\gamma\,.$$

记作 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$，则对于任意 γ 和 $\Delta \cup \{0\}$ 中的 δ，有 $[\mathfrak{g}_\gamma, \mathfrak{g}_\delta] \subset \mathfrak{g}_{\gamma+\delta}$。特别地，若 $\gamma+\delta$ 不属于 $\Delta \cup \{0\}$，则有 $[\mathfrak{g}_\gamma, \mathfrak{g}_\delta] = 0$。

选取正根的一个子集 $\Delta^+ \subset \Delta$，定义两个单根 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$，其中 α_1 是短根。具体而言，我们有

$$\Delta^+ = \left\{\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \alpha_1+\alpha_2\,,\ 2\alpha_1+\alpha_2\,,\ 3\alpha_1+\alpha_2\,,\ 3\alpha_1+2\alpha_2\right\}.$$



任意根 $\gamma \in \Delta^+$ 都可以唯一地写成 $\gamma = n\alpha_1 + m\alpha_2$，其中 n、$m \in \mathbb{N}$；我们将 γ 的长度定义为

$$\ell(\gamma) := n+m\,.$$

最高根为 $\eta := 3\alpha_1+2\alpha_2$，其长度为 5。对于任意 $k \in \mathbb{Z}_6$ 集合

$$\mathfrak{g}_k = \begin{cases} \bigoplus\limits_{-\ell(\gamma)=k} \mathfrak{g}_\gamma & \text{if } k \neq 0 \\ \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} & \text{if } k = 0 \end{cases}.$$

于是将 循环分次 定义为 $\mathbb{Z}_6$-分次

$$\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_6} \mathfrak{g}_k \,. \tag{29}$$

特别地，我们有 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_{-\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\eta}$。

引理 6.1. 存在一个嘉当对合 θ 在 $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$ 上，使得 $\rho(\mathfrak{g}_k) = \mathfrak{g}_{-k}$ 对任意 $k \in \mathbb{Z}_6$成立。

Proof. 通过选取一个 Chevalley 基即可证明（更多细节见 [19] ）. □

固定这样一个嘉当对合，记 K 为 $G_2^{\mathbb{C}}$的相应极大紧子群，记 $T = T^{\mathbb{C}} \cap K$ 为 $T^{\mathbb{C}}$的极大紧子群。特别地，K 是 $G_2^{\mathbb{C}}$的紧实形式，而 $\mathbf{Sym}(G_2^{\mathbb{C}}) := G_2^{\mathbb{C}}/K$ 是 $G_2^{\mathbb{C}}$的黎曼对称空间。

将 T 的李代数记为 $\mathfrak{t}$。循环分次（29）给出一个 Ad(T)-不变的直和分解

$$\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_6\setminus\{0\}} \mathfrak{g}_k \,. \tag{30}$$

我们将 $\mathfrak{t}^{\perp}$ 记为直和 $i\mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_6\setminus\{0\}} \mathfrak{g}_k$。

定义 $\mathbb{C}$-线性对合 σ，其作用于 $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$的方式如下：

$$\sigma|_{\mathfrak{g}_k} = (-1)^k \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}_k} \,,\ k \in \mathbb{Z}_6 \,.$$

由于分次是偶的，很容易验证 σ 是 $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$的一个自同构。此外， σ 与 θ 交换，而相应的实形式 $\lambda := \sigma \circ \theta$ 的不动点是 G_2'的李代数。

可以更明确地描述上述对象。考虑式（7）中的 $\Im(\mathbb{O}') \otimes \mathbb{C}$ 的基（$f_{-3}, f_{-2}, ..., f_3$），并令 $F_k = \mathbb{C}\{f_k\}$ 张成，其中每个 k 对应一个空间。复二次型 q 将 F_a^*与 F_{-a} 等同，而映射 $(x, y) \mapsto \frac{-1}{\sqrt{2}} x \times y$ 将 F_{-2} 与 $F_{-3} \otimes F_1$等同。保持直和分解 $F_{-3} \oplus F_{-2} \oplus \cdots \oplus F_3$ 的 $G_2^{\mathbb{C}}$子群是一个极大环面 $T^{\mathbb{C}}$。特别地，向量空间 $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_6\setminus\{0\}} \mathfrak{g}_k$ 可视为 $G_2^{\mathbb{C}}/T^{\mathbb{C}}$ 在点 $eT^{\mathbb{C}}$ 处的切空间，因而嵌入于 $\bigoplus_{k\neq l} \mathrm{Hom}(F_k, F_l)$。此外，任一根空间 $\mathfrak{g}_\gamma$ 都嵌入于 $\bigoplus_{l=-3}^{3} \mathrm{Hom}(L_k, L_{k+l})$，其中 $l = \ell(\gamma)$。因此，我们可以将任意元素 $(a, b, d) \in \mathfrak{g}_{-\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_\eta = \mathfrak{g}_1$ 表示为

$$F_{-3} \xrightarrow[-\frac{i}{2}a]{} 3F_{-2} \xrightarrow[b]{} 3F_{-1} \xrightarrow[a]{} F_0 \xrightarrow[a]{} F_1 \xrightarrow[b]{} F_2 \xrightarrow[-\frac{i}{2}a]{} F_3 \,, \tag{31}$$

（c 弧：$F_{-3} \to F_2$ 与 $3F_{-2} \to F_3$）

where，如（25）中所示，映射 $-i\,2\,a : F_{-3} \to F_{-2}$由 $-i\,2a(f_{-3}) = -i\,2a(f_0) \times f_{-3}$定义。

6.2. **循环曲面**。 我们继续使用上一节中的记号。

定义 6.2。 X 这一循环空间 是齐性空间 $G_2^{\mathbb{C}}/T$。

自然投影 $G_2^{\mathbb{C}} \to X$ 是一个主 T-丛。对于 T 在向量空间 V上的任意线性作用，我们将 $[V] = G_2^{\mathbb{C}} \times_T V$ 记为 X 上的伴随向量丛。

令$D \in \Omega^1(G_2^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}})$ 为 $G_2^{\mathbb{C}}$ 上的毛雷尔–嘉当形式。于是，Maurer-Cartan 方程为

$$dD + \frac{1}{2}[D \wedge D] = 0 \,. \tag{32}$$

利用 Ad（T）-不变直和分解（30），我们可以将 D 与每个因子上的投影复合。到 $\mathfrak{t}$ 上的投影给出了主 T- 丛 $G_2^{\mathbb{C}}$ 上的一个联络。1- 形式 $\omega := D - A$ 在 $G_2^{\mathbb{C}} \to X$ 的垂直切空间上为零，因而下降为一个处处

不为零的1-形式，定义在$\mathbf{X}$上且取值于伴随丛$[\mathfrak{t}^{\perp}]$中。特别地，ω将$\mathbf{TX}$与$[\mathfrak{t}^{\perp}]$识别。由于直和分解$\mathfrak{t}^{\perp}=\mathrm{i}\mathfrak{t}\oplus\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_6\setminus\{0\}}\mathfrak{g}_k$是T-不变的，我们得到

$$\mathbf{TX}=[\mathrm{i}\mathfrak{t}]\oplus\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_6\setminus\{0\}}[\mathfrak{g}_k]\,. \tag{33}$$

θ、σ和λ的对合$\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$等变地延拓为$\mathbf{TX}$上的对合，仍用相同的符号表示。由于$\lambda$是$\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$的自同构，$\mathbf{X}$中由$\lambda$的不动点给出的分布是可积的，其叶对应于G的子群$\mathrm{G}_2^{\mathbb{C}}$的轨道，该子群与$\mathrm{G}_2'$共轭。

对于任意$k\in\mathbb{Z}_6\setminus\{0\}$，我们将$\omega_k\in\Omega^1(\mathbf{X},\ [\mathfrak{g}_k])$记为$\omega$在$[\mathfrak{g}_k]$上的投影。同样，对于任意根$\gamma$，我们分别将$\omega_{\mathrm{i}\mathfrak{t}}$和$\omega_\gamma$记为$\omega$在$[\mathrm{i}\mathfrak{t}]$和$[\mathfrak{g}_\gamma]$上的投影。将Maurer-Cartan方程投影到$[\mathfrak{t}]$和$[\mathfrak{g}_k]$上，对于$k\neq 0$，得到

$$\begin{aligned} F_A+\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i+j=0}[\omega_i\wedge\omega_j]^{\mathfrak{t}}&=0\\ d^A\omega_k+\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i+j=k}[\omega_i\wedge\omega_j]&=0\end{aligned} \tag{34}$$

其中$[.,.]^{\mathfrak{t}}$表示将李括号投影到平行于$\mathfrak{t}^{\perp}$的$\mathfrak{t}$上。

定义 6.3。循环分布$\mathcal{D}\subset\mathbf{TX}$是$\lambda$与$[\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_1]$的不动点集的交集。

T-等变自同态

$$\begin{aligned}\mathcal{J}:\ \mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_1&\longrightarrow\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_1\\ (x,y)&\longmapsto(-\mathrm{i}x,\mathrm{i}y)\end{aligned}$$

与λ对易，且平方等于$-\mathrm{Id}$。因此，它在$\mathcal{D}$上诱导出一个近复结构$\mathcal{J}$。

给定一个光滑定向曲面S，若保向光滑映射$f\colon S\to\mathbf{X}$与循环分布相切，且$df(\mathrm{T}S)$是$\mathcal{J}$-不变的，则称其为$\mathbf{X}$中的全纯曲线$\mathbf{X}$。给定$k\in\mathbb{Z}_6\setminus\{0\}$，记$df_k$为取值于$f^*[\mathfrak{g}_k]$的1-形式$\omega_k(df)$。类似地，对于任意根$\gamma\in\Delta$，记$df_\gamma$为形式$\omega_\gamma(df)$。

定义 6.4。设$f\colon S\to\mathbf{X}$是一条全纯曲线，

- f是循环曲面，当且仅当$df^{-\alpha_1}$和$df^{-\alpha_2}$不恒等于零，
- f是α_1-循环曲面，当且仅当它是循环曲面且$df^{-\alpha_1}$处处不为零。

注 6.5。在[19], <style id='6}一个循环曲面被假设对于所有单根，其$df^{-\alpha_i}$处处不为零α_i。当考察在曲面群表示下等变的循环曲面时，这一假设迫使该表示属于*Hitchin*分支。坚持仅对一个单根要求df^{α_i}处处不为零，则允许更大的灵活性，同时仍然足以保证定理6.8中的无穷小刚性。这一定义的放宽也出现在[6]中。在[8], 中，我们考虑了一个更一般的设置，该设置保证无穷小刚性。

6.3. **循环曲面与循环调和丛**。现在我们描述循环曲面如何成为G_2'-循环调和丛的微分几何解释。给定一个循环曲面$f\colon S\to\mathbf{X}$，记$\nabla=f^*A$为$f^*\mathbf{TX}$上的拉回联络。

引理 6.6. 设$f\colon S\to\mathbf{X}$是一个循环曲面，则

(1) S上存在唯一的复结构j，使得对于$\mathfrak{g}_1$中的任意根空间$\mathfrak{g}_\gamma$，微分形式df_γ都具有$(1,0)$型。特别地，$\phi:=df_1$具有$(1,0)$型。(2) 将f与$\mathrm{G}_2^{\mathbb{C}}$中的一个元素复合之后，映射$f$的取值落在一个$\mathrm{G}_2'$-轨道上。(3) *Maurer-Cartan*方程等价于

$$\begin{cases} F_\nabla-[\phi\wedge\rho(\phi)] &= 0\\ \overline{\partial}_\nabla\phi=0 & \end{cases},$$

其中$\overline{\partial}_\nabla$是$d^\nabla$的$(0,1)$部分。

证明。 对于第一项，f 在离散集D之外是一个浸入。因此，在$S \setminus D$ 上存在唯一的复结构 j'，使得 $df \circ j = \mathcal{J} \circ df$。复结构 j'可以唯一地延拓到S上。结论随即由以下事实得出： $\mathcal{J}$是 $[\mathfrak{g}_1] = [\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\beta} \oplus \mathfrak{g}_{\eta}]$ 上的 i 乘法，因此在每个 $[\mathfrak{g}_\gamma]$ 上的投影都是全纯的。

第二项源于以下事实： $\mathcal{D}$ 与由 λ 固定的分布相切，该分布的叶是与 G_2'共轭的群的轨道。

对于第三项，注意到方程（34）拉回后的非零项仅出现在次数 0、 ± 1、 ± 2 中。利用 $df_{-1} = -\rho(df_1)$，可知次数为 -1 和 -2 的方程分别等价于次数为 1 和 2 的方程。次数为 0、1、2 的方程分别为

$$F_\nabla - [\phi \wedge \rho(\phi)] = 0\,, \qquad d_\nabla \phi = 0 \qquad \text{and} \qquad \phi \wedge \phi = 0\ .$$

由于 ϕ 是一个$(1,0)$-形式， $\phi \wedge \phi$ 自动满足，并且$d_\nabla \phi = \bar{\partial}_\nabla \phi$。 □

记 $\mathbf{Sym}(\mathrm{G}_2^{\mathbb{C}})$ 和 $\mathbf{Sym}(\mathrm{G}_2')$ 分别为 $\mathrm{G}_2^{\mathbb{C}}$ 和 G_2' 的（黎曼）对称空间。我们将 $\mathbf{Sym}(\mathrm{G}_2')$ 视为 $\mathbf{Sym}(\mathrm{G}_2^{\mathbb{C}})$的全测地子空间。记 $\pi : \mathbf{X} \to \mathbf{Sym}(\mathrm{G}_2^{\mathbb{C}})$为自然投影。注意，循环曲面在 S 上诱导出一个黎曼曲面结构$X = (S, \mathrm{j})$。

定理 6.7。 给定一个循环曲面 $f : S \to \mathbf{X}$，映射 $\pi \circ f : S \to \mathbf{Sym}(\mathrm{G}_2^{\mathbb{C}})$ 是一个分支极小浸入，其像包含于 $\mathbf{Sym}(\mathrm{G}_2')$。此外，诱导黎曼曲面上的相应 G_2'-调和丛具有如下形式 (24) 其中 α 且 β 非零。

反过来，给定黎曼曲面 X 上一个形式为 G_2'-循环调和丛 (24)，其中 α 和 β 非零。设 ρ 为该平坦联络的单值化表示。则循环调和度量定义了一个共形的 ρ-等变调和映射 $h^\rho : \widetilde{X} \to \mathbf{Sym}(\mathrm{G}_2')$，它提升为 $\mathbf{X}$ 中一个 ρ-等变循环曲面。

证明。 为证明 $\pi \circ f$ 是一个分支极小浸入，注意，当 $\mathbf{X}$ 配备由 Killing 型诱导的伪黎曼度量时，映射 $\pi : \mathbf{X} \to \mathbf{Sym}(\mathrm{G}_2')$ 是一个伪黎曼浸没，其水平分布为

$$\mathrm{H}\mathbf{X} = \{x \in \mathrm{T}\mathbf{X}\,,\ \theta(x) = -x\}\,.$$

特别地，水平分布 $\mathrm{H}\mathbf{X}$ 可自然地识别为 $\pi^*\mathrm{T}\mathbf{Sym}(\mathrm{G}_2^{\mathbb{C}})$。此外，这一识别也将 A 在 $\mathrm{H}\mathbf{X}$ 上的限制识别为 π 对 $\mathbf{Sym}(\mathrm{G}_2')$ 上 Levi-Civita 联络的拉回（使用 Kozsul 公式即可轻易验证这一点）。

由于循环分布 $\mathcal{D}$ 是 $\mathrm{H}\mathbf{X}$的一个子分布，因此 (1,0)-分量可识别为$\pi \circ f$ 的微分的 $\phi = df_1$，根据引理 (3) 的第 6.6 条，它是全纯的。因此$\pi \circ f$ 是调和的。

为证明 $\pi \circ f$ 是极小浸入，我们计算其 Hopf 微分。但由于 f 与水平分布相切， $\pi \circ f$ 的 Hopf 微分等于f的 Hopf 微分；后者为 0，因为df_1 与向量丛 $[\mathfrak{g}_1]$ 相切，而该向量丛相对于 Killing 型是全纯线性的。因此， $\pi \circ f$ 是弱共形且调和的，故为分支极小浸入。

映射 事实上， $\pi \circ f$ 属于$\mathbf{Sym}(\mathrm{G}_2')$ 是引理 6.6中第（2）项的直接推论。

现在考虑 (S, j) 上相关的 G_2'-Higgs 丛 $(\mathcal{E}, \Phi)$。特别地， $\mathcal{E}$与通过将主 K 丛 $(\pi \circ \mathrm{f})^*\mathrm{G}_2'$ 复化而得到的主 $\mathrm{K}^{\mathbb{C}}$ 丛相关（其中我们将 G_2'视为 $\mathrm{Sym}(\mathrm{G}_2')$ 上的主 K 丛）。 $\pi \circ \mathrm{f}$ 提升到 X 的事实意味着， $\mathcal{E}$ 可约化为与度量相容的全纯 $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}$-丛。在此约化下，Higgs 场 $\Phi = \mathrm{d}(\pi \circ \mathrm{f})^{1,0}$ 属于与 $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}$ 在 $\mathfrak{g}_1$上的伴随作用相关的丛。根据 (31)，这恰好意味着 $(\mathcal{E}, \Phi)$ 具有 (24) 的形式，其中 α、 β 和 δ 分别对应于 $\mathrm{d}\,\mathrm{f}_{-\alpha_1}$、$\mathrm{d}\,\mathrm{f}_{-\alpha_2}$ 和 $\mathrm{d}\,\mathrm{f}_{\eta}$。

反之，$(\mathcal{E},\Phi)$ 上的对角调和度量对应于一个映射到 $\mathbf{Sym}(G_2')$的调和映射，该映射与 $\mathcal{E}$ 上的全纯 $T^{\mathbb{C}}$-结构相容。这意味着该调和映射提升为一个映射 $f\colon (S,j)\to \mathbf{X}$。Higgs 场 Φ 被识别为 $df^{1,0}$，其取值于 $[\mathfrak{g}_1]$。

由构造可知，底层的 K-丛约化为一个 T-丛。这恰好意味着 $\mathcal{E}$全纯地分裂为线丛的直和。同样，提升是循环的这一事实意味着 Φ 具有式（24）的形式，其中 $\alpha=df_{-\alpha_1}$， $\beta=df_{-\alpha_2}$ 以及 $\delta=df_{\eta}$。□

6.4. **无穷小刚性**。设 Σ 为一个闭定向曲面。等变循环曲面是一个二元组 $(\rho,\ f)$，其中 $\rho:\ \pi_1(\Sigma)\to G_2'$ 是一个表示，而 $f:\ \widetilde{\Sigma}\to \mathbf{X}$ 是一个 ρ- 等变的循环曲面。

一个 等变循环曲面的光滑族是一个光滑映射

$$F:\widetilde{\Sigma}\times(-\epsilon,\epsilon)\to \mathbf{X}$$

使得映射 $f_t:=F(\cdot,t)$ 是一个 ρ_t-等变的循环曲面，其中相应的$[\rho]:\ (-\epsilon,\ \epsilon)\to \mathcal{X}(\Sigma,\ G_2')$ 是光滑的。我们将这样的族记为（$\rho_t,\ f_t$）$_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$，$f_0=dF(\partial_t)|_{t=0}$表示沿 f_0 的向量场，而 $[\dot{\rho_0}]=d_0[\rho]$（∂_t）。

定理 6.8。设$(\rho_t,\ f_t)^{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ 是等变 α_1-循环曲面的光滑路径，且 $[\dot{\rho_0}]=0$。那么存在一条光滑路径$(g_t,\ \psi_t)\in G_2'\times \mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ 使得 $f_0'=0$，其中 $f_t'=g_t\circ f_t\circ\psi_t$。

证明遵循（并简化）Labourie 在 [19] 中提出的思路。ζ 循环曲面光滑族 $(f_t)^{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ 的切向量称为雅可比场。我们将 ζ 视为$T\mathbf{X}$中f 的一个截面。记 ζ 在$f^*[\mathfrak{g}_{-\alpha}]$ 上的投影为 $\zeta_{-\alpha}$。下面的命题是证明定理6.8所用的关键技术结果。我们将证明推迟到最后一节。

命题 6.9。设 $f:\ \Sigma\to \mathbf{X}$ 是一个 α_1-循环曲面，且 ζ 是沿 f 的雅可比场。若 ζ 是 $\pi_1(\Sigma)$-不变的，并且 $\zeta_{-\alpha_1}=0$，则 $\zeta=0$。

利用命题 6.8证明定理 6.9。考虑一个光滑族 $(\rho_t,f_t)^{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$，其中各曲面均为等变的$\alpha_1$-循环曲面，且满足 $[\dot{\rho_0}]=0$。特别地，存在一条光滑路径 $(g_t)^{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$，取值于 G_2'，使得 $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} g_t\rho_t g_t^{-1}=0$。因此，族 $(\overline{g_t}\circ f_t)^{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$的切向量是一个 $\pi_1(\Sigma)$-不变的雅可比场。

根据假设，$df_{-\alpha_1}$ 处处不为零。因此，存在唯一的向量场 X 定义在 Σ 上，使得 $df_{-\alpha_1}(X)=-\zeta_{-\alpha_1}$。令 ψ_t 为 X 在时刻 t 的流，并定义 $f't:=g_t\circ f_t\circ\psi_t$。特别地，每个 $f't$ 都是一个 $g_t\rho_t g_t^{-1}$- 等变的 α_1- 循环曲面，并且族 $(f't)$ 的切向量是一个 $\pi_1(\Sigma)$-不变的雅可比场 ζ'，满足 $\zeta'_{-\alpha}=0$。结论由命题 6.9 得出。□

6.5. **循环曲面的无穷小变形**。最后一节将研究循环曲面的无穷小变形。特别地，我们证明命题 6.9。我们沿用 [19], 的思路，但我们的证明简化了许多相关计算。我们希望这能阐明确保局部刚性的关键要素。

考虑一个李代数丛 $\pi:\ \hat{E}\to M$，其定义在流形 M 上，并设 $\hat{\nabla}$ 为一个相容联络（即 $\hat{\nabla}$ 是李括号的导子）。考虑 $\Theta=\{\theta_1,\ldots\ldots,\theta_k\}$，其中 $\theta_k\in\Omega^{\bullet}(M,\hat{E})$。Pfaff 系统 的解 Θ 是一个映射 $f:\ N\to M$，满足 $f^*\theta_k=0$ 对所有 $\theta_k\in\Theta$ 均成立。令$\mathcal{I}_\Theta$ 为由 Θ 生成的微分理想。

引理 6.10。映射 $f:\ N\to M$ 是 *Pfaff* 系统 Θ 的解，当且仅当对任意$\alpha\in\mathcal{I}_\Theta$，$f^*\alpha=0$。

证明。直接推论来自以下事实：$f^*[\alpha\wedge\beta]=[f^*\alpha\wedge f^*\beta]$ 且$f^*d^{\hat{\nabla}}\alpha=d_{\nabla}f^*\alpha$对于 $\nabla=f^*\hat{\nabla}$。反向推论来自以下事实：$\Theta\subset\mathcal{I}_\Theta$。□

以下命题见 [19, 命题 7.14]:

命题 6.11。 设$(f_t)^{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ 是 *Pfaff* 系统 Θ 的一个解的光滑路径，且 $\zeta = d\,dt\,|_{t=0} f_t$。那么，对于任意 $\alpha = f^{*}\hat{}\alpha$ 满足$\hat{}\alpha \in \mathcal{I}_\Theta$，有

$$d^\nabla \circ \iota_\zeta \alpha = -\iota_\zeta \circ d^\nabla \alpha\,.$$

回忆一下，Maurer-Cartan 方程蕴含联络 $D = A + \omega$ 在 $[\mathfrak{t}] \oplus \mathbf{TX}$ 上是平坦的，因此 $[\mathfrak{t}] \oplus \mathbf{TX}$ 同构于平凡的李代数丛 $\mathbf{X} \times \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$。考虑 Pfaff 系统

$$\Theta := \left\{\omega_1 + \theta(\omega_{-1})\,,\ \omega_{\mathfrak{it}}\,,\ \omega_j \text{ for } j \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{0, \pm 1\}\right\}\,.$$

引理 6.12. 形式 $[\omega_{-1} \wedge \omega_{-1}]$ 属于理想 $\mathcal{I}_\Theta$。

证明。 形式 ω_{-2} 属于 Θ，因此 $d^A\omega_{-2}$ 属于 $\mathcal{I}_\Theta$。但是，关于 34) 的方程 $k = 2$ 给出 s

$$d^A\omega_{-2} + \frac{1}{2}\sum_{i+j=-2}[\omega_i \wedge \omega_j] = 0\,.$$

在 $\mathbb{Z}_6$ 中，方程 $i + j = -2$ 蕴含 $i = j = -1$ 或 $i,j \not\in \{\pm 1\}$。但是，对于 $i,j \not\in \{\pm 1\}$，我们有 $\omega_i, \omega_j \in \Theta$，因此 $[\omega_i \wedge \omega_j] \in \mathcal{I}_\Theta$。特别地，上述方程蕴含 $[\omega_{-1} \wedge \omega_{-1}] \in \mathcal{I}_\Theta$。□

容易验证，映射 $f\colon S \to \mathbf{X}$ 处处切于循环分布 $\mathcal{D}$，当且仅当它是 Pfaff 系统 Θ的解。

定义 6.13。 设 $f\colon S \to \mathbf{X}$ 是一个循环曲面，且 $\nabla = f^{*}A$。f 的一个雅可比场 是 f ζ的一个截面，满足 $f^{*}\mathbf{TX}$，使得对于任意 $\alpha = f^{*}\hat{}\alpha$ 满足 $\hat{}\alpha \in \mathcal{I}_\Theta$，均有

$$d^\nabla \circ \iota_\zeta \alpha = -\iota_\zeta \circ d^\nabla \alpha\,.$$

由于循环曲面是 Pfaff 系统 Θ的解，命题 6.11 表明，切于循环曲面变形的向量场必然是一个雅可比场。

设 $f\colon S \to \mathbf{X}$ 是一个循环曲面，满足 $\phi = df_1$ 以及 $\phi^\dagger = df_{-1} = -\theta(df_1)$，并设 j 是 S 上由 f关联的复结构。定义

$$[\mathfrak{G}] = \bigoplus_{j\neq 0,\pm 1}[\mathfrak{g}_j] \qquad \text{and} \qquad \Omega = \bigoplus_{j\neq 0,\pm 1}\omega_j.$$

一个雅可比场，其切于一条循环曲面路径 f_t，满足 $f_0 = f$，分解为 s

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_{-1} + Z,$$

其中 $\zeta_j = \iota_\zeta(f^*\omega_j)$ 是$f^*[\mathfrak{g}_j]$的一个截面，而$Z = \iota_\zeta(f^*\Omega)$ 是$f^*[\mathfrak{G}]$的一个截面。

命题 6.14。 循环曲面的雅可比场 ζ 满足 $\zeta_0 = 0$, $\lambda(Z) = Z$ 和 $\zeta_1 = -\theta(\zeta_{-1})$。

证明。引理 6.6 的第二项意味着，至多在对 $\mathfrak{f}_t$ 右合成 $G_2^{\mathbb{C}}$中的一个元素后，循环曲面 $\mathfrak{f}_t$ 包含于给定的 G_2'-轨道中。由于此类轨道的切空间是 Fix(λ)，我们有 $\lambda(\zeta) = \zeta$。但是 $\lambda(\zeta) = -\zeta_0 - \theta(\zeta_{-1}) - \theta(\zeta_1) + \lambda(Z)$。投影到 $[\mathfrak{it}]$ 上得到$\zeta_0 = 0$，投影到 $\mathfrak{G}$ 上得到 $\lambda(Z) = Z$，而投影到 $[\mathfrak{g}_1]$ 上得到 $\zeta_1 = -\theta(\zeta_{-1})$。□

以下内容出自 [19, 命题 7.6。1]。为完整起见，我们在此重复如下。

Lemma 6.15. (1) $d^\nabla Z = [(\zeta_1 + Z) \wedge \phi]^{\mathfrak{G}} + [(\zeta_{-1} + Z) \wedge \phi^\dagger]^{\mathfrak{G}}$.
(2) $[\partial_\nabla \zeta_{-1} \wedge \phi^\dagger] = [[Z \wedge \phi]^{\mathfrak{g}_{-1}} \wedge \phi^\dagger]$

证明。 对于第一项，根据定义6.13

$$d^\nabla Z = d^\nabla(\iota_\zeta(f^*\Omega)) = -\iota_\zeta(d^\nabla(f^*\Omega))\,.$$

然而，将 Maurer-Cartan 方程投影到 $[\mathfrak{G}]$ 上可得

$$-d^A\Omega = \frac{1}{2}[\Omega \wedge \Omega]^{\mathfrak{G}} + [\omega_0 \wedge \Omega] + [\omega_0 \wedge \Omega] + \frac{1}{2}[\omega_1 \wedge \omega_1] + \frac{1}{2}[\omega_{-1} \wedge \omega_{-1}] + [\omega_1 \wedge \Omega]^{\mathfrak{G}} + [\omega_{-1} \wedge \Omega]^{\mathfrak{G}}\,.$$

通过f拉回，利用$f^*\Omega = f^*\omega_0 = 0$，并应用$\iota_\zeta$，可得

$$-\iota_\zeta(d^\nabla(f^*\Omega)) = [(\zeta_1 + Z)\wedge\phi]^{\mathfrak{G}} + [(\zeta_{-1}+Z)\wedge\phi^\dagger]^{\mathfrak{G}}\,.$$

对于第二项，首先计算

$$d^\nabla(\iota_\zeta f^*[\omega_{-1}\wedge\omega_{-1}]) = 2d^\nabla[\zeta_{-1}\wedge\phi^\dagger] = 2[\partial_\nabla\zeta_{-1}\wedge\phi^\dagger]\,, \tag{35}$$

这里用到了以下事实： $\phi^\dagger$ 的类型为$(0,1)$ 且满足$d^\nabla\phi^\dagger = 0$。另一方面，利用引理6.12 可得

$$d^\nabla(\iota_\zeta f^*[\omega_{-1}\wedge\omega_{-1}]) = -\iota_\zeta\big(d^\nabla(f^*[\omega_{-1}\wedge\omega_{-1}])\big) = -2\big[\iota_\zeta(d^\nabla(f^*\omega_{-1}))\wedge\phi^\dagger\big]\,. \tag{36}$$

但是， $[\mathfrak{g}_{-1}]$ 上的 Maurer-Cartan 方程给出

$$-d^A\omega_{-1} = [\omega_0\wedge\omega_{-1}] + [\Omega\wedge\omega_1]^{\mathfrak{g}_{-1}} + \frac{1}{2}[\Omega\wedge\Omega]^{\mathfrak{g}_{-1}}\,.$$

这就得到$-\iota_\zeta(d^\nabla(f^*\omega_{-1})) = [Z\wedge\phi]^{\mathfrak{g}_{-1}}$。代回方程（36），并与方程（35）比较，即得所需结果。□

命题 6.16。循环曲面的一个雅可比场满足

$$\partial_\nabla\overline{\partial}_\nabla Z = \big[[Z\wedge\phi]\wedge\phi^\dagger\big]^{\mathfrak{G}}\,,$$

其中上标 $\mathfrak{G}$ 表示在$f^*[\mathfrak{G}]$上的投影。

证明。 取引理6.15 第一条中的$(0,1)$部分可得 $\overline{\partial}_\nabla Z = [(\zeta_{-1}+Z)\wedge\phi^\dagger]^{\mathfrak{G}}$。因此，

$$\partial_\nabla\overline{\partial}_\nabla Z = [\partial_\nabla\zeta_{-1}\wedge\phi^\dagger]^{\mathfrak{G}} + [\partial_\nabla Z\wedge\phi^\dagger]^{\mathfrak{G}}\,.$$

由引理 6.15 可得

$$\partial_\nabla\overline{\partial}_\nabla Z = [[Z\wedge\phi]^{\mathfrak{g}_{-1}}\wedge\phi^\dagger]^{\mathfrak{G}} + [[(\zeta_1+Z)\wedge\phi]^{\mathfrak{G}}\wedge\phi^\dagger]^{\mathfrak{G}}\,.$$

注意， $[[\zeta_1\wedge\phi]\wedge\phi^\dagger]$ 取值于$f^*[\mathfrak{g}_1]$。因此，它在$f^*[\mathfrak{G}=]$上的投影为零。此外，$[Z\wedge\phi]$ 取值于$f^*[\mathfrak{g}_{-1}]\oplus f^*[\mathfrak{G}]$，所以得到 $\partial_\nabla\overline{\partial}_\nabla Z = [[Z\wedge\phi]\wedge\phi^\dagger]^{\mathfrak{G}}$。□

~在$S = \Sigma$ 且 ζ 是 $\pi_1(\Sigma)$-不变的情形下，Bochner 技巧给出如下结论。

命题 6.17。 设 ζ 是一个 $\pi_1(\Sigma)$-不变的雅可比场，则 $Z = 0$。

证明。 记 $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$上的 Killing 型为$B$，并以 $\langle\cdot,\cdot\rangle = B(\theta(\cdot),\cdot)$ 表示相应的厄米度量。稍微滥用记号，我们仍用同一记号表示它们到取值于$f^*\mathbf{T}\mathbf{X}$的形式丛上的延拓。另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma\langle Z,\partial_\nabla\overline{\partial}_\nabla Z\rangle &= \int_\Sigma B(\theta(Z),d_\nabla\overline{\partial}_\nabla Z)\\
&= -\int_\Sigma B(d_\nabla\theta(Z),\overline{\partial}_\nabla Z)\\
&= -\int_\Sigma B(\theta(d_\nabla Z),\overline{\partial}_\nabla Z)\\
&= -\int\langle\overline{\partial}_\nabla Z,\overline{\partial}_\nabla Z\rangle\\
&\le 0\,,
\end{aligned}$$

其中，第二行用到了斯托克斯定理；第三行用到了 ∇ 保持θ 这一事实；最后一行用到了这样一个事实：在局部全纯坐标z中，$(1,1)$-形式$\langle\overline{\partial}_\nabla Z,\overline{\partial}_\nabla Z\rangle$ 是一个非负函数乘以$dz\wedge dz$。

另一方面，根据命题6.14 和6.16，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \langle Z, \partial_\nabla \overline{\partial}_\nabla Z\rangle &= \int_\Sigma B\left(\theta(Z), [[Z\wedge\phi]\wedge\phi^\dagger]\right)\\ &= \int_\Sigma B\left(\theta(Z)\wedge\phi^\dagger, Z\wedge\phi\right)\\ &= -\int_\Sigma B\left(\theta(Z\wedge\phi), Z\wedge\phi\right)\\ &= -\int_\Sigma \langle Z\wedge\phi, Z\wedge\phi\rangle\\ &\geq 0\,,\end{aligned}$$

wh这里我们利用了，在局部，$\langle Z\wedge\phi, Z\wedge\phi\rangle$ 是关于时间$dz\wedge d\bar{z}$的非负函数　　.

因此得到$Z\wedge\phi = 0$。应用对合 λ 并利用 $\lambda(\phi) = -\theta(\phi) = \phi^\dagger$，我们还得到$Z\wedge\phi^\dagger = 0$。为证明$Z = 0$，我们计算沿$f^*[\mathfrak{g}_\gamma]$ 的分支Z_γ，并证明它对每个根 γ都消失。为此，首先将方程 $[Z\wedge\phi] = 0$ 投影到$f^*[\mathfrak{g}_{\alpha_2}]$上。利用 $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$的根系，我们得到

$$[Z\wedge\phi]^{\mathfrak{g}_{\alpha_2}} = [Z_{\alpha_1+\alpha_2}\wedge df_{-\alpha_1}] = 0\,,$$

但由于$df_{-\alpha_1}$ 是一个同构，因此得到$Z_{\alpha_1+\alpha_2} = 0$。类似地，我们有

$$[Z\wedge\phi]^{\mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}} = [Z_{2\alpha_1+\alpha_2}\wedge df_{-\alpha_1}] = 0\,,$$

因此$Z_{2\alpha_1+\alpha_2}$。同样的论证给出$Z_{3\alpha_1+\alpha_2} = 0$。对于投影到负根上，我们只需使用 $\lambda(Z) = Z$ 以及 λ 将 $[\mathfrak{g}_\gamma]$ 映射到 $[\mathfrak{g}_{-\gamma}]$这一事实。□

现在我们可以证明命题6.9。

~命题 6.9 的证明。 利用前两个命题可知， $\pi_1(\Sigma)$-雅可比场 ζ在 Σ 上，由 α_1-循环曲面的变形所产生，具有如下形式 $\zeta = \zeta_1 + \zeta_{-1}$。特别地，命题6.16 给出

$$[\zeta_1\wedge\phi] = 0\,.$$

假设 $\zeta_{-\alpha_1} = 0$，并将上述方程投影到$f^*[\mathfrak{g}_{-\alpha_1-\alpha_2}]$上。这给出

$$[\zeta_{-\alpha_2}\wedge df_{-\alpha_1}] = 0\,.$$

同样，$df_{-\alpha_1}$ 是一个同构这一事实给出 $\zeta_{-\alpha_2} = 0$。

最后，　　的最后一个分支是 $\zeta_\eta = \zeta_{3\alpha_1+2\alpha_2}$。将 $[\zeta_1\wedge\phi] = 0$ 投影到$f^*[\mathfrak{g}_{3\alpha_1+\alpha_2}]$上可得

$$[\zeta_\eta\wedge df_{-\alpha_2}] = 0\,.$$

由于$df_{-\alpha_2}$ 是全纯且不恒为 0，这意味着 $\zeta_\eta = 0$ 在离散集的补集中成立。由连续性可得， $\zeta_1 = 0$。由于 $\zeta_{-1} = -\theta(\zeta_1)$，我们得出 $\zeta = 0$。□

参考文献

[1] Jeffrey Adams 和 Olivier Taibi。实群的伽罗瓦上同调与嘉当上同调。《杜克数学杂志》，167(6):1057–1097，2018。[2] Daniele Alessandrini 和 Brian Collier。$\mathrm{PSp}(4,\mathbb{R})$ 特征簇的极大分支的几何。《几何与拓扑》，23(3):1251–1337，2019。[3] John C. Baez。八元数。《美国数学学会通报》（新系列），39(2):145–205，2002。[4] David Baraglia。G_2 几何与可积系统。电子预印本 *arXiv:1002.1767*，2010。[5] Robert L Bryant。八元数上的子流形与特殊结构。《微分几何杂志》，17(2):185–232，1982。[6] Brian Collier。$\mathrm{Sp}(4,\mathbb{R})$ 曲面群表示、极小浸入与循环曲面。《几何学奉献》，180(1):241–285，2015。[7] Brian Collier、Nicolas Tholozan 和 J´er´emy Toulisse。曲面群到 $\mathrm{SO}(2,n)$的极大表示的几何。《杜克数学杂志》，168(15):2873–2949，2019。[8] Brian Collier 和 J´er´emy Toulisse。广义循环曲面。准备中，2023。

[9] Kevin Corlette。带典范度量的平坦 G-丛。《微分几何杂志》，28(3):361–382，1988。[10] Simon Donaldson。扭曲调和映射与自对偶方程。《伦敦数学学会会刊》（第3辑），55(1):127–131，1987。[11] Cristina Draper Fontanals。关于 G_2 的笔记：李代数与李群。《微分几何及其应用》，57:23–74，2018。（非）S^6 上复结构的存在性。[12] Jost-Hinrich Eschenburg 和 Theodoros Vlachos。s 6 和 s 5 中的伪全纯曲线。《阿根廷数学联合会杂志》，60(2):517–537，2019。[13] Parker Evans。$S^{2,4}$ 中的多项式近复曲线。arXiv 电子预印本，2022年8月。[14] Oscar Garcia-Prada。Higgs 丛与高阶 Teichm¨uller 空间。载于《Teichm¨uller 理论手册》第七卷，IRMA 数学与理论物理讲义第30卷，第239–285页。欧洲数学学会，Z ¨urich， [2020] ©2020。[15] Oscar Garcia-Prada、Peter Gothen 和 Ignasi Mundet i Riera。Hitchin–Kobayashi 对应、Higgs 对与曲面群表示。ArXiv 电子预印本 0909.4487，2009年9月。[16] Nigel Hitchin。黎曼曲面上的自对偶方程。《伦敦数学学会会刊》（第3辑），55(1):59–126，1987。[17] Nigel Hitchin。李群与 Teichm¨uller 空间。《拓扑学》，31(3):449–473，1992。[18] Fanny Kassel。离散群的几何结构与表示。载于《2018年国际数学家大会论文集——里约热内卢》第2卷，特邀报告，第1115–1151页。World Sci. Publ.，Hackensack，新泽西州，2018。[19] Franc¸ois Labourie。秩2中的循环曲面与 Hitchin 分支。《数学年刊》（第2辑），185(1):1–58，2017。[20] Franc¸ois Labourie。曲面上的平坦射影结构与三次全纯微分。《纯粹与应用数学季刊》，3(4，第1部分):1057–1099，2007。[21] Qiongling Li 和 Takuro Mochizuki。非紧曲面上 Toda 方程与循环 Higgs 丛的完备解。arXiv:2010.05401，2020。[22] Qiongling Li 和 Takuro Mochizuki。Toda 方程与循环 Higgs 丛的孤立奇点。arXiv:2010.06129，2020。[23] John Loftin。平坦度量、三次微分与射影 holonomy 的极限。《几何学奉献》，128:97–106，2007。[24] Vladimir Markovi´c。闭黎曼曲面乘积中的极小曲面的非唯一性。《几何与泛函分析》，32(1):31–52，2022。[25] Vladimir Markovic、Nathaniel Sagman 和 Peter Smillie。$\mathbb{R}^n$ 及双曲曲面乘积中的不稳定极小曲面。arXiv 预印本 arXiv:2206.02938，2022。[26] Charles B Morrey。关于解析非线性椭圆偏微分方程组解的解析性：第一部分，内部解析性。《美国数学杂志》，80(1):198–218，1958。[27] Xin Nie。伪双曲空间中的循环 Higgs 丛与极小曲面。arXiv:2206.13357，2022年6月。[28] Nitin Nitsure。曲线上的半稳定对的模空间。《伦敦数学学会会刊》（第3辑），62(2):275–300，1991。[29] Maria Beatrice Pozzetti。高阶 Teichm¨uller 理论。S´éminaire N. Bourbaki，2019年3月。[30] Nathaniel Sagman 和 Peter Smillie。非紧型对称空间中的不稳定极小曲面。arXiv:2208.04885，2022。[31] Carlos Simpson。Katz 中间卷积算法。《纯粹与应用数学季刊》，5(2，专题：纪念 Friedrich Hirzebruch，第1部分):781–852，2009。[32] Carlos T. Simpson。利用 Yang–Mills 理论构造 Hodge 结构变分及其在一致化中的应用。《美国数学学会杂志》，1(4):867–918，1988。[33] Carlos T. Simpson。光滑射影簇基本群表示的模空间。I。《高等科学研究院数学出版物》，79:47–129，1994。[34] Carlos T. Simpson。光滑射影簇基本群表示的模空间。II。《高等科学研究院数学出版物》，80:5–79（1995），1994。[35] Anna Wienhard。高阶 Teichm¨uller 理论导论。载于《2018年国际数学家大会论文集——里约热内卢》第2卷，特邀报告，第1013–1039页。World Sci. Publ.，Hackensack，新泽西州，2018。

加利福尼亚大学河滨分校，美国电子邮件地址</style：
brian.collier@ucr.edu

蔚蓝海岸大学´，法国国家科学研究中心，让·亚历山大·迪厄多内数学实验室，法国电子邮件地址： jeremy.toulisse@univ-cotedazur.fr