arXiv:2302.11537v1 [math.GT] 21 Feb 2023

T关于 S. Parsa 连接可嵌入性定理的注记 S

A. Skopenkov

这篇短注旨在说明（见注 2），[Pa21] 并非其主要结果的可靠参考文献（下文将定理 1 重述其中对非本领域数学家最有趣的部分）。我们还提供了一篇可靠参考文献：[Me22，定理 A 和注 1.1]。这篇注记是对 [Pa21]所作 Zentralblatt 书评的扩展版本。

免责声明。(a) 关于何为可靠参考文献的讨论，参见例如 [Sk21d，第 2] 页。此处“并非可靠参考文献”不含任何其他含义。尤其是，我并不是说 [Pa21] 中的证明无法修正；我只是说，修正这些证明是作者的责任，而不是读者的责任，参见 [Sk21d，注 2.3]。[1]

(b) 此处不涉及优先权问题。论文 [Me22] 和本文均将定理 1 归于 S. Parsa。

我们将“k维有限单纯复形”简写为“k-复形”。

显然，若复形 K 可嵌入 $\mathbb{R}^m$，且复形 L 可嵌入 $\mathbb{R}^n$，则连接 $K*L$ 可嵌入 $\mathbb{R}^{m+n+1}$。在某些条件下，“ k-复形不能嵌入 $\mathbb{R}^{2k}$ ”这一性质在连接下保持稳定；也就是说，若 K、L 是维数分别为 k、l的复形，且 K 不能嵌入 $\mathbb{R}^{2k}$， L 不能嵌入 $\mathbb{R}^{2l}$，则 $K*L$ 不能嵌入 $\mathbb{R}^{2(k+l+1)}$，参见 [BKK、MS06、Pa20、PS20、Me22]。

定理1（Parsa）。对于任意 k、$l\geq 2$，都存在维数分别为 k、l的复形 K、L，使得 K 不能嵌入 $\mathbb{R}^{2k}$，且 L 不能嵌入 $\mathbb{R}^{2l}$，但 $K*L$ 可嵌入 $\mathbb{R}^{2(k+l+1)}$。

这一结果基于整数值范坎彭障碍与模2 van Kampen 障碍之间微妙的差异。[Pa21]给出了一种复杂（且不可靠，见注 2）的证明。[Me22] 给出了一种更简单的证明，使用了范坎彭障碍的“配边解释”。若能使用范坎彭障碍本身，而非其“配边解释”，进一步简化 [Me22]的证明，将会很有意思。

注 2（关于 [Pa21]）。请注意，[Pa21]期刊版本第 7175–1176 页对应 arXiv v4 版本第 23–24 页。

（1）第 7175 页定理 1 的证明并不完整。事实上，该证明完全没有考虑定理 1 中的连接 $M*N$。

(1a) 不太重要的说明：在第 7175 页定理 1 的证明的最后一句中，没有解释清楚，也不明确，

莫斯科独立大学，莫斯科物理技术学院，俄罗斯联邦。https://users.mccme.ru/skopenko。数学主题分类：57Q35，55Q91。关键词：嵌入、连接、科研诚信。[1]很遗憾，S. Parsa 不接受我提出的建议：依据注 2 修订 [Pa21] 并更新 arXiv 版本。这样我便可以赞扬后者，而不是批评期刊版本。（相反，他给我发来了一些关于如何修订 [Pa21] 的想法，参见 [Sk21d，注 2。3]）公开发表批评，为当前数学研究中可靠性标准各异提供了一个例证 [Sk21d]„ 也可能促使人们对 [Pa21]进行可靠修订。

•“该断言”指的是什么。

• 第一段最后一句如何由引理 10 关于“模数序列”的句子推出（最后一句由引理 10 的“特别是”部分推出）。

（2）定理 1 也可由第 7175 页定理 7(1) 中“如果 M 和 N 的范坎彭障碍模 2 消失”这一情形推出。然而，第 7175—7176 页定理 7 的证明并未证明这一情形。事实上，其中完全没有考虑“如果 M 和 N 的范坎彭障碍模 2 消失且 $d_M + d_N \geq 2$”这一子情形（因此，第 7176 页中的“由于 M 的范坎彭障碍消失”这一表述是不正确的，而“这证明了情形 $d_M + d_N \geq 2$ 下的陈述 (1)”这一表述也是没有根据的）。

(3) 次要意见。定理 2 之前对 $I_p(K)$ 的主要定义对读者毫无意义，因为其中使用了“系数为 $\mathbb{Z}_p$ 时计算的 $\mathbb{Z}_p$-复形 K 的史密斯指标”这一概念，而文中既未定义该概念，也未提供定义出处。

(4) 论文 [Pa21] 技术性很强，而且（如上所述）写得很差。因此，这篇论文并不适合广大读者阅读；相比之下，[Pa21，第 7151 页，“证明方法”]之前的那段文字则不同。该段文字指出，[Pa21] 中定理 1 的复杂证明方法，是出于希望能将其应用于组合学和离散几何中的其他问题。然而，文中并未给出任何结果（甚至没有任何推测）来支撑这一希望。目前只有两个结果 [Pa20, Pa21] 是用这种证明方法得到的；但它们的证明要简单得多 [PS20, Me22]。这段表达希望的文字却省略了这项信息，而读者需要这些信息才能判断是否认同作者的期望。（[PS20] 这篇论文在 [Pa21] 发表前作者就已知晓；作者或许不知道 [Me22] 这篇论文，但可以在 [Pa21] 的 arXiv 更新中引用。）

References

[BKK] M. Bestvina、M. Kapovich 和 B. Kleiner，《离散群的 Van Kampen 嵌入障碍》，Invent. Math. 150（2002）219–235。arXiv:math/0010141。[MS06] S.A. Melikhov、E.V. Shchepin，《采用望远镜方法研究紧致空间的可嵌入性》。arXiv:math.GT/0612085。[Me22] S. A. Melikhov，《连接与多面体的乘积的可嵌入性》，Topol. Methods in Non- linear Analysis，60:1（2022），185-201。arXiv:2210.04015[Pa20] S. Parsa，《关于 $[3] * K$ 的史密斯类、范·坎彭障碍与可嵌入性》，arXiv:2001.06478。[Pa21] S. Parsa，《连接下史密斯指标的不稳定性及其在可嵌入性研究中的应用》，Trans. Amer. Math. Soc. 375（2022），7149–7185，arXiv:2103.02563。[PS20] S. Parsa 和 A. Skopenkov，《关于连接及其“因子”的可嵌入性》，Topol. Appl.，326（2023）108409，arXiv:2003.12285。[Sk21d]* A. Skopenkov，《关于当前数学研究中不同的可靠性标准》，arXiv:2101.03745。更常更新的版本：https://www.mccme.ru/circles/oim/rese_inte.pdf。