arXiv:2302.11543v1 [math.CA] 18 Feb 2023

多线性 θ型 Calder´on–Zygmund 算子及其在加权混合空间的乘积上的交换子

Xia Han 和Hua Wang*谨以此文纪念
Li Xue。
中国新疆乌鲁木齐 830046，新疆大学数学与系统科学学院

摘要

本文首先引入若干新的加权混合空间类。随后，我们讨论文献中近期提出的某些多线性 θ型 Calder´on–Zygmund 算子 T_θ 在这些空间乘积上的强型和弱型估计，其中涉及多重权。此外，我们还建立了 T_θ 的多线性交换子和迭代交换子，以及与 BMO 函数的逐点乘法的强型估计和弱型端点估计。MSC（2020）：42B20；42B25；47B38；47G10 关键词：多线性 θ型 Calder´on–Zygmund 算子；多线性交换子；迭代交换子；加权混合空间；多重权；Orlicz空间

目录

1 引言 2

2 记号与预备知识 9
2.1 多重权.9 2.2 Orlicz空间与Luxemburg范数.11 2.3 加权混合空间.12

3 主要结果 16

4 定理 3.1 和定理 3.2 的证明 18

5 定理 3.3 和定理 3.4 的证明 30

*电子邮箱地址：1044381894@qq.com，wanghua@pku.edu.cn。

1 引言

本文中，符号 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{N}$ 分别表示所有实数和自然数的集合。设 $\mathbb{R}^n$ 为由点 $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ 组成的 n 维欧几里得空间，其范数为 $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $(\mathbb{R}^n)^m = \overbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}^{m}$ 为 m重乘积空间。我们使用标准记号 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 表示定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的测试函数施瓦茨空间，$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$表示其对偶空间，即定义在 $\mathbb{R}^n$上的温分布空间。欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 上的 Calder´on–Zygmund 奇异积分算子及其推广在文献中已得到广泛研究，标准理论可参见例如 [5, 13, 30, 31, 39]。特别地，Yabuta [39] 引入了某些 θ型 Calder´on–Zygmund 算子，以便研究某些类别的伪微分算子。沿用 Yabuta [39], 的术语，我们引入所谓的 θ型 Calder´on–Zygmund 算子如下。

定义 1.1. 设 θ 是定义在 $\mathbb{R}^+ := (0, +\infty)$上的非负非递减函数，且 $0 < \theta(1) < \infty$ 并且

$$\int_0^1 \frac{\theta(t)}{t}\, dt < \infty.$$

若存在常数 $A > 0$ 使得....., 则称 $x = y\}$ 上的可测函数 $K(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{$ (x, y) 是一个 θ 型 Calder´on–Zygmund 核。

- $\big|K(x, y)\big| \le \frac{A}{|x-y|^n}, \quad for\ any\ x \ne y;$
- $\big|K(x, y) - K(z, y)\big| + \big|K(y, x) - K(y, z)\big| \le \frac{A}{|x-y|^n} \cdot \theta\Big(\frac{|x-z|}{|x-y|}\Big), \quad for\ |x-z| < \frac{|x-y|}{2}.$

定义 1.2. 设 $\mathcal{T}_\theta$ 是从 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 到其对偶空间 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的线性算子。若....., 则称 $\mathcal{T}_\theta$ 是一个与核 K 相关联的 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子。

- $\mathcal{T}_\theta$ 可以延拓为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界线性算子；
- 对任意 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，以及所有满足 supp f 的 $x \notin$，存在一个 θ 型 Calder´on–Zygmund 核 $K(x, y)$，使得.....

$$\mathcal{T}_\theta f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y)\, dy,$$

其中 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是由 $\mathbb{R}^n$ 上所有具有紧支集的无穷次可微函数构成的空间。

注意，具有标准核的经典 Calder´on–Zygmund 算子（见 [5, 30]）是 θ 型算子 $\mathcal{T}_\theta$，当 $\theta(t) = t^\delta$，且具有 $0 < \delta \le 1$ 时。在 2009年，Maldonado 和 Naibo [23] 研究了双线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子；这类算子是线性情形的自然推广，并且

建立了带 Muckenhoupt 权的加权 Lebesgue 空间乘积上的双线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子的加权范数不等式。此外，他们将这些算子应用于研究具有温和正则性的某些抛物乘积和双线性伪微分算子。随后，在 2014 年，Lu 和 Zhang [22] 引入了一般的 m线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子及其交换子（针对 $m \geq 2$），并建立了这些多线性算子和多线性交换子在带多重权的加权 Lebesgue 空间乘积上的有界性。除此之外，作为应用，Lu 和 Zhang [22] 还获得了具有温和正则性的抛物乘积、双线性伪微分算子及其交换子的多重加权范数不等式。沿着 [22], ，我们现在给出多线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子的定义。

定义 1.3。设 θ 是定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的非负非递减函数，且满足 $0 < \theta(1) < \infty$，并且

$$\int_0^1 \frac{\theta(t)}{t}\, dt < \infty. \tag{1.1}$$

若可测函数 $K(x, y_1, \ldots, y_m)$ 定义在对角线 $x = y_1 = \cdots = y_m$ 之外的 $(\mathbb{R}^n)^{m+1}$ 上，则称其为 m 线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 核；如果存在常数 $A > 0$ 使得

- *for all* $(x, y_1, \ldots, y_m) \in (\mathbb{R}^n)^{m+1}$ *with* $x \neq y_k$ *for some* $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$,

$$\big|K(x, y_1, \ldots, y_m)\big| \leq \frac{A}{(|x - y_1| + \cdots + |x - y_m|)^{mn}} \tag{1.2}$$

  and

- 对所有 $x, x' \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} &\big|K(x, y_1, \ldots, y_m) - K(x', y_1, \ldots, y_m)\big| \\ \leq &\frac{A}{(|x - y_1| + \cdots + |x - y_m|)^{mn}} \cdot \theta\bigg(\frac{|x - x'|}{|x - y_1| + \cdots + |x - y_m|}\bigg) \end{aligned} \tag{1.3}$$

  当 $|x - x'| \leq \frac{1}{2}\max_{1 \leq i \leq m} |x - y_i|$ 时,

- 对每个固定的 k，若 $1 \leq k \leq m$,

$$\begin{aligned} &\big|K(x, y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_m) - K(x, y_1, \ldots, y_k', \ldots, y_m)\big| \\ \leq &\frac{A}{(|x - y_1| + \cdots + |x - y_m|)^{mn}} \cdot \theta\bigg(\frac{|y_k - y_k'|}{|x - y_1| + \cdots + |x - y_m|}\bigg) \end{aligned} \tag{1.4}$$

  当 $|y_k - y_k'| \leq \frac{1}{2}\max_{1 \leq i \leq m} |x - y_i|$ 时。

定义 1.4. 设 $m \in \mathbb{N}$ 和 T_θ 是一个 m-线性算子，最初定义在 m 重施瓦茨空间的笛卡尔积上，并取值于温分布空间，即:

$$T_\theta : \overbrace{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}^{m} \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

我们称 T_θ 是一个 m-线性 θ-型 Calder´on–Zygmund 算子，如果

- T_θ 可以扩张为一个有界多重线性算子，从 $L^{q_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^{q_m}(\mathbb{R}^n)$ 映入 $L^q(\mathbb{R}^n)$，其中某些 q_1、……、$q_m \in [1,\infty)$ 和 $q \in [1/m,\infty)$ 满足 $1/q = \sum_{k=1}^m 1/q_k$；
- 对于任意给定的 m 元组 $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$，存在一个 m-线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 核 $K(x, y_1, \ldots, y_m)$（满足条件 (1.2)、(1.3) 和 (1.4)），使得

$$\begin{aligned} T_\theta(\vec{f})(x) &= T_\theta(f_1, \ldots, f_m)(x) \\ &:= \int_{(\mathbb{R}^n)^m} K(x, y_1, \ldots, y_m) f_1(y_1) \cdots f_m(y_m)\, dy_1 \cdots dy_m \end{aligned}$$

只要 $x \notin \bigcap_{k=1}^m \operatorname{supp} f_k$ 且每个 $f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 对于 $k = 1$、2、……、m 均成立。

注意，若简单地取 $\theta(t) = t^\varepsilon$，其中某个 $0 < \varepsilon \le 1$，那么多线性 θ 型算子 T_θ 恰好就是多线性 Calder´on–Zygmund 奇异积分算子，许多作者都对其进行了系统研究。这类结果的文献十分丰富，其研究源于 Grafakos 和 Torres 的工作 [15]。多线性 Calder´on–Zygmund 奇异积分算子理论在调和分析及其他领域中发挥着重要作用。近二十年来，这一研究方向备受关注；关于多线性 Calder´on–Zygmund 奇异积分的标准理论，读者可参阅 [15, 20, 25] 及其中的参考文献。2014 年，Lu 和 Zhang [22] 研究了多线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子及其与 BMO 函数的交换子的加权范数不等式。Lu 和 Zhang 在 [22, 定理 1.2] 中给出了多线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子在加权勒贝格空间乘积上的以下加权强型和弱型估计。

定理 1.1（[22]）。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 T_θ 是一个满足条件 (1.1) 且具有 θ 的 m 线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子。若 $p_1, \ldots, p_m \in (1,\infty)$ 且 $p \in (1/m, \infty)$，其中 $1/p = \sum_{k=1}^m 1/p_k$，并且 $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m)$ 满足多线性 $A_{\vec{P}}$ 条件，则存在一个与 $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ 无关的常数 $C > 0$，使得

$$\left\| T_\theta(\vec{f}) \right\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})} \le C \prod_{k=1}^m \left\| f_k \right\|_{L^{p_k}(w_k)},$$

其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}$。

定理 1.2（[22]）。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 T_θ 是满足条件 (1.1) 的一个 m 线性 θ 型 Calder´on– Zygmund 算子，其中 θ。若 $p_1, \ldots, p_m \in [1,\infty)$，$\min\{p_1, \ldots, p_m\} = 1$ 和 $p \in [1/m, \infty)$ 满足 $1/p = \sum_{k=1}^m 1/p_k$，且 $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m)$ 满足多线性 $A_{\vec{P}}$ 条件，则存在一个与 $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ 无关的常数 $C > 0$，使得

$$\left\| T_\theta(\vec{f}) \right\|_{WL^p(\nu_{\vec{w}})} \le C \prod_{k=1}^m \left\| f_k \right\|_{L^{p_k}(w_k)},$$

其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^{m} w_k^{p/p_k}$。特别地，若 $\vec{w} = (w_1, \dots, w_m)$ 满足多线性 $A_{(1,\dots,1)}$ 条件，则

$$\left\| T_\theta(\vec{f}) \right\|_{WL^{1/m}(\nu_{\vec{w}})} \le C \prod_{k=1}^{m} \left\| f_k \right\|_{L^1(w_k)},$$

其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^{m} w_k^{1/m}$。

注 1.1. 我们指出，在线性情形 $m = 1$ 中，上述加权结果由 Quek 和 Yang 在 *[27]* 中给出。对于双线性情形 $m = 2$，Maldonado 和 Naibo 在对 θ 施加一些附加条件时，于 *[23]* 中证明了定理 1.1 和定理 1.2。当 $\theta(t) = t^\varepsilon$ 对某些 $0 < \varepsilon \le 1$ 成立时，Lerner 等人在 *[20]* 中得到了定理 1.1 和定理 1.2。

接下来，我们给出多线性 θ-型 Calder´on–Zygmund 算子的交换子的定义。给定一组局部可积函数 $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$，$m$-线性交换子 T_θ 与 $\vec{b}$ 定义为

$$\begin{aligned} \left[\Sigma\vec{b}, T_\theta\right](\vec{f})(x) &= \left[\Sigma\vec{b}, T_\theta\right](f_1, \dots, f_m)(x) \\ &:= \sum_{k=1}^{m} \left[b_k, T_\theta\right]_k (f_1, \dots, f_m)(x), \end{aligned} \tag{1.5}$$

其中，每一项都是 T_θ 的第 k 个位置上 b_k 与 T_θ 的交换子；即

$$\begin{aligned} &\left[b_k, T_\theta\right]_k (f_1, \dots, f_m)(x) \\ &= b_k(x) \cdot T_\theta(f_1, \dots, f_k, \dots, f_m)(x) - T_\theta(f_1, \dots, b_k f_k, \dots, f_m)(x). \end{aligned}$$

那么，从形式上看，我们可以发现

$$\begin{aligned} &\left[\Sigma\vec{b}, T_\theta\right](\vec{f})(x) = \left[\Sigma\vec{b}, T_\theta\right](f_1, \dots, f_m)(x) \\ &= \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \sum_{k=1}^{m} \left[b_k(x) - b_k(y_k)\right] K(x, y_1, \dots, y_m) f_1(y_1) \cdots f_m(y_m)\, dy_1 \cdots dy_m. \end{aligned}$$

显然，当 $m = 1$ 时，上述定义中的算子与线性交换子 $[b, \mathcal{T}_\theta]$（见 [21, 41]）一致，其定义如下：

$$[b, \mathcal{T}_\theta](f) = b\mathcal{T}_\theta(f) - \mathcal{T}_\theta(bf).$$

现在回顾一下 BMO($\mathbb{R}^n$) 空间的定义（见 [5, 17]）。如果局部可积函数 $b(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上满足以下条件，则称其属于 BMO($\mathbb{R}^n$)：

$$\sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |b(x) - b_B|\, dx < \infty,$$

其中，上确界取遍 B in $\mathbb{R}^n$中的所有球，b_B 表示 b 在 B上的平均值，即 $b_B := \frac{1}{|B|} \int_B b(y)\, dy$。$b(x)$的 BMO 范数定义为

$$\|b\|_* := \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |b(x) - b_B|\, dx.$$

¯在多线性情形中，若对所有 $k = 1, 2, \ldots, m$，均有 $b_k \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，则称 $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathrm{BMO}^m$。为方便起见，我们采用以下记号

$$\|\vec{b}\|_{\mathrm{BMO}^m} := \max_{1\le k\le m} \|b_k\|_*, \quad \text{for } \vec{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathrm{BMO}^m.$$

2014 年，Lu 和 Zhang [22, 还证明了在假设 θ 满足更强条件 (1.6) 的情况下，(1.5) 中定义的多线性交换子 $[\Sigma\vec{b}, T_\theta]$ 的一些加权估计以及 $L\log L$ 型估计，其中若 $\vec{b} \in \mathrm{BMO}^m$。

定理 1.3 ([22])。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $[\Sigma\vec{b}, T_\theta]$ 为由 θ 型 Calder ´on–Zygmund 算子 T_θ 生成的 m 线性交换子，且 $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathrm{BMO}^m$；设 θ 满足

$$\int_0^1 \frac{\theta(t)\cdot(1+|\log t|)}{t}\,dt < \infty. \tag{1.6}$$

若 $p_1, \ldots, p_m \in (1,\infty)$ 且 $p \in (1/m, \infty)$ 满足 $1/p = \sum_{k=1}^m 1/p_k$，并且 $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m) \in A_{\vec{P}}$，则存在一个与 $\vec{b}$ 和 $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ 无关的常数 $C > 0$，使得

$$\|[\Sigma\vec{b}, T_\theta](\vec{f})\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})} \le C\cdot\|\vec{b}\|_{\mathrm{BMO}^m}\prod_{k=1}^m \|f_k\|_{L^{p_k}(w_k)},$$

其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}$。

定理 1.4（[22]）。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $[\Sigma\vec{b}, T_\theta]$ 为由 θ-型 Calder ´on–Zygmund 算子 T_θ 生成的 m-线性交换子，其中 $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in$有界平均振荡^m；设 θ 满足条件 (1.6)。若 $p_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$ 以及 $\vec{w} =$($w_1, \ldots, w_m$) $\in A_{(1,\ldots,1)}$，则对于任意给定的 $\lambda > 0$，存在一个与 $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ 和 λ 无关的常数 $C > 0$，使得

$$\begin{aligned}&\nu_{\vec{w}}\Big(\Big\{x\in\mathbb{R}^n : \big|[\Sigma\vec{b}, T_\theta](\vec{f})(x)\big| > \lambda^m\Big\}\Big)\\ &\le C\cdot\Phi\big(\|\vec{b}\|_{\mathrm{BMO}^m}\big)^{1/m}\prod_{k=1}^m\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\Big(\frac{|f_k(x)|}{\lambda}\Big)w_k(x)\,dx\bigg)^{1/m},\end{aligned}$$

其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^m w_k^{1/m}$, $\Phi(t) := t\cdot(1+\log^+ t)$，且 $\log^+ t := \max\{\log t, 0\}$。

注 1.2. 众所周知，（多线性）交换子比其底层的（多线性） θ型 Calder ´on–Zygmund 算子具有更高的奇异性程度，因此，对 $\theta(t)$ 施加更强的正则性条件是合理的。显然，我们的条件（1.6）略强于条件（1.1）。对于这类交换子，在线性情形下，需要 $\theta(t)$ 满足（1.6）

（详见 *[21, 41]* ），多线性情形同样如此。此外，直接检验可知，当 $\theta(t) = t^{\varepsilon}$ 对某个 $\varepsilon > 0$ 时，

$$\int_0^1 \frac{t^{\varepsilon} \cdot (1 + |\log t|)}{t} dt = \int_0^1 t^{\varepsilon - 1} \cdot \left(1 + \log \frac{1}{t}\right) dt < \infty.$$

因此，多线性 Calder ´on–Zygmund 算子也是满足条件 (1.6) 的多线性 θ型算子 T_{θ} ，其中 $\theta(t)$。

注 1.3. 当 $m = 1$ 时，Zhang 和 Xu 在 *[41]* 中给出了线性交换子 $[b, \mathcal{T}_{\theta}]$ 的上述加权端点估计（无权情形见 *[21]*）。如前所述，对于 $1 < p < \infty$ 和 $w \in A_p$ ， $\mathcal{T}_{\theta}$ 在 $L^p(w)$ 上有界。因此，根据 Alvarez 等人在 *[2],* 中得到的线性算子交换子的著名有界性判据，我们知道，只要 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，对于所有 $1 < p < \infty$ 和 $w \in A_p$，$[b, \mathcal{T}_{\theta}]$ 在 $L^p(w)$ 上也有界。当 $m \geq 2$、 $w_1 = \cdots = w_m \equiv 1$ 且 $\theta(t) = t^{\varepsilon}$ 对某个 $\varepsilon > 0$ 成立时，P ´erez 和 ¯Torres *[25]* 证明了：若 $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathrm{BMO}^m$，则

$$\left[\Sigma\vec{b}, T_{\theta}\right] : L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^{p_m}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$$

对于满足 $1/p = 1/p_1 + \cdots + 1/p_m$ 的 $1 < p_k < \infty$ 和 $1 < p < \infty$，其中 k =1、2、.....、m。当 $m \geq 2$ 且 $\theta(t) = t^{\varepsilon}$ 对某个 $\varepsilon > 0$ 成立时，Lerner 等人在 *[20]* 中得到了定理 1.3 和 1.4（ p 的取值范围有所扩大）。也就是说，Lerner 等人*[20]*证明了：若 $\vec{b}$ =(b_1、.....、b_m) ∈有界平均振荡，且 $\vec{w}$ =(w_1、.....、w_m) $\in A_{\vec{P}}$，则

$$\left[\Sigma\vec{b}, T_{\theta}\right] : L^{p_1}(w_1) \times \cdots \times L^{p_m}(w_m) \longrightarrow L^p(\nu_{\vec{w}})$$

对于满足 $1/p = 1/p_1 + \cdots + 1/p_m$ 的 $1 < p_k < \infty$ 和 $1/m < p < \infty$ （ p 的完整取值范围均可达到），其中 $k = 1$、2、.....、m。

注 1.4. 注意到，当 $m = 1$ 和 θ 满足条件 (1.1) 时，线性交换子 $[b, \mathcal{T}_{\theta}]$ 在 $L^p(w)$ 上对任意 $1 < p < \infty$ 和 $w \in A_p$均有界。因此，自然会问：当 $m \geq 2$时，定理 1.3 中关于 $\theta(t)$ 的条件是否可以弱化。下面我们将证明，只要 $\theta(t)$满足条件 (1.1)，定理 1.3 的结论仍然成立。需要指出的是，在多线性情形 $m \geq 2$下，本文所采用的方法不同于 *[22]*中的方法。证明的思路本质上源于 *[2, 4, 25]*。

受 [26] 和 [22], 的启发，我们将考虑 $\mathbb{R}^n$上的另一类交换子。设 $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ 是一组局部可积函数，我们将迭代交换子 $\left[\Pi\vec{b}, T_{\theta}\right]$ 定义为

$$\begin{aligned} \left[\Pi\vec{b}, T_{\theta}\right](\vec{f})(x) &= \left[\Pi\vec{b}, T_{\theta}\right](f_1, \ldots, f_m)(x) \\ &:= [b_1, [b_2, \ldots [b_{m-1}, [b_m, T_{\theta}]_m]_{m-1} \ldots]_2]_1(f_1, \ldots, f_m)(x), \end{aligned} \tag{1.7}$$

其中

$$\begin{aligned} &\left[b_k, T_{\theta}\right]_k (f_1, \ldots, f_m)(x) \\ &= b_k(x) \cdot T_{\theta}(f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_m)(x) - T_{\theta}(f_1, \ldots, b_k f_k, \ldots, f_m)(x). \end{aligned}$$

那么， $\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big]$ 可以表示如下:

$$\begin{aligned}\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big](\vec{f})(x)&=\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big](f_1,\dots,f_m)(x)\\&=\int_{(\mathbb{R}^n)^m}\prod_{k=1}^m\big[b_k(x)-b_k(y_k)\big]K(x,y_1,\dots,y_m)f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)\,dy_1\cdots dy_m.\end{aligned}\tag{1.8}$$

沿用 [26] 和 [22] 中的论证并稍作修改，在对 θ施加更强条件 (1.9) 的情况下，若 $\vec{b}\in\mathrm{BMO}^m$，我们还可以证明由 (1.7) 定义的迭代交换子 $\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big]$ 的相应结果（强型估计和弱端点估计）。

定理 1.5. 设 $m\in\mathbb{N}$ 和 $\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big]$ 是由 θ-型 Calder´on–Zygmund 算子 T_θ 生成的迭代交换子，且 $\vec{b}=(b_1,\dots,b_m)\in\mathrm{BMO}^m$；设 θ满足

$$\int_0^1\frac{\theta(t)\cdot(1+|\log t|^m)}{t}\,dt<\infty.\tag{1.9}$$

若 $p_1,\dots,p_m\in(1,\infty)$ 且 $p\in(1/m,\infty)$，其中 $1/p=\sum_{k=1}^m 1/p_k$，并且 $\vec{w}=(w_1,\dots,w_m)\in A_{\vec{P}}$，则存在一个与 $\vec{b}$和$\vec{f}=(f_1,\dots,f_m)$ 无关的常数 $C>0$，使得

$$\big\|\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big](\vec{f})\big\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})}\le C\cdot\prod_{k=1}^m\|b_k\|_*\prod_{k=1}^m\|f_k\|_{L^{p_k}(w_k)},$$

其中 $\nu_{\vec{w}}=\prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}$。

注1.5. 下文还将证明，只要 $\theta(t)$仅满足 (1.1)，定理 1.5 的结论仍然成立。

定理1.6. 设 $m\in\mathbb{N}$ 和 $\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big]$ 是由 θ型 Calder´on–Zygmund 算子 T_θ和 $\vec{b}=(b_1,\dots,b_m)\in$有界平均振荡^{m}生成的迭代交换子；设 θ满足条件 (1.9)。若 $p_k=1$, $k=1,2,\dots,m$和 $\vec{w}=(w_1,\dots,w_m)\in A_{(1,\dots,1)}$，则对于任意给定的 $\lambda>0$，存在一个与 $\vec{f}=(f_1,\dots,f_m)$和 λ 无关的常数 $C>0$，使得

$$\begin{aligned}&\nu_{\vec{w}}\Big(\Big\{x\in\mathbb{R}^n:\big|\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big](\vec{f})(x)\big|>\lambda^m\Big\}\Big)\\&\le C\cdot\prod_{k=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Phi^{(m)}\left(\frac{|f_k(x)|}{\lambda}\right)w_k(x)\,dx\right)^{1/m},\end{aligned}$$

其中 $\nu_{\vec{w}}=\prod_{k=1}^m w_k^{1/m}$, $\Phi(t):=t\cdot(1+\log^+ t)$ 且 $\Phi^{(m)}:=\overbrace{\Phi\circ\cdots\circ\Phi}^{m}$。

注1.6. 文献 *[26]* 证明了，当 $\theta(t)=t^\varepsilon$ 对某个 $\varepsilon>0$ 成立时，定理1.6中的估计是尖锐的，具体而言，对于任意 $k<m$， $\Phi^{(m)}$ 都不能被$\Phi^{(k)}$ 替代。

本文旨在研究加权混合空间背景下的多线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子及其与 BMO 函数的交换子的性质。

2 记号与预备知识

2.1 多重权

我们赋予 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 欧几里得范数 $|\cdot|$ 和勒贝格测度 dx。对于任意 $r>0$ 和 $y\in\mathbb{R}^n$，令 $B(y,r)=\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x-y|<r\}$ 表示以 y 为中心、半径为 r 的开球，$B(y,r)^{\complement}=\mathbb{R}^n\backslash B(y,r)$ 表示其补集，而 $|B(y,r)|$ 表示球 $B(y,r)$ 的勒贝格测度。我们还使用记号 $\chi_{B(y,r)}$ 表示 $B(y,r)$ 的特征函数。对于某个 $\lambda>0$，λB 表示与 B 同心且半径为其 λ 倍的球。

权函数 ω 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的非负局部可积函数，且几乎处处取值于 $(0,+\infty)$。首先回顾穆肯豪普特 A_p 权函数类。若存在常数 $C>0$，使得

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-p'/p}\,dx\right)^{1/p'}\le C$$

对 $\mathbb{R}^n$ 中的每个球 B 都成立。这里及下文中，p' 是 p 的共轭指数，满足 $1/p+1/p'=1$。对于 $p=1$，若存在常数 $C>0$，使得 ω 属于类 A_1，则称

$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)\,dx\le C\cdot\operatorname*{ess\,inf}_{x\in B}\omega(x)$$

对 $\mathbb{R}^n$ 中的每个球 B 都成立。由于 A_p 类关于 p 递增，权函数的 A_∞ 类可自然地定义为

$$A_\infty:=\bigcup_{1\le p<\infty}A_p.$$

此外，对于 $\omega\in A_\infty$，应用中常用以下刻画：存在正常数 C 和 δ，使得对任意球 B 以及包含于 B 中的任意可测集 E，

$$\frac{\omega(E)}{\omega(B)}\le C\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^{\delta},\tag{2.1}$$

其中，对于任意给定的勒贝格可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$，有 $\omega(E):=\int_E\omega(x)\,dx$。如果某个权函数 ω 满足倍增条件，简记为 $\omega\in\Delta_2$，则存在一个绝对常数 $C>0$，使得

$$\omega(2B)\le C\,\omega(B)\tag{2.2}$$

对 $\mathbb{R}^n$ 中的任意球 B 均成立。如果 $\omega\in A_p$ 且 $1\le p<\infty$（或 $\omega\in A_\infty$），那么我们知道 $\omega\in\Delta_2$。

最近，Lerner 等人在 [20] 中建立了适用于多线性 Calder´on–Zygmund 奇异积分算子的多重权理论。

文献 [20] 定义了一种更新、更精细的多线性极大函数，并用它刻画多重 $A_{\vec{P}}$ 权类，进而为多线性 Calder´on–Zygmund 算子及其与 BMO 函数的交换子建立了一些加权范数不等式。现在我们来回顾多重权的定义。对于给定的 m 指数 $p_1,\dots,p_m \in [1,\infty)$，我们常记 $\vec{P}$ 为向量 $\vec{P}=(p_1,\dots,p_m)$，并记 p 为由 $1/p:=\sum_{k=1}^m 1/p_k$ 确定的数，其中 $p\in[1/m,\infty)$。给定 $\vec{w}=(w_1,\dots,w_m)$，令

$$\nu_{\vec{w}} := \prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}.$$

我们称 $\vec{w}$ 满足多线性 $A_{\vec{P}}$ 条件，如果它满足

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B \nu_{\vec{w}}(x)\,dx\right)^{1/p} \prod_{k=1}^m \left(\frac{1}{|B|}\int_B w_k(x)^{-p_k'/p_k}\,dx\right)^{1/p_k'} < \infty. \tag{2.3}$$

当 $p_k=1$时，我们记 $p_k'=\infty$，并将 (2.3) 中的条件 $\left(\frac{1}{|B|}\int_B w_k(x)^{-p_k'/p_k}\,dx\right)^{1/p_k'}$理解为 $\left(\inf_{x\in B} w_k(x)\right)^{-1}$。特别地，当每个 $p_k=1$,$k=1,2,\dots,m$ 时，我们记 $A_{\vec{1}}=A_{(1,\dots,1)}$。容易验证，对于每个满足 $1\le p_k<\infty$ 的 $\vec{P}=(p_1,\dots,p_m)$，$A_{(1,\dots,1)}$包含于 $A_{\vec{P}}$中；然而，类 $A_{\vec{P}}$ 关于自然偏序并非递增的。这意味着，对于满足 $p_k\le q_k$、$k=1,2,\dots,m$的两个向量 $\vec{P}=(p_1,\dots,p_m)$ 和 $\vec{Q}=(q_1,\dots,q_m)$，下述关系可能并不成立：$A_{\vec{P}}\subset A_{\vec{Q}}$，参见 [20, 注 7.3]。多线性 Riesz 变换是多线性 Calder´on–Zygmund 奇异积分算子的典型例子。[20, 定理 3.11] 表明，类 $A_{\vec{P}}$ 也可以通过所有多线性 Riesz 变换在加权 Lebesgue 空间上的有界性来刻画。此外，一般而言，条件 $\vec{w}\in A_{\vec{P}}$ 并不蕴含 $w_k\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 对任意 $1\le k\le m$ 成立（参见 [20,注 7.2]），但我们有如下对类 $A_{\vec{P}}$的刻画。

引理 2.1（[20]）。设 $p_1,\dots,p_m\in[1,\infty)$ 和 $1/p=\sum_{k=1}^m 1/p_k$。那么 $\vec{w}=(w_1,\dots,w_m)\in A_{\vec{P}}$ 当且仅当

$$\begin{cases} \nu_{\vec{w}}\in A_{mp}, \\ w_k^{1-p_k'}\in A_{mp_k'}, \quad k=1,2,\dots,m, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中 $\nu_{\vec{w}}=\prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}$，并且在 $p_k=1$ 的情形下，条件 $w_k^{1-p_k'}\in A_{mp_k'}$ 理解为 $w_k^{1/m}\in A_1$。

注 2.1. 显然，当 $m=1$, $A_{\vec{P}}$ 时，它退化为经典的 A_p 穆肯豪普特类。注意，在线性情形 $m=1$ 中，(2.4) 中包含的两个条件表示同一个 A_p 条件。然而，在多线性情形 $m\ge 2$中，(2.4) 中的两个条件彼此都不蕴含，更多详情见 *[20,* 注 7.*1]* 。

给定定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的权函数 ω，通常，加权Lebesgue空间$L^p(\omega)$ 对于 $0 < p < \infty$ 定义为所有定义在 $\mathbb{R}^n$ 上且满足以下条件的函数 f 所组成的集合:

$$\|f\|_{L^p(\omega)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)\, dx \right)^{1/p} < \infty.$$

我们也将 $WL^p(\omega)$ $(0 < p < \infty)$ 记为由所有定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 f 组成的加权弱Lebesgue空间，满足

$$\|f\|_{WL^p(\omega)} := \sup_{\lambda>0} \lambda \cdot \Big[\omega\big(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}\big)\Big]^{1/p} < \infty.$$

2.2 Orlicz空间与Luxemburg范数

接下来，我们回顾奥利奇空间理论中的一些基本定义和事实。有关这些空间的更多信息，请参阅书籍 [28]。若函数 $\mathcal{A}(t) : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 连续、凸、严格递增，且满足 $\mathcal{A}(0) = 0$ 以及 $\mathcal{A}(t) \to +\infty$，当 $t \to +\infty$ 时，则称其为杨函数。给定一个杨函数 $\mathcal{A}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 中的一个球 B，我们考虑函数 f 在球 B 上的 $\mathcal{A}$-平均值，其定义如下（Luxemburg范数）：

$$\|f\|_{\mathcal{A},B} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|B|} \int_B \mathcal{A}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \le 1 \right\}.$$

当 $\mathcal{A}(t) = t^p$, $1 \le p < \infty$ 时，容易看出

$$\|f\|_{\mathcal{A},B} = \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p};$$

也就是说，Luxemburg范数与归一化的 L^p 范数一致。对于每个杨函数 $\mathcal{A}$，都可以定义其共轭函数 $\mathcal{A}$，记作 $\bar{}$，定义如下

$$\bar{\mathcal{A}}(s) := \sup_{0 \le t < \infty} \big[st - \mathcal{A}(t) \big], \quad 0 \le s < \infty.$$

$\bar{}$可以证明，这样的 $\mathcal{A}$ 也是一个杨函数。直接计算可得，对所有 $t > 0$,

$$t \le \mathcal{A}^{-1}(t) \bar{\mathcal{A}}^{-1}(t) \le 2t.$$

那么，对于给定的任意球 B，在 $\mathbb{R}^n$中，Orlicz空间中的广义 H¨older 不等式成立:

$$\frac{1}{|B|} \int_B \big| f(x) \cdot g(x) \big| \, dx \le 2 \|f\|_{\mathcal{A},B} \|g\|_{\bar{\mathcal{A}},B}.$$

一个值得关注的特殊情形，尤其是本文所研究的情形，是杨函数$\Phi(t) = t \cdot (1 + \log^+ t)$, 我们知道，其互补Young函数为$\bar{}$给定的 $\Phi(t) \approx \exp(t) - 1$。相应的平均值记为

$$\|f\|_{\Phi,B} = \|f\|_{L \log L,B}, \qquad \text{and} \qquad \|g\|_{\bar{\Phi},B} = \|g\|_{\exp L,B}.$$

因此，由上述Orlicz空间中的广义H¨older不等式可得

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(x)\cdot g(x)|\,dx \le 2\|f\|_{L\log L,B}\|g\|_{\exp L,B}. \tag{2.5}$$

为了获得加权混合空间乘积上多线性交换子和迭代交换子的端点弱型估计，我们需要通过平均卢森堡范数定义函数 f 在球 B 上的加权 $\mathcal{A}$ 平均值；也就是说，给定杨函数 $\mathcal{A}$ 和 $\omega\in A_\infty$，我们定义（见 [28, 40]）

$$\|f\|_{\mathcal{A}(\omega),B} := \inf\left\{\sigma>0 : \frac{1}{\omega(B)}\int_B \mathcal{A}\left(\frac{|f(x)|}{\sigma}\right)\cdot\omega(x)\,dx \le 1\right\}.$$

当 $\mathcal{A}(t) = t$ 时，我们将关于 ω 的平均卢森堡范数记为 $\|\cdot\|_{L(\omega),\,B}$；当 $\Phi(t) = t\cdot(1+\log^+ t)$ 时，将此范数记为 $\|\cdot\|_{L\log L(\omega)\,B}$。$\bar{}$ $\Phi(t)$ 的互补Young函数为 $\Phi(t) \approx \exp(t)-1$，相应的平均卢森堡范数记为 $\|\cdot\|_{\exp L(\omega),\,B}$。对不等式 (2.5) 的证明进行分析可知，在加权情形下同样成立。对于 $\omega\in A_\infty$ 以及 $\mathbb{R}^n$ 中的任意球 B，我们还可以证明，在加权框架下以下广义H¨older不等式成立（例如见 [40] ）。

$$\frac{1}{\omega(B)}\int_B |f(x)\cdot g(x)|\omega(x)\,dx \le C\|f\|_{L\log L(\omega),B}\|g\|_{\exp L(\omega),B}. \tag{2.6}$$

该估计将在我们主要结果的证明中使用。

2.3 加权混合空间

设 $1\le p,q\le\infty$。若可测函数 $f\in L^p{}_{\text{局部}}(\mathbb{R}^n)$ 满足函数 $y\mapsto\|f(\cdot)\cdot\chi_{B(y,1)}\|_{L^p}$ 属于 $L^q(\mathbb{R}^n)$，则称其属于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 和 $L^q(\mathbb{R}^n)$（连续情形）上的 Wiener 混合空间 $(L^p,L^q)(\mathbb{R}^n)$。定义

$$(L^p,L^q)(\mathbb{R}^n) := \left\{f : \|f\|_{(L^p,L^q)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left[\|f\cdot\chi_{B(y,1)}\|_{L^p}\right]^q dy\right)^{1/q} < \infty\right\}.$$

容易看出，当 $p=q$ 时，该空间 $(L^p,L^q)(\mathbb{R}^n)$ 与通常的 Lebesgue 空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 一致。更多信息也可参阅 Fournier–Stewart [11] 和 Holland [16] 的综述论文。一般而言，设$1\le p,q,\alpha\le\infty$。我们将 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 与$L^q(\mathbb{R}^n)$ 的混合空间 $(L^p,L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 定义为满足 $f\in L^p{}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\|f\|_{(L^p,L^q)_\alpha}<\infty$ 的所有可测函数 f 所构成的集合，其中

$$\begin{aligned}\|f\|_{(L^p,L^q)^\alpha} &:= \sup_{r>0}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[|B(y,r)|^{1/\alpha-1/p-1/q}\|f\cdot\chi_{B(y,r)}\|_{L^p}\right]^q dy\right\}^{1/q}\\ &= \sup_{r>0}\left\||B(y,r)|^{1/\alpha-1/p-1/q}\|f\cdot\chi_{B(y,r)}\|_{L^p}\right\|_{L^q},\end{aligned}$$

当 $p=\infty$ 或 $q=\infty$ 时作通常的相应修正。这个混合空间（连续情形）自然出现在调和分析中，最初由 Fofana 于 [10] 引入。事实证明，空间 $(L^p,L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 与 Lebesgue 空间和 Morrey 空间密切相关。调和分析中的许多有用结果（例如傅里叶乘子，以及极大算子和积分算子的有界性性质）已在 Lebesgue 空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中广为人知，并已扩展到这一空间的框架下。正如 [10] 中所证明的，空间 $(L^p,L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 非平凡当且仅当 $p\le\alpha\le q$；因此，在本文余下部分中，我们始终假设条件 $p\le\alpha\le q$ 得以满足。

注意

- 对于 $1\le p\le\alpha\le q\le\infty$，容易看出，如果令 $r=1$，则 $(L^p,L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)\subseteq(L^p,L^q)(\mathbb{R}^n)$；
- 如果 $1\le p<\alpha$ 且 $q=\infty$，那么 $(L^p,L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 就是经典莫雷空间 $\mathcal{L}^{p,\,\kappa}(\mathbb{R}^n)$，其定义为（取 $\kappa=1-p/\alpha$，参见 [24, 1]）

$$\mathcal{L}^{p,\kappa}(\mathbb{R}^n):=\Big\{f:\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\kappa}}<\infty\Big\},$$

其中

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\kappa}}:=\sup_{y\in\mathbb{R}^n,r>0}\left(\frac{1}{|B(y,r)|^\kappa}\int_{B(y,r)}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p};$$

- 如果 $p=\alpha$ 且 $q=\infty$，那么 $(L^p,L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 就化为通常的 Lebesgue空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$。

在 [33]（另见 [34, 35]）中，我们考虑了混合空间 $(L^p,L^q)^\alpha(\omega;\,\mu)$ 的一个加权版本，并引入了若干新的加权混合空间类。我们先给出加权混合空间的定义。此外，为了处理多线性情形 $m\ge2$，我们将对所有 $0<p<\infty$ 定义这些加权空间。

定义 2.1. 设 $0<p\le\alpha\le q\le\infty$，且 ω、μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的两个权函数。加权混合空间 $(L^p,L^q)^\alpha(\omega;\,\mu)$ 定义为满足下列条件的所有局部可积函数 f 的集合：

$$\begin{aligned}\|f\|_{(L^p,L^q)^\alpha(\omega;\mu)}&:=\sup_{r>0}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\Big[\omega(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\|f\cdot\chi_{B(y,r)}\|_{L^p(\omega)}\Big]^q\mu(y)\,dy\right\}^{1/q}\\&=\sup_{r>0}\Big\|\omega(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\|f\cdot\chi_{B(y,r)}\|_{L^p(\omega)}\Big\|_{L^q(\mu)}<\infty,\end{aligned}$$

当 $q=\infty$ 时，作通常的相应修改，其中 $\omega(B(y,r))=\int_{B(y,\,r)}\omega(x)\,dx$ 是 $B(y,r)$ 的加权测度。

定义弱空间有一种常规方法。

定义 2.2. 设 $0 < p \le \alpha \le q \le \infty$，并设 ω, μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的两个权函数。加权弱混合空间 $(WL^p, L^q)^\alpha(\omega;\, \mu)$ 定义为所有满足以下条件的可测函数 f 的集合：

$$\begin{aligned}\|f\|_{(WL^p,L^q)^\alpha(\omega;\mu)} &:= \sup_{r>0}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[\omega(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\|f\cdot\chi_{B(y,r)}\|_{WL^p(\omega)}\right]^q\mu(y)\,dy\right\}^{1/q}\\ &= \sup_{r>0}\left\|\omega(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\|f\cdot\chi_{B(y,r)}\|_{WL^p(\omega)}\right\|_{L^q(\mu)} < \infty,\end{aligned}$$

当 $q = \infty$ 时，作通常的相应修改。

注意到

- 对于 $1 \le p \le \alpha \le q \le \infty$，我们可以看到，$(L^p, L^q)^\alpha(\omega;\, \mu)$ 关于范数 $\|\cdot\|_{(L^p,L^q)^\alpha(\omega;\mu)}$ 构成一个Banach函数空间，而 $(WL^p, L^q)^\alpha(\omega;\, \mu)$ 关于拟范数 $\|\cdot\|_{(WL^p,L^q)^\alpha(\omega;\mu)}$ 构成一个拟Banach空间；

- 当 $\mu \equiv 1$ 时，加权空间 $(L^p, L^q)^\alpha(\omega;\, \mu)$ 由 Feuto 于 [8] 引入（另见 [7, 9]）；当 $\mu \equiv 1$ 且 $p = 1$ 时，加权弱空间 $(WL^p, L^q)^\alpha(\omega;\, \mu)$ 也由 Feuto 于 [8] 定义；

- 若 $1 \le p < \alpha$ 且 $q = \infty$，则 $(L^p, L^q)^\alpha(\omega;\, \mu)$ 正是加权Morrey空间 $\mathcal{L}^{p,\kappa}(\omega)$，该空间最初由 Komori 和 Shirai 于 [19] 定义并研究（其中 $\kappa = 1 - p/\alpha$）。

$$\mathcal{L}^{p,\kappa}(\omega) := \left\{f : \|f\|_{\mathcal{L}^{p,\kappa}(\omega)} < \infty\right\},$$

其中

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\kappa}(\omega)} := \sup_{y\in\mathbb{R}^n, r>0}\left(\frac{1}{\omega(B(y,r))^\kappa}\int_{B(y,r)}|f(x)|^p\omega(x)\,dx\right)^{1/p},$$

且 $(WL^p, L^q)^\alpha(\omega;\, \mu)$ 正是由（其中 $\kappa = 1 - p/\alpha$，见 [32]）定义的加权弱 Morrey空间 $W\mathcal{L}^{p,\kappa}(\omega)$

$$W\mathcal{L}^{p,\kappa}(\omega) := \left\{f : \|f\|_{W\mathcal{L}^{p,\kappa}(\omega)} < \infty\right\},$$

其中

$$\|f\|_{W\mathcal{L}^{p,\kappa}(\omega)} := \sup_{y\in\mathbb{R}^n, r>0}\sup_{\lambda>0}\frac{1}{\omega(B(y,r))^{\kappa/p}}\lambda\cdot\left[\omega\left(\{x\in B(y,r) : |f(x)| > \lambda\}\right)\right]^{1/p};$$

- 若 $p = \alpha$ 且 $q = \infty$，则 $(L^p, L^q)^\alpha(\omega;\, \mu)$ 化为加权Lebesgue空间 $L^p(\omega)$，而 $(WL^p, L^q)^\alpha(\omega;\, \mu)$ 化为加权弱Lebesgue空间 $WL^p(\omega)$。

为了处理交换子的端点情形，我们必须考虑以下 $L\log L$ 型空间。按照 [33], , 我们现在引入如下的 $L\log L$ 型新加权混合空间。

定义 2.3. 设 $p=1$、$1\le\alpha\le q\le\infty$，且 ω、μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的两个权。我们用 $(L\log L, L^q)^\alpha(\omega;\,\mu)$ 表示 $L\log L$ 型加权混合空间，即定义在 $\mathbb{R}^n$ 上且范数$\|f\|_{(L\log L,\ L^q)^\alpha(\omega;\ \mu)}$ 有限的所有局部可积函数 f 所构成的空间。

$$(L\log L, L^q)^\alpha(\omega;\mu):=\left\{f:\|f\|_{(L\log L, L^q)^\alpha(\omega;\mu)}<\infty\right\},$$

其中

$$\begin{aligned}\|f\|_{(L\log L, L^q)^\alpha(\omega;\mu)}:=&\sup_{r>0}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[\omega(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\|f\|_{L\log L(\omega),B(y,r)}\right]^q\mu(y)\,dy\right\}^{1/q}\\=&\sup_{r>0}\left\|\omega(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\|f\|_{L\log L(\omega),B(y,r)}\right\|_{L^q(\mu)}.\end{aligned}$$

注意，对所有 $t>0$，$t\le t\cdot(1+\log^+ t)$。于是，对于任意给定的球$B(y,r)\subset\mathbb{R}^n$ 和 $\omega\in A_\infty$，我们有

$$\|f\|_{L(\omega),B(y,r)}\le\|f\|_{L\log L(\omega),B(y,r)}$$

根据定义。这意味着下列不等式（可视为广义詹森不等式）

$$\|f\|_{L(\omega),B(y,r)}=\frac{1}{\omega(B(y,r))}\int_{B(y,r)}|f(x)|\cdot\omega(x)\,dx\le\|f\|_{L\log L(\omega),B(y,r)}\quad(2.7)$$

对任意球 $B(y,r)\subset\mathbb{R}^n$均成立。因此，对于 $1\le\alpha\le q\le\infty$ 和 $\omega\in A_\infty$，由 (2.7) 还可得到以下包含关系：

$$(L\log L, L^q)^\alpha(\omega;\mu)\subset(L^1, L^q)^\alpha(\omega;\mu).$$

近年来，经典调和分析领域的许多研究致力于加权混合空间中涉及若干积分算子的范数不等式，例如见 [6, 7, 8, 9, 38]。这些结果是加权 Lebesgue 空间中著名相关结果的推广。受上述研究启发，探讨多线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子及其相应交换子在加权混合空间的乘积上的性质颇有意义。本文旨在对此问题给出肯定回答。我们将证明：已知在带有多重权的加权 Lebesgue 空间乘积上有界的多线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子 T_θ，当 $1<p_k<\infty$ 对 $k=1,2,\dots,m$ 成立时，也有界地映射 $(L^{p_1},L^{q_1})^{\alpha_1}(w_1;\,\mu)\times(L^{p_2},L^{q_2})^{\alpha_2}(w_2;\,\mu)\times\cdots\times(L^{p_m},L^{q_m})^{\alpha_m}(w_m;\,\mu)$ 到 $(L^p,L^q)^\alpha(\nu_{\vec{w}};\,\mu)$；当 $1\le p_k<\infty$ 对 $k=1,2,\dots,m$ 成立且至少一个 $p_k=1$时，则有界地映射 $(L^{p_1},L^{q_1})^{\alpha_1}(w_1;\,\mu)\times(L^{p_2},L^{q_2})^{\alpha_2}(w_2;\,\mu)\times\cdots\times(L^{p_m},L^{q_m})^{\alpha_m}(w_m;\,\mu)$ 到 $(WL^p,L^q)^\alpha(\nu_{\vec{w}};\,\mu)$。此外，我们还得到了加权混合空间背景下两类多线性交换子和迭代交换子的加权强型与弱型端点估计。

3 主要结果

我们将把 [22] 中关于 m-线性 θ 型 Calder´on– Zygmund 算子的结果推广到带有多重权的加权混合空间的乘积上。关于多线性θ型 Calder´on–Zygmund 算子的有界性，我们的前两个结果如下。

定理 3.1. 设 $m \geq 2$ 是一个满足条件 (1.1) 的 m-线性 θ 型 Calder´ón–Zygmund 算子，其中 θ 。假设 $1 < p_k \leq \alpha_k < q_k < \infty$、$k = 1$、2、.....、$m$ 以及 $p \in (1/m$、$\infty)$，其中 $1/p = \sum_{k=1}^{m} 1/p_k$、$q \in [1, \infty)$ 与 $1/q = \sum_{k=1}^{m} 1/q_k$ 和 $1/\alpha = \sum_{k=1}^{m} 1/\alpha_k$；$\vec{w} = (w_1$、.....、$w_m) \in A_{\vec{P}}$，其中 w_1、.....、$w_m \in A_\infty$，以及 $\mu \in \Delta_2$。此外，假设

$$p_1\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{q_1}\right) = p_2\left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{q_2}\right) = \cdots = p_m\left(\frac{1}{\alpha_m} - \frac{1}{q_m}\right). \tag{3.1}$$

$\vec{}$那么存在一个常数 $C > 0$，使得对所有 $f = (f_1$、.....、$f_m)$，有 $\in (L^{p_1}, L^{q_1})^{\alpha_1}(w_1; \mu) \times \cdots \times (L^{p_m}, L^{q_m})^{\alpha_m}(w_m; \mu)$，

$$\left\|T_\theta(\vec{f})\right\|_{(L^p, L^q)^\alpha(\nu_{\vec{w}}; \mu)} \leq C \prod_{k=1}^{m} \left\|f_k\right\|_{(L^{p_k}, L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k; \mu)}$$

与 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^{m} w_k^{p/p_k}$。

定理 3.2. 设 $m \geq 2$ 和 T_θ 是满足条件 (1.1) 且具有 θ 的 m-线性 θ-型 Calder´on–Zygmund 算子。假设 $1 \leq p_k \leq \alpha_k < q_k < \infty$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\min\{p_1, \ldots, p_m\} = 1$ 和 $p \in [1/m, \infty)$，其中 $1/p = \sum_{k=1}^{m} 1/p_k$, $q \in [1, \infty)$，且 $1/q = \sum_{k=1}^{m} 1/q_k$ 和 $1/\alpha = \sum_{k=1}^{m} 1/\alpha_k$；$\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m) \in A_{\vec{P}}$，其中 $w_1, \ldots, w_m \in A_\infty$ 和 $\mu \in \Delta_2$。此外，假设

$$p_1\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{q_1}\right) = p_2\left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{q_2}\right) = \cdots = p_m\left(\frac{1}{\alpha_m} - \frac{1}{q_m}\right).$$

$\vec{}$那么存在一个常数 $C > 0$，使得对所有 $f = (f_1, .., f_m) \in (L^{p_1}, L^{q_1})^{\alpha_1}(w_1; \mu) \times \cdots \times (L^{p_m}, L^{q_m})^{\alpha_m}(w_m; \mu)$，

$$\left\|T_\theta(\vec{f})\right\|_{(WL^p, L^q)^\alpha(\nu_{\vec{w}}; \mu)} \leq C \prod_{k=1}^{m} \left\|f_k\right\|_{(L^{p_k}, L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k; \mu)}$$

其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^{m} w_k^{p/p_k}$。

下一个定理讨论多线性交换子$\left[\Sigma\vec{b}, T_\theta\right]$ 的范数不等式，其中 $\vec{b} \in$ 有界平均振荡^m。

定理 3.3。设 $m \geq 2$ 和 $\left[\Sigma\vec{b}, T_\theta\right]$ 是 θ 型 Calderón–Zygmund 算子 T_θ 的 m 线性交换子，其中 T_θ 满足条件 (1.1)，且 $\vec{b} \in$ 属于有界平均振荡 ^{m}。假设 $1 < p_k \leq \alpha_k < q_k < \infty$、$k = 1$、2、.....、$m$ 和

$p \in (1/m, \infty)$ 满足 $1/p = \sum_{k=1}^m 1/p_k$, $q \in [1, \infty)$, 且 $1/q = \sum_{k=1}^m 1/q_k$ 和 $1/\alpha = \sum_{k=1}^m 1/\alpha_k$; $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m) \in A_{\vec{P}}$ 满足 $w_1, \ldots, w_m \in A_\infty$ 和 $\mu \in \Delta_2$。进一步假设 (3.1) 成立。那么存在常数 $C > 0$，使得对于所有 $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m) \in (L^{p_1}, L^{q_1})^{\alpha_1}(w_1; \mu) \times \cdots \times (L^{p_m}, L^{q_m})^{\alpha_m}(w_m; \mu)$,

$$\left\| \left[\Sigma \vec{b}, T_\theta\right](\vec{f}) \right\|_{(L^p, L^q)^\alpha(\nu_{\vec{w}}; \mu)} \le C \prod_{k=1}^m \left\| f_k \right\|_{(L^{p_k}, L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k; \mu)}$$

与 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}$。

对于端点情形 $p_1 = \cdots = p_m = 1$，我们还将证明多重权加权混合空间上多线性交换子 $\left[\Sigma \vec{b}, T_\theta\right]$ 的弱型 $L \log L$ 估计。

定理 3.4. 设 $m \ge 2$ 和 $\left[\Sigma \vec{b}, T_\theta\right]$ 是满足条件 (1.6) 且 $\vec{b} \in$ 有界平均振荡的 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子 T_θ 的 m 线性交换子。假设 $p_k = 1$、$1 \le \alpha_k < q_k < \infty$、$k = 1$、2、……、$m$ 和 $p = 1/m, q \in [1, \infty)$ 满足 $1/q = \sum_{k=1}^m 1/q_k$ 和 $1/\alpha = \sum_{k=1}^m 1/\alpha_k$; $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m) \in A_{(1,\ldots,1)}$ 满足 w_1、……、$w_m \in A_\infty$ 和 $\mu \in \Delta_2$。进一步假设 (3.1) 成立。那么对于任意给定的 $\lambda > 0$ 以及任意球 $B(y, r) \subset \mathbb{R}^n$，若 $(y, r) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$，则存在一个与 $f = (f_1, \ldots, f_m)$、$B(y, r)$ 和 λ 无关的常数 $C > 0$，使得

$$\left\| \nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha - m - 1/q} \cdot \left[\nu_{\vec{w}} \left(\left\{ x \in B(y,r) : \left| \left[\Sigma \vec{b}, T_\theta\right](\vec{f})(x) \right| > \lambda^m \right\} \right) \right]^m \right\|_{L^q(\mu)}$$
$$\le C \cdot \prod_{k=1}^m \left\| \Phi\left(\frac{|f_k|}{\lambda} \right) \right\|_{(L \log L, L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k; \mu)},$$

其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^m w_k^{1/m}$ 和 $\Phi(t) := t \cdot (1 + \log^+ t)$。这里，范数 $\| \cdot \|_{L^q(\mu)}$ 是关于变量 y 取的，即，

$$\left\| \nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha - m - 1/q} \cdot \left[\nu_{\vec{w}} \left(\left\{ x \in B(y,r) : \left| \left[\Sigma \vec{b}, T_\theta\right](\vec{f})(x) \right| > \lambda^m \right\} \right) \right]^m \right\|_{L^q(\mu)}$$
$$= \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha - m - 1/q} \cdot \left[\nu_{\vec{w}} \left(\left\{ x \in B(y,r) : \left| \left[\Sigma \vec{b}, T_\theta\right](\vec{f})(x) \right| > \lambda^m \right\} \right) \right]^m \right]^q \mu(y)\, dy \right\}^{1/q}.$$

注 3.1. 根据上述定义和定理 3.4，我们可以粗略地说，多线性交换子 $\left[\Sigma \vec{b}, T_\theta\right]$ 从 $(L \log L, L^{q_1})^{\alpha_1}(w_1; \mu) \times \cdots \times (L \log L, L^{q_m})^{\alpha_m}(w_m; \mu)$ 到 $(WL^p, L^q)^\alpha(\nu_{\vec{w}}; \mu)$，其中 $p = 1/m$。

注 3.2. 值得指出的是，上述结果由第二作者在 *[33]* when $m = 1$ 中得到。此外，在离散情形下，Nakai 等人在 *[18]* 中证明了，当 $1 < p, q < \infty$ 时，定义在加权 Wiener 混合空间 $(L^p, \ell^q_w)(\mathbb{R}^n)$ 上的线性 θ-型 Calder´on–Zygmund 算子的有界性。当 $\theta(t) = t^\varepsilon$ 对某个 $\varepsilon > 0$ 成立时，Wang 和 Liu 在 *[36]* 和 *[37]* 中得到了定理 3.1、3.2 和 3.3 的结论（在某些特殊情形下）。

下文中，字母 C 始终表示一个与主要参数无关的正常数，且它在每次出现时不一定相同。当某个常数依赖于一些重要参数 $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ 时，我们用 $C(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ 表示它。符号 $X \lesssim Y$ 表示存在常数 $C > 0$，使得 $X \leq CY$。我们用符号 $X \approx Y$ 表示 X 和 Y 等价；也就是说，存在两个与 X、Y 无关的正常数 C_1, C_2，使得 $C_1 Y \leq X \leq C_2 Y$。

4 定理 3.1 和定理 3.2 的证明

本节将证明定理 3.1 和定理 3.2。在证明本节的主要定理之前，我们先陈述以下重要结果，但不予证明（见 [13] 和 [5]）。

引理 4.1（[13]）。设 $\{f_k\}_{k=1}^N$ 是一个由 $L^p(\nu)$ 函数组成的序列，满足 $0 < p < \infty$ 和 $\nu \in A_\infty$。则有

$$\Big\| \sum_{k=1}^N f_k \Big\|_{L^p(\nu)} \leq \mathcal{C}(p, N) \sum_{k=1}^N \|f_k\|_{L^p(\nu)},$$

其中 $\mathcal{C}(p, N) = \max\left\{1, N^{\frac{1-p}{p}}\right\}$。更具体地，$\mathcal{C}(p, N) = 1$，当 $1 \leq p < \infty$ 时；而 $\mathcal{C}(p, N) = N^{\frac{1-p}{p}}$，当 $0 < p < 1$ 时。

引理 4.2（[13]）。设 $\{f_k\}_{k=1}^N$ 是一个由 $WL^p(\nu)$ 函数组成的序列，满足 $0 < p < \infty$ 和 $\nu \in A_\infty$。则有

$$\Big\| \sum_{k=1}^N f_k \Big\|_{WL^p(\nu)} \leq \mathcal{C}'(p, N) \sum_{k=1}^N \|f_k\|_{WL^p(\nu)},$$

其中 $\mathcal{C}'(p, N) = \max\left\{N, N^{\frac{1}{p}}\right\}$。更具体地，当 $1 \leq p < \infty$ 时，$\mathcal{C}'(p, N) = N$；当 $0 < p < 1$ 时，$\mathcal{C}'(p, N) = N^{\frac{1}{p}}$。

引理 4.3 ([5])。设 $\omega \in A_\infty$。则对任意球 $\mathcal{B}$ in $\mathbb{R}^n$，下述反向 Jensen 公式成立。

$$\int_{\mathcal{B}} \omega(x)\, dx \leq C|\mathcal{B}| \cdot \exp\left(\frac{1}{|\mathcal{B}|} \int_{\mathcal{B}} \log \omega(x)\, dx \right).$$

现在我们可以证明定理 3.1 和定理 3.2。

定理 3.1 的证明。设 $1 < p_k \leq \alpha_k < q_k < \infty$ 和 $f = (f_1, \dots, f_m)$ 属于 $(L^{p_1}, L^{q_1})^{\alpha_1}(w_1; \mu) \times \cdots \times (L^{p_m}, L^{q_m})^{\alpha_m}(w_m; \mu)$，其中 $(w_1, \dots, w_m) \in A_{\vec{P}}$ 且 $\mu \in \Delta_2$。固定 $y \in \mathbb{R}^n$ 和 $r > 0$，并令 $B = B(y, r)$ 表示以 y 为中心、半径为 r 的球，$2B = B(y, 2r)$。对任意 $1 \leq k \leq m$，将 f_k 分解为

$$f_k = f_k \cdot \chi_{2B} + f_k \cdot \chi_{(2B)^\complement} := f_k^0 + f_k^\infty;$$

于是我们写作

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{m} f_k(z_k) &= \prod_{k=1}^{m}\Big(f_k^0(z_k)+f_k^\infty(z_k)\Big)\\ &= \sum_{\beta_1,\dots,\beta_m\in\{0,\infty\}} f_1^{\beta_1}(z_1)\cdots f_m^{\beta_m}(z_m)\\ &= \prod_{k=1}^{m} f_k^0(z_k)+\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}} f_1^{\beta_1}(z_1)\cdots f_m^{\beta_m}(z_m),\end{aligned}$$

其中

$\mathfrak{L}:=\big\{(\beta_1,\dots,\beta_m):\beta_k\in\{0,\infty\},\text{there is at least one }\beta_k\neq 0, 1\le k\le m\big\}$; 也就是说， $\sum$ 中的每一项都至少包含一个 $\beta_k\neq 0$。由于 T_θ 是一个 m线性$\vec{}$算子，因此 $T_\theta(f)$可以写成

$$T_\theta(\vec{f})=T_\theta(f_1^0,\dots,f_m^0)(x)+\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}} T_\theta(f_1^{\beta_1},\dots,f_m^{\beta_m})(x),$$

对于任意固定的 $x\in B(y,r)$。利用引理 4.1($N=2^m$)，我们有

$$\begin{aligned}&\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\big\|T_\theta(\vec{f})\cdot\chi_{B(y,r)}\big\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})}\\ &=\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\bigg(\int_{B(y,r)}\big|T_\theta(f_1,\dots,f_m)(x)\big|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)^{1/p}\\ &\le C\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\bigg(\int_{B(y,r)}\big|T_\theta(f_1^0,\dots,f_m^0)(x)\big|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)^{1/p}\\ &+\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}} C\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\bigg(\int_{B(y,r)}\big|T_\theta(f_1^{\beta_1},\dots,f_m^{\beta_m})(x)\big|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)^{1/p}\\ &:=I^{0,\dots,0}(y,r)+\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}} I^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r).\end{aligned}\tag{4.1}$$

根据 T_θ 的加权强型估计（见定理 1.1），我们有

$$\begin{aligned}I^{0,\dots,0}(y,r)&\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\prod_{k=1}^{m}\bigg(\int_{B(y,2r)}|f_k(x)|^{p_k}w_k(x)\,dx\bigg)^{1/p_k}\\ &=C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\prod_{k=1}^{m}w_k(B(y,2r))^{1/p_k+1/q_k-1/\alpha_k}\\ &\times\prod_{k=1}^{m}\Big[w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big].\end{aligned}\tag{4.2}$$

设 p_1、…、 $p_m \in [1,\infty)$ 和 $p \in [1/m,\infty)$，且 $1/p = \sum_{k=1}^m 1/p_k$。我们首先断言，在定理 3.1（或定理 3.2）的假设下，对于任意满足 $y \in \mathbb{R}^n$ 和 $r>0$ 的球 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(y,r)$，以下结果成立：

$$\prod_{k=1}^m \left(\int_{\mathcal{B}} w_k(x)\,dx \right)^{p/p_k} \lesssim \int_{\mathcal{B}} \nu_{\vec{w}}(x)\,dx, \tag{4.3}$$

在 w_1、…、 $w_m \in A_\infty$ 和 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}$ 成立的条件下。事实上，由于 w_1、…、 $w_m \in A_\infty$，利用引理 4.3，可得

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^m \left(\int_{\mathcal{B}} w_k(x)\,dx \right)^{p/p_k} &\le C \prod_{k=1}^m \left[|\mathcal{B}| \cdot \exp\left(\frac{1}{|\mathcal{B}|} \int_{\mathcal{B}} \log w_k(x)\,dx \right) \right]^{p/p_k} \\
&= C \prod_{k=1}^m \left[|\mathcal{B}|^{p/p_k} \cdot \exp\left(\frac{1}{|\mathcal{B}|} \int_{\mathcal{B}} \log w_k(x)^{p/p_k}\,dx \right) \right] \\
&= C \cdot \big(|\mathcal{B}|\big)^{\sum_{k=1}^m p/p_k} \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{|\mathcal{B}|} \int_{\mathcal{B}} \log w_k(x)^{p/p_k}\,dx \right).
\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{k=1}^m p/p_k = p \cdot \sum_{k=1}^m 1/p_k = 1 \quad \text{and} \quad \nu_{\vec{w}}(x) = \prod_{k=1}^m w_k(x)^{p/p_k}.$$

因此，由詹森不等式可得

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^m \left(\int_{\mathcal{B}} w_k(x)\,dx \right)^{p/p_k} &\le C \cdot |\mathcal{B}| \cdot \exp\left(\frac{1}{|\mathcal{B}|} \int_{\mathcal{B}} \log \nu_{\vec{w}}(x)\,dx \right) \\
&\le C \int_{\mathcal{B}} \nu_{\vec{w}}(x)\,dx.
\end{aligned}$$

这便得到 (4.3)。基于 (4.3)，我们还可以进一步证明，在假设 (3.1) 下，以下结论

$$\prod_{k=1}^m \left(\int_{\mathcal{B}(y,r)} w_k(x)\,dx \right)^{1/p_k+1/q_k-1/\alpha_k} \lesssim \left(\int_{\mathcal{B}(y,r)} \nu_{\vec{w}}(x)\,dx \right)^{1/p+1/q-1/\alpha} \tag{4.4}$$

对 $\mathbb{R}^n$ 中任意的球 $\mathcal{B}(y,r)$ 均成立。事实上，由于

$$p_1\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{q_1}\right) = p_2\left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{q_2}\right) = \cdots = p_m\left(\frac{1}{\alpha_m} - \frac{1}{q_m}\right),$$

那么，以下等式显然成立。

$$p_1\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{\alpha_1}\right) = p_2\left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} - \frac{1}{\alpha_2}\right) = \cdots = p_m\left(\frac{1}{p_m} + \frac{1}{q_m} - \frac{1}{\alpha_m}\right).$$

注意到

$$\frac{1}{p}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{p_k},\quad \frac{1}{q}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{q_k}\quad\text{and}\quad \frac{1}{\alpha}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\alpha_k}.$$

直接计算可得

$$p_k\bigg(\frac{1}{p_k}+\frac{1}{q_k}-\frac{1}{\alpha_k}\bigg)=p\bigg(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{\alpha}\bigg),\qquad k=1,2,\dots,m,$$

或者等价地,

$$\frac{1}{p_k}+\frac{1}{q_k}-\frac{1}{\alpha_k}=\frac{p}{p_k}\cdot\bigg(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{\alpha}\bigg)>0,\qquad k=1,2,\dots,m.$$

结合这一事实与 (4.3)，可得

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=1}^{m}\bigg(\int_{\mathcal{B}(y,r)}w_k(x)\,dx\bigg)^{1/p_k+1/q_k-1/\alpha_k}\\
&=\prod_{k=1}^{m}\bigg(\int_{\mathcal{B}(y,r)}w_k(x)\,dx\bigg)^{p/p_k\cdot(1/p+1/q-1/\alpha)}\\
&=\bigg[\prod_{k=1}^{m}\bigg(\int_{\mathcal{B}(y,r)}w_k(x)\,dx\bigg)^{p/p_k}\bigg]^{1/p+1/q-1/\alpha}\\
&\lesssim\bigg(\int_{\mathcal{B}(y,r)}\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)^{1/p+1/q-1/\alpha}.
\end{aligned}$$

因此，(4.4) 得证。将不等式 (4.4) 代入 (4.2)，从而得到

$$\begin{aligned}
I^{0,\dots,0}(y,r)\le C\cdot\frac{\nu_{\vec{w}}(B(y,2r))^{1/p+1/q-1/\alpha}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/p+1/q-1/\alpha}}\\
\times\prod_{k=1}^{m}\Big[w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big].
\end{aligned}$$

由引理 2.1 可知，$\nu_{\vec{w}}\in A_{mp}$ 且 $1/m<p<\infty$。此外，由于 $1/p+1/q-1/\alpha>0$，根据不等式 (2.2)，可得

$$\frac{\nu_{\vec{w}}(B(y,2r))^{1/p+1/q-1/\alpha}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/p+1/q-1/\alpha}}\le C,\tag{4.5}$$

由此我们得出

$$I^{0,\dots,0}(y,r)\le C\cdot\prod_{k=1}^{m}\Big[w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big].\tag{4.6}$$

为了估计 (4.1) 中剩余的项，我们先考虑 $\beta_1 = \cdots = \beta_m = \infty$ 的情形。我们使用一个常见的几何观察（双线性情形 $m = 2$ 见下图 1）：

$$\overbrace{\big(\mathbb{R}^n\backslash B(y,2r)\big)\times\cdots\times\big(\mathbb{R}^n\backslash B(y,2r)\big)}^{m}\subset(\mathbb{R}^n)^m\backslash B(y,2r)^m,$$

and

$$(\mathbb{R}^n)^m\backslash B(y,2r)^m=\bigcup_{j=1}^{\infty}B(y,2^{j+1}r)^m\backslash B(y,2^jr)^m,$$

其中我们使用了记号 $\overbrace{E\times\cdots\times E}^{m}=E^m$。对于可测集 E 和正整数 m。根据 θ-型 Calderón–Zygmund 核的大小条件 (1.2)

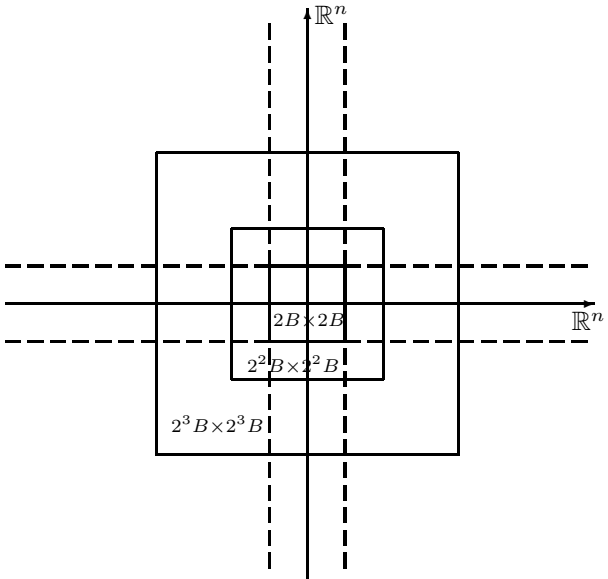

图 1: $m = 2$

核 K，对于任意 $x \in B(y,r)$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\big|T_\theta(f_1^\infty,\dots,f_m^\infty)(x)\big| \\
&\lesssim \int_{(\mathbb{R}^n)^m\setminus B(y,2r)^m} \frac{|f_1(z_1)\cdots f_m(z_m)|}{(|x-z_1|+\cdots+|x-z_m|)^{mn}}\,dz_1\cdots dz_m \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\int_{B(y,2^{j+1}r)^m\setminus B(y,2^jr)^m} \frac{|f_1(z_1)\cdots f_m(z_m)|}{(|x-z_1|+\cdots+|x-z_m|)^{mn}}\,dz_1\cdots dz_m \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|^m}\int_{B(y,2^{j+1}r)^m\setminus B(y,2^jr)^m}\big|f_1(z_1)\cdots f_m(z_m)\big|dz_1\cdots dz_m\bigg) \\
&\le \sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|^m}\prod_{k=1}^{m}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_k(z_k)\big|\,dz_k\bigg) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_k(z_k)\big|\,dz_k\bigg), \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

其中我们用到了以下事实：当 $x \in B(y,r)$ 时，$|x-z_1|+\cdots+|x-z_m| \approx 2^{j+1}r \approx |B(y,2^{j+1}r)|^{1/n}$，且 $(z_1,\dots,z_m) \in B(y,2^{j+1}r)^m\setminus B(y,2^jr)^m$。此外，利用 H¨older 不等式以及 $\vec{w}$ 上的多重 $A_{\vec{P}}$ 条件，我们可以推导出

$$
\begin{aligned}
&\big|T_\theta(f_1^\infty,\dots,f_m^\infty)(x)\big| \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{\infty}\bigg\{\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\bigg(\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_k(z_k)\big|^{p_k}w_k(z_k)\,dz_k\bigg)^{1/p_k}\bigg(\int_{B(y,2^{j+1}r)}w_k(z_k)^{-p_k'/p_k}\,dz_k\bigg)^{1/p_k'}\bigg\} \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{\infty}\bigg\{\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|^m}\cdot\frac{|B(y,2^{j+1}r)|^{1/p+\sum_{k=1}^m(1-1/p_k)}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/p}}\prod_{k=1}^{m}\Big(\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big)\bigg\} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\bigg\{\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/p}}\cdot\prod_{k=1}^{m}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\bigg\},
\end{aligned}
$$

其中，最后一步使用了 $1/p+\sum_{i=1}^m(1-1/p_i) = m$这一事实。

因此，由这一逐点估计可得

$$
\begin{aligned}
I^{\infty,\dots,\infty}(y,r) &\lesssim \nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\\
&\quad\times\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/p}}\cdot\prod_{k=1}^{m}\left\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\right\|_{L^{p_k}(w_k)}\right\}\\
&=\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\times\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{\prod_{k=1}^{m}w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/p_k+1/q_k-1/\alpha_k}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/p}}\right.\\
&\quad\left.\prod_{k=1}^{m}\left[w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\left\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\right\|_{L^{p_k}(w_k)}\right]\right\}\\
&\lesssim\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\prod_{k=1}^{m}\left[w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\left\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\right\|_{L^{p_k}(w_k)}\right]\right.\\
&\quad\left.\times\frac{\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha-1/q}}\right\},
\end{aligned}
$$

其中，最后一步用到了估计 (4.4)。现在考虑恰有 ℓ 个 β_k 是 ∞ 的情形，其中某个 $1\le\ell<m$ 成立。我们只给出其中一种情形的论证。其余情形类似，可通过置换指标，利用下面的论证轻松得到。在这种情况下，理由与上面相同，我们还有

$$
\overbrace{\left(\mathbb{R}^n\backslash B(y,2r)\right)\times\cdots\times\left(\mathbb{R}^n\backslash B(y,2r)\right)}^{\ell}\subset(\mathbb{R}^n)^{\ell}\backslash B(y,2r)^{\ell},
$$

and

$$
(\mathbb{R}^n)^{\ell}\backslash B(y,2r)^{\ell}=\bigcup_{j=1}^{\infty}B(y,2^{j+1}r)^{\ell}\backslash B(y,2^{j}r)^{\ell},\quad 1\le\ell<m.
$$

再次利用大小条件 (1.2)，我们可推出，对于任意 $x\in B(y,r)$，

$$
\begin{aligned}
&\left|T_\theta(f_1^\infty,\dots,f_\ell^\infty,f_{\ell+1}^0,\dots,f_m^0)(x)\right|\\
&\lesssim\int_{(\mathbb{R}^n)^{\ell}\backslash B(y,2r)^{\ell}}\int_{B(y,2r)^{m-\ell}}\frac{|f_1(z_1)\cdots f_m(z_m)|}{(|x-z_1|+\cdots+|x-z_m|)^{mn}}\,dz_1\cdots dz_m\\
&\lesssim\prod_{k=\ell+1}^{m}\int_{B(y,2r)}\left|f_k(z_k)\right|dz_k\\
&\times\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|^m}\int_{B(y,2^{j+1}r)^{\ell}\backslash B(y,2^{j}r)^{\ell}}\left|f_1(z_1)\cdots f_\ell(z_\ell)\right|dz_1\cdots dz_\ell\\
&\le\prod_{k=\ell+1}^{m}\int_{B(y,2r)}\left|f_k(z_k)\right|dz_k\times\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|^m}\prod_{k=1}^{\ell}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\left|f_k(z_k)\right|dz_k\\
&\le\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\left|f_k(z_k)\right|dz_k\Big),
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

其中，在最后一个不等式中，我们利用了对任意 $j\in\mathbb{N}$，$B(y,2r)\subseteq B(y,2^{j+1}r)$ 的包含关系，进而得到与前一种情形中考虑的相同表达式。因此，我们现在可以完全按照估计 $I^{\infty,\dots,\infty}(y,r)$ 时所采用的方法，得到对所有 m 元组 $(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}$，

$$I^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r)\le C\sum_{j=1}^{\infty}\Bigg\{\prod_{k=1}^{m}\Big[w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big]\\ \times\frac{\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha-1/q}}\Bigg\}. \tag{4.9}$$

此外，对于给定的 $\nu_{\vec{w}}\in A_{mp}\subset A_\infty$ 且满足 $1\le mp<\infty$，由指数为 $\delta>0$ 的不等式 (2.1) 可直接得到

$$\frac{\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha-1/q}}\le C\left(\frac{|B(y,r)|}{|B(y,2^{j+1}r)|}\right)^{\delta(1/\alpha-1/q)}. \tag{4.10}$$

因此，对 (4.1) 两边取 $L^q(\mu)$-范数（关于变量 y），然后利用闵可夫斯基不等式（注意 $q\ge1$）、(4.6)、(4.9) 和 (4.10)，可得

$$\begin{aligned}&\Big\|\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\big\|T_\theta(\vec{f})\cdot\chi_{B(y,r)}\big\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})}\Big\|_{L^q(\mu)}\\&\le\Big\|I^{0,\dots,0}(y,r)\Big\|_{L^q(\mu)}+\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}}\Big\|I^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r)\Big\|_{L^q(\mu)}\\&\le C\Big\|\prod_{k=1}^{m}\Big[w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big]\Big\|_{L^q(\mu)}\\&+C\cdot2^m\sum_{j=1}^{\infty}\Big\|\prod_{k=1}^{m}\Big[w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big]\Big\|_{L^q(\mu)}\\&\times\left(\frac{|B(y,r)|}{|B(y,2^{j+1}r)|}\right)^{\delta(1/\alpha-1/q)}.\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots+\frac{1}{q_m}.$$

进一步应用 H¨older 不等式可得

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\big\|T_\theta(\vec{f})\cdot\chi_{B(y,r)}\big\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})}\Big\|_{L^q(\mu)}\\
&\le C\prod_{k=1}^m\Big\|w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big\|_{L^{q_k}(\mu)}\\
&+C\sum_{j=1}^\infty\prod_{k=1}^m\Big\|w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big\|_{L^{q_k}(\mu)}\\
&\times\left(\frac{|B(y,r)|}{|B(y,2^{j+1}r)|}\right)^{\delta(1/\alpha-1/q)}\\
&\le C\prod_{k=1}^m\|f_k\|_{(L^{p_k},L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k;\mu)}+C\prod_{k=1}^m\|f_k\|_{(L^{p_k},L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k;\mu)}\times\sum_{j=1}^\infty\left[\frac{1}{2^{(j+1)n}}\right]^{\delta(1/\alpha-1/q)}\\
&\le C\prod_{k=1}^m\|f_k\|_{(L^{p_k},L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k;\mu)},
\end{aligned}
$$

由于指数 $\delta(1/\alpha-1/q)$ 为正，故最后一个级数收敛。因此，对所有 $r>0$ 取上确界，即完成定理 3.1 的证明。

□

¯定理 3.2 的证明。设 $1\le p_k\le\alpha_k<q_k<\infty$ 和 $f=(f_1,\dots,f_m)$ 属于 $(L^{p_1},L^{q_1})^{\alpha_1}(w_1;\mu)\times\cdots\times(L^{p_m},L^{q_m})^{\alpha_m}(w_m;\mu)$，其中 $(w_1,\dots,w_m)\in A_{\vec{P}}$ 且 $\mu\in\Delta_2$。对于任意的球 $B=B(y,r)\subset\mathbb{R}^n$，满足 $y\in\mathbb{R}^n$ 且 $r>0$，我们将 f_k 分解为

$$
f_k=f_k\cdot\chi_{2B}+f_k\cdot\chi_{(2B)^\complement}:=f_k^0+f_k^\infty,\quad\text{for}\quad k=1,2,\dots,m;
$$

于是，根据引理 4.2($N=2^m$)，可以写成

$$
\begin{aligned}
&\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\big\|T_\theta(\vec{f})\cdot\chi_{B(y,r)}\big\|_{WL^p(\nu_{\vec{w}})}\\
&=\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\big\|T_\theta(f_1,\dots,f_m)\cdot\chi_{B(y,r)}\big\|_{WL^p(\nu_{\vec{w}})}\\
&\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\big\|T_\theta(f_1^0,\dots,f_m^0)\cdot\chi_{B(y,r)}\big\|_{WL^p(\nu_{\vec{w}})}\\
&+C\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}}\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\big\|T_\theta(f_1^{\beta_1},\dots,f_m^{\beta_m})\cdot\chi_{B(y,r)}\big\|_{WL^p(\nu_{\vec{w}})}\\
&:=I_*^{0,\dots,0}(y,r)+\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}}I_*^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r),
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

其中

$$
\mathfrak{L}=\big\{(\beta_1,\dots,\beta_m):\beta_k\in\{0,\infty\},\text{there is at least one }\beta_k\ne0,1\le k\le m\big\}.
$$

由 T_θ 的加权弱型估计（见定理 1.2）及 (4.4)，可得

$$\begin{aligned} I_*^{0,\dots,0}(y,r) &\le C\cdot \nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\prod_{k=1}^m\Big(\int_{B(y,2r)}|f_k(x)|^{p_k}w_k(x)\,dx\Big)^{1/p_k}\\ &= C\cdot \nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\prod_{k=1}^m w_k(B(y,2r))^{1/p_k+1/q_k-1/\alpha_k}\\ &\times\prod_{k=1}^m\Big[w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big]\\ &\le C\cdot\frac{\nu_{\vec{w}}(B(y,2r))^{1/p+1/q-1/\alpha}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/p+1/q-1/\alpha}}\\ &\times\prod_{k=1}^m\Big[w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big]. \end{aligned}\tag{4.12}$$

此外，再次根据引理 2.1，我们还可得 $\nu_{\vec{w}}\in A_{mp}$，其中 $1/m\le p<\infty$。由于 $1/p+1/q-1/\alpha>0$，于是应用不等式 (2.2) 可得

$$\frac{\nu_{\vec{w}}(B(y,2r))^{1/p+1/q-1/\alpha}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2r))^{1/p+1/q-1/\alpha}}\le C,\tag{4.13}$$

由此我们得出

$$I_*^{0,\dots,0}(y,r)\le C\cdot\prod_{k=1}^m\Big[w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big].\tag{4.14}$$

在定理 3.1 的证明中，我们已对所有 m-元组 $(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}$ 建立了如下逐点估计（见 (4.7) 和 (4.8)）。

$$\big|T_\theta(f_1^{\beta_1},\dots,f_m^{\beta_m})(x)\big|\lesssim\sum_{j=1}^\infty\Big(\prod_{k=1}^m\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_k(z_k)\big|\,dz_k\Big).\tag{4.15}$$

不失一般性，我们可以假设

$$p_1=\cdots=p_\ell=\min\{p_1,\dots,p_m\}=1\quad\text{and}\quad p_{\ell+1},\dots,p_m>1$$

其中有 $1\le\ell<m$。$p_1=\cdots=p_m=1$ 的情形可以类似地且更容易地处理。下面给出的所有估计对于 $p_1=\cdots=p_m=1$仍然成立。利用 H¨older 不等式以及 $\vec{w}$上的 multiple $A_{\vec{P}}$ 条件，我们

可得，对于任意 $x \in B(y,r)$,

$$
\begin{aligned}
&\left|T_\theta(f_1^{\beta_1},\dots,f_m^{\beta_m})(x)\right| \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{\infty}\Bigg(\prod_{k=1}^{\ell}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\left|f_k(z_k)\right|dz_k\Bigg) \\
&\times\Bigg(\prod_{k=\ell+1}^{m}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\left|f_k(z_k)\right|dz_k\Bigg) \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{\ell}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\left|f_k(z_k)\right|w_k(z_k)\,dz_k\Big(\inf_{z_k\in B(y,2^{j+1}r)}w_k(z_k)\Big)^{-1} \\
&\times\prod_{k=\ell+1}^{m}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\Big(\int_{B(y,2^{j+1}r)}\left|f_k(z_k)\right|^{p_k}w_k(z_k)\,dz_k\Big)^{1/p_k}\Big(\int_{B(y,2^{j+1}r)}w_k(z_k)^{-p_k'/p_k}\,dz_k\Big)^{1/p_k'} \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/p}}\cdot\prod_{k=1}^{m}\left\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\right\|_{L^{p_k}(w_k)}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

注意到 $\nu_{\vec{w}}\in A_{mp}$，其中有 $1\le mp<\infty$。因此，直接由切比雪夫不等式和上述逐点估计可得

$$
\begin{aligned}
&I_*^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r) \\
&\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\Big(\int_{B(y,r)}\left|T_\theta(f_1^{\beta_1},\dots,f_m^{\beta_m})(x)\right|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\Big)^{1/p} \\
&\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\sum_{j=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/p}}\cdot\prod_{k=1}^{m}\left\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\right\|_{L^{p_k}(w_k)}\Bigg\} \\
&\le C\sum_{j=1}^{\infty}\Bigg\{\prod_{k=1}^{m}\Big[w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\left\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\right\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big] \\
&\times\frac{\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha-1/q}}\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

其中，最后一个不等式由 (4.4) 得出。因此，对 (4.11) 两边关于变量 y 取 $L^q(\mu)$-范数，然后利用

闵可夫斯基不等式($q \geq 1$)、(4.14) 和 (4.16)，可得

$$
\begin{aligned}
&\left\| \nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q} \left\| T_\theta(\vec{f}) \cdot \chi_{B(y,r)} \right\|_{WL^p(\nu_{\vec{w}})} \right\|_{L^q(\mu)} \\
&\leq \left\| I_*^{0,\dots,0}(y,r) \right\|_{L^q(\mu)} + \sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}} \left\| I_*^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r) \right\|_{L^q(\mu)} \\
&\leq C \left\| \prod_{k=1}^m \left[w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k} \left\| f_k \cdot \chi_{B(y,2r)} \right\|_{L^{p_k}(w_k)} \right] \right\|_{L^q(\mu)} \\
&+ C \cdot 2^m \sum_{j=1}^\infty \left\| \prod_{k=1}^m \left[w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k} \left\| f_k \cdot \chi_{B(y,2^{j+1}r)} \right\|_{L^{p_k}(w_k)} \right] \right\|_{L^q(\mu)} \\
&\times \left(\frac{|B(y,r)|}{|B(y,2^{j+1}r)|} \right)^{\delta(1/\alpha-1/q)},
\end{aligned}
$$

其中，最后一步用到了不等式 (4.10)。进一步应用 H¨older 不等式可得

$$
\begin{aligned}
&\left\| \nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q} \left\| T_\theta(\vec{f}) \cdot \chi_{B(y,r)} \right\|_{WL^p(\nu_{\vec{w}})} \right\|_{L^q(\mu)} \\
&\leq C \prod_{k=1}^m \left\| w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k} \left\| f_k \cdot \chi_{B(y,2r)} \right\|_{L^{p_k}(w_k)} \right\|_{L^{q_k}(\mu)} \\
&+ C \sum_{j=1}^\infty \prod_{k=1}^m \left\| w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k} \left\| f_k \cdot \chi_{B(y,2^{j+1}r)} \right\|_{L^{p_k}(w_k)} \right\|_{L^{q_k}(\mu)} \\
&\times \left(\frac{|B(y,r)|}{|B(y,2^{j+1}r)|} \right)^{\delta(1/\alpha-1/q)} \\
&\leq C \prod_{k=1}^m \|f_k\|_{(L^{p_k},L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k;\mu)} + C \prod_{k=1}^m \|f_k\|_{(L^{p_k},L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k;\mu)} \times \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{|B(y,r)|}{|B(y,2^{j+1}r)|} \right)^{\delta(1/\alpha-1/q)} \\
&\leq C \prod_{k=1}^m \|f_k\|_{(L^{p_k},L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k;\mu)},
\end{aligned}
$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $\delta > 0$ 和 $(1/\alpha - 1/q) > 0$。因此，对所有 $r > 0$ 取上确界，即完成定理 3.2 的证明。 □

设 $1 \leq p_1, \dots, p_m \leq +\infty$。若 $\vec{w} = (w_1, \dots, w_m) \in \prod_{k=1}^m A_{p_k}$，且每个 w_k 都属于 A_{p_k}, $k = 1, 2, \dots, m$，则称之为.....。利用 H¨older 不等式，容易验证

$$
\prod_{k=1}^m A_{p_k} \subset A_{\vec{P}}. \tag{4.17}
$$

此外，[20, 备注 7.2] 中已证明该包含关系 (4.17) 是严格的。显然，$\prod_{k=1}^m A_{p_k} \subset \prod_{k=1}^m A_\infty$。因此我们有

$$
\prod_{k=1}^m A_{p_k} \subset A_{\vec{P}} \bigcap \prod_{k=1}^m A_\infty. \tag{4.18}
$$

这自然引出了一个猜想：上述包含关系是否也是严格的。目前尚不清楚能否证明该包含关系的逆命题。因此，作为定理 3.1 和定理 3.2 的直接推论，我们立即得到以下结果。

推论 4.1. 设 $m \geq 2$ 和 T_θ 是一个满足条件 (1.1) 的 m-线性 θ-型 Calderón–Zygmund 算子，其中 θ。假设 $1 < p_k \leq \alpha_k < q_k < \infty$, $k = 1, 2, \ldots, m$ 和 $p \in (1/m, \infty)$，其中 $1/p = \sum_{k=1}^m 1/p_k$, $q \in [1, \infty)$，且 $1/q = \sum_{k=1}^m 1/q_k$ 和 $1/\alpha = \sum_{k=1}^m 1/\alpha_k$；$\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m) \in \prod_{k=1}^m A_{p_k}$ 和 $\mu \in \Delta_2$。此外，假设

$$p_1\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{q_1}\right) = p_2\left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{q_2}\right) = \cdots = p_m\left(\frac{1}{\alpha_m} - \frac{1}{q_m}\right).$$

那么存在常数 $C > 0$，使得对所有 $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$, $\in (L^{p_1}, L^{q_1})^{\alpha_1}(w_1; \mu) \times \cdots \times (L^{p_m}, L^{q_m})^{\alpha_m}(w_m; \mu)$,

$$\left\|T_\theta(\vec{f})\right\|_{(L^p, L^q)^\alpha(\nu_{\vec{w}}; \mu)} \leq C \prod_{k=1}^m \left\|f_k\right\|_{(L^{p_k}, L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k; \mu)}$$

其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}$。

推论 4.2. 设 $m \geq 2$ 和 T_θ 是满足条件 (1.1) 且具有 θ 的 m-线性 θ型 Calderón–Zygmund 算子。假设 $1 \leq p_k \leq \alpha_k < q_k < \infty$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\min\{p_1, \ldots, p_m\} = 1$ 和 $p \in [1/m, \infty)$，且 $1/p = \sum_{k=1}^m 1/p_k$, $q \in [1, \infty)$，其中 $1/q = \sum_{k=1}^m 1/q_k$ 和 $1/\alpha = \sum_{k=1}^m 1/\alpha_k$；$\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m) \in \prod_{k=1}^m A_{p_k}$ 和 $\mu \in \Delta_2$。此外，假设

$$p_1\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{q_1}\right) = p_2\left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{q_2}\right) = \cdots = p_m\left(\frac{1}{\alpha_m} - \frac{1}{q_m}\right).$$

那么存在一个常数 $C > 0$，使得对所有 $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m) \in (L^{p_1}, L^{q_1})^{\alpha_1}(w_1; \mu) \times \cdots \times (L^{p_m}, L^{q_m})^{\alpha_m}(w_m; \mu)$,

$$\left\|T_\theta(\vec{f})\right\|_{(WL^p, L^q)^\alpha(\nu_{\vec{w}}; \mu)} \leq C \prod_{k=1}^m \left\|f_k\right\|_{(L^{p_k}, L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k; \mu)}$$

与 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}$。

5 定理 3.3 和 3.4 的证明

正如第 1 节所指出的，将 (1.6) 替换为较弱的增长条件 (1.1) 后，定理 1.3 和定理 1.5 的结论仍然成立。本节首先证明以下估计。

¯定理 5.1. 设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $b = (b_1, \dots, b_m) \in$ 有界平均振荡^m；设 θ 满足条件 (1.1)。若 $p_1, \dots, p_m \in (1, \infty)$ 且 $p \in (1/m, \infty)$，其中 $1/p = \sum_{k=1}^m 1/p_k$，并且 $\vec{w} = (w_1, \dots, w_m) \in A_{\vec{P}}$，则存在一个与$\vec{}f$ 无关的常数 $C > 0$，使得

$$\left\| \left[\Sigma\vec{b}, T_\theta\right](\vec{f}) \right\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})} \le C \cdot \left\|\vec{b}\right\|_{\mathrm{BMO}^m} \prod_{k=1}^m \left\|f_k\right\|_{L^{p_k}(w_k)},$$

and

$$\left\| \left[\Pi\vec{b}, T_\theta\right](\vec{f}) \right\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})} \le C \cdot \prod_{k=1}^m \left\|b_k\right\|_* \prod_{k=1}^m \left\|f_k\right\|_{L^{p_k}(w_k)},$$

其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}$ 和 $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) \in L^{p_1}(w_1) \times \cdots \times L^{p_m}(w_m)$。

证明。我们只需证明多线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子的迭代交换子的强型估计。多线性交换子的相应估计可以用类似的方法得到。定理 5.1 的证明思路部分源自 [2, 4] 和 [25, 命题 3.1]。给定满足 $1 \le k \le m$ 的 $b_k \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，记 $F_k(\xi) = e^{\xi[b_k(x) - b_k(y)]}, \xi \in \mathbb{C}$。于是，由 $F_k(\xi)$ 关于 $\mathbb{C}$ 的解析性及柯西积分公式可得

$$\begin{aligned} b_k(x) - b_k(y) = F_k'(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{F_k(\xi)}{\xi^2}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{e^{i\varphi_k}[b_k(x) - b_k(y)]} \cdot e^{-i\varphi_k} d\varphi_k. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &\left[\Pi\vec{b}, T_\theta\right](f_1, \dots, f_m)(x) \\ &= \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \prod_{k=1}^m \left[b_k(x) - b_k(y_k)\right] K(x, y_1, \dots, y_m) f_1(y_1) \cdots f_m(y_m)\, dy_1 \cdots dy_m \\ &= \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \prod_{k=1}^m \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{e^{i\varphi_k}[b_k(x) - b_k(y_k)]} \cdot e^{-i\varphi_k} d\varphi_k \right) \\ &\times K(x, y_1, \dots, y_m) f_1(y_1) \cdots f_m(y_m)\, dy_1 \cdots dy_m \\ &= \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \left[\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{[0,2\pi]^m} \left(\prod_{k=1}^m e^{e^{i\varphi_k} b_k(x)} \cdot e^{-i\varphi_k} \right) d\varphi_1 \cdots d\varphi_m \right] \\ &\times K(x, y_1, \dots, y_m) \prod_{k=1}^m e^{-e^{i\varphi_k} b_k(y_k)} \cdot f_k(y_k)\, dy_1 \cdots dy_m \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{[0,2\pi]^m} T_\theta\left(e^{-e^{i\varphi_1} b_1} \cdot f_1, \dots, e^{-e^{i\varphi_m} b_m} \cdot f_m \right)(x) \left(\prod_{k=1}^m e^{e^{i\varphi_k} b_k(x)} \cdot e^{-i\varphi_k} \right) d\varphi_1 \cdots d\varphi_m. \end{aligned}$$

所以我们有

$$\begin{aligned}&\big|\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big](f_1,\dots,f_m)(x)\big|\\ \le&\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[0,2\pi]^m}\Big|T_\theta\Big(e^{-e^{i\varphi_1}b_1}\cdot f_1,\dots,e^{-e^{i\varphi_m}b_m}\cdot f_m\Big)(x)\Big|\bigg(\prod_{k=1}^m e^{\cos\varphi_k b_k(x)}\bigg)d\varphi_1\cdots d\varphi_m.\end{aligned}$$

对于任意的 $(\varphi_1,\dots,\varphi_m)\in[0,2\pi]^m$，定义 m-元组

$$\vec{g}_\varphi=\big(g^1_{\varphi_1},\dots,g^m_{\varphi_m}\big),\quad \text{where } g^k_{\varphi_k}=e^{-e^{i\varphi_k}b_k}\cdot f_k,\ \ k=1,2,\dots,m,$$

并定义

$$\vec{w}_\varphi=\big(w^1_{\varphi_1},\dots,w^m_{\varphi_m}\big),\quad \text{where } w^k_{\varphi_k}=w_k\cdot e^{p_k\cos\varphi_k b_k},\ \ k=1,2,\dots,m.$$

Set

$$\nu^*_{\vec{w}}=\prod_{k=1}^m\big(w^k_{\varphi_k}\big)^{p/p_k}.$$

于是我们有

$$\nu^*_{\vec{w}}=\prod_{k=1}^m\big(w_k\cdot e^{p_k\cos\varphi_k b_k}\big)^{p/p_k}=\nu_{\vec{w}}\cdot\prod_{k=1}^m e^{p\cos\varphi_k b_k}.$$

利用积分形式的闵可夫斯基不等式，我们由此得到

$$\begin{aligned}\Big\|\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big](\vec{f})\Big\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})}&\le\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[0,2\pi]^m}\Big\|T_\theta(\vec{g}_\varphi)\prod_{k=1}^m e^{\cos\varphi_k b_k}\Big\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})}d\varphi_1\cdots d\varphi_m\\ &=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[0,2\pi]^m}\big\|T_\theta(\vec{g}_\varphi)\big\|_{L^p(\nu^*_{\vec{w}})}d\varphi_1\cdots d\varphi_m.\end{aligned}$$

由于 $\vec{w}=(w_1,\dots,w_m)\in A_{\vec{P}}$，由引理 2.1 可得 $\nu_{\vec{w}}\in A_{mp}$ and $w_k^{1-p'_k}\in A_{mp'_k}$,$k=1,2,\dots,m$。因此，根据$A_p$权的自改进性质（见 [5, 12]），存在一些正数 $\varepsilon',\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m>0$（充分小），使得

$$\nu_{\vec{w}}^{1+\varepsilon'}\in A_{mp}\quad\&\quad\big(w_k^{1-p'_k}\big)^{1+\varepsilon_k}\in A_{mp'_k},\ k=1,2,\dots,m.$$

现在取

$$\varepsilon:=\min\big\{\varepsilon',\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m\big\}.$$

于是我们有

$$\nu_{\vec{w}}^{1+\varepsilon}\in A_{mp}\quad\&\quad\big(w_k^{1-p'_k}\big)^{1+\varepsilon}=\big(w_k^{1+\varepsilon}\big)^{1-p'_k}\in A_{mp'_k},\ k=1,2,\dots,m,$$

这意味着 $(\vec{w})^{1+\varepsilon}:=(w_1^{1+\varepsilon},\dots,w_m^{1+\varepsilon})\in A_{\vec{P}}$，再次使用引理 2.1 即可得到。注意

$$\prod_{k=1}^m\big(w_i^{1+\epsilon}\big)^{p/p_i}=\bigg(\prod_{i=1}^m w_i^{p/p_i}\bigg)^{1+\epsilon}=(\nu_{\vec{w}})^{1+\epsilon}.$$

因此，根据定理 1.1,

$$T_\theta : L^{p_1}(w_1^{1+\epsilon}) \times \cdots \times L^{p_m}(w_m^{1+\epsilon}) \longrightarrow L^p((\nu_{\vec{w}})^{1+\epsilon}). \tag{5.1}$$

另一方面，对于任意固定的 $\eta > 0$，已知当 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\|b\|_* < \min\{C_2/\eta, C_2(p-1)/\eta\}$ 时，其中 C_2 是上述 John– Nirenberg 不等式中的常数，有 $e^{\eta b(x)} \in A_p$，其中 $1 < p < \infty$ （见 [4, 引理 1]）。对于 $b_k \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)(1 \le k \le m)$，现在我们选取

$$\eta_k := \frac{p_k(1+\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

对于这样的 $\eta_k > 0$，我们可以假设 $\|b_k\|_* < \min\{C_2/\eta_k, C_2(p_k-1)/\eta_k\}$。一般情形也可以利用 T_θ 的线性性质证明。于是，对于任意$\varphi_k \in [0, 2\pi]$，我们有 $\cos\varphi_k \cdot b_k(x) \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，并且

$$\|\cos\varphi_k \cdot b_k\|_* \le \|b_k\|_* < \min\left\{C_2/\eta_k, C_2(p_k-1)/\eta_k\right\},$$

这意味着每个 $\nu_k(x) := e^{\eta_k \cos\varphi_k b_k(x)} \in A_{p_k}$，其中 $1 < p_k < \infty$, $k = 1, 2, \ldots, m$。注意到

$$\prod_{k=1}^m \left(e^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} p_k \cos\varphi_k b_k}\right)^{p/p_k} = \prod_{k=1}^m \left(e^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} p \cos\varphi_k b_k}\right) = \left(\prod_{k=1}^m e^{p\cos\varphi_k b_k}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

结合这一事实、(4.18) 和定理 1.1，我们得到

$$T_\theta : L^{p_1}\left(e^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} p_1 \cos\varphi_1 b_1}\right) \times \cdots \times L^{p_m}\left(e^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} p_m \cos\varphi_m b_m}\right) \longrightarrow L^p\Big(\Big(\prod_{k=1}^m e^{p\cos\varphi_k b_k}\Big)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\Big). \tag{5.2}$$

在 (5.1) 和 (5.2) 之间进行插值（见 [3, 29]），可得

$$T_\theta : L^{p_1}\left(w_1 e^{p_1\cos\varphi_1 b_1}\right) \times \cdots \times L^{p_m}\left(w_m e^{p_m\cos\varphi_m b_m}\right) \longrightarrow L^p\Big(\nu_{\vec{w}} \prod_{k=1}^m e^{p\cos\varphi_k b_k}\Big);$$

即

$$T_\theta : L^{p_1}\left(w_{\varphi_1}^1\right) \times \cdots \times L^{p_m}\left(w_{\varphi_m}^m\right) \longrightarrow L^p\left(\nu_{\vec{w}}^*\right). \tag{5.3}$$

由 (5.3) 可得

$$\left\|T_\theta(\vec{g}_\varphi)\right\|_{L^p(\nu_{\vec{w}}^*)} \le C \prod_{k=1}^m \left\|g_{\varphi_k}^k\right\|_{L^{p_k}(w_{\varphi_k}^k)}. \tag{5.4}$$

由于 $f_k \in L^{p_k}(w_k)$，容易验证，对于任意 $\varphi_k \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned}
\left\|g_{\varphi_k}^k\right\|_{L^{p_k}(w_{\varphi_k}^k)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|g_{\varphi_k}^k(x)\right|^{p_k} w_k(x) \cdot e^{p_k\cos\varphi_k b_k(x)} dx\right)^{1/p_k} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|f_k(x)\right|^{p_k} e^{-p_k\cos\varphi_k b_k(x)} \cdot w_k(x) \cdot e^{p_k\cos\varphi_k b_k(x)} dx\right)^{1/p_k} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|f_k(x)\right|^{p_k} w_k(x) dx\right)^{1/p_k} = \left\|f_k\right\|_{L^{p_k}(w_k)}.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\Big\|\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big](\vec{f})\Big\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})} &\le C\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[0,2\pi]^m}\prod_{k=1}^m\big\|g_{\varphi_k}^k\big\|_{L^{p_k}(w_{\varphi_k}^k)}d\varphi_1\cdots d\varphi_m\\ &= C\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[0,2\pi]^m}\prod_{k=1}^m\big\|f_k\big\|_{L^{p_k}(w_k)}d\varphi_1\cdots d\varphi_m\\ &\le C\prod_{k=1}^m\big\|f_k\big\|_{L^{p_k}(w_k)},\end{aligned}$$

这就是我们所需的估计。由此便完成了特殊情形的证明。现在我们转向一般情形。为此，我们令

$$\widetilde{b}_k(x):=\widetilde{\eta}_k\cdot\frac{b_k(x)}{\|b_k\|_*}\quad\&\quad\vec{b}_\sharp:=\big(\widetilde{b}_1,\dots,\widetilde{b}_m\big).$$

这里选择 $\widetilde{\eta}_k$，使得 $0<\widetilde{\eta}_k<\min\{C_2/\eta_k,C_2(p_k-1)/\eta_k\}$, $k=1,2,\dots,m$。于是

$$\|\widetilde{b}_k\|_*=\widetilde{\eta}_k<\min\big\{C_2/\eta_k,C_2(p_k-1)/\eta_k\big\}.$$

由前面的证明可知，实际上

$$\begin{aligned}\Big\|\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big](\vec{f})\Big\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})} &= \Big\|\prod_{k=1}^m\frac{\|b_k\|_*}{\widetilde{\eta}_k}\cdot\big[\Pi\vec{b}_\sharp,T_\theta\big](\vec{f})\Big\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})}\\ &\le C\cdot\prod_{k=1}^m\|b_k\|_*\prod_{k=1}^m\big\|f_k\big\|_{L^{p_k}(w_k)}.\end{aligned}$$

定理 5.1 的证明至此完成。 □

为了证明本节关于多线性交换子的主要定理，我们先给出两个关于 BMO 函数的辅助引理，它们在主要定理的证明中起着重要作用。

引理 5.1. 设 b 是 BMO($\mathbb{R}^n$) 中的一个函数。那么 (*i*) 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的每个球 B 以及所有 $j\in\mathbb{N}$,

$$\big|b_{2^{j+1}B}-b_B\big|\le C\cdot(j+1)\|b\|_*.$$

（*ii*）设 $1\le p<\infty$。对于 $\mathbb{R}^n$ 中的每个球 B，以及所有 $\omega\in A_\infty$,

$$\left(\int_B\big|b(x)-b_B\big|^p\omega(x)\,dx\right)^{1/p}\le C\|b\|_*\cdot\omega(B)^{1/p}.$$

证明。关于（i）和（ii）的证明，请参阅 [31]。 □

基于引理 5.1，我们现在断言，对于任意 $j \in \mathbb{N}$ 和任意 $\omega \in A_\infty$，以下不等式

$$\left(\int_{2^{j+1}B} \left| b(x) - b_B \right|^p \omega(x)\, dx \right)^{1/p} \leq C(j+1)\|b\|_* \cdot \omega(2^{j+1}B)^{1/p} \tag{5.5}$$

当 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 且 $1 \leq p < \infty$ 时成立。事实上，利用引理 5.1（i）和（ii），我们可以推出

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{2^{j+1}B} \left| b(x) - b_B \right|^p \omega(x)\, dx \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_{2^{j+1}B} \left| b(x) - b_{2^{j+1}B} \right|^p \omega(x)\, dx \right)^{1/p} + \left(\int_{2^{j+1}B} \left| b_{2^{j+1}B} - b_B \right|^p \omega(x)\, dx \right)^{1/p} \\
&\leq C\|b\|_* \cdot \omega(2^{j+1}B)^{1/p} + C(j+1)\|b\|_* \cdot \omega(2^{j+1}B)^{1/p} \\
&\leq C(j+1)\|b\|_* \cdot \omega(2^{j+1}B)^{1/p},
\end{aligned}$$

如所需。

引理 5.2. 设 b 是 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 中的一个函数。那么对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意球 B 以及任意 $\omega \in A_\infty$，有

$$\left\| b - b_B \right\|_{\exp L(\omega), B} \leq C\|b\|_*. \tag{5.6}$$

证明. 根据众所周知的 John–Nirenberg 不等式（见 [17, 5]），我们知道存在两个正常数 C_1 和 C_2，它们仅依赖于维数 n，使得对于任意 $\lambda > 0$,

$$\left| \left\{ x \in B : |b(x) - b_B| > \lambda \right\} \right| \leq C_1 |B| \exp\left\{ - \frac{C_2 \lambda}{\|b\|_*} \right\}.$$

该结果表明，在某种意义上，对数增长是 BMO 函数可能达到的最大增长（更准确地说，我们可以取 $C_1 = \sqrt{2}$、 $C_2 = \log 2/2^{n+2}$，见 [5, 第123–125]页）。应用权 A_∞ 的比较性质（2.1），存在一个正常数 $\delta > 0$ 使得

$$\omega\left(\left\{ x \in B : |b(x) - b_B| > \lambda \right\} \right) \leq C_1 \omega(B) \exp\left\{ - \frac{C_2 \delta \lambda}{\|b\|_*} \right\}.$$

由此可得，(c_0 和 C 是两个正常数，且与 B的选取无关)

$$\frac{1}{\omega(B)} \int_B \exp\left(\frac{|b(y) - b_B|}{c_0 \|b\|_*} \right) \omega(y)\, dy \leq C,$$

这等价于 (5.6)。 □

此外，由 (5.6) 和引理 5.1(i)，容易验证，对于任意$\omega \in A_\infty$ 以及 $\mathbb{R}^n$中给定的任意球 B，

$$\left\|b - b_B\right\|_{\exp L(\omega), 2^{j+1}B} \le C(j+1)\|b\|_*, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{5.7}$$

现在我们可以给出定理 3.3 和定理 3.4 的证明。

$\vec{}$定理 3.3 的证明。设 $1 < p_k \le \alpha_k < q_k < \infty$和 $f = (f_1, \ldots, f_m)$ 属于 $(L^{p_1}, L^{q_1})^{\alpha_1}(w_1;\ \mu) \times \cdots \times (L^{p_m}, L^{q_m})^{\alpha_m}(w_m;\ \mu)$，其中 $(w_1, \ldots, w_m) \in A_{\vec{P}}$且 $\mu \in \Delta_2$。正如 [20], 中所指出的，由线性性可知，只需考虑仅含一个符号函数的多线性交换子 $[\Sigma b, T_\theta]$ 。不失一般性，固定 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，然后考虑由下式给出的交换子算子$[b, T_\theta]_1$

$$\left[b, T_\theta\right]_1(\vec{f})(x) = b(x) \cdot T_\theta(f_1, f_2, \ldots, f_m)(x) - T_\theta(bf_1, f_2, \ldots, f_m)(x).$$

对于任意固定的球 $B = B(y, r) \subset \mathbb{R}^n$，其中 $y \in \mathbb{R}^n$ 且 $r \in (0, +\infty)$，与前面一样，我们将每个 f_k 拆分为

$$f_k = f_k^0 + f_k^\infty, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

其中 $f_k^0 = f_k \cdot \chi_{2B}$、 $f_k^\infty = f_k \cdot \chi_{(2B)^\complement}$ 和 $2B = B(y,\ 2r) \subset \mathbb{R}^n$。令 $\mathfrak{L}$ 与之前相同。利用引理 4.1($N = 2^m$)，我们可以写出

$$\begin{aligned}
&\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha - 1/p - 1/q} \left\|[b, T_\theta]_1(\vec{f}) \cdot \chi_{B(y,r)}\right\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})} \\
&= \nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha - 1/p - 1/q} \left(\int_{B(y,r)} \left|[b, T_\theta]_1(f_1, \ldots, f_m)(x)\right|^p \nu_{\vec{w}}(x)\, dx \right)^{1/p} \\
&\le C \cdot \nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha - 1/p - 1/q} \left(\int_{B(y,r)} \left|[b, T_\theta]_1(f_1^0, \ldots, f_m^0)(x)\right|^p \nu_{\vec{w}}(x)\, dx \right)^{1/p} \\
&+ C \sum_{(\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathfrak{L}} \nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha - 1/p - 1/q} \left(\int_{B(y,r)} \left|[b, T_\theta]_1(f_1^{\beta_1}, \ldots, f_m^{\beta_m})(x)\right|^p \nu_{\vec{w}}(x)\, dx \right)^{1/p} \\
&:= J^{0, \ldots, 0}(y, r) + \sum_{(\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathfrak{L}} J^{\beta_1, \ldots, \beta_m}(y, r).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

为了估计 (5.8) 中的第一项，结合定理 5.1、(4.4) 和

(4.5)，我们得到

$$
\begin{aligned}
J^{0,\dots,0}(y,r) &\le C\cdot \nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\prod_{k=1}^{m}\Big(\int_{B(y,2r)}|f_k(x)|^{p_k}w_k(x)\,dx\Big)^{1/p_k}\\
&= C\cdot \nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\prod_{k=1}^{m} w_k(B(y,2r))^{1/p_k+1/q_k-1/\alpha_k}\\
&\times\prod_{k=1}^{m}\Big[w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big]\\
&\le C\cdot\frac{\nu_{\vec{w}}(B(y,2r))^{1/p+1/q-1/\alpha}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/p+1/q-1/\alpha}}\\
&\times\prod_{k=1}^{m}\Big[w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big] \qquad (5.9)\\
&\le C\cdot\prod_{k=1}^{m}\Big[w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big].
\end{aligned}
$$

为了估计 (5.8) 中剩余的项，我们先处理 $\beta_1=\cdots=\beta_m=\infty$ 的情形。容易看出，对于任意 $x\in B(y,r)$,

$$
\big[b,T_\theta\big]_1(\vec{f})(x)=[b(x)-b_B]\cdot T_\theta(f_1,f_2,\dots,f_m)(x)-T_\theta((b-b_B)f_1,f_2,\dots,f_m)(x).
$$

由此，项 $J^{\infty,\dots,\infty}(y,r)$ 将分为两部分。

$$
\begin{aligned}
&J^{\infty,\dots,\infty}(y,r)\\
&\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\Big(\int_{B(y,r)}\big|[b(x)-b_B]\cdot T_\theta(f_1^\infty,f_2^\infty,\dots,f_m^\infty)(x)\big|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\Big)^{1/p}\\
&+C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\Big(\int_{B(y,r)}\big|T_\theta((b-b_B)f_1^\infty,f_2^\infty,\dots,f_m^\infty)(x)\big|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\Big)^{1/p}\\
&:=J_\star^{\infty,\dots,\infty}(y,r)+J_{\star\star}^{\infty,\dots,\infty}(y,r).
\end{aligned}
$$

我们分别分析每一项。在定理 3.1 的证明中，我们已经得到关于 $T_\theta(f_1^\infty,\dots,f_m^\infty)$ 的以下估计（见 (4.7)）。

$$
\big|T_\theta(f_1^\infty,f_2^\infty,\dots,f_m^\infty)(x)\big|\lesssim\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_k(z_k)\big|\,dz_k\Big).
$$

注意到 $\nu_{\vec{w}}\in A_{mp}\subset A_\infty$。因此，由引理 5.1 的 (ii) 可得

that

$$
\begin{aligned}
J_\star^{\infty,\dots,\infty}(y,r) &\le C\cdot \nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_k(z_k)\big|\,dz_k\Big)\\
&\quad\times\Big(\int_{B(y,r)}\big|b(x)-b_{B(y,r)}\big|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\Big)^{1/p}\\
&\le C\|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_k(z_k)\big|\,dz_k\Big).
\end{aligned}
$$

现在，我们按照估计 $I^{\infty,\dots,\infty}(y,r)$ 的相同方法进行处理，并得到

$$
\begin{aligned}
J^{\infty,\dots,\infty}_{\star}(y,r) &\lesssim \|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\\
&\quad\times\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/p}}\cdot\prod_{k=1}^{m}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\right\}\\
&=\|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\times\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{\prod_{k=1}^{m}w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/p_k+1/q_k-1/\alpha_k}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/p}}\right.\\
&\quad\left.\times\prod_{k=1}^{m}\Big[w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big]\right\}\\
&\lesssim\|b\|_*\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\prod_{k=1}^{m}\Big[w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big]\right.\\
&\quad\left.\times\frac{\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha-1/q}}\right\}.
\end{aligned}
$$

沿用定理 3.1 证明中的相同论证，我们还可以推出，对于任意 $x\in B(y,r)$,

$$
\begin{aligned}
&\big|T_\theta((b-b_B)f_1^\infty,f_2^\infty,\dots,f_m^\infty)(x)\big| \qquad (5.10)\\
&\lesssim\int_{(\mathbb{R}^n)^m\setminus B(y,2r)^m}\frac{|(b(z_1)-b_B)f_1(z_1)|\cdot|f_2(z_2)\cdots f_m(z_m)|}{(|x-z_1|+\cdots+|x-z_m|)^{mn}}\,dz_1\cdots dz_m\\
&=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{B(y,2^{j+1}r)^m\setminus B(y,2^jr)^m}\frac{|(b(z_1)-b_B)f_1(z_1)|\cdot|f_2(z_2)\cdots f_m(z_m)|}{(|x-z_1|+\cdots+|x-z_m|)^{mn}}\,dz_1\cdots dz_m\\
&\lesssim\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|^m}\int_{B(y,2^{j+1}r)^m\setminus B(y,2^jr)^m}\big|(b(z_1)-b_B)f_1(z_1)\big|\cdot\big|f_2(z_2)\cdots f_m(z_m)\big|\,dz_1\cdots dz_m\right)\\
&\le\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|^m}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|(b(z_1)-b_B)f_1(z_1)\big|\,dz_1\prod_{k=2}^{m}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_k(z_k)\big|\,dz_k\right)\\
&=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|(b(z_1)-b_B)f_1(z_1)\big|\,dz_1\right)\left(\prod_{k=2}^{m}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_k(z_k)\big|\,dz_k\right).
\end{aligned}
$$

于是我们有

$$J^{\infty,\dots,\infty}_{\star\star}(y,r)\lesssim \nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|(b(z_1)-b_B)f_1(z_1)\big|\,dz_1\bigg)$$
$$\times\bigg(\prod_{k=2}^{m}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_k(z_k)\big|\,dz_k\bigg). \tag{5.11}$$

对于每个 $2\le k\le m$，利用指数为 p_k 的 Hölder 不等式，我们得到

$$\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_k(z_k)\big|\,dz_k$$
$$\le\bigg(\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_k(z_k)\big|^{p_k}w_k(z_k)\,dz_k\bigg)^{1/p_k}\bigg(\int_{B(y,2^{j+1}r)}w_k(z_k)^{-p_k'/p_k}\,dz_k\bigg)^{1/p_k'}.$$

根据引理 2.1，$k=2,\dots,m$，我们有 $w_k^{1-p_k'}=w_k^{-p_k'/p_k}\in A_{mp_k'}\subset A_\infty$。再次利用指数为 p_1 的 Hölder 不等式以及（5.5），我们推得

$$\int_{B(y,2^{j+1}r)}|(b(z_1)-b_B)f_1(z_1)|\,dz_1$$
$$\le\bigg(\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_1(z_1)\big|^{p_1}w_1(z_1)\,dz_1\bigg)^{1/p_1}\bigg(\int_{B(y,2^{j+1}r)}|b(z_1)-b_{B(y,r)}|^{p_1'}w_1(z_1)^{-p_1'/p_1}\,dz_1\bigg)^{1/p_1'}$$
$$\lesssim\bigg(\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_1(z_1)\big|^{p_1}w_1(z_1)\,dz_1\bigg)^{1/p_1}(j+1)\|b\|_*\cdot\bigg(\int_{B(y,2^{j+1}r)}w_1(z_1)^{-p_1'/p_1}\,dz_1\bigg)^{1/p_1'},$$

其中，最后一个不等式由以下事实得出：$w_1^{-p_1'/p_1}\in A_{\infty}$。因此，根据上述两个估计以及关于 $\vec{w}$ 的 $A_{\vec{P}}$ 条件，可知（5.11）有界于

$$\|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\bigg\{\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\bigg(\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_k(z_k)\big|^{p_k}w_k(z_k)\,dz_k\bigg)^{1/p_k}$$
$$\bigg(\int_{B(y,2^{j+1}r)}w_k(z_k)^{-p_k'/p_k}\,dz_k\bigg)^{1/p_k'}\bigg\}$$
$$\lesssim\|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\bigg\{\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/p}}\cdot\prod_{k=1}^{m}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\bigg\}.$$

因此，根据估计 (4.4)，我们得出

$$J^{\infty,\dots,\infty}_{\star\star}(y,r)\lesssim\|b\|_*\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\bigg\{\prod_{k=1}^{m}\Big[w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big]$$
$$\times\frac{\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha-1/q}}\bigg\}.$$

汇总上述对 $J^{\infty,\dots,\star}\quad{}^{\infty}(y,r)$ 和 $J^{\infty,\dots,\star\star}\quad{}^{\infty}(y,r)$ 得到的估计，我们得到

$$J^{\infty,\dots,\infty}(y,r)\lesssim\|b\|_*\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\Bigg\{\prod_{k=1}^{m}\Big[w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big]\\ \times\frac{\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha-1/q}}\Bigg\}. \tag{5.12}$$

现在考虑恰有 ℓ 个 β_k 是 ∞ 的情形，其中 $1\le\ell<m$。我们只给出其中一种情形的论证，其余情形类似，通过对下面论证中的指标进行置换即可轻易得到。同时，这里我们只考虑 $\beta_1=\infty$ 的情形，因为另一种情形可以用相同的方法证明。现在我们估计项 $J^{\beta_1,\ \dots,\ \beta_m}(y,r)$，其中

$$\beta_1=\cdots=\beta_\ell=\infty\quad\&\quad\beta_{\ell+1}=\cdots=\beta_m=0.$$

在当前情形下，我们首先将项 $J^{\beta_1,\ \dots,\ \beta_m}(y,r)$ 分成如下两部分。

$$\begin{aligned}&J^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r)\\&\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\bigg(\int_{B(y,r)}\big|[b(x)-b_B]\cdot T_\theta(f_1^\infty,\dots,f_\ell^\infty,f_{\ell+1}^0,\dots,f_m^0)(x)\big|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)^{1/p}\\&+C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\bigg(\int_{B(y,r)}\big|T_\theta((b-b_B)f_1^\infty,\dots,f_\ell^\infty,f_{\ell+1}^0,\dots,f_m^0)(x)\big|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)^{1/p}\\&:=J_\star^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r)+J_{\star\star}^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r).\end{aligned}$$

我们分别估计各项。回顾一下，定理 3.1 中已经证明了以下结果（见 (4.8)）。

$$\big|T_\theta(f_1^\infty,\dots,f_\ell^\infty,f_{\ell+1}^0,\dots,f_m^0)(x)\big|\lesssim\sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_k(z_k)\big|\,dz_k\bigg).$$

于是由引理 5.1 的 (ii) 可直接得出

$$\begin{aligned}J_\star^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r)&\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q}\sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_k(z_k)\big|\,dz_k\bigg)\\&\quad\times\bigg(\int_{B(y,r)}\big|b(x)-b_{B(y,r)}\big|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)^{1/p}\\&\le C\|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_k(z_k)\big|\,dz_k\bigg).\end{aligned}$$

现在，我们可以完全按照估计 $I^{\infty,\dots,\infty}(y,r)$ 的方法，得到

$$J_{\star}^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r)\lesssim\|b\|_*\sum_{j=1}^{\infty}\Bigg\{\prod_{k=1}^{m}\Big[w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big]\\ \times\frac{\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha-1/q}}\Bigg\}.$$

另一方面，我们将采用与定理 3.1 相同的方法，并得到

$$\begin{aligned}
&\big|T_\theta((b-b_B)f_1^\infty,\dots,f_\ell^\infty,f_{\ell+1}^0,\dots,f_m^0)(x)\big|\\
&\lesssim\int_{(\mathbb{R}^n)^\ell\setminus B(y,2r)^\ell}\int_{B(y,2r)^{m-\ell}}\frac{|(b(z_1)-b_B)f_1(z_1)|\cdot|f_2(z_2)\cdots f_m(z_m)|}{(|x-z_1|+\cdots+|x-z_m|)^{mn}}\,dz_1\cdots dz_m\\
&\lesssim\prod_{k=\ell+1}^{m}\int_{B(y,2r)}\big|f_k(z_k)\big|\,dz_k\\
&\times\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|^m}\int_{B(y,2^{j+1}r)^\ell\setminus B(y,2^jr)^\ell}|(b(z_1)-b_B)f_1(z_1)|\cdot\big|f_2(z_2)\cdots f_\ell(z_\ell)\big|\,dz_1\cdots dz_\ell\\
&\le\prod_{k=\ell+1}^{m}\int_{B(y,2r)}\big|f_k(z_k)\big|\,dz_k\\
&\times\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|^m}\int_{B(y,2^{j+1}r)}|(b(z_1)-b_B)f_1(z_1)|\,dz_1\prod_{k=2}^{\ell}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_k(z_k)\big|\,dz_k\\
&\le\sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|^m}\int_{B(y,2^{j+1}r)}|(b(z_1)-b_B)f_1(z_1)|\,dz_1\prod_{k=2}^{m}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|f_k(z_k)\big|\,dz_k\bigg),
\end{aligned}\tag{5.13}$$

其中在最后一个不等式中，我们使用了包含关系 $2B\subseteq 2^{j+1}B$与 $j\in\mathbb{N}$。重复上述论证可得

$$J_{\star\star}^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r)\lesssim\|b\|_*\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\Bigg\{\prod_{k=1}^{m}\Big[w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big]\\ \times\frac{\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha-1/q}}\Bigg\}.$$

总结以上得到的估计，可得

$$J^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r)\lesssim\|b\|_*\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\Bigg\{\prod_{k=1}^{m}\Big[w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k}\big\|f_k\cdot\chi_{B(y,2^{j+1}r)}\big\|_{L^{p_k}(w_k)}\Big]\\ \times\frac{\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha-1/q}}\Bigg\}.\tag{5.14}$$

因此，对（5.8）两边取关于变量 y的 $L^q(\mu)$范数，然后利用闵可夫斯基不等式 ($q \geq 1$)、（5.9）、（5.12）和（5.14），可得

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q} \big\| [b,T_\theta]_1(\vec{f}) \cdot \chi_{B(y,r)} \big\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})} \Big\|_{L^q(\mu)} \\
&\leq \Big\| J^{0,\dots,0}(y,r) \Big\|_{L^q(\mu)} + \sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}} \Big\| J^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r) \Big\|_{L^q(\mu)} \\
&\leq C \Big\| \prod_{k=1}^m \Big[w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k} \big\| f_k \cdot \chi_{B(y,2r)} \big\|_{L^{p_k}(w_k)} \Big] \Big\|_{L^q(\mu)} \\
&+ C \cdot 2^m \sum_{j=1}^\infty \Big\| \prod_{k=1}^m \Big[w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k} \big\| f_k \cdot \chi_{B(y,2^{j+1}r)} \big\|_{L^{p_k}(w_k)} \Big] \Big\|_{L^q(\mu)} \\
&\times (j+1) \left(\frac{|B(y,r)|}{|B(y,2^{j+1}r)|} \right)^{\delta(1/\alpha-1/q)},
\end{aligned}
$$

其中，最后一步用到了估计 (4.10)。再应用一次 H¨older 不等式，可得

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/p-1/q} \big\| [b,T_\theta]_1(\vec{f}) \cdot \chi_{B(y,r)} \big\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})} \Big\|_{L^q(\mu)} \\
&\leq C \prod_{k=1}^m \Big\| w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k} \big\| f_k \cdot \chi_{B(y,2r)} \big\|_{L^{p_k}(w_k)} \Big\|_{L^{q_k}(\mu)} \\
&+ C \sum_{j=1}^\infty \prod_{k=1}^m \Big\| w_k(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha_k-1/p_k-1/q_k} \big\| f_k \cdot \chi_{B(y,2^{j+1}r)} \big\|_{L^{p_k}(w_k)} \Big\|_{L^{q_k}(\mu)} \\
&\times (j+1) \left(\frac{|B(y,r)|}{|B(y,2^{j+1}r)|} \right)^{\delta(1/\alpha-1/q)} \\
&\leq C \prod_{k=1}^m \|f_k\|_{(L^{p_k},L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k;\mu)} + C \prod_{k=1}^m \|f_k\|_{(L^{p_k},L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k;\mu)} \times \sum_{j=1}^\infty (j+1) \left[\frac{1}{2^{(j+1)n}} \right]^{\delta(1/\alpha-1/q)} \\
&\leq C \prod_{k=1}^m \|f_k\|_{(L^{p_k},L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k;\mu)},
\end{aligned}
$$

其中，最后一个级数收敛，因为 $\delta > 0$ 和 $1/\alpha - 1/q > 0$。取遍所有 $r > 0$ 的上确界，即完成证明。 □

$\vec{}$定理 3.4 的证明。给定 $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$，对 $\mathbb{R}^n$ 中任意固定的球 $B = B(y, r)$，与前面一样，将每个 f_k 拆分为

$$f_k = f_k^0 + f_k^\infty, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

其中 $f_k^0 = f_k \cdot \chi_{2B}$、$f_k^\infty = f_k \cdot \chi_{(2B)^0}$和 $2B = B(y, 2r) \subset \mathbb{R}^n$。同样，这里只需考虑仅含一个符号函数的多线性交换子，这是由线性性所致:

固定 $b\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，并考虑交换子算子

$$\big[b,T_\theta\big]_1(\vec{f})(x)=b(x)\cdot T_\theta(f_1,f_2,\dots,f_m)(x)-T_\theta(bf_1,f_2,\dots,f_m)(x).$$

令 $\mathfrak{L}$ 与之前相同。于是，对于任意给定的 $\lambda>0$，利用引理 4.2($N=2^m$)，可写为

$$\begin{aligned}
&\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\cdot\Big[\nu_{\vec{w}}\big(\big\{x\in B(y,r):\big|\big[b,T_\theta\big]_1(\vec{f})(x)\big|>\lambda^m\big\}\big)\Big]^m\\
\le& C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\cdot\Big[\nu_{\vec{w}}\big(\big\{x\in B(y,r):\big|\big[b,T_\theta\big]_1(f_1^0,\dots,f_m^0)(x)\big|>\lambda^m/2^m\big\}\big)\Big]^m\\
&+C\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}}\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\Big[\nu_{\vec{w}}\big(\big\{x\in B(y,r):\big|\big[b,T_\theta\big]_1(f_1^{\beta_1},\dots,f_m^{\beta_m})(x)\big|>\lambda^m/2^m\big\}\big)\Big]^m\\
:=&J_*^{0,\dots,0}(y,r)+\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}}J_*^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r).
\end{aligned}\tag{5.15}$$

注意到，杨函数 $\Phi(t)=t\cdot(1+\log^+t)$ 满足倍增条件，即存在常数 $C_\Phi>0$，使得对于每个 $t>0$,

$$\Phi(2t)\le C_\Phi\,\Phi(t).$$

这一事实结合定理 1.4 和不等式（2.7）可推出

$$\begin{aligned}
J_*^{0,\dots,0}(y,r)&\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\prod_{k=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{2|f_k^0(x)|}{\lambda}\right)\cdot w_k(x)\,dx\right)\\
&\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\prod_{k=1}^m\left(\int_{B(y,2r)}\Phi\left(\frac{|f_k(x)|}{\lambda}\right)\cdot w_k(x)\,dx\right)\\
&= C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\prod_{k=1}^m w_k(B(y,2r))\\
&\quad\times\left[\frac{1}{w_k(B(y,2r))}\int_{B(y,2r)}\Phi\left(\frac{|f_k(x)|}{\lambda}\right)\cdot w_k(x)\,dx\right]\\
&\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\prod_{k=1}^m w_k(B(y,2r))\cdot\left\|\Phi\left(\frac{|f_k|}{\lambda}\right)\right\|_{L\log L(w_k),B(y,2r)}.
\end{aligned}$$

由于根据定义，$\vec{w}=(w_1,\dots,w_m)\in A_{(1,\dots,1)}$，我们知道

$$\left(\frac{1}{|\mathcal{B}|}\int_{\mathcal{B}}\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\right)^m\le C\prod_{k=1}^m\inf_{x\in\mathcal{B}}w_k(x)\tag{5.16}$$

对任意球 $\mathcal{B}=\mathcal{B}(y,r)$，其中 $\mathbb{R}^n$ with $y\in\mathbb{R}^n$ and $r>0$，且 $\nu_{\vec{w}}=\prod_{k=1}^m w_k^{1/m}$，均成立。我们可以将这个不等式改写为

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|\mathcal{B}|}\int_{\mathcal{B}}\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\right)&\le C\left(\prod_{k=1}^m\inf_{x\in\mathcal{B}}w_k(x)\right)^{1/m}=C\left(\prod_{k=1}^m\inf_{x\in\mathcal{B}}w_k(x)^{1/m}\right)\\
&\le C\left(\inf_{x\in\mathcal{B}}\prod_{k=1}^m w_k(x)^{1/m}\right)=C\cdot\inf_{x\in\mathcal{B}}\nu_{\vec{w}}(x),
\end{aligned}$$

这意味着 $\nu_{\vec{w}} \in A_1$。此外，对于每个 w_k, $k = 1$、2、.....、m，不难看出

$$\left(\prod_{j\neq k}\inf_{x\in\mathcal{B}} w_j(x)^{1/m}\right)^m \left(\frac{1}{|\mathcal{B}|}\int_{\mathcal{B}} w_k(x)^{1/m}\,dx\right)^m \le \left(\frac{1}{|\mathcal{B}|}\int_{\mathcal{B}} w_k(x)^{1/m}\cdot\prod_{j\neq k} w_j(x)^{1/m}\,dx\right)^m$$
$$\le C\prod_{j=1}^m \inf_{x\in\mathcal{B}} w_j(x).$$

另请注意,

$$\left(\prod_{j\neq k}\inf_{x\in\mathcal{B}} w_j(x)^{1/m}\right)^m = \prod_{j\neq k}\inf_{x\in\mathcal{B}} w_j(x).$$

由此可得,

$$\left(\frac{1}{|\mathcal{B}|}\int_{\mathcal{B}} w_k(x)^{1/m}\,dx\right)^m \le C\cdot\inf_{x\in\mathcal{B}} w_k(x),$$

这意味着 $w_k^{1/m} \in A_1 (k = 1, 2, \ldots, m)$。回顾一下，对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意球 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(y, r)$，有以下结果成立（在（4.4）中取 $p_1 = \cdots = p_m = 1$ 和 $p = 1/m$ ）：

$$\prod_{k=1}^m w_k(\mathcal{B}(y,r))^{1+1/q_k-1/\alpha_k} \lesssim \nu_{\vec{w}}(\mathcal{B}(y,r))^{m+1/q-1/\alpha}. \tag{5.17}$$

因此,

$$\begin{aligned} J_*^{0,\ldots,0}(y,r) &\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\prod_{k=1}^m w_k(B(y,2r))^{1+1/q_k-1/\alpha_k} \\ &\quad\times\prod_{k=1}^m\left[w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/q_k}\left\|\Phi\left(\frac{|f_k|}{\lambda}\right)\right\|_{L\log L(w_k),B(y,2r)}\right] \\ &\le C\cdot\frac{\nu_{\vec{w}}(B(y,2r))^{m+1/q-1/\alpha}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{m+1/q-1/\alpha}} \\ &\quad\times\prod_{k=1}^m\left[w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/q_k}\left\|\Phi\left(\frac{|f_k|}{\lambda}\right)\right\|_{L\log L(w_k),B(y,2r)}\right]. \end{aligned}$$

此外，由于 $\nu_{\vec{w}}$ 属于 A_1 且 $m + 1/q - 1/\alpha > 0$，根据不等式（2.2），可得

$$J_*^{0,\ldots,0}(y,r) \le C\prod_{k=1}^m\left[w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/q_k}\left\|\Phi\left(\frac{|f_k|}{\lambda}\right)\right\|_{L\log L(w_k),B(y,2r)}\right].$$

为了估计其他项 $J^{\beta_1,\ldots,\beta_m}_*(y,r)$（对于 $(\beta_1,\ldots,\beta_m) \in \mathfrak{L}$），我们注意到，对于任意 $x \in B(y,r)$,

$$\left[b, T_\theta\right]_1(\vec{f})(x) = [b(x)-b_B]\cdot T_\theta(f_1, f_2, \ldots, f_m)(x) - T_\theta((b-b_B)f_1, f_2, \ldots, f_m)(x).$$

因此，我们可以进一步将 $J^{\beta_1,\dots,*\quad\ \beta_m}(y,r)$ 分解为

$$
\begin{aligned}
&J_*^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r)\\
\le& C\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\Big[\nu_{\vec{w}}\Big(\Big\{x\in B(y,r):\big|[b(x)-b_B]\cdot T_\theta(f_1^{\beta_1},f_2^{\beta_2},\dots,f_m^{\beta_m})(x)\big|>\lambda^m/2^{m+1}\Big\}\Big)\Big]^m\\
&+C\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\cdot\Big[\nu_{\vec{w}}\Big(\Big\{x\in B(y,r):\big|T_\theta((b-b_B)f_1^{\beta_1},f_2^{\beta_2},\dots,f_m^{\beta_m})(x)\big|>\lambda^m/2^{m+1}\Big\}\Big)\Big]^m\\
:=&\widetilde{J}_\star^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r)+\widetilde{J}_{\star\star}^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r).
\end{aligned}
$$

利用先前的逐点估计 (4.7) 和 (4.8)，并结合切比雪夫不等式，我们可以推得

$$
\begin{aligned}
\widetilde{J}_\star^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r)&\le C\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\\
&\quad\times\frac{2^{m+1}}{\lambda^m}\bigg(\int_{B(y,r)}\big|[b(x)-b_{B(y,r)}]\cdot T_\theta(f_1^{\beta_1},f_2^{\beta_2},\dots,f_m^{\beta_m})(x)\big|^{\frac{1}{m}}\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)^m\\
&\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\sum_{j=1}^\infty\bigg(\prod_{k=1}^m\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\frac{|f_k(z_k)|}{\lambda}\,dz_k\bigg)\\
&\quad\times\bigg(\int_{B(y,r)}\big|b(x)-b_{B(y,r)}\big|^{\frac{1}{m}}\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)^m.
\end{aligned}
$$

现在我们声称，对于 $2\le m\in\mathbb{N}$ 和 $\nu_{\vec{w}}\in A_1$,

$$
\bigg(\int_{B(y,r)}\big|b(x)-b_{B(y,r)}\big|^{\frac{1}{m}}\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)^m\lesssim\|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^m.\tag{5.18}
$$

暂且接受这一断言，则我们有

$$
\widetilde{J}_\star^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r)\lesssim\|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\sum_{j=1}^\infty\bigg(\prod_{k=1}^m\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\frac{|f_k(z_k)|}{\lambda}\,dz_k\bigg).
$$

此外，注意到对于任意 $t>0$，有 $t\le\Phi(t)=t\cdot(1+\log^+t)$。由此可得

由多重 $A_{(1,\dots,1)}$ 条件 (5.16) 和前面的估计 (2.7) 可得

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}^{\beta_1,\dots,\beta_m}_{\star}(y,r) &\lesssim \|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\\
&\quad\times\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{m}\bigg(\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\frac{|f_k(z_k)|}{\lambda}\cdot w_k(z_k)\,dz_k\bigg)\bigg(\inf_{z_k\in B(y,2^{j+1}r)}w_k(z_k)\bigg)^{-1}\\
&\lesssim \|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\\
&\quad\times\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^m}\prod_{k=1}^{m}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\Phi\bigg(\frac{|f_k(z_k)|}{\lambda}\bigg)\cdot w_k(z_k)\,dz_k\\
&\lesssim \|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\\
&\quad\times\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^m}\prod_{k=1}^{m}w_k\big(B(y,2^{j+1}r)\big)\bigg\|\Phi\bigg(\frac{|f_k|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{L\log L(w_k),B(y,2^{j+1}r)}\\
&= \|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^m}\prod_{k=1}^{m}w_k\big(B(y,2^{j+1}r)\big)^{1+1/q_k-1/\alpha_k}\\
&\quad\times\prod_{k=1}^{m}\bigg[w_k\big(B(y,2^{j+1}r)\big)^{1/\alpha_k-1/q_k}\bigg\|\Phi\bigg(\frac{|f_k|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{L\log L(w_k),B(y,2^{j+1}r)}\bigg].
\end{aligned}$$

因此，根据（5.17）和（2.1），我们得到

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}^{\beta_1,\dots,\beta_m}_{\star}(y,r) &\lesssim \|b\|_*\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\bigg\{\prod_{k=1}^{m}\bigg[w_k\big(B(y,2^{j+1}r)\big)^{1/\alpha_k-1/q_k}\bigg\|\Phi\bigg(\frac{|f_k|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{L\log L(w_k),B(y,2^{j+1}r)}\bigg]\\
&\quad\times\frac{\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha-1/q}}\bigg\}\\
&\lesssim \|b\|_*\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\bigg\{\prod_{k=1}^{m}\bigg[w_k\big(B(y,2^{j+1}r)\big)^{1/\alpha_k-1/q_k}\bigg\|\Phi\bigg(\frac{|f_k|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{L\log L(w_k),B(y,2^{j+1}r)}\bigg]\\
&\quad\times\bigg(\frac{|B(y,r)|}{|B(y,2^{j+1}r)|}\bigg)^{\delta(1/\alpha-1/q)}. \qquad (5.19)
\end{aligned}$$

我们回到 (5.18) 的证明。由于 $\nu_{\vec{w}}\in A_1$，我们知道 $\nu_{\vec{w}}$ 属于某个 $1<s<\infty$ 的反向 H¨older 类 RH_s （见 [5] 和 [14]）。这里，反向 H¨older 类定义如下： $\omega\in RH_s$，如果存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\bigg(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)^s\,dx\bigg)^{1/s}\le C\bigg(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)\,dx\bigg).$$

这一事实结合 H¨older 不等式可推出

$$
\begin{aligned}
&\int_{B(y,r)} \big|b(x)-b_{B(y,r)}\big|^{\frac{1}{m}}\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\\
&\le |B(y,r)|\bigg(\frac{1}{|B(y,r)|}\int_{B(y,r)}\big|b(x)-b_{B(y,r)}\big|^{\frac{s'}{m}}\,dx\bigg)^{1/s'}\bigg(\frac{1}{|B(y,r)|}\int_{B(y,r)}\nu_{\vec{w}}(x)^s\,dx\bigg)^{1/s}\\
&\le C\nu_{\vec{w}}(B(y,r))\bigg(\frac{1}{|B(y,r)|}\int_{B(y,r)}\big|b(x)-b_{B(y,r)}\big|^{\frac{s'}{m}}\,dx\bigg)^{1/s'}.
\end{aligned}
$$

这可以通过考虑以下两种情况来完成： $s'/m<1$ 和 $s'/m\ge 1$。若 $s'/m<1$，则再次利用 H¨older 不等式可得 (5.18)。若 $s'/m\ge 1$，则应用引理 5.1 的 (ii) 可得 (5.18)。另一方面，应用逐点估计 (5.10)、(5.13) 和切比雪夫不等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
\widetilde{J}^{\beta_1,\dots,\beta_m}_{\star\star}(y,r)&\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\\
&\quad\times\frac{2^{m+1}}{\lambda^m}\bigg(\int_{B(y,r)}\big|T_\theta((b-b_{B(y,r)})f_1^{\beta_1},f_2^{\beta_2},\dots,f_m^{\beta_m})(x)\big|^{\frac{1}{m}}\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)^m\\
&\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\prod_{k=2}^{m}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\frac{|f_k(z_k)|}{\lambda}\,dz_k\bigg)\\
&\quad\times\bigg(\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|b(z_1)-b_{B(y,r)}\big|\cdot\frac{|f_1(z_1)|}{\lambda}\,dz_1\bigg)\\
&\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\prod_{k=2}^{m}\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\frac{|f_k(z_k)|}{\lambda}w_k(z_k)\,dz_k\bigg)\\
&\quad\times\bigg(\frac{1}{|B(y,2^{j+1}r)|}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|b(z_1)-b_{B(y,r)}\big|\cdot\frac{|f_1(z_1)|}{\lambda}w_1(z_1)\,dz_1\bigg)\\
&\quad\times\prod_{k=1}^{m}\bigg(\inf_{z_k\in B(y,2^{j+1}r)}w_k(z_k)\bigg)^{-1}\\
&\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\times\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^m}\bigg(\prod_{k=2}^{m}\int_{B(y,2^{j+1}r)}\frac{|f_k(z_k)|}{\lambda}w_k(z_k)\,dz_k\bigg)\\
&\quad\times\bigg(\int_{B(y,2^{j+1}r)}\big|b(z_1)-b_{B(y,r)}\big|\cdot\frac{|f_1(z_1)|}{\lambda}w_1(z_1)\,dz_1\bigg),
\end{aligned}
$$

其中，在最后一个不等式中我们使用了（5.16）。此外，由（2.7）以及 $t\le\Phi(t)$ 这一事实，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{B(y,2^{j+1}r)}\frac{|f_k(z_k)|}{\lambda}w_k(z_k)\,dz_k\\
&\le\int_{B(y,2^{j+1}r)}\Phi\bigg(\frac{|f_k(z_k)|}{\lambda}\bigg)\cdot w_k(z_k)\,dz_k\\
&\le w_k\big(B(y,2^{j+1}r)\big)\bigg\|\Phi\bigg(\frac{|f_k|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{L\log L(w_k),B(y,2^{j+1}r)},
\end{aligned}
$$

由不等式（2.6）以及 $t \le \Phi(t)$ 这一事实，我们从而得到

$$\begin{aligned}
&\int_{B(y,2^{j+1}r)} \big|b(z_1) - b_{B(y,r)}\big| \cdot \frac{|f_1(z_1)|}{\lambda} w_1(z_1)\, dz_1 \\
&\le \int_{B(y,2^{j+1}r)} \big|b(z_1) - b_{B(y,r)}\big| \cdot \Phi\bigg(\frac{|f_1(z_1)|}{\lambda}\bigg) w_1(z_1)\, dz_1 \\
&\le C \cdot w_1\big(B(y,2^{j+1}r)\big) \Big\|b - b_{B(y,r)}\Big\|_{\exp L(w_1),B(y,2^{j+1}r)} \bigg\|\Phi\bigg(\frac{|f_1|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{L\log L(w_1),B(y,2^{j+1}r)}.
\end{aligned}$$

此外，由估计式 (5.7) 和假设 $w_1 \in A_\infty$，最后一个表达式不超过

$$C(j+1)\|b\|_* \cdot w_1\big(B(y,2^{j+1}r)\big) \bigg\|\Phi\bigg(\frac{|f_1|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{L\log L(w_1),B(y,2^{j+1}r)}.$$

因此，结合上述两个估计，我们得出

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}^{\beta_1,\dots,\beta_m}_{\star\star}(y,r) &\le C\|b\|_*\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q} \\
&\quad\times \sum_{j=1}^{\infty}\bigg\{\frac{(j+1)}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^m}\prod_{k=1}^{m} w_k\big(B(y,2^{j+1}r)\big)\bigg\|\Phi\bigg(\frac{|f_k|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{L\log L(w_k),B(y,2^{j+1}r)}\bigg\} \\
&= C\|b\|_*\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(j+1)}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^m}\prod_{k=1}^{m} w_k\big(B(y,2^{j+1}r)\big)^{1+1/q_k-1/\alpha_k} \\
&\quad\times \prod_{k=1}^{m}\bigg[w_k\big(B(y,2^{j+1}r)\big)^{1/\alpha_k-1/q_k}\bigg\|\Phi\bigg(\frac{|f_k|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{L\log L(w_k),B(y,2^{j+1}r)}\bigg].
\end{aligned}$$

再次利用 (5.17) 和 (2.1)，于是得到

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}^{\beta_1,\dots,\beta_m}_{\star\star}(y,r) &\lesssim \|b\|_*\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\bigg\{\prod_{k=1}^{m}\bigg[w_k\big(B(y,2^{j+1}r)\big)^{1/\alpha_k-1/q_k}\bigg\|\Phi\bigg(\frac{|f_k|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{L\log L(w_k),B(y,2^{j+1}r)}\bigg] \\
&\quad\times (j+1)\frac{\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-1/q}}{\nu_{\vec{w}}(B(y,2^{j+1}r))^{1/\alpha-1/q}}\bigg\} \\
&\lesssim \|b\|_*\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\bigg\{\prod_{k=1}^{m}\bigg[w_k\big(B(y,2^{j+1}r)\big)^{1/\alpha_k-1/q_k}\bigg\|\Phi\bigg(\frac{|f_k|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{L\log L(w_k),B(y,2^{j+1}r)}\bigg] \\
&\quad\times (j+1)\bigg(\frac{|B(y,r)|}{|B(y,2^{j+1}r)|}\bigg)^{\delta(1/\alpha-1/q)}. \qquad (5.20)
\end{aligned}$$

因此，对（5.15）两边取关于变量 y 的 $L^q(\mu)$-范数，然后利用闵可夫斯基不等式($q \ge 1$)、（5.19）和（5.20），我们得到

have

$$\begin{aligned}
&\Big\|\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\cdot\Big[\nu_{\vec{w}}\big(\big\{x\in B(y,r):\big|\big[b,T_\theta\big]_1(\vec{f})(x)\big|>\lambda^m\big\}\big)\Big]^m\Big\|_{L^q(\mu)}\\
&\le\Big\|J_*^{0,\dots,0}(y,r)\Big\|_{L^q(\mu)}+\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}}\Big\|J_*^{\beta_1,\dots,\beta_m}(y,r)\Big\|_{L^q(\mu)}\\
&\le C\Big\|\prod_{k=1}^m\Big[w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/q_k}\Big\|\Phi\Big(\frac{|f_k|}{\lambda}\Big)\Big\|_{L\log L(w_k),B(y,2r)}\Big]\Big\|_{L^q(\mu)}\\
&+C\cdot 2^m\sum_{j=1}^\infty\Big\|\prod_{k=1}^m\Big[w_k\big(B(y,2^{j+1}r)\big)^{1/\alpha_k-1/q_k}\Big\|\Phi\Big(\frac{|f_k|}{\lambda}\Big)\Big\|_{L\log L(w_k),B(y,2^{j+1}r)}\Big]\Big\|_{L^q(\mu)}\\
&\times\big(j+1\big)\left(\frac{|B(y,r)|}{|B(y,2^{j+1}r)|}\right)^{\delta(1/\alpha-1/q)}.
\end{aligned}$$

再次应用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\Big\|\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\cdot\Big[\nu_{\vec{w}}\big(\big\{x\in B(y,r):\big|\big[b,T_\theta\big]_1(\vec{f})(x)\big|>\lambda^m\big\}\big)\Big]^m\Big\|_{L^q(\mu)}\\
&\le C\prod_{k=1}^m\Big\|w_k(B(y,2r))^{1/\alpha_k-1/q_k}\Big\|\Phi\Big(\frac{|f_k|}{\lambda}\Big)\Big\|_{L\log L(w_k),B(y,2r)}\Big\|_{L^{q_k}(\mu)}\\
&+C\sum_{j=1}^\infty\prod_{k=1}^m\Big\|w_k\big(B(y,2^{j+1}r)\big)^{1/\alpha_k-1/q_k}\Big\|\Phi\Big(\frac{|f_k|}{\lambda}\Big)\Big\|_{L\log L(w_k),B(y,2^{j+1}r)}\Big\|_{L^{q_k}(\mu)}\\
&\times\big(j+1\big)\left(\frac{|B(y,r)|}{|B(y,2^{j+1}r)|}\right)^{\delta(1/\alpha-1/q)}\\
&\le C\prod_{k=1}^m\Big\|\Phi\Big(\frac{|f_k|}{\lambda}\Big)\Big\|_{(L\log L,L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k;\mu)}\\
&+C\prod_{k=1}^m\Big\|\Phi\Big(\frac{|f_k|}{\lambda}\Big)\Big\|_{(L\log L,L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k;\mu)}\times\sum_{j=1}^\infty\big(j+1\big)\left(\frac{|B(y,r)|}{|B(y,2^{j+1}r)|}\right)^{\delta(1/\alpha-1/q)}\\
&\le C\prod_{k=1}^m\Big\|\Phi\Big(\frac{|f_k|}{\lambda}\Big)\Big\|_{(L\log L,L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k;\mu)},
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $\delta(1/\alpha-1/q)>0$。定理 3.4 的证明至此完成。□

对于迭代交换子 $\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big]$，我们也可以按照定理 3.3 和定理 3.4 的相同方法得到以下结果。证明只需做适当但细微的修改，具体留给读者。

定理5.2。设 $m\ge 2$ 和 $\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big]$ 是 θ型 Calder´on–Zygmund 算子 T_θ 的迭代交换子，其中 θ 满足条件（1.1），且 $\vec{b}$ ∈属于有界平均振荡^m。假设 $1<p_k\le\alpha_k<q_k<\infty$、 $k=$ 1、2、.....、m和 $p\in$

$(1/m,\infty)$ 满足 $1/p=\sum_{k=1}^m 1/p_k$，$q\in[1,\infty)$ 满足 $1/q=\sum_{k=1}^m 1/q_k$ 且 $1/\alpha=\sum_{k=1}^m 1/\alpha_k$；$\vec{w}=(w_1,\ldots,w_m)\in A_{\vec{P}}$ 满足 $w_1、\ldots、w_m\in A_\infty$ 和 $\mu\in\Delta_2$。进一步假设（3.1）成立。那么存在常数 $C>0$，使得对所有 $\vec{f}=(f_1,\ldots,f_m)\in(L^{p_1},L^{q_1})^{\alpha_1}(w_1;\mu)\times\cdots\times(L^{p_m},L^{q_m})^{\alpha_m}(w_m;\mu)$，

$$\left\|\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right](\vec{f})\right\|_{(L^p,L^q)^\alpha(\nu_{\vec{w}};\mu)}\le C\prod_{k=1}^m\left\|f_k\right\|_{(L^{p_k},L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k;\mu)}$$

其中 $\nu_{\vec{w}}=\prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}$。

定理 5.3. 设 $m\ge 2$ 和 $\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right]$ 是满足条件 (1.9) 且 $\vec{b}\in$属于有界平均振荡^m 的 θ-型 Calder´on–Zygmund 算子 T_θ 关于 θ 的迭代交换子。假设 $p_k=1、1\le\alpha_k<q_k<\infty、k=1、2、\ldots..、m$ 以及 $p=1/m、q\in[1,\infty)$ 满足 $1/q=\sum_{k=1}^m 1/q_k$ 和 $1/\alpha=\sum_{k=1}^m 1/\alpha_k$；$\vec{w}=(w_1,\ldots..,w_m)\in A_{(1,\ldots,1)}$ 满足 $w_1、\ldots..、w_m\in A_\infty$ 以及 $\mu\in\Delta_2$。进一步假设 (3.1) 成立。那么对于任意给定的 $\lambda>0$ 以及任意球 $B(y,r)$，若 $\subset\mathbb{R}^n$ 满足 $(y,r)\in\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$，$\vec{}$，则存在一个与 $f=(f_1,\ldots..,f_m)、B(y,r)$ 以及 λ无关的常数 $C>0$，使得

$$\left\|\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\cdot\left[\nu_{\vec{w}}\left(\left\{x\in B(y,r):\left|\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right](\vec{f})(x)\right|>\lambda^m\right\}\right)\right]^m\right\|_{L^q(\mu)}$$
$$\le C\cdot\prod_{k=1}^m\left\|\Phi^{(m)}\left(\frac{|f_k|}{\lambda}\right)\right\|_{(L\log L,L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k;\mu)},$$

其中$\overbrace{\nu_{\vec{w}}=\prod_{k=1}^m w_k}^{1/m}$，$\Phi(t)=t\cdot(1+\log^+ t)$ 和 $\Phi^{(m)}=\Phi\circ\cdot\overset{m}{\circ}\Phi$。这里的范数$\|\cdot\|_{L^q(\mu)}$是关于变量 y取的，即，

$$\left\|\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\cdot\left[\nu_{\vec{w}}\left(\left\{x\in B(y,r):\left|\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right](\vec{f})(x)\right|>\lambda^m\right\}\right)\right]^m\right\|_{L^q(\mu)}$$
$$=\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\cdot\left[\nu_{\vec{w}}\left(\left\{x\in B(y,r):\left|\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right](\vec{f})(x)\right|>\lambda^m\right\}\right)\right]^m\right]^q\mu(y)\,dy\right\}^{1/q}.$$

注 5.1. 根据定理 5.3，我们可以说，迭代交换子$\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right]$从 $(L\log\ L,L^{q_1})^{\alpha_1}(w_1;\mu)\times\cdots\times(L\log\ L,L^{q_m})^{\alpha_m}(w_m;\mu)$ 到 $(WL^p,L^q)^\alpha(\nu_{\vec{w}};\mu)$ 有界，且 $p=1/m$。

最后，根据关系 (4.18)，我们得到以下关于多线性交换子 $\left[\Sigma\vec{b},T_\theta\right]$ 和 $\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right]$的加权估计结果。

¯推论 5.1. 设 $m\ge 2$ 和 $b\in$ 有界平均振荡^m。假设 $1<p_k\le\alpha_k<q_k<\infty$，$k=1,2,\ldots,m$和 $p\in(1/m,\infty)$ 满足 $1/p=\sum_{k=1}^m 1/p_k$，$q\in[1,\infty)$，且 $1/q=\sum_{k=1}^m 1/q_k$和 $1/\alpha=\sum_{k=1}^m 1/\alpha_k$；$\vec{w}=(w_1,\ldots,w_m)\in\prod_{k=1}^m A_{p_k}$和 $\mu\in\Delta_2$。此外，假设 (3.1) 成立。则多线性交换子 $\left[\Sigma\vec{b},T_\theta\right]$ 和迭代交换子 $\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right]$ 均满足

$$\left\|\left[\Sigma\vec{b},T_\theta\right](\vec{f})\right\|_{(L^p,L^q)^\alpha(\nu_{\vec{w}};\mu)}\le C\prod_{k=1}^m\left\|f_k\right\|_{(L^{p_k},L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k;\mu)}$$

and

$$\left\|\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right](\vec{f})\right\|_{(L^p,L^q)^\alpha(\nu_{\vec{w}};\mu)}\le C\prod_{k=1}^m\left\|f_k\right\|_{(L^{p_k},L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k;\mu)}$$

其中 $\nu_{\vec{w}}=\prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}$，条件是 θ 满足条件 (1.1)。

推论 5.2. 设 $m\ge 2$ 和 $\vec{b}\in$ 属于有界平均振荡^m。假设 $p_k=1$, $1\le\alpha_k<q_k<\infty$, $k=1,2,\dots,m$和 $p=1/m$, $q\in[1,\infty)$ 满足 $1/q=\sum_{k=1}^m 1/q_k$和$1/\alpha=\sum_{k=1}^m 1/\alpha_k$; $\vec{w}=(w_1,\dots,w_m)\in\prod_{k=1}^m A_1$且 $\mu\in\Delta_2$。此外，假设 (3.1) 成立。那么，对于任意给定的 $\lambda>0$ 以及任意球 $B(y,r)$，其中$y\in\mathbb{R}^n$且 $r>0$，存在常数 $C>0$，该常数与 $\vec{f}=(f_1,\dots,f_m)$、$B(y,r)$ 及 λ 无关，使得 ($\nu_{\vec{w}}=\prod_{k=1}^m w_k^{1/m}$)

$$\begin{aligned}&\left\|\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\cdot\left[\nu_{\vec{w}}\left(\left\{x\in B(y,r):\left|\left[\Sigma\vec{b},T_\theta\right](\vec{f})(x)\right|>\lambda^m\right\}\right)\right]^m\right\|_{L^q(\mu)}\\&\le C\cdot\prod_{k=1}^m\left\|\Phi\left(\frac{|f_k|}{\lambda}\right)\right\|_{(L\log L,L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k;\mu)},\end{aligned}$$

假设 θ 满足条件 (1.6)，并且

$$\begin{aligned}&\left\|\nu_{\vec{w}}(B(y,r))^{1/\alpha-m-1/q}\cdot\left[\nu_{\vec{w}}\left(\left\{x\in B(y,r):\left|\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right](\vec{f})(x)\right|>\lambda^m\right\}\right)\right]^m\right\|_{L^q(\mu)}\\&\le C\cdot\prod_{k=1}^m\left\|\Phi^{(m)}\left(\frac{|f_k|}{\lambda}\right)\right\|_{(L\log L,L^{q_k})^{\alpha_k}(w_k;\mu)},\end{aligned}$$

假设 θ 满足条件 (1.9)。

致谢

本研究得到国家自然科学基金（项目编号：XJEDU2020Y002and 2022D01C407）资助。

参考文献

[1] D. R. Adams, 《莫雷空间》, 应用与数值调和分析讲义, Birkh¨auser/Springer, Cham, 2015年。[2] J. Alvarez、R. J. Bagby、D. S. Kurtz 和 C. P´erez, 《线性算子交换子的加权估计》, Studia Math, 104(1993), 195–209。[3] J. Bergh 和 J. L¨ofstr¨om, 《插值空间：导论》, Springer–Verlag, 1976年。[4] Y. Ding、S. Z. Lu 和 K. Yabuta, 《粗糙核 Marcinkiewicz 积分的交换子》, 《数学分析及其应用杂志》, 275(2002), 60–68。

[5]J. Duoandikoetxea，《傅里叶分析》，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000年。[6] J. Feuto、I. Fofana 和 K. Koua，《混合空间某些子空间中极大算子的加权范数不等式》，《加拿大数学通报》，53(2010)，263–277。[7] J. Feuto，《包含加权 Morrey 空间在内的函数空间上的内在平方函数》，韩国数学会通报，50(2013)，1923–1936。[8] J. Feuto，《广义 Morrey 空间中的范数不等式》，《傅里叶分析及其应用》，20(2014)，896–909。[9] J. Feuto，《Morrey 空间某些子空间中的范数不等式》，《布莱士·帕斯卡数学年刊》，21(2014)，21–37。[10] I. Fofana，《包含 Lorentz 空间的一类函数空间的研究》（法文），《非洲数学》，1(1988)，29–50。[11] J.J.F.Fournier 和 J. Stewart，《 L^p 与 l^q的混合空间》，《美国数学会通报》，13(1985)，1–21。[12] J. Garcia-Cuerva 和 J. L. Rubio de Francia，《加权范数不等式及相关主题》，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1985年。[13] L. Grafakos，《经典傅里叶分析》，第三版，Springer-Verlag，2014[14]L. Grafakos，《现代傅里叶分析》，第三版，Springer-Verlag，2014。[15] L. Grafakos 和 R. H. Torres，《多线性 Calder´on–Zygmund 理论》，《数学进展》，165(2002)，124–164。[16] F. Holland，《 L^p 与 l^q的混合空间上的调和分析》，《伦敦数学会杂志》，10(1975)，295–305。[17] F. John 和 L. Nirenberg，《有界平均振荡函数》，《纯粹与应用数学通讯》，14(1961)，415–426。[18]N.Kikuchi、E.Nakai、N.Tomita、K.Yabuta 和 T.Yoneda，《混合空间及离散情形中的 Calder´on–Zygmund 算子》，《数学分析及其应用杂志》，335(2007)，198–212。[19] Y. Komori 和 S. Shirai，《加权 Morrey 空间与奇异积分算子》，《数学快报》，282(2009)，219–231。[20] A. K. Lerner、S. Ombrosi、C. P´erez、R. H. Torres 和 R. Trujillo-Gonz´alez，《多线性 Calder´on–Zygmund 理论中的新极大函数与多重权》，《数学进展》，220(2009)，1222–1264。

[21] Z. G. Liu 和 S. Z. Lu，Calder´on–Zygmund 型算子交换子的端点估计，Kodai 数学杂志，25(2002)，79–88。[22] G. Z. Lu 和 P. Zhang，具有 Dini 型核的多线性 Calder´on–Zygmund 算子及其应用，《非线性分析》，107(2014)，92–117。[23] D. Maldonado 和 V. Naibo，具有温和正则性的抛物乘积和双线性伪微分算子的加权范数不等式，《傅里叶分析及其应用》，15(2009)，218–261。[24] C. B. Morrey，关于拟线性椭圆偏微分方程的解，《美国数学会汇刊》，43(1938)，126–166。[25] C. P´erez 和 R. H. Torres，多线性奇异积分的锐极大函数估计，当代数学，320(2003)，323–331。[26] C. P´erez、G. Pradolini、R. H. Torres 和 R. Trujillo-Gonz´alez，多线性奇异积分迭代交换子的端点估计，伦敦数学会公报，46(2014)，26–42。[27] T. S. Quek 和 D. C. Yang，加权弱 Hardy 空间上的 Calder´on–Zygmund 型算子 $\mathbb{R}^n$，《Acta Math. Sinica (Engl. Ser)》，16(2000)，141–160。[28] M. M. Rao 和 Z. D. Ren，《奥利奇空间理论》，Marcel Dekker，纽约，1991。[29] E. M. Stein 和 G. Weiss，测度变换下的算子插值，《美国数学会汇刊》，87(1958)，159–172。[30] E. M. Stein，《奇异积分与函数的可微性》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970。[31] E. M. Stein，《调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993。[32] H. Wang，加权 Morrey 空间上的内在平方函数，《数学分析及其应用杂志》，396(2012)，302–314。[33] H. Wang，某些加权混合空间上的 θ型 Calder´on–Zygmund 算子及线性交换子的若干估计，《Anal. Theory Appl.》，38(2022)，361–393。[34] H. Wang，某些加权混合空间上分数阶积分算子及线性交换子的估计，《函数空间杂志》，2020，文章编号 2697104，共 25 页。

[35] H. Wang，某些加权混合空间上向量值内禀平方函数及其交换子的估计，《Adv. Oper. Theory》，7(2022)，论文编号 42，共 46 页。[36] P. W. Wang 和 Z. G. Liu，广义 Morrey 空间中多线性 Calder´on–Zygmund 算子的加权范数不等式，《J. Inequal. Appl.》，2017，论文编号 48，共 10 页。[37] P. W. Wang 和 Z. G. Liu，广义 Morrey 空间上多线性积分算子及其交换子的有界性，《Adv. Oper. Theory》，2(2017)，269–286。[38] X. M. Wei 和 S. P. Tao，加权（L^q，L^p）$^\alpha$（$\mathbb{R}^n$）空间上具有粗糙核的 Littlewood–Paley 算子的有界性，《Anal. Theory Appl.》，29(2013)，135–148。[39] K. Yabuta，Calder´on–Zygmund 算子的推广，Studia Math，82(1985)，17–31。[40] P. Zhang，Marcinkiewicz 积分交换子的加权端点估计，《Acta Math. Sinica (Engl. Ser)》，26(2010)，1709–1722。[41]P. Zhang 和 H. Xu，Calder´on–Zygmund 型算子交换子的锐加权估计，《Acta Math. Sinica (Chin. Ser)》，48(2005)，625–636。