arXiv:2302.11555v1 [math.MG] 22 Feb 2023

四维中的香肠灾变

Ji Hoon Chun*

摘要

J. Wills（1983）提出的香肠灾变指出，在 $d=3$ 和 $d=4$中， $\mathbb{R}^d$ 内 n 球体的最密堆积在 n 较小时呈香肠状，而在 n 较大时会跃变为满维堆积，中间不会经过任何中间维度。令n_d^* 为使 $\mathbb{R}^d$ 内 n 球体的最密堆积成为满维堆积的 n 最小值，并令 N_d^* 为使 $\mathbb{R}^d$ 内 N 球体的最密堆积对所有 $N \geq N_d^*$均为满维堆积的 N 最小值。我们拓展了 Gandini 和 Zucco（1992）的工作，得到了新的上界 $n_4^* \leq 338,196$ 和 $N_4^* \leq 516,946$。后一结果证明中一些冗长且重复的部分是借助区间算术得到的。

1 引言

令 $B^d := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, |\mathbf{x}| \leq 1\right\}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的**单位球**（通常非正式地称为“球”），其中$|\mathbf{v}| := \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_d^2}$ 对于向量$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_d)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^d$。

定义 1.1。如果对于所有互异的$\mathbf{x},\mathbf{y} \in C$，都有 $\left(\mathbf{x} + \operatorname{int} B^d\right) \cap \left(\mathbf{y} + \operatorname{int} B^d\right) = \emptyset$，则集合 $C \subset \mathbb{R}^d$ 是闭单位球 B^d 的**堆积集**（通常称为“球堆积”）；其中 $\operatorname{int} X$ 表示 X的内部。

关于堆积的大量信息可见 Conway 和 Sloane (1999) [7] （关于无限堆积）以及 Böröczky Jr. (2004) [6] （关于有限堆积）。此外，Zong (1999) [33] 详细总结了无限和有限情形下的若干重要结果与问题。对于 $d \in \mathbb{N}$，我们用 $\mathscr{P}_n^d$表示在 $\mathbb{R}^d$中含有 $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ 个点的所有球堆积的集合，用 $\mathscr{P}^d$表示在 $\mathbb{R}^d$ 中含有无限多个点的所有球堆积的集合。令 vol_k 表示 k维勒贝格测度，并令 $\kappa_d := \operatorname{vol}_d\left(B^d\right)$。记号 vol、面积和 ℓ 分别用于表示 $k=d$、 $k=2$和 $k=1$ 。本文中，我们用 n 表示一个堆积中的点数，用 d 表示底层欧几里得空间的维数。

定义 1.2。设 C 为一个堆积集。如果 $|C| < \infty$，其中 $|C|$ 是其基数，则 C 的**有限堆积密度** 定义为

$$\delta(C) := \frac{|C|\,\kappa_d}{\operatorname{vol}\left(\operatorname{conv} C + B^d\right)} \tag{1.1}$$

如果 $|C| = \infty$，则 C 的**（无限）堆积密度** 定义为（见 [33], 第 1.1 节）

$$\delta(C) := \limsup_{r \to \infty} \frac{\left|\left\{\mathbf{x} \in C \,\middle|\, \mathbf{x} + B^d \subseteq r\,[-1,1]^d\right\}\right| \kappa_d}{\operatorname{vol}\left(r\,[-1,1]^d\right)}.$$

对于给定的 d 和 n，由 n 个球体组成的最密有限（球体）堆积 $\delta(d,n)$ 的密度，以及最密无限（球体）堆积 $\delta(d)$ 的密度，分别为 $\delta(d,n) := \sup\left\{\delta(C_n) \,\middle|\, C_n \in \mathscr{P}_n^d\right\}$和 $\delta(d) := \sup\left\{\delta(C) \,\middle|\, C \in \mathscr{P}^d\right\}$。

C 在 $\mathbb{R}^d$ 中的堆积称为基数为 n 的**香肠排列** S_n^d （简称“香肠”），如果存在一个单位向量$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$、一个向量$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$以及一个 $n \in \mathbb{N}$，使得 $C = \{\mathbf{v} + 2i\mathbf{u} \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$，也就是说， C 中的点都位于同一条直线上，并且彼此尽可能接近。

*作者的研究得到德国研究联合会（DFG）研究生院“复杂性的侧面”（GRK 2434）的支持。

香肠的密度为

$$\delta\left(S_n^d\right)=\frac{n\kappa_d}{\kappa_d+2\left(n-1\right)\kappa_{d-1}},\tag{1.2}$$

以及 L. Fejes Tóth 提出的**香肠猜想** [9] 指出，在 $d\geq 5$维中，最优的有限堆积由香肠达到。

猜想 1.3（香肠猜想（L. Fejes Tóth，1975））。设 $d\geq 5$ 和 $n\in\mathbb{N}$，则 $\delta\left(S_n^d\right)=$δ（$d$、$n$），而最大密度 δ（d、n）只有通过香肠排列才能达到。等价地，对于所有 $C\in\mathscr{P}_n^d$，都有体积 $\left(S_n^d+B^d\right)\leq$ 体积 $\left(C+B^d\right)$，当且仅当 $C=S_n^d$时取等号。

1.1 多胞体与 Steiner 公式

为使本文更加自洽，本小节将简要介绍与多胞体、超平面和格相关的离散几何与凸几何基本概念。相关内容可参见 Gruber [13] 和 Grünbaum [15], 的著作，以及 Conway 和 Sloane（1999）[7], 所编两卷本汇编的第一卷 [14]，该汇编由 Gruber和Wills 编辑；还可参见 Goodman、O'Rourke 和 Tóth 编写的手册中 Henk、Richter-Gebert 和 Ziegler 关于多胞体的章节 [16] [12]。本文主要遵循 Gruber 以及 Henk、Richter-Gebert 和 Ziegler 的论述。

若 $P=\operatorname{conv}\left\{\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^n\right\}$ 对于 $\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^n\in\mathbb{R}^d$ 和一个有限 $n\geq 0$ 成立，则集合 $P\subseteq\mathbb{R}^d$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个（凸）多胞体。设 $P\subset\mathbb{R}^d$ 是一个凸多胞体，且 $F_k\in\mathscr{F}_k(P)$。法锥 $N(P,F_k)$ 是所有满足以下性质的 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$ 的集合：存在一个 $\lambda\geq 0$，使得 $F_k\subseteq P\cap\left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^d\,\middle|\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\lambda\right\}$，且对于所有 $\mathbf{y}\in P$，都有 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\leq\lambda$；而外角 $\theta(P,F_k)$ 是

$$\theta\left(P,F_k\right):=\frac{\operatorname{vol}\left(\left(N\left(P,F_k\right)+\operatorname{lin}\left(F_k-\mathbf{x}\right)\right)\cap B^d\right)}{\operatorname{vol}\left(B^d\right)},$$

其中 $\mathbf{x}\in\operatorname{relint}(F_k)$。对于两个凸体 $K,L\subset\mathbb{R}^d$，K 与 L 的 **闵可夫斯基加法** $K+L$ 定义为 $K+L:=\left\{\mathbf{x}+\mathbf{y}\in\mathbb{R}^d\,\middle|\,\mathbf{x}\in K,\ \mathbf{y}\in L\right\}$，此处两个集合的和总是指闵可夫斯基加法。Steiner [25] 证明了一个公式，该公式将 $\operatorname{vol}\left(K+\lambda B^d\right),\lambda\geq 0$ 表示为关于 λ 的多项式。对我们的用途而言，采用以下形式表示凸多胞体的 Steiner 公式较为方便：

$$\operatorname{vol}\left(P+B^d\right)=\operatorname{vol}\left(P\right)+\sum_{k=1}^{d-1}\sum_{F_k\in\mathscr{F}_k(P)}\operatorname{vol}_k\left(F_k\right)\theta\left(P,F_k\right)\kappa_{d-k}+\kappa_d\tag{1.3}$$

（参见 [23], 第 3 节和 [16]），其中 $\mathscr{F}_k(P)$ 是 P 的所有 k 维面组成的集合。令 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$and $\lambda\in\mathbb{R}$，则定义超平面 $H(\mathbf{x}\ \lambda):=\left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^d\,\middle|\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\lambda\right\}$ 以及闭半空间$H^-(\mathbf{x}\ \lambda):=\left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^d\,\middle|\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\leq\lambda\right\}$。如果闭凸集 K 在 $\mathbf{x}$ 处满足 $K\cap H(\mathbf{x}\ \lambda)\neq\emptyset$and $K\subseteq H^-(\mathbf{x}\ \lambda)$，则称 $H(\mathbf{x}\ \lambda)$ 为其支撑超平面。Λ 中的格是 $\mathbb{R}^d$ 的离散子群，并且我们假设 Λ 的秩为满秩，即 $\dim\Lambda=d$。给定格 Λ 和子集 $S\subset\mathbb{R}^d$，定义$G(S):=|S\cap\Lambda|$。

1.2 二维中的香肠

Fejes Tóth 的香肠猜想声称，在所有维数 $d\geq 5$ 中，对于 $\mathbb{R}^d$ 中的任意球体，香肠排列都能形成最密堆积。一般而言，这一结论对 $d<5$ 并不成立，因为由格 A_2、D_3 和 D_4 得到的无限堆积（例如，参见 Conway 和 Sloane [7], 第 4 章）的无限堆积密度，高于维数 2、3 和 4 中几乎所有香肠的有限堆积密度。因此，根据无限堆积密度的定义可知，存在 A_2、D_3 和 D_4 的有限子集，其密度高于 $\mathbb{R}^2$、$\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{R}^4$ 中与之等基数的香肠。

	无限堆积		有限堆积	
维数	堆积	密度	香肠	密度
1	$\mathbb{Z}$	1.00000	S_1^1	1.00000
2	A_2	$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.90690$	S_1^2	1.00000
			S_2^2	$\frac{2\pi}{\pi+4} \approx 0.87980$
3	D_3	$\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.74048$	S_3^3	$\frac{3}{4} \approx 0.75000$
			S_4^3	$\frac{16}{22} \approx 0.72727$
4	D_4	$\frac{\pi^2}{16} \approx 0.61685$	S_9^4	$\frac{27\pi^2}{3\pi^2+128\pi} \approx 0.61723$
			S_{10}^4	$\frac{10\pi^2}{\pi^2+48\pi} \approx 0.61429$
5	D_5	$\frac{\pi^2}{15\sqrt{2}} \approx 0.46526$	$\lim_{n\to\infty} S_n^5$	$\frac{8}{15} \approx 0.53333$

表 1.1：第 1 至第 5 维中已知最密的堆积（见 [7], 第 1 章，表 1.2）与香肠堆积的比较。

对于所有非平凡数量（即多于两个）的圆，香肠从来都不是最优堆积[29, 9]——另请参见 [6]，第 4.1–4.3 节中的讨论。不过，由于香肠排列是一维最密堆积，我们仍可得出结论：对于 $n \geq 3$，最密有限堆积必然 是二维的，即使其具体形态尚不明确。

1.3 维数3 和4中的香肠

三维和四维中的情况更加复杂。球体数量较少时，香肠是最优的；而球体数量较多时，已知的最佳堆积则是满维的。奇怪的是，已知的最佳堆积从来不会处于两者之间，这种现象被称为**香肠灾变**，该名称由 Jörg Wills [31] 于 1983 年提出。Henk 和 Wills [17] 撰写的广泛综述总结了有关香肠灾变的进展和成果，包括其与一般凸体的关系。为方便起见，我们将使用诸如 C“比香肠更密”这样的表述，如果 $|C| = n$ 和 $\delta(C) > \delta\left(S_n^d\right)$。

对于 $n \leq 2$ 或 $d = 1$，香肠显然是最优的。最简单的非平凡情形是 $d = 2$，在该情形下，对于所有 $n \geq 3$，堆积 $C_n^{\bigcirc}$的密度都高于香肠。Zong（[33], 第 13.4 节，例 13.1）简洁地证明了，在任意维数 $d \geq 3$ 中，对于 $n = 3$，香肠都是最优的。对于一般情形，还需要几个定义——见 Wills（1983、1985） [31, 32]。

定义 1.4。令 $d \geq 2$, $n \geq 1$, $\mathscr{C}_n^d$ 为 $\mathscr{P}_n^d$ 的子集，其中包含在 $\mathscr{P}_n^d$ 中具有最大密度的所有堆积，并令 $k(d, n) := \max\left\{\dim C \,|\, C \in \mathscr{C}_n^d\right\}$。然后定义

$$n_d^* := \min\left\{n \in \mathbb{N} \,|\, k(d,n) > 1\right\},$$
$$N_d^* := \min\left\{N \in \mathbb{N} \,|\, k(d,N') > 1 \text{ for all } N' \geq N\right\}.$$

这些是从香肠堆积转变为非香肠（维数 > 1）堆积的阈值。对于给定的 d，n_d^* 是使香肠不再是 $\mathbb{R}^d$ 中 n 个点的最密堆积的最小数，而阈值 N_d^* 是使香肠永远不再是 $\mathbb{R}^d$ 中 $N \geq N_d^*$ 个点的最密堆积的最小数。根据第 1.2 小节的讨论，可得 $n_2^* = N_2^* = 3$。

最初，Wills（1983年） [31] 给出了 $n_3^* \leq 56$ 和 $n_4^* \leq 5,900,000$ 的上界。这些上界是通过一种通用方法得出的，即在每个维数中取最密无限晶格的一个较大有限子集。由于 $\delta(D_3) > \lim_{n\to\infty} \delta\left(S_n^3\right)$ 且 $\delta(D_4) > \lim_{n\to\infty} \delta\left(S_n^4\right)$，因此总能从 D_3 和 D_4 格中选取适当的有限子集，使其密度超过相应香肠堆积的密度。$n_3^* \geq 4$ 和 $n_4^* \geq 5$ 的首个非平凡下界直到一年后才出现，这是 Betke 和 Gritzmann（1984年）关于香肠猜想的一项一般性结果 [2] 的推论。后一个不等式至今仍是已知的最佳下界，而前一个不等式则由

Böröczky Jr.（1993年） [5] 改进至 $n_3^* \geq 5$。请注意，存在比香肠密度更高的满维 n 球体堆积，并不先验地意味着对于任何特定的 $n' > n$，也存在这样的满维堆积。Gandini 和 Wills（1992年） [10]构造了 $\mathbb{R}^3$中的三维堆积，其中 $n \in \{56, 59, 60, 61, 62\}$ 和 $n \geq 65$ 的堆积密度高于相应的香肠；不久之后，Scholl（2000年） [24] 证明三维堆积对于 $n \in \{58, 63, 64\}$是最优的。Gandini 和 Wills 还猜想，对于 $n = 57$ 以及所有$n < 56$，香肠都是可能的最佳堆积。

在维数 4 中，Gandini 和 Zucco（1992年） [11] 构造了一个由 375，769 个球体组成的四维堆积，其密度高于 $S^4_{375,\ 769}$，并且还指出 $n_4^* < 367$，300。据我们所知，我们并未发现任何针对 N_4^* 的具体上界。

维数	n_d^*	N_d^*
2	$n_2^* = 3$	$N_2^* = 3$
3	$4 \leq n_3^* \leq 56$ $n_3^* = 56$ （推测）	$56 \leq N_3^* \leq 58$ $N_3^* = 58$ （推测）
4	$5 \leq n_4^* < 367$，300 300，$000 < n_4^* < 367$，300（推测）	$5 \leq N_4^* < \infty$
$5 \leq d \leq 41$	香肠被猜想为最优	
$42 \leq d$	香肠已知是最优的	

表 1.2： n_d^*和 N_d^*的已知最佳下界和上界，以及猜想的下界和上界。

1.4 三维和3四4维中的稠密有限堆积

本节简要概述用于证明 n_3^* 和 n_4^*的一些上界的堆积。为了证明 $n_3^* \leq 56$的上界，Wills（1985年） [32] 通过截去一个大型四面体的四个顶点，再将所得图形与 D_3相交，构造了一个由56个球体组成的堆积。Gandini 和 Zucco [11] 采用了与 Wills 相同的基本思路，得到了上界 $n_4^* \leq 375$，769。第一个主要区别在于多胞体的选择：他们定义了一列24胞体（Y_m）$_{m\in\mathbb{N}}$，其定义方式如下

$$Y_m := m\,\mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix}\pm 2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\pm 2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\\pm 2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\pm 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\pm 1\\\pm 1\\\pm 1\\\pm 1\end{pmatrix}\right\} \tag{1.4}$$

对所有 $m \in \mathbb{N}$均成立，其中所有“±”符号彼此独立。在本文中，我们用 m 表示多胞体或堆积序列的索引。Y_1 的图示及其所有顶点的坐标可见第 3 节开头的图 3.1。Gandini 和 Zucco 使用了由式（1.4）大括号内的向量生成的 D_4 格的缩放和取向；该格是 B^4 的一个堆积集，并包含每个 Y_m的所有顶点。由于经过适当缩放和定向的24胞体是 D_4 格的 Dirichlet–Voronoi 胞，因此将24胞体用于高密度有限堆积是自然的选择（参见 [7],第 21 章，第 3.2 小节）。他们计算得出

$$G\left(Y_m\right) = 4m^4 + 8m^3 + 8m^2 + 4m + 1, \tag{1.5}$$

$$\mathrm{vol}\left(Y_m + B^4\right) = 32m^4 + 64\sqrt{2}m^3 + 16\sqrt{3}\pi m^2 + 192\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right)m + \frac{1}{2}\pi^2; \tag{1.6}$$

后者使用 Steiner 公式。然后，当 $m = 17$ 和 $G\left(Y_m\right) = 375$，769 时，$\left(Y_m + B^4\right) <$ vol$\left($凸包$\left(S^4_{G(Y_m)}\right) + B^4\right)$ 首次出现，因此 $n_4^* \leq 375$，769。Gandini 和 Zucco 通过“对 24胞体进行适当截断”得到了 $n_4^* < 367$，300 的上界，同时还提出了一个猜想性的下界

$n_4^* > 300,000$，该下界由序列（Y_m）导出。然而，他们在论文中既没有解释这些截断的性质，也没有说明他们为该上界得到的确切点数。

本文证明了关于 n_4^* 和 N_4^* 的新上界：

定理 1.5。 $n_4^* \leq 338,196$。

定理 1.6。$N_4^* \leq 516,946$。

本文其余部分分为三个主要章节。第 2 节介绍一大类堆积的精确定义和构造方法：这类堆积是通过截断 Y_m 的面得到的，其方式与 Wills（1985年） [32] 截断棱的方法相同。由此得到一系列多胞体 $t_h^3(Y_m)$、$h \in \{0, \ldots, \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor\}$（该记号在第 2.1 小节中定义），它们是对 Gandini 和 Zucco 序列中的多胞体 Y_m 的单个面进行截断所得；我们还为 $t_h^3(Y_m)$ 得到了 (1.5) 和 (1.6) 的类似结果。第 3 节中，我们截断 Y_m 的三个面，以得到更多多胞体$t_{\mathbf{h}}^3(Y_m)$。随后，我们计算堆积的点数 $G\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m)\right)$ 和体积 $\mathrm{vol}\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m) + B^d\right)$，后者使用 Steiner 公式计算，并通过一种特定形式的堆积 $t_{\mathbf{h}}^3(Y_{17}) \cap D_4$ 证明 $n_3^* \leq 338,224$。本节末尾，我们证明可以从该堆积中移除 28 个点，同时仍比香肠更密，从而得到定理 1.5。最后，第 4 节更仔细地考察堆积 $t_{\mathbf{h}}^3(Y_m)$，并运用与 Gandini 和 Wills（1992） [10] 相同的基本思路证明定理 1.6。

2 单个面的截断

首先，我们为 24 胞体的 24 个面 $Y_m, m \in \mathbb{N}$ 引入记号。

定义 **n 2.1.** 令 $m \in \mathbb{N}$，并用 $X_m^1, \ldots, X_m^{24}$ 表示 Y_m 的各个面；我们将特定的面编号为 ts

$$X_m^1 := m\,\mathrm{conv}\left\{ \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix} \right\}, \tag{2.1}$$

$$X_m^2 := m\,\mathrm{conv}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}, \tag{2.2}$$

$$X_m^3 := m\,\mathrm{conv}\left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}, \tag{2.3}$$

$$X_m^{10} := m\,\mathrm{conv}\left\{ \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}, \tag{2.4}$$

$$X_m^{16} := m\,\mathrm{conv}\left\{ \begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-2\\0\end{pmatrix} \right\}, \tag{2.5}$$

$$X_m^{17} := m\,\mathrm{conv}\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\0\end{pmatrix} \right\}, \tag{2.6}$$

定义 2.7 中也如此；其余各面可任意编号。对于每个 $i \in \{1,\dots,24\}$，令 $\mathbf{u}^i$ 为 X^i_m 的单位外法向量；对于 $\lambda \geq 0$，令 $H_i(\lambda) := H\left(\mathbf{u}^i, \sqrt{2}\lambda\right)$ 和 $H_i^-(\lambda) := H^-\left(\mathbf{u}^i, \sqrt{2}\lambda\right)$。

注意，$H_i(m)$ 是 Y_m 和 $Y_m = \bigcap_{i=1}^{24} H_i^-(m)$ 的支撑超平面。对于任意 $i \in \{1,\dots,24\}$，$\mathbf{u}^i$ 是 $\frac{1}{m\sqrt{2}}$ 倍的 X^i_m 的质心（见 [8], 第 292 页，表 I (ii)）、$X^i_m \subset H_i(m)$ 和 $X_m = \bigcap_{i=1}^{24} H_i^-(\lambda)$。除非另有说明，本节其余部分将假设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $h \in \{0,\dots,m\}$。下面的定义明确说明了在讨论 24胞体时我们对面截断的用法。首先，我们截断 Y_m 的一个面。由于 24胞体具有对称性，选择哪个面并不重要，因此我们可以选择棱长为 $2m$ 的正八面体 X^1_m。可在 [21] 查看 24胞体各个部分的彩色实体模型。

定义 2.2. 令 $m \in \mathbb{N}$。定义由 Y_m 经 $t^3_h(Y_m)$ 的单面截断所得的多胞体：$= Y_m \cap H_1^-(m-h)$，并将其各面 $X^1_{m,h}, \dots, X^{24}_{m,h}$ 记为

$$X^i_{m,h} := \begin{cases} Y_m \cap H_1(m-h) & i = 1 \\ X^i_m \cap H_i^-(m-h) & i \in \{2,\dots,24\} \end{cases}.$$

由于 $\operatorname{dist}\left(\mathbf{0}, X^1_m\right) = \sqrt{2}m$（参见 [11] 中提到的超平面），截断 t^3_h 会移除一个厚度为 $\sqrt{2}h$、包含多胞体 Y_m的面 X^1_m 的“切片”。多胞体 $t^3_h(Y_m)$ 是对Y_m的一个面 X^1_m 进行截断所得，其中 h 控制截断的“程度”；对于所有 $i \in \{1,2,\dots,24\}$，面 $X^i_{m,h} \subset t^3_h(Y_m)$ 平行于对应的面 $X^i_m \subset Y_m$。$t^3_h(Y_m)$ 的堆积密度 $\cap D_4$ 为（见 (1.2)）

$$\delta\left(t^3_h(Y_m) \cap D_4\right) = \frac{G\left(t^3_h(Y_m)\right)}{\operatorname{vol}\left(\operatorname{conv}\left(t^3_h(Y_m) \cap D_4\right) + B^4\right)}.$$

繁琐但初等的计算（见附录第 6.1 小节）表明，$t^3_h(Y_m)$的顶点位于 D_4 $m \in \mathbb{N}$ $h \in \{0,\dots,m\}$ $\left(t^3_h\ Y_m\ \cap D_4\right) =$的点处，对所有和都成立；这意味着，对所 $t^3_h\ Y_m$ $m \in \mathbb{N}$ $h \in \{0,\dots,m\}$ 有和都有凸包 ( ) ( )，因此

$$\delta\left(t^3_h(Y_m) \cap D_4\right) = \frac{G\left(t^3_h(Y_m)\right)}{\operatorname{vol}\left(t^3_h(Y_m) + B^4\right)}.$$

在第 2.2 和 2.1 小节中，我们分别得到关于 $G\left(t^3_h(Y_m)\right)$ 和 $\operatorname{vol}\left(t^3_h(Y_m) + B^4\right)$ 的公式，这些公式仅涉及 m 和 h；后者使用 Steiner 公式。

2.1 单面截断的 Steiner 多项式

本节陈述 t^3_h 的基本性质，这些性质是计算$G\left(t^3_h(Y_m)\right)$ 和 $\operatorname{vol}\left(t^3_h(Y_m) + B^4\right)$精确值所必需的。

引理 2.3。 令 $m \in \mathbb{N}$和 $h \in \{0,\dots,m\}$。则

$$G\left(t^3_{\mathbf{h}}(Y_m)\right) = 4m^4 + \left(8 - \frac{2h}{3}\right)m^3 + \left(8 - \left(h^2 + h\right)\right)m^2 + \left(4 - \frac{2h^3 + 3h^2 + 2h}{3}\right)m + \left(1 - \frac{-2h^4 + 2h^3 + 5h^2 + h}{6}\right) \quad (2.7)$$

证明。 参见第 2.2 小节。 □

对于体积计算，根据 Steiner 公式，我们知道

$$\operatorname{vol}\left(t^3_h(Y_m) + B^4\right) = \operatorname{vol}\left(t^3_h(Y_m)\right) + c\left(t^3_h(Y_m)\right) + f\left(t^3_h(Y_m)\right) + e\left(t^3_h(Y_m)\right) + \frac{1}{2}\pi^2, \quad (2.8)$$

其中，$\operatorname{vol}\left(t^3_h(Y_m)\right)$、$c\left(t^3_h(Y_m)\right)$、$f\left(t^3_h(Y_m)\right)$ 和 $e\left(t^3_h(Y_m)\right)$ 分别是 (1.3) 的 4 维、3 维、2 维和 1 维体积分量。

引理 2.4。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $h \in \{0, \ldots, m\}$，则

$$\operatorname{vol}\left(t_h^3\left(Y_m\right)\right) = \operatorname{vol}\left(Y_m\right) - \frac{4}{3}\left((m+h)^4 - m^4 - 3h^4\right), \tag{2.9}$$

$$c\left(t_h^3\left(Y_m\right)\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}\left(25m^3 - (m+h)^3\right), \tag{2.10}$$

$$f\left(t_h^3\left(Y_m\right)\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\left(24m^2 - 2mh + \left(3\sqrt{3} - 7\right)h^2\right), \tag{2.11}$$

$$e\left(t_h^3\left(Y_m\right)\right) = (64m - 24h)\left(3\arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \pi\right) + 64h\arctan\left(3 - 2\sqrt{2}\right). \tag{2.12}$$

证明。分别参见第 2.3.1、2.3.2、2.3.3 和 2.3.4 小小节。 □

引理 2.5。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $h \in \{0, \ldots, m\}$，则

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}\left(t_h^3\left(Y_m\right) + B^4\right) &= 32m^4 + \left[64\sqrt{2} - \frac{16}{3}h\right]m^3 + \left[16\sqrt{3}\pi - 8\sqrt{2}h - 8h^2\right]m^2 \\ &\quad + \left[64\left(3\arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \pi\right) - \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}h - 8\sqrt{2}h^2 - \frac{16}{3}h^3\right]m \\ &\quad + \frac{1}{2}\pi^2 + \left[\left(64\arctan\left(3 - 2\sqrt{2}\right) - 24\left(3\arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \pi\right)\right)h \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(18 - 14\sqrt{3}\right)\pi}{3}h^2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}h^3 + \frac{8}{3}h^4\right].\end{aligned} \tag{2.13}$$

证明。该结论由 (2.8) 和引理 2.4 得出。 □

2.2 $t_h^3\left(Y_m\right)$ 中的点数

我们将通过计算每个截角八面体 $X_{m,\,k}^1$ 中 D_4 的点数（其中 $k \in \{0, \ldots, h-1\}$），并将它们相加，来得到数量 $G\left(Y_m\right) - G\left(t_h^3\left(Y_m\right)\right)$。

命题 2.6。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $h \in \{0, \ldots, m\}$。则

$$G\left(Y_m\right) - G\left(t_h^3\left(Y_m\right)\right) = \sum_{k=0}^{h-1} G\left(X_{m,k}^1\right). \tag{2.14}$$

证明。这种将 h 不同层 $X_{m,k}^1$ 相加的方法，既不会遗漏 D_4 在 $Y_m \backslash t_h^3\left(Y_m\right)$ 中的任何点，也不会重复计数。为证明这一点，注意，对于任意 $k \in \{0, \ldots, h-1\}$，$X_{m,k}^1$ 与其相邻层 $X_{m,k+1}^1$ 之间的距离为 $\operatorname{dist}\left(X_{m,k}^1, X_{m,k+1}^1\right) = \sqrt{2}$，这等于包含 D_3 在 D_4 中的平移像的相邻超平面之间的距离。这些量相等，因此集合 $X_{m,k}^1$，$k \in \{0, \ldots, h-1\}$ D_4 2 14 与的各个层重合，由此可得（.）。 □

在第 3 节中，将 $G\left(Y_m\right) - G\left(t_h^3\left(Y_m\right)\right)$ 表示为关于 m 的多项式会很方便，其系数本身是关于 h 的多项式。设 $\widehat{X}_{m,h}^1$ 为正八面体，其面与 $X_{m,h}^1$ 的面具有相同的质心；换言之，$X_{m,h}^1$ 是通过对 $\widehat{X}_{m,h}^1$ 进行顶点截角得到的，从 $\widehat{X}_{m,h}^1$ 上截去六个高度适当的四棱锥。结合基本计算以及 $\widehat{X}_{m,h}^1$ 的棱长关于变量 h 的线性关系可知，$\widehat{X}_{m,h}^1$ 的棱长为 $2\left(m+h\right)$。

引理 *2.3* 中 *(2.7)* 的证明。设 $k \in \{0, \ldots, h-1\}$。交集 $\widehat{X}_{m,\,k}^1 \cap D_3$ 由一个含有 $\left((m+k)+1\right)^2$ 个点的中间层构成；对于每个 $i \in \{1, \ldots, m+k\}$，还有两层各含 i^2 个点，分别位于中间层上方和下方，因此

$$G\left(\widehat{X}_{m,k}^1\right) = (m+k+1)^2 + 2\sum_{i=1}^{m+k} i^2 = \frac{2(m+k)^3 + 6(m+k)^2 + 7(m+k) + 3}{3}. \tag{2.15}$$

由于顶点截角， $G\left(X_{m,k}^{1}\right)=G\left(\widehat{X}_{m,k}^{1}\right)-6\sum_{i=1}^{k}i^{2}$，因此由此方程、(2.14) 和 (2.15) 可得

$$\begin{aligned}G\left(Y_{m}\right)-G\left(t_{h}^{3}\left(Y_{m}\right)\right)&=\sum_{k=0}^{h-1}\left(\frac{2\left(m+k\right)^{3}+6\left(m+k\right)^{2}+7\left(m+k\right)+3}{3}-6\sum_{i=1}^{k}i^{2}\right)\\&=\frac{2h}{3}m^{3}+\left(h^{2}+h\right)m^{2}+\frac{2h^{3}+3h^{2}+2h}{3}m+\frac{-2h^{4}+2h^{3}+5h^{2}+h}{6}.\end{aligned}$$

□

2.3 t_h^3（Y_m）的顶点、棱、面和超面

本小节证明引理 2.4 中的四个等式 (2.9)、(2.10)、(2.11) 和 (2.12)。对于每个$i\in\{1,2,3\}$，我们根据各个 i维面与半空间 $H_1^-(m-h)$的相互关系，将 $t_h^3(Y_m)$的所有 i维面划分为不同类型，然后求出每个 i维面的 i维体积和（$4-i$）维外角。由于 Y_m 和 $t_h^3(Y_m)$具有对称性，同一类型中的所有面具有相同的体积和外角，因此没有必要明确列出这些面。相反，对于每种类型，我们将描述一个“代表面”，并据此进行计算。这些面的图示见附录中的图 6.1 和图 6.2。

2.3.1 $Y_m\backslash t_h^3$4维体积Y_m

设 $\widehat{Y}_{m,h}:=Y_m\backslash t_h^3(Y_m)$。在本子子节中，我们计算四维体积 $\mathrm{vol}\left(\widehat{Y}_{m,h}\right)$，由此可得 $\mathrm{vol}\left(t_h^3(Y_m)\right)=\mathrm{vol}\left(Y_m\right)-\mathrm{vol}\left(\widehat{Y}_{m,-h}\right)$。

^引理 *2.4* 中 *(2.10)* 的证明。我们通过求每个截面 $Y_m\cap H_1(\lambda)\subset Y_{m,h}$ 的三维^体积，并计算积分，来求 $Y_{m,h}$ 的（四维）体积

$$\mathrm{vol}\left(\widehat{Y}_{m,h}\right)=\sqrt{2}\int_{m-h}^{m}\mathrm{vol}_3\left(Y_m\cap H_1\left(\lambda\right)\right)\,d\lambda. \tag{2.16}$$

（因子 $\sqrt{2}$ 出现是因为 $\mathrm{dist}\left(\mathbf{0},H_m\left(\lambda\right)\right)=\sqrt{2}\lambda$。）我们希望求出被积函数 $\mathrm{vol}_3\left(Y_m\cap H_1\left(\lambda\right)\right)$。对于所有 $\lambda\in(0,m)$，交集 $Y_m\cap H_1(\lambda)$ 都是一个截角八面体，并包含在 $\widehat{X}_{m,h}^{1}$ 内，其棱长为 $2\left(m+h\right)=2(2m-\lambda)$。其体积可通过从 $\mathrm{vol}_3\left(\widehat{X}_{m,h}^{1}\right)$ 中减去六个棱长为 $2\left(m-\lambda\right)$ 的四棱锥的体积求得，因此

$$\mathrm{vol}_3\left(Y_m\cap H_1\left(\lambda\right)\right)=\frac{8\sqrt{2}}{3}\left(\left(m+h\right)^3-3h^3\right). \tag{2.17}$$

利用此表达式，计算积分 (2.16) 可得

$$\mathrm{vol}\left(\widehat{Y}_{m,h}\right)=\sqrt{2}\int_{m-h}^{m}\mathrm{vol}_3\left(Y_m\cap H_m\left(\lambda\right)\right)\,d\lambda=\frac{4}{3}\left(\left(m+h\right)^4-m^4-3h^4\right),$$

由此可得 (2.9)。 □

2.3.2 三维面

我们希望求出由 $t_h^3\left(Y_m\right)$ 的面得到的三维体积 $\mathrm{vol}_3\left(t_h^3\left(Y_m\right)\right)$，为此我们研究 $t_h^3\left(Y_m\right)$ 的面。

定义 2.7。将 Y_m 的面 $X_m^1,\ldots,X_m^{24}$ 排序，使得 $X_m^2,\ldots,X_m^9$ 与 X_m^1 共享一个面，而 $X_m^{10},\ldots,X_m^{15}$ 与 X_m^1 共享一个顶点但不共享一个面。对于 $h\in\{0,\ldots,m\}$，在这些面上定义 t_h^2 和 t_h^0：$t_h^2\left(X_m^i\right):=X_m^i\cap H_1^-(m-h)$，适用于 $i\in\{2,\ldots,9\}$；$t_h^0\left(X_m^k\right):=X_m^k\cap H_1^-(m-h)$，适用于$k\in\{10,\ldots,15\}$。

请注意， X_m^2、 X_m^3 和 X_m^{10} 已在定义 2.1 中定义，但我们可以选择一种面的排序方式，使这两个定义保持一致。正如这一记号所示， Y_m 的相邻面 $t_h^2\left(X_m^i\right)$ 和 $t_h^0\left(X_m^k\right)$ 分别通过截去八面体的一个面和一个顶点得到。当 $m \in \mathbb{N}$ 和 $0 < h < m$ 时， Y_m 的面 $X_m^1, \ldots, X_m^{24}$，以及 $t_h^3(Y_m)$ 的对应面 $X_{m,\ h}^i$，可根据它们与半空间$H_1^-(m-h)$的交集分为四种类型。

1. 交集 $X_m^1 \cap H_1^-(m-h)$ 为空集，因此 $X_m^1 \subset Y_m$ 对应一个新的单独面$X_{m,\ h}^1 \subset t_h^3(Y_m)$，它与 X_m^1 平行。由于 $X_{m,\ h}^1$ 是与 Y_m 的一个面平行的截面，因此它是一个截角八面体（见 [4, 22, 21]），有六个棱长为 $2h$ 的正方形面，以及八个六边形面，其棱长在 $2h$ 和 $2(m-h)$ 之间交替。

2. Y_m 的八个面在其与 $H_1(m-h)$ 相交处的面上被截断。重新排序后，我们将它们记为 X_m^2、……、X_m^9。原面 X_m^i 的六个顶点中有三个与对应的面截角面 $X_m^i \cap H_1^-(m-h) \subset t_h^3(Y_m)$ 共享。因此， $t_h^3(Y_m)$ 的面 $t_h^2\left(X_m^2\right)$、……、$t_h^2\left(X_m^9\right)$ 是八面体的面截角，并且是代表面的刚性运动

$$t_h^2\left(X_m^{\hexagon}\right) = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\-h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\m-2h\\m\\-m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m-h\\m-h\\m+h\\-m+h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m-h\\m-h\\m+h\\m-h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\m-2h\\m\\m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\-m\\m\\m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2m\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\-m\\m\\-m\end{pmatrix}\right\},$$

其中

$$X_m^{\hexagon} := \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}2m\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\m\\m\\m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\m\\m\\-m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\-m\\m\\m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2m\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\-m\\m\\-m\end{pmatrix}\right\}.$$

3. Y_m 的六个面经过截断后，重新排序后记为 X_m^{10}，……，X_m^{15}；截断发生在面与 $H_1(m-h)$ 相交的顶点处。原面 X_m^k 与对应的顶点截角面 $X_m^k \cap H_1^-(m-h) \subset t_h^3(Y_m)$ 共享六个顶点中的五个。因此， $t_h^3(Y_m)$ 的面$t_h^0\left(X_m^{10}\right)$，……，$t_h^0\left(X_m^{15}\right)$ 是八面体的顶点截断，并且是代表面的刚性运动

$$t_h^0\left(X_m^{\square}\right) = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\-h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\-h\\-h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\-h\\h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\0\end{pmatrix}\right\},$$

其中

$$X_m^{\square} := \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

4. 剩余的九个面 $X_m^{16}, \ldots, X_m^{24} \subset Y_m$ 未受面截断影响，因为它们完全位于闭半空间 $H_1^-(m-h)$ 内，因此 $X_m^l = X_m^l \cap H_1^-(m-h) \subset t_h^3(Y_m)$。

为证明 (2.10)，我们先确立以下结论。任意一个面的外角 $\theta(Y_m, F)$ F 均为 $_{1\,2}$，因此我们无需计算这些面的外角。

引理2.8。令 $m \in \mathbb{N}$ 和 $h \in \{0, \ldots, m\}$。上文所述的 t_h^3 （Y_m）的四类代表面具有以下的3维体积：

$$\mathrm{vol}_3\left(X_{m,h}^1\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}\left((m+h)^3 - 3h^3\right), \tag{2.18}$$

$$\mathrm{vol}_3\left(t_h^2\left(X_m^i\right)\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(5m^3 + 3h^3 - (m+h)^3\right), \tag{2.19}$$

$$\mathrm{vol}_3\left(t_h^0\left(X_m^k\right)\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(2m^3 - h^3\right), \tag{2.20}$$

$$\mathrm{vol}_3\left(X_m^l\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}m^3, \tag{2.21}$$

其中 $i \in \{2, \ldots, 9\}$、 $k \in \{10, \ldots, 15\}$和 $l \in \{16, \ldots, 24\}$。

证明。公式（2.21）直接由正八面体的体积公式得到，而（2.18）已在前一个子子节中作为（2.17）得到。与$H^i(\lambda)$平行的 X_m^i 的截面是 $X_m^i \cap H^i(\lambda)$，这是一个棱长为2（$2m - \lambda$）的大等边三角形，并且通过从每个顶点移去一个棱长为2（$m - \lambda$）的等边三角形，将其顶点截去。因此面积 $\left(X_m^i \cap H^i(\lambda)\right) = \sqrt{3}(2m - \lambda)^2 - 3\sqrt{3}(m - \lambda)^2$ 以及

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_3\left(t_h^2\left(X_m^i\right)\right) &= \frac{2\sqrt{6}}{3}\int_0^{m-h} \mathrm{area}\left(X_m^i \cap H^i(\lambda)\right)\, d\lambda \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(5m^3 + 3h^3 - (m+h)^3\right),\end{aligned}$$

由此得到 (2.19)。（ X_m^i 的两个对面之间的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}m$。）对于 (2.20)，令 $\mathbf{v}_0 = X_m^i \cap Y_m$、$\mathbf{v}$ 为 X_m^i 的四个相邻顶点中的任意两个，并令 $E =$ 凸包 $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}\}$ 为包含这些顶点的 Y_m 的棱。超平面 $H^1(m-h)$ 与 E 相交于一点，该点距$\mathbf{v}_0$ 的距离为到$\mathbf{v}$的距离的 $\frac{h}{m}$ 倍。由于 E 的长度为 $2m$， $X_m^i \setminus \left(t_h^0\left(X_m^i\right)\right)$ 是棱长为 $2h$ 的四棱锥。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_3\left(t_h^0\left(X_m^i\right)\right) &= \mathrm{vol}_3\left(X_m^i\right) - \mathrm{vol}_3\left(X_m^i \setminus t_h^0\left(X_m^i\right)\right) \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(2m^3 - h^3\right).\end{aligned}$$

□

引理 *2.4* 中 *(2.10)* 的证明。本子子节开头的讨论以及引理2.8表明

$$\begin{aligned}c\left(t_h^3\left(Y_m\right)\right) &= \sum_{i=1}^{24} \mathrm{vol}_3\left(X_{m,h}^i\right) \\ &= 1 \cdot \mathrm{vol}_3\left(X_{m,h}^1\right) + 8 \cdot \mathrm{vol}_3\left(t_h^2\left(X_m^i\right)\right) + 6 \cdot \mathrm{vol}_3\left(t_h^0\left(X_m^k\right)\right) + 9 \cdot \mathrm{vol}_3\left(X_m^l\right) \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3}\left(25m^3 - (m+h)^3\right).\end{aligned}$$

□

2.3.3 二维面

将 Y_m 的 96 个三角形面记为 T_m^1，……，T_m^{96}。$t_h^3(Y_m)$ 的 102 个面也可根据它们与 $H_1^-(m-h)$ 的关系分为五种类型。

定义 2.9。设 T_m^i 和 T_m^j 是 Y_m 的面，其中 $T_m^j \cap X_m^1$ 是一条棱， $T_m^k \cap X_m^1$ 是一个顶点。则定义 $t_h^1\left(T_m^j\right) := T_m^j \cap H_i^-(m-h)$ 以及 $t_h^0\left(T_m^k\right) := T_m^k \cap H_i^-(m-h)$。

$t_h^1\left(T_m^i\right)$ 是对三角形面 T_m^i进行边截断后得到的，因此只是一个形状相同的小三角形。相比之下，$t_h^0\left(T_m^j\right)$ 是对 T_m^j 进行顶点截断后得到的，是一个等腰梯形。与前一个子子节一样，可以按如下方式重新排列这些面。

1. 6 个正方形面 $Q^1_{m,\ h}$，…，$Q^6_{m,\ h}$，它们是以下图形的刚性运动

$$Q_{m,h} := \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\-h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\-h\\-h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\-h\\h\end{pmatrix}\right\}.$$

这些面是新出现的，与 Y_m 的任何面都不对应。

2. 8 个六边形面 $H^1_{m,\ h}$，…，$H^8_{m,\ h}$，它们是以下图形的刚性运动

$$H_{m,h} := \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\-h\\h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\m-2h\\m\\m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m-h\\m-h\\m-h\\m+h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m-h\\m-h\\-m+h\\m+h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\m-2h\\-m\\m\end{pmatrix}\right\}.$$

3. 12 个三角形面 $t^1_h\left(T^9_m\right)$，…，$t^1_h\left(T^{20}_m\right)$，它们是以下图形的刚性运动

$$t^1_h\left(T^{\triangledown}_m\right) = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\-m\\m\\m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\m-2h\\m\\m\end{pmatrix}\right\},$$

其中

$$T^{\triangledown}_m := \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}2m\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\-m\\m\\m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\m\\m\\m\end{pmatrix}\right\}.$$

4. 24 个等腰梯形面 $t^0_h\left(T^{21}_m\right)$，…，$t^0_h\left(T^{44}_m\right)$，它们是以下图形的刚性运动

$$t^0_h\left(T^{\triangle}_m\right) = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\-h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\-m\\m\\m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\-m\\m\\-m\end{pmatrix}\right\},$$

其中

$$T^{\triangle}_m := \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}2m\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\-m\\m\\m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\-m\\m\\-m\end{pmatrix}\right\}.$$

这些面中的每一个都与 $X^1_{m,\ h}$共享一个顶点。

5. 52 个三角形面 T^{45}_m，……，T^{96}_m与 Y_m 中相应的面保持不变。

引理 2.10. 代表面 $Q_{m,h}$, $H_{m,h}$, $t^1_h\left(T^{\triangledown}_m\right)$、$t^0_h\left(T^{\triangle}_m\right)$和 T_m 的面积和外角如下:

$$\begin{aligned}
\operatorname{area}\left(Q_{m,h}\right) &= 4h^2, & \theta\left(t^3_h\left(Y_m\right), Q_{m,h}\right) &= \frac{1}{4},\\
\operatorname{area}\left(H_{m,h}\right) &= \sqrt{3}\left(m+h\right)^2 - 3\sqrt{3}h^2, & \theta\left(t^3_h\left(Y_m\right), H_{m,h}\right) &= \frac{1}{6},\\
\operatorname{area}\left(t^1_h\left(T^{\triangledown}_m\right)\right) &= \sqrt{3}\left(m-h\right)^2, & \theta\left(t^3_h\left(Y_m\right), t^1_h\left(T^{\triangledown}_m\right)\right) &= \frac{1}{6},\\
\operatorname{area}\left(t^0_h\left(T^{\triangle}_m\right)\right) &= \sqrt{3}m^2 - \sqrt{3}h^2, & \theta\left(t^3_h\left(Y_m\right), t^0_h\left(T^{\triangle}_m\right)\right) &= \frac{1}{6},\\
\operatorname{area}\left(T_m\right) &= \sqrt{3}m^2, & \theta\left(t^3_h\left(Y_m\right), T_m\right) &= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

证明。面积公式可由初等计算得出。至于外角，六边形面 $H_{m,h}$ 与 Y_m 的面 $\operatorname{conv}\left\{(2m,0,0,0)^{\mathsf{T}},(m,m,m,m)^{\mathsf{T}},(m,m,-m,m)^{\mathsf{T}}\right\}$ 平行；该面是两个面 X_m^1 和 X_m^2 的交集。它们的外向单位法向量 $\mathbf{u}^1$ 和 $\mathbf{u}^2$ 之间的角为 $\arccos\left(\mathbf{u}^1\cdot\mathbf{u}^2\right)=\frac{\pi}{3}$，因此 $\theta\left(t_h^3(Y_m)\ H_{m,h}\right)=\arccos(\mathbf{u}^1\cdot\mathbf{u}^2)_{2\pi}=\frac{1}{6}$。类似地，$t_h^1(T_m^{\triangledown})$、$t_h^0\left(T_m^{\triangle}\right)$和 T_m 也分别平行于 Y_m 的面，因此通过几乎相同的计算可得$\theta\left(t_h^3(Y_m)\right.$ $\left.t_h^1(T_m^{\triangledown})\right)=\theta\left(t_h^3(Y_m)\ \ t_h^0\left(T_m^{\triangle}\right)\right)=\theta\left(t_h^3(Y_m)\ T_m\right)=\frac{1}{6}$。最后，正方形面 $Q_{m,h}$ 是 $X_{m,h}^1$ 与 X_m^{10} 的顶点截断的交集，其外向单位法向量为 $\mathbf{u}^{10},$，所以$\theta\left(t_h^3(Y_m)\ Q_{m,h}\right)=\arccos(\mathbf{u}^1\cdot\mathbf{u}^{10})_{2\pi}=\frac{1}{4}$。

□

引理 *2.4* 中（*2.11*）的证明。本子子节开头的讨论以及引理 2.10 表明

$$\begin{aligned}
f\left(t_h^3\left(Y_m\right)\right) &= \sum_{F\in\mathscr{F}_2\left(t_h^3(Y_m)\right)}\operatorname{area}(F)\,\theta\left(t_h^3\left(Y_m\right),F\right)\kappa_2\\
&= 6\operatorname{area}\left(Q_{m,h}\right)\theta\left(t_h^3\left(Y_m\right),Q_{m,h}\right)\pi+8\operatorname{area}\left(H_{m,h}\right)\theta\left(t_h^3\left(Y_m\right),H_{m,h}\right)\pi\\
&\quad+12\operatorname{area}\left(t_h^1\left(T_m^{\triangledown}\right)\right)\theta\left(t_h^3\left(Y_m\right),t_h^1\left(T_m^{\triangledown}\right)\right)\pi\\
&\quad+24\operatorname{area}\left(t_h^0\left(T_m^{\triangle}\right)\right)\theta\left(t_h^3\left(Y_m\right),t_h^0\left(T_m^{\triangle}\right)\right)\pi+52\operatorname{area}\left(T_m\right)\theta\left(t_h^3\left(Y_m\right),T_m\right)\pi\\
&= \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\left(24m^2-2mh+\left(3\sqrt{3}-7\right)h^2\right).
\end{aligned}$$

□

2.3.4 1维棱

24胞体 Y_m 有 96 条棱 E_m^1，……，E_m^{96}但截断会使一些棱缩短，并在面 $X_{m,\ h}^1$的每个顶点附近新增四条棱，因此 $t_h^3(Y_m)$ 总共有 120 条棱。

定义 2.11。设 E_m 是 Y_m 的一条棱，其一个顶点位于 X_m^1 中，另一个顶点不在 X_m^1中。于是定义 $t_h^0(E_m)$: $=E_m\cap H_1^-(m-h)$。

$t_h^3(Y_m)$ 的棱可根据它们与 $H_1^-(m-h)$ 的交集分为四种类型。前两种类型是新增的棱（在 Y_m 中不存在），而后两种类型是 Y_m 中现有棱的子集。

1. 24 条新的棱 $E^{\square,\ m\ h,\ 1}$，……，$E^{\square,\ m\ h,\ 24}$，它们是

$$E_{m,h}^{\square}:=\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\-h\end{pmatrix}\right\}.$$

这些棱中的每一条都邻接 $X_{m,\ h}^1$ 的一个正方形面。

2. 12 条棱 $E^{\hexagon,\ m\ h,\ 1}$，……，$E^{\hexagon,\ m\ h,\ 12}$，它们是代表边的适当刚性运动

$$E_{m,h}^{\hexagon}:=\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\m-2h\\m\\m\end{pmatrix}\right\}.$$

这些棱中的每一条都邻接 $X_{m,\ h}^1$ 的两个相邻六边形面，但不邻接正方形面。

3. 24 条边 $t_h^0\left(E_m^{13}\right),\ldots,t_h^0\left(E_m^{36}\right)$ 它们是适当的刚性运动

$$t_h^0\left(E_m^{\triangle}\right)=\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\-m\\m\\m\end{pmatrix}\right\},\qquad\text{where}\qquad E_m^{\triangle}:=\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}2m\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m\\-m\\m\\m\end{pmatrix}\right\}.$$

4. 60 条边 $E_m^{37},\ldots,E_m^{96}$它们与 Y_m 中对应的边保持不变。

根据定义可直接得出，它们的长度为

$$\ell\left(E_m\right)=2m,\qquad \ell\left(E_{m,h}^{\square}\right)=2h,\qquad \ell\left(E_{m,h}^{\hexagon}\right)=\ell\left(t_h^0\left(E_m^{\triangle}\right)\right)=2\left(m-h\right). \tag{2.22}$$

每条边 E 都是三个面的交集，因此其法锥与 S^2 的交集是一个球面三角形。为计算其面积，我们使用 L'Huilier定理（见 [26], 第 70 页）：

定理 2.12 (L'Huilier定理)。 设$\operatorname{pos}\left\{\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2,\mathbf{v}^3\right\}\cap S^2$ 是一个球面三角形，则 n

$$\tan\left(\frac{a_{1,2,3}}{4}\right)=\sqrt{\begin{array}{l}\tan\left(\dfrac{a_{1,2}+a_{1,3}+a_{2,3}}{4}\right)\tan\left(\dfrac{-a_{1,2}+a_{1,3}+a_{2,3}}{4}\right)\\ \cdot\tan\left(\dfrac{a_{1,2}-a_{1,3}+a_{2,3}}{4}\right)\tan\left(\dfrac{a_{1,2}+a_{1,3}-a_{2,3}}{4}\right)\end{array}},$$

其中 $a_{i,\ j}$是$\mathbf{v}^i$与$\mathbf{v}^j$之间的角，而 $a_{1,\ 2,\ 3}$是$\operatorname{pos}\left\{\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2,\mathbf{v}^3\right\}\cap S^2$的球面面积。

引理 2.13。 代表边 $E_{m,\ h}^{\hexagon}$, $E_{m,\ h}^{\square}$, $t_h^0\left(E_m^{\triangle}\right)$和 E_m 的外角如下：

$$\theta\left(t_h^3\left(Y_m\right),E_{m,h}^{\hexagon}\right)=\frac{3\arccos\left(\frac{1}{3}\right)-\pi}{4\pi}, \tag{2.23}$$

$$\theta\left(t_h^3\left(Y_m\right),E_{m,h}^{\square}\right)=\frac{4\arctan\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4\pi}, \tag{2.24}$$

$$\theta\left(t_h^3\left(Y_m\right),t_h^0\left(E_m^{\triangle}\right)\right)=\frac{3\arccos\left(\frac{1}{3}\right)-\pi}{4\pi}, \tag{2.25}$$

$$\theta\left(t_h^3\left(Y_m\right),E_m\right)=\frac{3\arccos\left(\frac{1}{3}\right)-\pi}{4\pi}. \tag{2.26}$$

证明。 由$E_{m,\ h}^{\hexagon}$, $t_h^0\left(E_m^{\triangle}\right)$和 E_m 的法锥形成的球面三角形，与 [11], 部分 (A) 中提到的球面三角形具有相同的角，因此 (2.23)、(2.25) 和 (2.26) 均由此得出。由$E_{m,\ h}^{\square}$ 的法锥形成的球面三角形，其外法向量为 $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$, 和$\mathbf{u}^{10}$„ 因此 $\arccos\left(\mathbf{u}^1\cdot\mathbf{u}^2\right)=\underline{\arccos}\left(\mathbf{u}^2\cdot\mathbf{u}^{10}\right)=\frac{\pi}{3}$， 且 $\underline{\arccos}\left(\mathbf{u}^1\cdot\mathbf{u}^{10}\right)=\frac{\pi}{2}$， 故由 L'Huilier定理可得 (2.24)：

$$\begin{aligned}\operatorname{area}\left(N\left(t_h^3\left(Y_m\right),E_{m,h}^{\square}\right)\cap S^2\right) &= 4\arctan\sqrt{\tan\left(\frac{7\pi}{24}\right)\tan\left(\frac{3\pi}{24}\right)\tan\left(\frac{3\pi}{24}\right)\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)}\\ &= 4\arctan\left(3-2\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

□

引理 *2.4* 中 *(2.12)* 的证明。 本子子节开头的讨论，结合 (2.22) 和引理 2.13，意味着

$$\begin{aligned}e\left(t_h^3\left(Y_m\right)\right) &= \sum_{E\in\mathscr{F}_1\left(t_h^3\left(Y_m\right)\right)}\ell\left(E\right)\theta\left(t_h^3\left(Y_m\right),E\right)\kappa_3\\ &= 12\ell\left(E_{m,h}^{\square}\right)\theta\left(t_h^3\left(Y_m\right),E_{m,h}^{\square}\right)\kappa_3+24\ell\left(E_{m,h}^{\hexagon}\right)\theta\left(t_h^3\left(Y_m\right),E_{m,h}^{\square}\right)\kappa_3\\ &\quad +24\ell\left(t_h^0\left(E_m^{\triangle}\right)\right)\theta\left(t_h^3\left(Y_m\right),t_h^0\left(E_m^{\triangle}\right)\right)\kappa_3+60\ell\left(E_m\right)\theta\left(t_h^3\left(Y_m\right),E_m\right)\kappa_3\\ &= (64m-24h)\left(3\arccos\left(\frac{1}{3}\right)-\pi\right)+16h\arctan\left(3-2\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

□

3 三个面的截切与上界 $n_4^* \leq 338{,}196$

在本节中，我们截去 Y_m 的三个面。由于 24胞体有三个两两不相交的面，因此在下一子节中，我们定义由截去 Y_m 的三个此类面 X_m^1、 X_m^{16} 和 X_m^{17} （见第 2 节开头）得到的多胞体 $t_{\mathbf{h}}^3(Y_m)$，并给出引理 2.3 和引理 2.5 的三面版本。

定义 3.1。 令 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\mathbf{h} = (h_1, h_{16}, h_{17}) \in \{0, \ldots, m\}^3$，则定义 $t_{\mathbf{h}}^3(Y_m) := Y_m \cap [H_1(m-h_1) \cap H_{16}(m-h_{16}) \cap H_{17}(m-h_{17})]$。

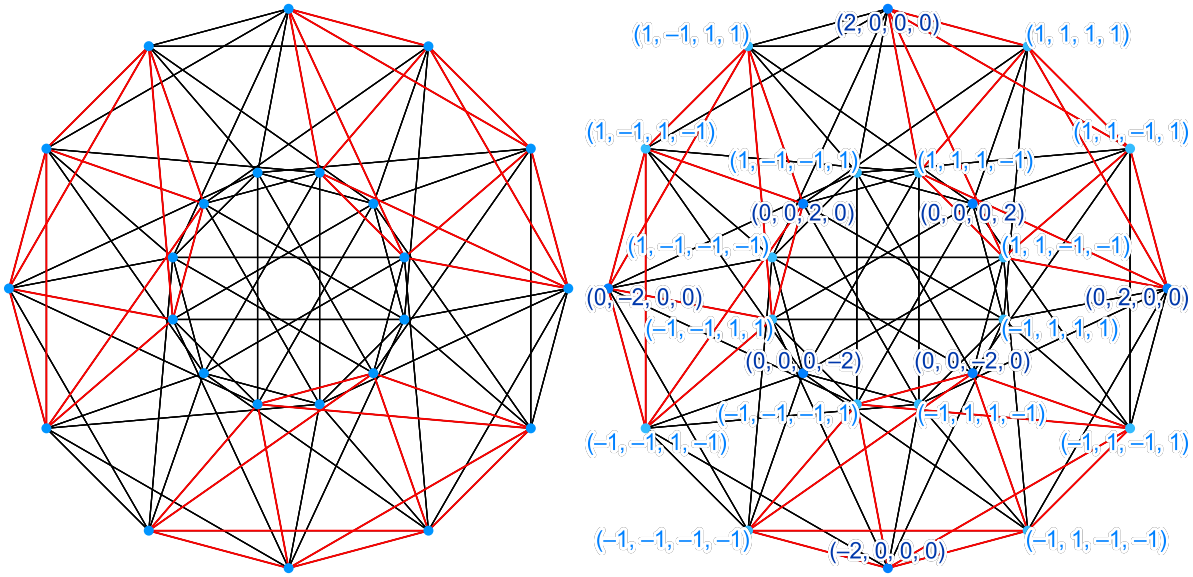


图 3.1： Y_1的三个互不相交的面，其棱以红色标出，分别展示了带坐标和不带坐标的情况。此图示以及附录中的其他图示所采用的 24 胞体布局基于 [30, 27] 以及应用程序 *HyperSolids* [19]中的 24 胞体可视化。

正如我们用 h 表示对 X_m^1的截切量一样，我们用 $\mathbf{h} = (h_1, h_{16}, h_{17})$，其中 h_i 表示对 X_m^i 进行 $i \in \{1, 16, 17\}$的截切量。Wills [32] 能够以不同程度截切四面体的全部四个顶点，而我们只考虑 Y_m 的三个面，并将它们选为两两不相交。然而，截切后它们会彼此靠近，并可能以改变这些面的形状的方式相交。我们希望避免任何交集，否则在计算过程中可能会意外地重复计数或遗漏某些点或体积。下面的命题表明，不仅 X_m^1、 X_m^{16}和 X_m^{17} 互不相交，它们截切后的对应部分 X_{m,h_1}^1、 $X_{m,h_{16}}^{16}$和 $X_{m,h_{17}}^{17}$ 对于所有 $h_1, h_{16}, h_{17} \in \{0, \ldots, \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor\}$也始终互不相交。

命题 3.2。 设 $m \in \mathbb{N}$ 且$\mathbf{h} \in \{0, \ldots, \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor\}^3$。那么，这三个面 X_{m,h_i}^i, $i \in \{1, 16, 17\}$ 两两不相交。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $i = 1$, $j = 17$ 和 $h = h_1 = h_{17}$ （否则我们可以令 $h = \max\{h_1, h_{17}\}$）。我们将证明，如果 $h < \frac{m}{2}$，那么交集 $A_{m,h} := \operatorname{aff}\left(X_{m,h}^1\right) \cap \operatorname{aff}\left(X_{m,h}^{17}\right)$与 $t_{\mathbf{h}}^3(Y_m)$ 不相交，由此可得 $X_{m,h}^1$ 和 $X_{m,h}^{17}$ 不相交。

存在某个 $\mathbf{x}^{m,h} \in A_{m,h}$，使得四边形 $\operatorname{conv}\{\mathbf{0}, \sqrt{2}(m-h)\,\mathbf{u}^1, \sqrt{2}(m-h)\,\mathbf{u}^{17}, \mathbf{x}^{m,h}\} \subset \operatorname{lin}\{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^{17}\}$ 构成一个内角分别为 $120°$、 $90°$、 $60°$ 和 $90°$ 的风筝形。考虑支撑超平面 $H_{17}(m-h)$。由于 $\mathbf{x}^{m,h} = \sqrt{2}(m-h)(1, 0, 1, 0)^{\mathsf{T}}$ 是 $\mathbf{u}^{17}$, 的标量倍数，交集 $A_{m,h}$平行于 $H_{17}(m-h)$，因此只需检查唯一的点 $\mathbf{x}^{m,h} \in A_{m,h}$。距离为 $\operatorname{dist}(\mathbf{0}, \mathbf{x}^{m,-k}) = 2\sqrt{2}(m-h)$ 和 $\operatorname{dist}(\mathbf{0}, H_{17}(m-h)) = \sqrt{2}m$，因此当$2\sqrt{2}(m-h') > \sqrt{2}m$时，$X_{m,h}^1$ 和 $X_{m,h}^{17}$ 不相交，这可化简为 $h' < \frac{m}{2}$。由于 m 是整数，这个最终不等式可以写成 $h' \leq \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$。 □

利用以下引理，我们终于可以将所需的量 $G\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m)\right)$ 和 $\operatorname{vol}\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m)+B^4\right)$表示为 m 和 $\mathbf{h}=(h_1,h_{16},h_{17})$ 的形式。为简洁起见，对于定义 3.1 中的 $\mathbf{h}$ 和 $k\in\mathbb{N}$，我们记 $|\mathbf{h}|^k:=h_1^k+h_{16}^k+h_{17}^k$。

引理 3.3。设 $m\in\mathbb{N}$ 且 $\mathbf{h}\in\left\{0,\dots,\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor\right\}^3$。则

$$G\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m)\right)=4m^4+\left(8-\frac{2|\mathbf{h}|}{3}\right)m^3+\left(8-\left(|\mathbf{h}|^2+|\mathbf{h}|\right)\right)m^2 + \left(4-\frac{2|\mathbf{h}|^3+3|\mathbf{h}|^2+2|\mathbf{h}|}{3}\right)m+\left(1-\frac{-2|\mathbf{h}|^4+2|\mathbf{h}|^3+5|\mathbf{h}|^2+|\mathbf{h}|}{6}\right) \tag{3.1}$$

and

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m)+B^4\right) &= 32m^4+\left[64\sqrt{2}-\frac{16}{3}|\mathbf{h}|\right]m^3+\left[16\sqrt{3}\pi-8\sqrt{2}|\mathbf{h}|-8|\mathbf{h}|^2\right]m^2\\ &\quad+\left[64\left(3\arccos\left(\frac{1}{3}\right)-\pi\right)-\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}|\mathbf{h}|-8\sqrt{2}|\mathbf{h}|^2-\frac{16}{3}|\mathbf{h}|^3\right]m\\ &\quad+\frac{1}{2}\pi^2+\left[\left(64\arctan\left(3-2\sqrt{2}\right)-24\left(3\arccos\left(\frac{1}{3}\right)-\pi\right)\right)|\mathbf{h}|\right.\\ &\quad\left.+\frac{\left(18-14\sqrt{3}\right)\pi}{3}|\mathbf{h}|^2-\frac{8\sqrt{2}}{3}|\mathbf{h}|^3+\frac{8}{3}|\mathbf{h}|^4\right].\end{aligned} \tag{3.2}$$

因此，$G\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m)\right)$ 和 $\operatorname{vol}\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m)+B^4\right)$ 的值可通过使用 m 以及幂和 $|\mathbf{h}|^k$, $k\in\{1,2,3,4\}$直接计算得到。

证明。(3.1) 和 (3.2) 可由引理 2.3 和 2.5、命题 3.2 以及 (2.13) 直接推出。 □

注意，由于 $|\mathbf{h}|^k$ 对每一项 h_i^k都是线性的，因此 (3.1) 和 (3.2) 与 (2.7) 和 (2.13) 相同，区别仅在于使用 $|\mathbf{h}|^k$ 而非 h^k。

最后，在补充几个定义后，我们证明关于 n_4^* 的主要定理。

定义 3.4。设 $\mathscr{C}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个堆积集合。设 $C\in\mathscr{C}$ 和 $k\in\{0,\dots,|C|\}$，则定义 $p_k(C)$：$C\}$ 中互不相同的点 $=C\setminus\{k$。

严格来说，这一定义并未明确定义，不过，我们只会使用涉及 $p_k(C)$ 的不等式，而这些不等式不取决于被移除的具体点。

定义 3.5。设 $C\in\mathscr{C}$ 和 $n\in\mathbb{N}_0$，则定义

$$\widetilde{\delta}(C,n):=\frac{n\kappa_d}{\operatorname{vol}\left(\operatorname{conv}C+B^d\right)}\qquad\text{for } n\in\{0,\dots,|C|\}. \tag{3.3}$$

~ ~ ~我们将 δ 称为**近似（堆积）密度**，并记 $\delta(p_k(C))$，表示 $\delta(C,|C|-k)$。$\widetilde{\delta}(p_k(C))$ 的定义在分母中使用 vol（凸包 $C+B^d$），而非 vol（凸包 $(p_k(C)+B^d)$），从而避开了 $p_k(C)$ 定义中的歧义，代价是分母略大。~特别地，对于任意堆积集 C 和 $k\in\{0,\dots,|C|\}$，都有 $\delta(p_k(C))\geq\delta(p_k(C))$。

定理 *1.5* 的证明。我们使用 (3.1) 和 (3.2) 计算所有三元组 $\mathbf{h}\in\{0,\dots,8\}^3$对应的 $G\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_{17})\right)$ 和体积 $\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_{17})+B^4\right)$。能够得到比香肠更密、且球体数量最少的堆积的特定 $\mathbf{h}$ 是 $\mathbf{h}=(1,3,4)$。相应的堆积 $t_{(1,3,4)}^3(Y_{17})\cap D_4$有 $G\left(t_{-(1,3,4)}^3(Y_{17})\right)=$338，224 个点，且 $\delta\left(t_{(1,3,4)}^3(Y_m)\cap D_4\right)\approx0.589\,106$ 超过 $\delta\left(S_{338,\ 224}^4\right)\approx0.589\,049$，因此 $n_4^*\leq338,\ 224$。此外，$n_4^*\leq338,\ 224-32=338,\ 192$ 是由

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta}\left(p_{33}\left(t_{(1,3,4)}^3(Y_m)\cap D_4\right)\right)&\approx0.589\,048\,6 &&<&&\delta\left(S_{338,191}^4\right)\approx0.589\,049\,3,\\ \widetilde{\delta}\left(p_{32}\left(t_{(1,3,4)}^3(Y_m)\cap D_4\right)\right)&\approx0.589\,050\,3 &&>&&\delta\left(S_{338,192}^4\right)\approx0.589\,049\,3.\end{aligned}$$

□

附录中的图6.3和图6.4绘制了各种堆积的密度 $t_{\mathbf{h}}^3(Y_m)\cap D_4$ 在$n=338$附近，224。

4 上界 $N_4^* \leq 516,\ 946$

本节证明定理 1.6。虽然我们使用现有的堆积集合 $t_{\mathbf{h}}^3(Y_m)$，但与 n_4^* 相比， N_4^* 存在一个重要区别。要证明定理 1.5，只需展示一个由 338、192 个点组成、密度高于香肠的堆积；然而，要证明定理 1.6，则必须证明对于每个自然数 $N \geq 516,\ 946$，都存在一个由 $\mathbb{R}^4$ 个点组成的有限堆积，其密度高于相应的香肠。Gandini 和 Wills（1992） [10] 使用了三列不同类型的多面体，并对它们进行了系统的顶点截断。通过这种方法，他们证明了对于每个 $N \geq 65$ 和 $N \in \{56, 59, 61, 62\}$，都存在一个适当的三维球体堆积，其密度高于香肠。类似地，我们利用第 3 节末尾的观察结果，从 Y_m 的截断中生成大量堆积。

定义 4.1。令 $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}_n^d$ 满足 $n \geq 3$。对于任意 $C \in \mathscr{C}$，令

$$\widetilde{r}(C,d) := \max\left\{0, \left\lceil \frac{\operatorname{vol}\left(\operatorname{conv} S_n^d + B^d\right) - \operatorname{vol}\left(\operatorname{conv} C + B^d\right)}{2\kappa_{d-1}} - 1 \right\rceil\right\},$$

$$\widetilde{L}(C) := \begin{cases} \{n - \widetilde{r}(C,d), \ldots, n-1, n\} & \delta(C) > \delta\left(S_n^d\right) \\ \emptyset & \delta(C) \leq \delta\left(S_n^d\right) \end{cases}.$$

简单计算表明， $\widetilde{r}(C,\ d)$ 是可以从C中移除的球体的最大数量，使得近似密度上界 $\widetilde{\delta}(p_k(C))$ $> \delta\left(S_{n-k}^d\right)$ 成立。我们证明，对于所有$N \geq 516,\ 946$，都存在 $m \in \mathbb{N}$和$\mathbf{h} \in \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right\}^3$，使得 $N \in \widetilde{L}\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m) \cap D_4\right)$；于是存在一个满维堆积（即$t_{\mathbf{h}}^3(Y_m) \cap D_4$），其中包含 N个点，其密度高于 S_N^4。定理 1.6 的证明直接由以下覆盖包含关系推出。

引理 4.2。设 $n^* = 516{,}946$且 $N^* := 459{,}118{,}697$，则对于所有 $n^* \leq N < N^*$，我们有

$$N \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{\mathbf{h} \in \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right\}^3} \widetilde{L}\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m) \cap D_4\right). \tag{4.1}$$

引理 4.3。设 N^*如上，则对于所有 $N \geq N^*$，我们有

$$N \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} \widetilde{L}(Y_m \cap D_4). \tag{4.2}$$

我们使用计算机上的区间算术证明引理 4.2。关于区间算术的信息可见于 [20, 28] 以及文档 [1]。通常，计算机对浮点数进行运算；除 $+\infty$ 和 $-\infty$ 等少数例外情况外（更多详情参见 [18] ），浮点数构成的集合是实数的有限子集，因此不适合用来对 $\mathbb{R}$得出严谨结论。区间算术通过对范围 $[a,b]$ （称为区间）而非单个数进行运算，解决了这一问题，其中 a 和 b 是浮点数。函数的定义方式使其能够对区间进行运算，因此若 $x \in [a,b]$，则对于某些依赖于 a、b和 f的浮点数 c 和 d，有 $f(x) \in [c,d]$，无论 x 或 $f(x)$ 本身是否为浮点数。我们使用 Julia 编程语言（2023，1.8.5 版） [3] ，并结合 Julia 标准库软件包 LinearAlgebra、Benet 和 Sanders（2022，0.20.8 版）的第三方软件包 IntervalArithmetic [1] ，以及 Sarnoff（2019，0.3.3 版）的 Readables [**?**]。

引理 *4.2* 的证明。在 (4.1) 中，外层并集遍历所有 $m \in \mathbb{N}$，因此为了便于计算，我们必须将其限制为有限子集。令 $m \in \mathbb{N}$, $m_{\max} := \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$， $\mathbf{m}_{\max} := \left(\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor,\ \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right)$，且$\widetilde{r}_{\max} := \widetilde{r}\left(t_{\mathbf{m}_{\max}}^3(Y_m) \cap D_4,\ 4\right)$。那么

$$\min \bigcup_{\mathbf{h} \in \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right\}^3} \widetilde{L}\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m) \cap D_4\right) = G\left(t_{\mathbf{m}_{\max}}^3(Y_m)\right) - \widetilde{r}_{\max},$$

$$\max \bigcup_{\mathbf{h} \in \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right\}^3} \widetilde{L}\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m) \cap D_4\right) = G(Y_m),$$

因此，对于每个 $N \in \mathbb{N}$，只需在 (4.1) 中检查满足以下条件的那些 m 值

$$G\left(t^3_{\mathbf{m}_{\max}}(Y_m)\right) - \widetilde{r}_{\max} \le N \le G(Y_m). \tag{4.3}$$

由于 $G\left(t^3_{\mathbf{m}_{\max}}(Y_m)\right) > G\left(Y_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}\right)$ 且 $G(Y_m) \to \infty$，对于每个 N，满足 (4.3) 的 m 只有有限个。因此，我们使用区间算术证明，对于每个 $N \in \{n^*, n^*+1, \ldots, N^*-1\}$，都存在某个满足 (4.3) 的 m（由于区间算术的性质，代码中使用的精确不等式要复杂得多），以及 $\mathbf{h} \in \left\{0, \ldots, \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor\right\}^3$，使得 $N \in \widetilde{L}\left(t^3_{\mathbf{h}}(Y_m) \cap D_4\right)$。 —— □

~为了证明引理 4.3，我们首先注意到，对固定的 m，$k \mapsto \delta(p_k(Y_m \cap D_4))$ 是递减的。接着我们证明，“最坏情况堆积” $p_{G(Y_m)-G(Y_{m-1})-1}(Y_m \cap D_4)$，也就是说，在所有形如 $p_k(Y_m \cap D_4)$ 的堆积中，它的近似密度最低；$k \in \{0, \ldots, G(Y_m) - G(Y_{m-1}) - 1\}$，~的密度对所有 $m \ge 43$ 都随 m 单调递增。因此，集合 $L($ $p_k(Y_m \cap D_4))$（其中 $m \ge 43$ 且 $k \in \{0, \ldots, G(Y_m) - G(Y_{m-1}) - 1\}$）包含所有 $N \ge G(Y_{43})$。

引理 *4.3* 的证明。 由 (1.5) 和 (1.6)，我们得到

$$\begin{aligned} G\left(p_{G(Y_m)-G(Y_{m-1})-1}(Y_m \cap D_4)\right) &= 4m^4 - 8m^3 + 8m^2 - 2, \\ \widetilde{\delta}\left(p_{G(Y_m)-G(Y_{m-1})-1}(Y_m \cap D_4)\right) &= f_Y(m), \end{aligned}$$

其中

$$f_Y(x) := \frac{\left[4x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 2\right] \cdot \frac{1}{2}\pi^2}{32x^4 + 64\sqrt{2}x^3 + 16\sqrt{3}\pi x^2 + 192\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right)x + \frac{1}{2}\pi^2}.$$

Then

$$f'_Y(x) = \frac{g_Y(x)}{\left(32x^4 + 64\sqrt{2}x^3 + 16\sqrt{3}\pi x^2 + 192\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right)x + \frac{1}{2}\pi^2\right)^2} \cdot \frac{1}{2}\pi^2,$$

其中 $g_Y(x) = 256\left(\sqrt{2}+1\right)x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$。每个 a_i, $i \in \{0, \ldots, 5\}$, 都由 $|a_i| \le 64\sqrt{2} \cdot 24 + 8 \cdot 192\sqrt{2} = 4344.46\ldots$ 界定，因此对于所有 $x \ge 43$，$g_Y(x) \ge 256\left(\sqrt{2}+1\right)($ $x - 42.176\ldots)$ $x^5 > 0$，所以对所有 $m \ge 43$，f_Y 单调递增。注意到

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}\left(p_{17,910,584}(Y_{104} \cap D_4)\right) = \widetilde{\delta}(Y_{104} \cap D_4,\, 459{,}118{,}697) &\approx 0.589\,048\,622\,8 \\ &< \delta\left(S^4_{459,118,697}\right) \approx 0.589\,048\,623\,1, \\ \widetilde{\delta}\left(p_{17,910,583}(Y_{104} \cap D_4)\right) = \widetilde{\delta}(Y_{104} \cap D_4,\, 459{,}118{,}698) &\approx 0.589\,048\,624\,1 \\ &> \delta\left(S^4_{459,118,698}\right) \approx 0.589\,048\,623\,1. \end{aligned}$$

□

注 4.4。 引理 4.2 证明中使用的代码表明，516,945 不属于任何 $\widetilde{L}\left(t^3_{\mathbf{h}}(Y_m) \cap D_4\right)$，因此，使用我们特定的方法，516,946 是能够得到的最优值。多胞体 $t^3_{\mathbf{h}}(Y_m)$ 含有六个未受面截断影响的顶点，对这些顶点进行截断，可以改进我们对 n^*_4 和 N^*_4 的界。

5 致谢

作者谨此感谢 Martin Henk 对本文的审阅并提出意见。此外，作者谨此感谢 Martin Henk、Duncan Clark、Ansgar Freyer 和 Cemile Kürkoğlu 对我正在撰写的博士论文部分内容进行审阅并提出意见；本文即源自该论文。

参考文献

[1] Luis Benet 和 David P. Sanders。IntervalArithmetic.jl：在 Julia 中使用区间算术进行严格的浮点计算。https://github.com/JuliaIntervals/IntervalArithmetic.jl，2023。Julia 软件包，版本 0.20.8。[2] Ulrich Betke 和 Peter Gritzmann。关于 L. Fejes Tóth 的小维数香肠猜想。匈牙利数学学报，43(3):299–307，1984。[3] Jeff Bezanson、Alan Edelman、Stefan Karpinski 和 Viral B. Shah。Julia：一种数值计算的新方法。SIAM 评论，59(1):65–98，2017。[4] Alicia Boole Stott。论正四维超实体的若干截面序列。阿姆斯特丹皇家科学院学报，7(3):1–21，1900。[5] Károly Böröczky, Jr. 关于四球堆积。Mathematika，40(2):226–232，1993。[6] Károly Böröczky, Jr.《有限堆积与覆盖》。剑桥数学丛书。剑桥大学出版社，2004。[7] John H. Conway 和 Neil J. A. Sloane。《球堆积、格与群》，《数学科学基础丛书》第 290 卷。Springer-Verlag New York, Inc.，第 3 版，1999。[8] Harold Scott Macdonald Coxeter。《正多胞体》。Methuen & Co. Ltd.，1947。[9] László Fejes Tóth。研究问题 13。《匈牙利数学期刊》，6(2):197–199，1975。[10] Pier Mario Gandini 和 Jörg Wills。论有限球堆积。Mathematica Pannonica，3(1):19–29，1992。[11] Pier Mario Gandini 和 Andreana Zucco。论四维空间中的香肠灾变。Mathematika，39(2):274–278，1992。[12] Jacob E. Goodman、Joseph O'Rourke 和 Csaba D. Tóth（编）。《离散与计算几何手册》。Taylor & Francis Group, LLC，第 3 版，2018。[13] Peter M. Gruber。《凸几何与离散几何》，《数学科学基础丛书》第 336 卷。Springer-Verlag Berlin Heidelberg，2007。[14] Peter M. Gruber 和 Jörg M. Wills（编）。《凸几何手册》，A 卷。North-Holland，1993。[15] Branko Grünbaum。《凸多胞体》。数学研究生教材第 221 号。Springer New York, NY，第 2 版，2003。[16] Martin Henk、Jürgen Richter-Gebert 和 Günter M. Ziegler。凸多胞体的基本性质。载于 Jacob E. Goodman、Joseph O'Rourke 和 Csaba D. Tóth（编）《离散与计算几何手册》第三版，第 383–413 页。Taylor & Francis Group，2018。[17] Martin Henk 和 Jörg M. Wills。堆积、香肠与灾变。《代数与几何论集》，2020。[18] Ronald T. Kneusel。《数字与计算机》。Springer International Publishing AG，第 2 版，2017。[19]Richard Koch。超实体。https://pages.uoregon.edu/koch/hypersolids/hypersolids.html，2014。[20] Ramon E. Moore、R. Baker Kearfott 和 Michael J. Cloud。《区间分析导论》。工业与应用数学学会，2009。[21] Michael Ortiz。24胞体截面与展开图。https://www.thingiverse.com/thing:2771344，2018 年 1 月。[22] Irene Polo Blanco 和 Enrico Rogora。多胞体。Lettera Matematica，2(3):155–159，2014。

[23] Jane R. Sangwine-Yager。第 1.2 章——混合体积。载于 Peter M. Gruber 和 Jörg M. Wills（编），《凸几何手册》，*A* 卷，第 43–71 页。North-Holland，阿姆斯特丹，1993年。[24] Peter Scholl。《有限球堆积》，2000年。[25] Jakob Steiner。《关于平行曲面》。《柏林科学院月报》，114：114–118，1840 年。[26] Isaac Todhunter。《球面三角学》。Macmillan and Co.，第 3 版，1871 年。[27] Tomruen。文件：24-cell t0 f4.svg。https://commons.wikimedia.org/wiki/File:24-cell_t0_F4.svg，2010 年 10 月。具有 Coxeter平面对称性的 24胞体系列多胞体。[28] Warwick Tucker。《验证数值计算：严格计算简明导论》。普林斯顿大学出版社，2011 年。[29] Gerd Wegner。《平面上的有限圆堆积》。《匈牙利数学科学学报》，21：1–28，1986 年。[30] Eric W. Weisstein。24胞体。https://mathworld.wolfram.com/24-Cell.html。MathWorld——Wolfram 网络资源。[31] Jörg M. Wills。研究问题35。《匈牙利数学学报》，14(3–4)：309–314，1983 年。[32] Jörg M. Wills。关于有限堆积的密度。《匈牙利数学学报》，46(3)：205–210，1985 年。[33] Chuanming Zong。《球堆积》。Universitext。Springer-Verlag New York, Inc.，1998 年。

术语表

B^d d维单位球C 球堆积（有限或无限）位于 X X的内部$\mathscr{P}_n^d$ B^d 中所有球堆积的集合 $\mathbb{R}^d$ 具有 n 个点 $\mathscr{P}^d$ B^d 中所有无限球堆积的集合 $\mathbb{R}^d$的$_k$ 体积 k维勒贝格测度（$k \leq d$）κ_d d维单位球的体积 vol d维勒贝格测度 area 二维勒贝格测度，即面积ℓ 一维勒贝格测度，即长度n 堆积中的点数d 所考虑的欧几里得空间的维数 $\mathbb{R}^d$ δ（C）， C 有限 C的有限堆积密度δ（C）， C 无限 C的无限堆积密度δ（d，n） B^d 在 $\mathbb{R}^d$ 中具有 n 个点的最密有限球堆积的密度δ（d） $\mathbb{R}^d$中最密无限球堆积的密度S_n^d 在 $\mathbb{R}^d$中的 n 个球的香肠排列N（P，F_k） P的面 F_k 处的法锥θ（P，F_k） P的 k维面的外角 F_k $\mathscr{F}_k$（P）多胞体 P的所有 k维面的集合Λ 中的格 $\mathbb{R}^d$$G$（$S$）集合 S中格的点数 Λ n_d^* 对于给定的 d， n_d^* 是使香肠不再是 $\mathbb{R}^d$中 n 个点的最密堆积的最小数N_d^*对于给定的 d， N_d^*是使香肠对于所有 $N \geq N_d^*$在 $\mathbb{R}^d$ 中的 n 个点而言都不再是最密堆积的最小数Y_m Gandini 和 Zucco 的 24胞体序列X_m^1，……，X_m^{24}24胞体的面 $Y_m$$\mathrm{u}^i$ 至 X_m^i的单位外法向量H_i^-（λ）半空间 H_i^-（λ） $= H^-\left(\mathrm{u}^i,\right.$ 其边界垂直于单位法向量 $\left.\mathrm{u}\sqrt{2\lambda}\right)^i$（$\lambda$）超平面 H_i（λ） $= H\left(\mathrm{u}^i,\right.$ 其垂直于单位法向量 $\left.\mathrm{u}\sqrt{2\lambda}\right)^i$（$Y_m$）从单个 Y_m的面截取 h 层 D_4 的截角X_m^1、$_h$、……、X_m^{24}、$_h$截角 24胞体的面 t_{-h}^3（Y_m）$\widehat{X}_m^1$、$_h$ 其面与X_m^1的面具有相同质心的正八面体$_h$

$\widehat{Y}_{m,h}$ 从 24 胞体 Y_m 中移除截角 24 胞体 $t_h^3(Y_m)$ 后剩余的部分$t_h^2\left(X_m^i\right)$ X_m^i 对 Y_m的面 $i\in\{2,\ldots,9\}$ 进行面截角后的结果$t_h^0\left(X_m^k\right)$ X_m^i 对 Y_m的面 $i\in\{10,\ldots,15\}$进行顶点截断后的结果$X_m^{\bigcirc}$ Y_m 中经过面截角后形成代表面 $t_h^2\left(X_m^{\bigcirc}\right)$的那个面$X_m^{\square}$ Y_m 中经过顶点截断后形成代表面 $t_h^0\left(X_m^{\square}\right)$的那个面$T_m^1$，……，$T_m^{96}$ Y_m的面$t_h^1\left(T_m^j\right)$ 对 Y_m的一个面进行边截断后的结果，$t_h^0(E_m)=E_m\cap H_1^-(m-h)$，其中 $T_m^j\cap X_m^1$ 是一条棱$t_h^0\left(T_m^k\right)$ 对 Y_m的一个面进行顶点截断后的结果，$t_h^0(E_m)=E_m\cap H_1^-(m-h)$，其中 $T_m^k\cap X_m^1$ 是一个顶点 Q_m^1，$_h$，……，Q_{mh}^6 t_h^3 的正方形面（Y_m） $Q_{mh}Q_m^1$的正方形面的代表面，$_h$，……，Q_{mh}^6属于 t_h^3（Y_m）H_{mh}^1，……，H_{mh}^8 t_h^3的六边形面（Y_m）$H_{mh}H_m^1$的六边形面的代表面，$_h$，……，H_{mh}^8属于 t_h^3（Y_m）$T_m^{\triangledown}$ Y_m中经过边截断后形成代表面 t_h^1的那个面（$T_m^{\triangledown}$）$T_m^{\triangle}$ Y_m中经过顶点截断后形成代表面 $t_h^0\left(T_m^{\triangle}\right)$的那个面$E_m^1$，……，$E_m^{96}$ Y_m的棱t_h^0（E_m）对 Y_m的一条棱进行顶点截断后的结果，t_h^0（E_m）$=E_m\cap H_1^-$（$m-h$）$E_{mh}^{\square}E_m^{25}$的棱的代表棱，$_h$，……，E_m^{48}，$_h$属于 t_h^3（Y_m），且与一个正方形面 X_m^1相邻$_hE_{mh}^{\bigcirc}E_m^1$的棱的代表棱，$_h$，……，E_m^{24}，$_h$属于 t_h^3（Y_m），且与两个相邻的六边形面 X_m^1相邻$_hE_m^{\triangle}$

Y_m 中经截断形成代表边 $t_h^0\left(E_m^{\triangle}\right)$ 的棱
$t_{\mathbf{h}}^3(Y_m)$ 从 Y_m 的三个面截去 D_4 的 h_1、h_{16} 和 h_{17} 层，其中 $\mathbf{h}=(h_1,\ h_{16},\ h_{17})$**h**

有序三元组 $\mathbf{h}=(h_1,\ h_{16},\ h_{17})$ 表示通过截去 Y_m 的面 X_m^1、X_m^{16} 和 X_m^{17} 而移除的 D_4 的层数

$p_k(C)$ 一个堆积 C，其中 k 个点已被移除。具体移除哪些点（就我们的目的而言）并不重要，重要的只是点数

$\sim\delta(C,\ n)$ 通过 C 的球体的凸包得到的 $\delta(C,\ n)$ 的下界

$\widetilde{v}(C,d)$ 香肠的凸包体积与堆积的凸包体积之差（如果 C 的密度低于香肠，则定义为 0） $\widetilde{v}(C,d)=$体积$\left(\text{凸包 }S_n^d+B^d\right)-$体积$\left(\text{凸包 }C+B^d\right)$之间$\sim L(C)$从 $n-\widetilde{r}(C,d)$ 到 n（含端点）的所有整数的集合（如果 C 的密度低于香肠，则定义为空集）$\sim$ $\sim L(\mathscr{C})$ 对所有 $C\in\mathscr{C}$ 而言的集合族 $L(C)\sim\triangle(C)$ $\mathbb{R}^2$ 中定义为以下顶点的凸包的集合：$\left(n-\widetilde{r}(C,d)\quad\widetilde{\delta}\left(p_{r(C,n,d)}(C)\right)\right)$，……，$\left(n-1,\widetilde{\delta}(p_1(C))\right)$、$(n,\delta(C))$ 以及$\left(n-\widetilde{r}(C,d)\quad\delta\left(S_{n-r(C,n,d)}^d\right)\right)$，……，$\left(n-1\text{、}\delta\left(S_{n-1}^d\right)\right)$、$\left(n\text{、}\delta\left(S_n^d\right)\right)\widehat{\triangle}(C)$ 顶点为 $\left(n-\widetilde{r}(C,d)\quad\delta\left(S_{n-r(C,n,d)}^d\right)\right)$、$\left(n\text{、}\delta\left(S_n^d\right)\right)$和 $(n,\delta(C)$ 的直角三角形

))

6 附录

6.1 $t^3_{\mathbf{h}}$（Y_m）的顶点

在本小节中，我们证明紧接在第 2.1 节之前所述的命题：对于所有 $m \in \mathbb{N}$ 和 $h \in \{0, \dots, m\}$， $t^3_h(Y_m)$ 的顶点集合是 D_4 的子集。

引理 6.1. </style}令 , h $\in \left\{0, \dots, \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right\}^3$ 和 F 为 $t^3_{\mathbf{h}}$（Y_m）中的任意一个面。除一种情况外，

$$\operatorname{aff}\{F \cap D_4\} \cong \begin{cases} \{\mathbf{0}\} & \dim F = 0 \\ \mathbb{Z} & \dim F = 1 \\ A_2 & \dim F = 2 \\ D_3 & \dim F = 3 \\ D_4 & \dim F = 4 \end{cases},$$

且所有格的最小范数均为 4。例外情况是 t^3_h（Y_m） 的任意一个正方形面 $Q_{m,\,h}$ ， 其中 $Q_{m,\,h} \cap D_4 \cong \mathbb{Z}^2$ 的最小范数为 4。

换言之， $t^3_{\mathbf{h}}$ 的任意一个面 F （除 $Q_{m,\,h}$ 外）与 D_4 的交集会产生相应维数中最密格的未缩放副本，而最小范数为 4 意味着最大密度可以由单位球而非缩放球实现。特别是， D_4 的点位于 $t^3_{\mathbf{h}}$（Y_m）的这些正方形、六边形及其他面的顶点上，因此我们可以写作 $\operatorname{vol}\left(\text{凸包}\left(t^3_h\ (Y_m) \cap D_4\right) + B^4\right) = \operatorname{vol}\left(t^3_h\ (Y_m) + B^4\right)$。

有必要对这个引理及其证明作一些说明。由于不相交性质（命题 3.2），我们可以假设多胞体为 $t^3_h(Y_m)$，即当 $\mathbf{h} = \left\{0, \dots, \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right\} \times \{0\} \times \{0\}$ 时为 $t^3_{\mathbf{h}}(Y_m)$。维数为 $F = 4$ 的情形是显然的。当 F 是 Y_m 的一个面时，Gandini 和 Zucco[11] 已经证明了这一情形；它也涵盖了 $t^3_h(Y_m)$ 的所有面，因为截切面 Y_m 的仿射包与相应的 Y_m 的面相同。因此，我们需要证明以下关于维数 0、1 和 2 的结论：

1. $t^3_h(Y_m)$ 的任意顶点 $\mathbf{v}$ 都是 D_4 中的点，也就是说，其整数坐标要么全为偶数，要么全为奇数。
2. $t^3_h(Y_m)$ 的任意棱 E 都包含 D_4 中的两个点，且这两点之间的距离为 2。
3. 除了特殊面之外， $t^3_h(Y_m)$ 的任意面 F 都包含一个边长为 2、顶点位于 D_4 中的等边三角形。

断言 2 和 3 分别意味着 $\operatorname{aff}(E) \cap D_4 \cong \mathbb{Z}$ 和 $\operatorname{aff}(F) \cap D_4 \cong A_2$。此外，对于所有 $\mathbf{h} \in \left\{0, \dots, \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right\}$，截角 24 胞体 $t^3_{\mathbf{h}}(Y_m)$ 的三个面 $X^1_{m,\,h_1}$、 $X^{16}_{m,\,h_{16}}$ 和 $X^{17}_{m,\,h_{17}}$（定义于引理 2.2 中）互不相交，因此引理 6.1 的结论对于 $\mathbf{h} \in \left\{0, \dots, \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right\}$ 时的三重面截角 $t^3_{\mathbf{h}}(Y_m)$ 也成立。

命题 *1* 的证明。考虑截角 24 胞体 $t^3_{-h}(Y_m)$。只需证明截角八面体 $X^1_{m,\,h}$ 的 24 个顶点都在 D_4 中。$X^1_{m,\,h}$ 的每个顶点 $\mathbf{v}^{m,\,h}$ 都是一条棱 E_m 的一部分，这条棱 Y_m的两个端点分别是 X^1_m 的一个顶点和超平面上的另一个顶点；该超平面经过$\mathbf{0}$，并垂直于 Y_m的质心 $\mathbf{c} = m(1,\ 1,\ 0,\ 0)^{\mathsf{T}}$。我们希望证明 $\mathbf{v}^{m,\,h} \in D_4$，由八面体和 24 胞体的对称性，只需对这样一条棱$E_{m,\,h}$验证这一结论即可。令

$$E_m = \operatorname{conv}\left\{ m\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, m\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\};$$

注意，$(2,0,0,0)^{\mathsf{T}} \in X^1_m$ 和 $(1,-1,1,-1)^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{c} = 0$。由于距离 $\left(X^1_{m,h}, X^1_m\right) = \sqrt{2}h$ 和距离 $(\mathbf{0}, Y_m) = \sqrt{2}m$，面 $X^1_{m,h}$ 位于从 X^1_m 到原点的路径上，距离为其 $\frac{h}{m}$。于是，点 $\mathbf{v}^{m,h}$ 也位于从 $m(2,0,0,0)^{\mathsf{T}}$ 到 $m(1,-1,1,1)^{\mathsf{T}}$的路径上，距离为其 $\frac{h}{m}$，因此

$$\mathbf{v}^{m,h} = \left(1 - \frac{h}{m}\right) \cdot m\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{h}{m} \cdot m\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\-h\end{pmatrix} \in D_4.$$

□

对于第二个断言，我们注意到 $t_h^3(Y_m)$ 有四类边（详情见子小节 2.3.4），但其中两类是 Y_m 中已有边的子集，因此无需重新检查。与第一个断言类似，根据对称性考量，只需针对代表性边 $E_{m,h}^{\square}$ 和 $E_{m,h}^{\hexagon}$ 证明断言 2 即可。

断言 *2* 的证明。考虑棱 $E_{m,\ h}^{\square}$，其顶点为

$$\mathbf{v}^0 \in \operatorname{conv}\left\{ m\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, m\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{v}^1 \in \operatorname{conv}\left\{ m\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, m\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

分别为。于是

$$\mathbf{v}^0 = \begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\-h\end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\h\end{pmatrix},$$

因此，$E_{m,\ h}^{\square}$ 上的每一点都具有如下形式

$$\mathbf{v}^\lambda = \begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\(2\lambda-1)\,h\end{pmatrix}.$$

特别是,

$$\mathbf{v}^{\frac{1}{h}} = \begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\(2\frac{1}{h}-1)\,h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\2-h\end{pmatrix} \in D_4$$

并且此外 $\left|\mathbf{v}^{\frac{1}{h}} - \mathbf{v}^0\right| = 2$。

现在考虑棱 $E_{m,\ h}^{\hexagon}$，其顶点为

$$\mathbf{v}^0 \in \operatorname{conv}\left\{ m\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, m\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{v}^1 \in \operatorname{conv}\left\{ m\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, m\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

分别为。然后

$$\mathbf{v}^0 = \begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\-h\end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix}m\\m-2h\\m\\-m\end{pmatrix},$$

因此，$E_{m,h}^{\hexagon}$ 上的每个点都具有以下形式

$$\mathbf{v}^\lambda = \begin{pmatrix}(2-\lambda)\,m-(1-\lambda)\,h\\\lambda m-(1+\lambda)\,h\\\lambda m+(1-\lambda)\,h\\-\lambda m-(1-\lambda)\,h\end{pmatrix}.$$

令 $\lambda=\frac{1}{m-h}$，对于

$$\mathbf{v}^{\frac{1}{m-h}}=\begin{pmatrix}2m-(h+1)\\-h+1\\h+1\\-(h+1)\end{pmatrix}\in D_4,$$

最后 $\left|\mathbf{v}^0-\mathbf{v}^{\frac{1}{m-h}}\right|=2$。 □

对于第三个断言，我们注意到 $t_h^3(Y_m)$ 有五类面（见子小节 2.3.3），但其中只有两类不是 Y_m 中各面的子集。结合这一事实与对称性考量，只需对代表面 $Q_{m,\,h}$ 和 $H_{m,\,h}$证明断言 3 即可。

断言 *3* 的证明。 考虑正方形面 $Q_{m,\,h}$，其顶点为

$$\mathbf{v}^{1,1}=\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\h\end{pmatrix},\qquad \mathbf{v}^{-1,1}=\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\-h\\h\end{pmatrix},\qquad \mathbf{v}^{1,-1}=\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\-h\end{pmatrix},\qquad \mathbf{v}^{-1,-1}=\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\-h\\-h\end{pmatrix}.$$

$Q_{m,\,h}$ 中的任意一点都可写为

$$\mathbf{v}^{\lambda_1,\lambda_2}=\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\\lambda_1 h\\\lambda_2 h\end{pmatrix}\qquad \text{for } \lambda_1,\lambda_2\in[-1,1],$$

那么特别地，对于 λ_1，$\lambda_2=1-\frac{2}{h}$，我们有

$$\mathbf{v}^{1-\frac{2}{h},1-\frac{2}{h}}=\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\\left(1-\frac{2}{h}\right)h\\\left(1-\frac{2}{h}\right)h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h-2\\h-2\end{pmatrix}\in D_4.$$

那么，凸包 $\left\{\mathbf{v}^{1,1},\mathbf{v}^{1,\,1-\frac{2}{h}},\,\mathbf{v}^{1-\frac{2}{h},\,1},\,\mathbf{v}^{1-\frac{2}{h},\,1-\frac{2}{h}}\right\}$ 构成一个边长为 2 的正方形，其顶点位于 D_4 中。现在考虑六边形面 $H_{m,\,h}$，其相邻顶点为

$$\mathbf{v}^{-1}=\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\-h\end{pmatrix},\qquad \mathbf{v}^{0}=\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\h\end{pmatrix},\qquad \mathbf{v}^{1}=\begin{pmatrix}m\\m-2h\\m\\m\end{pmatrix}.$$

距离$\mathbf{v}^0$最近但与其不重合的 D_4凸包 $\left\{\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^{-1}\right\}$和凸包 $\left\{\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1\right\}$上的点是

$$\mathbf{v}^{-\frac{1}{h}}=\begin{pmatrix}2m-h\\-h\\h\\h-2\end{pmatrix}\qquad\text{and}\qquad \mathbf{v}^{\frac{1}{m-h}}=\begin{pmatrix}2m-h-1\\1-h\\h+1\\h+1\end{pmatrix}.$$

Let

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}^0+\left(\mathbf{v}^{\frac{1}{m-h}}-\mathbf{v}^0\right)+\left(\mathbf{v}^{-\frac{1}{h}}-\mathbf{v}^0\right)=\begin{pmatrix}2m-h-1\\1-h\\h+1\\h-1\end{pmatrix}\in D_4,$$

那么，$\left\{\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^{\frac{1}{m-h}},\mathbf{v}\right\}$构成一个边长为 2 的等边三角形，其顶点位于 D_4中。

□

6.2 $t_h^3(Y_m)$的面

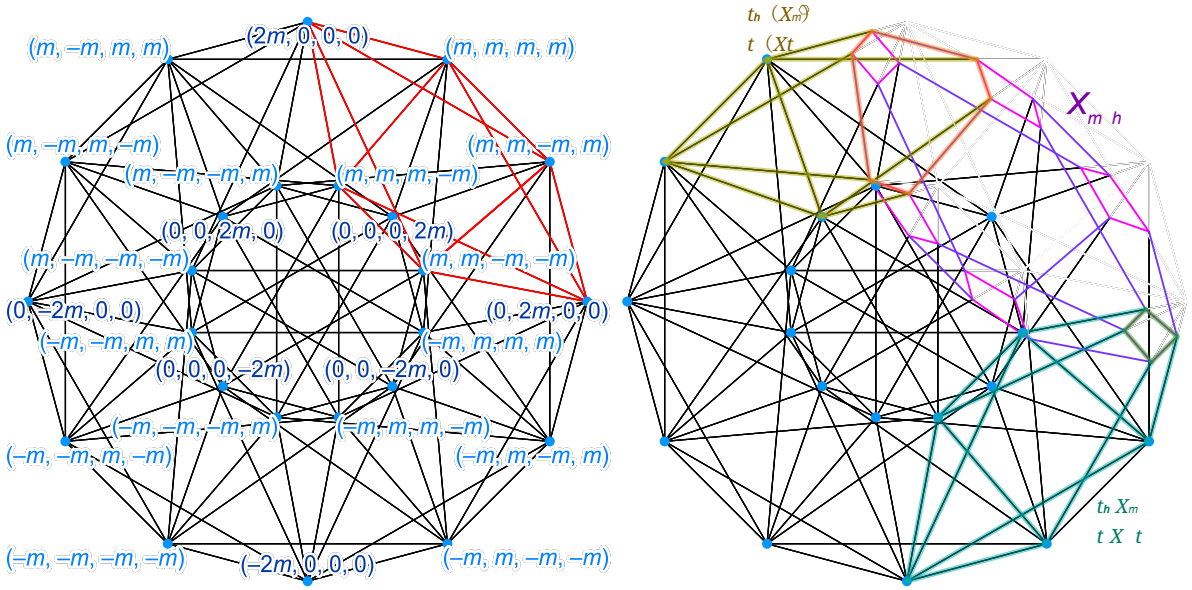


图 6.1：左：图示 Y_m，其中 X_m^1 的边以红色标示。右：图示 $t_h^3(Y_m)$，其中面 $X_{m,\ h}^1$ 以粉色（正方形边）和紫色（其他边）标示，面 $t_h^2\left(X_m^{\bigcirc}\right)$ 以橙色（与 $X_{m,\ h}^1$ 的交集）和黄色（其他边）标示，面 $t_h^0\left(X_m^{\square}\right)$ 以绿色（与 $X_{m,\ h}^1$ 的交集）和青绿色（其他边）标示。

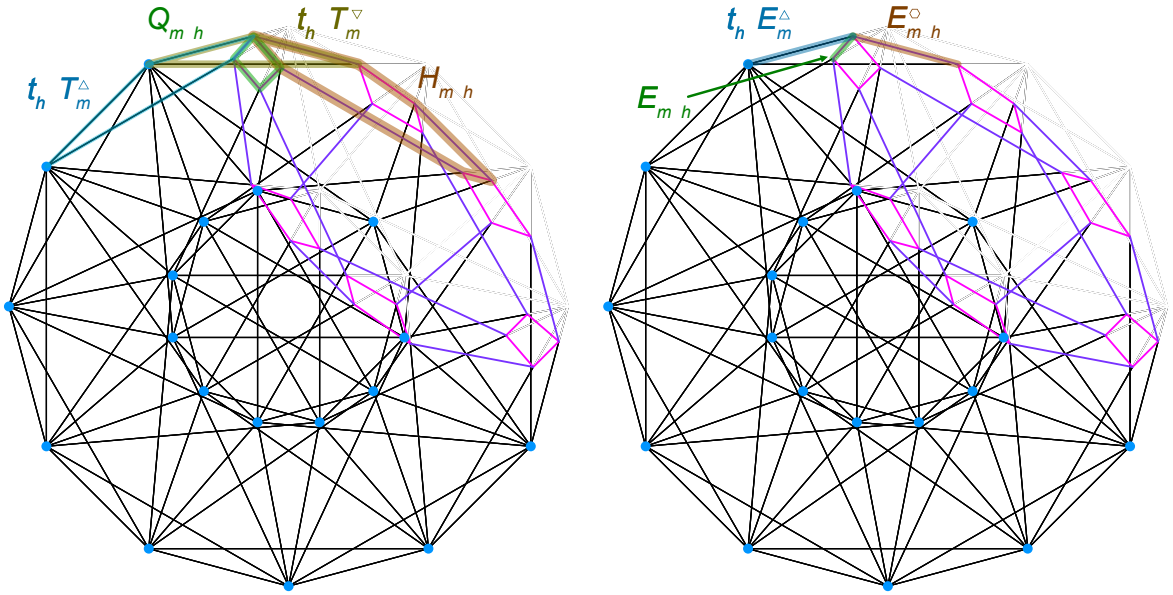


图 6.2：$t_h^3(Y_m)$ 的图示，其中面 $X_{m,\ h}^1$ 以粉色（正方形边）和紫色（其他边）标示。左：面 $Q_{m,\ h}$、$H_{m,\ h}$、$t_h^1(T_m^{\triangledown})$ 和 $t_h^0\left(T_m^{\triangle}\right)$ 的边分别以绿色、橙色、黄色和蓝色标示。右：边 $E_{m,\ h}^{\square}$、$E_{m,\ h}^{\bigcirc}$ 和 $t_h^0\left(E_m^{\triangle}\right)$ 分别以绿色、橙色和蓝色标示。

6.3 密度图 for $t^3_{\mathbf{h}}(Y_m)$

本小节展示各种截角 24 胞体密度的图 $t^3_{\mathbf{h}}(Y_m)$。

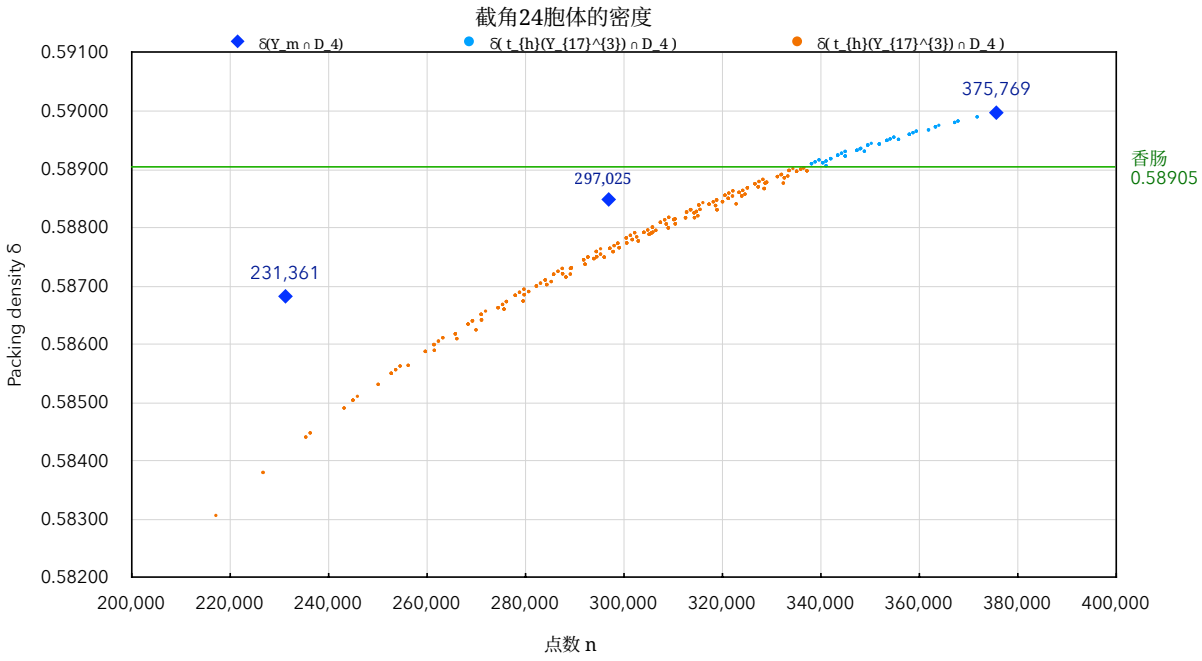
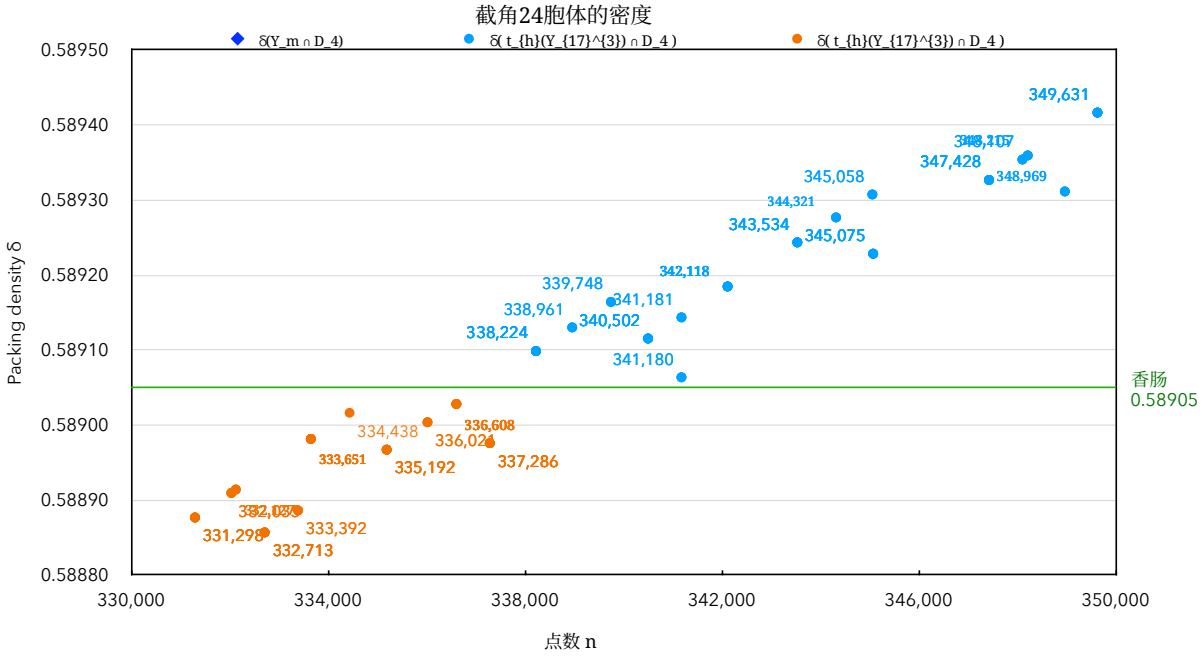


图6.3： $t^3_{\mathbf{h}}(Y_{17}) \cap D_4$ 在$\mathbf{h} \in \{0,\ldots,8\}^3$下的密度。绿色水平线 表示香肠的密度 $\delta\left(S^d_n\right)$，深蓝色菱形 表示 $\delta(X_{16} \cap D_4)$和 $\delta\left(X_{17} \cap D_4\right)$，浅蓝色圆圈 表示比香肠更密的堆积 $t^3_{\mathbf{h}}(Y_{17}) \cap D_4$，而橙色圆圈 表示比香肠更稀的堆积 $t^3_{\mathbf{h}}(Y_{17}) \cap D_4$。



Fi图6.4：图6.3中以 $n = 33$为中心的放大图 8, 224.

6.4 $p_k\left(t^3_{\mathbf{h}}(Y_m)\cap D_4\right)$的密度图

6.4.1 描述与概述

在本小节的图中，查看堆积 $p_k\left(t^3_{\mathbf{h}}(Y_{17})\cap D_4\right)$的堆积密度以及区间 $\widetilde{L}\left(t^3_{\mathbf{h}}(Y_{17})\cap D_4\right)\subset\mathbb{N}$会有所帮助。由于这些图仅用作视觉辅助工具，不涉及任何证明，因此此处的讨论会比较非正式。

定义 6.2。 设 $C\subset\mathbb{R}^d$ 是 $n\geq 3$ 点的一个堆积。定义 $\widetilde{\triangle}(C)\subset\mathbb{R}^2$ 为

$$\widetilde{\triangle}(C):=\operatorname{conv}\left\{\begin{array}{ccccc}\left(n-\widetilde{r}(C,d),\widetilde{\delta}\left(p_{r(C,n,d)}(C)\right)\right), & \ldots, & \left(n-1,\widetilde{\delta}\left(p_1(C)\right)\right), & (n,\delta(C)), \\ \left(n-\widetilde{r}(C,d),\delta\left(S^d_{n-r(C,n,d)}\right)\right), & \ldots, & (n-1,\delta(S^d_{n-1})), & (n,\delta(S^d_n))\end{array}\right\}$$

若 $\delta(C)\geq\delta(S^d_n)$ 且 $\widetilde{\triangle}(C):=\emptyset$ 若 $\delta(C)<\delta(S^d_n)$。

虽然 $\widetilde{\triangle}(C)$ 通常是一个有 $\widetilde{r}(C,d)+3$ 条边的多边形，但它在视觉上类似于直角三角形

$$\widehat{\triangle}(C):=\operatorname{conv}\left\{\begin{array}{cc}(n,\delta(C)), \\ \left(n-\widetilde{r}(C,d),\delta\left(S^d_{n-r(C,n,d)}\right)\right), & (n,\delta(S^d_n))\end{array}\right\},$$

而在我们的图中，我们将绘制 $\widehat{\triangle}$ 而不是 $\widetilde{\triangle}$。

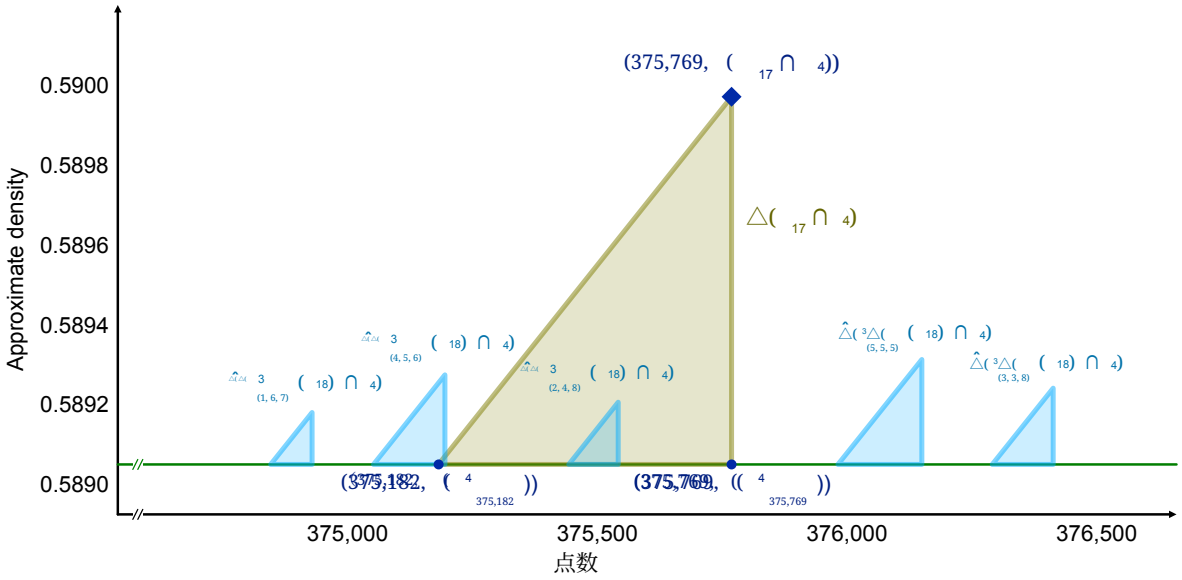


图 6.5：对于某些 m 和$\mathbf{h}$的取值，三角形 $\widehat{\triangle}(Y_{17}\cap D_4)$和 $\widehat{\triangle}\left(t^3_{-\mathbf{h}}(Y_{18})\cap D_4\right)$。深黄色三角形 是 $\widehat{\triangle}(Y_{17}\cap D_4)$，而浅蓝色三角形 是五个不同的 $\widehat{\triangle}\left(t^3_{-\mathbf{h}}(Y_{18})\cap D_4\right)$。 $\widetilde{L}(Y_{17}\cap D_4)$中的最小值和最大值也标注在图示上： $G(Y_{17})=375,769$ 和$G(Y_{17})-\widetilde{r}(Y_{17}\cap D_4,4)=375,182$。绿线 是 $y=\delta\left(S^4_n\right)$。

$\widehat{\triangle}$ $\widetilde{L}$ 集合 $\widetilde{\triangle}(C)$ 也与 $L(C)$ 密切相关；它在第一个坐标上的投影仅为 $L(C)$， $\widehat{\triangle}$ $\widehat{\triangle}$ $\widetilde{L}$ 并且两个堆积 C和 C' 满足 $\widetilde{\triangle}(C)\cap\widetilde{\triangle}(C')\neq\emptyset$，当且仅当 $L(C)\cap L(C')\neq\emptyset$。下图是所有 $m\in\{17,\ldots,21\}$和 $\mathbf{h}\in\{0,\ldots,\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor\}^3$对应的三角形 $\widehat{\triangle}\left(t^3_{\mathbf{h}}(Y_m)\cap D_4\right)$（其边界）的鸟瞰图。

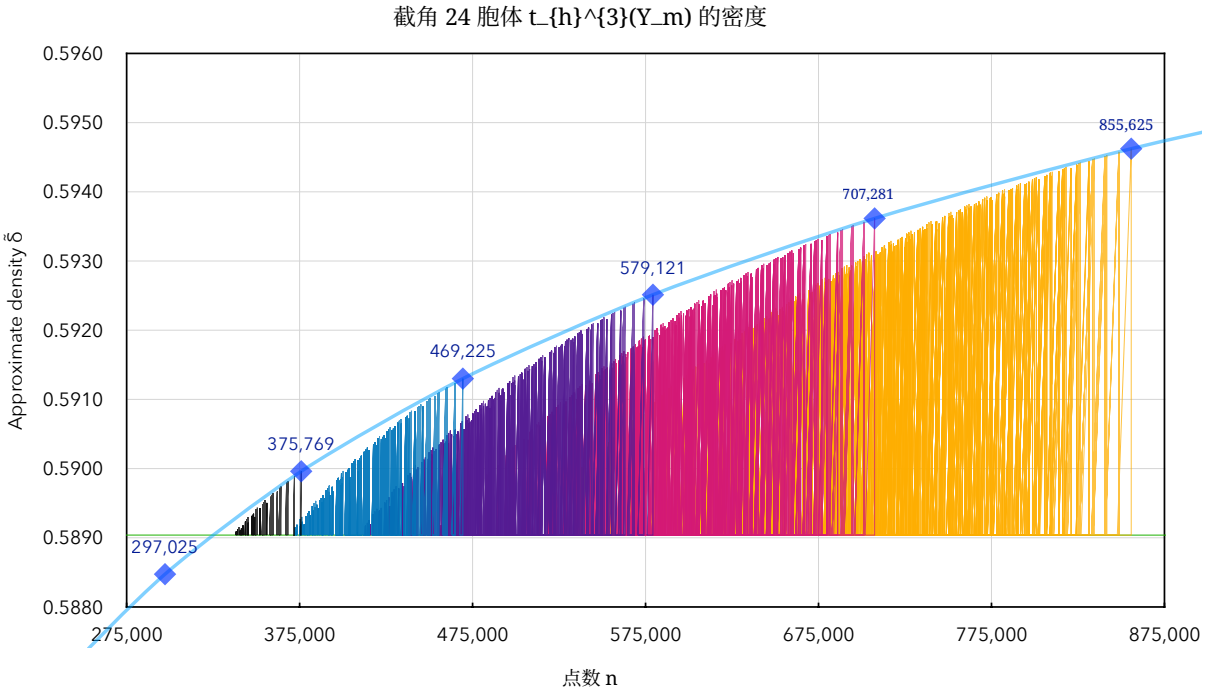


图 6.6：用于 $m \in \{17, \ldots, 21\}$ 和 $\mathbf{h} \in \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right\}^3$ 的“ $\widehat{\triangle}\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m) \cap D_4\right)$ 三角形”。底部附近的绿线 是香肠的密度 $\delta\left(S_n^4\right)$ ，蓝色大菱形 是点 $(x, y) = (G(Y_m) \quad \delta(Y_m \cap D_4))$，而浅蓝色曲线 是 $m \in \{1, \ldots, 24\}$ 对应的点 $(G(Y_m) \quad \delta(Y_m \cap D_4))$ 之间的插值。中间的尖峰是 $\widehat{\triangle}\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m) \cap D_4\right)$，分别以黑色、深蓝色、紫色、粉色和黄色 表示 $m = 17$、18、19,20,和 21。

在下面接下来的几幅图中，我们将放大这幅图的不同部分，以展示集合 $\widetilde{L}\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m) \cap D_4\right)$ 在 $m \in \{17, \ldots, 21\}$ 和 $h \in \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right\}^3$时的一些间隙和覆盖。具体而言，这些图表明

$$\{516{,}837, \ \ldots, \ 516{,}935\} \cap \left(\bigcup_{m=1}^{m'} \bigcup_{h \in \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right\}^3} \widetilde{L}\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m) \cap D_4\right) \right) = \emptyset$$

and

$$\widetilde{L}\left(t_{(0,0,1)}^3(Y_m) \cap D_4\right) \cap \widetilde{L}\left(t_{(0,0,0)}^3(Y_m) \cap D_4\right) = \emptyset \qquad \text{for } m \in \{17, 18, 19, 20\},$$
$$\widetilde{L}\left(t_{(0,0,1)}^3(Z_{21}) \cap D_4\right) \cap \widetilde{L}\left(t_{(0,0,0)}^3(Z_{21}) \cap D_4\right) \neq \emptyset,$$

它们说明了不等式 $N_4^* \leq 516{,}946$。

在下一个子子节中，我们放大图 6.6 中的特定区域，以便更清晰地查看。为清楚起见，我们更改颜色，使 $\delta\left(S_n^d\right)$ 为（通常较深的）红色，而 $\widehat{\triangle}\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m) \cap D_4\right)$ 为浅灰色或黑色（对应奇数 m），偶数 m则为蓝色。每张图都聚焦于固定 m下的 $\widehat{\triangle}\left(t_{-\mathbf{h}}^3(Y_m) \cap D_4\right)$，但三角形 $\widehat{\triangle}\left(t_{-\mathbf{h}}^3(Y_m) \cap D_4\right)$ 和 $\widehat{\triangle}\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_{m'}) \cap D_4\right)$ 可能会在 $m \neq m'$处重叠。我们省略任何具有 $m \geq 22$的三角形$\widehat{\triangle}\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m) \cap D_4\right)$，部分原因是为了展示图 6.12 中三角形 $\widehat{\triangle}\left(t_{(0,0,0)}^3(Y_{21}) \cap D_4\right)$ 与$\widehat{\triangle}\left(t_{(0,0,1)}^3(Y_{21}) \cap D_4\right)$ 的重叠。另一张图（图 6.10）大幅放大了区间[516,836, 516,946], 附近的区域，展示了紧邻 $n = 516{,}946$ 之前的三角形中的空隙，因为中间点 $n \in \{516{,}837, \ \ldots, \ 516{,}945\}$ 不属于并集

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{\mathbf{h} \in \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right\}^3} \widetilde{L}\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_m) \cap D_4\right).$$

6.4.2 $\widehat{\triangle}\left(t^3_{-\mathbf{h}}\ (Y_m)\ \cap D_4\right)$ 的详细图

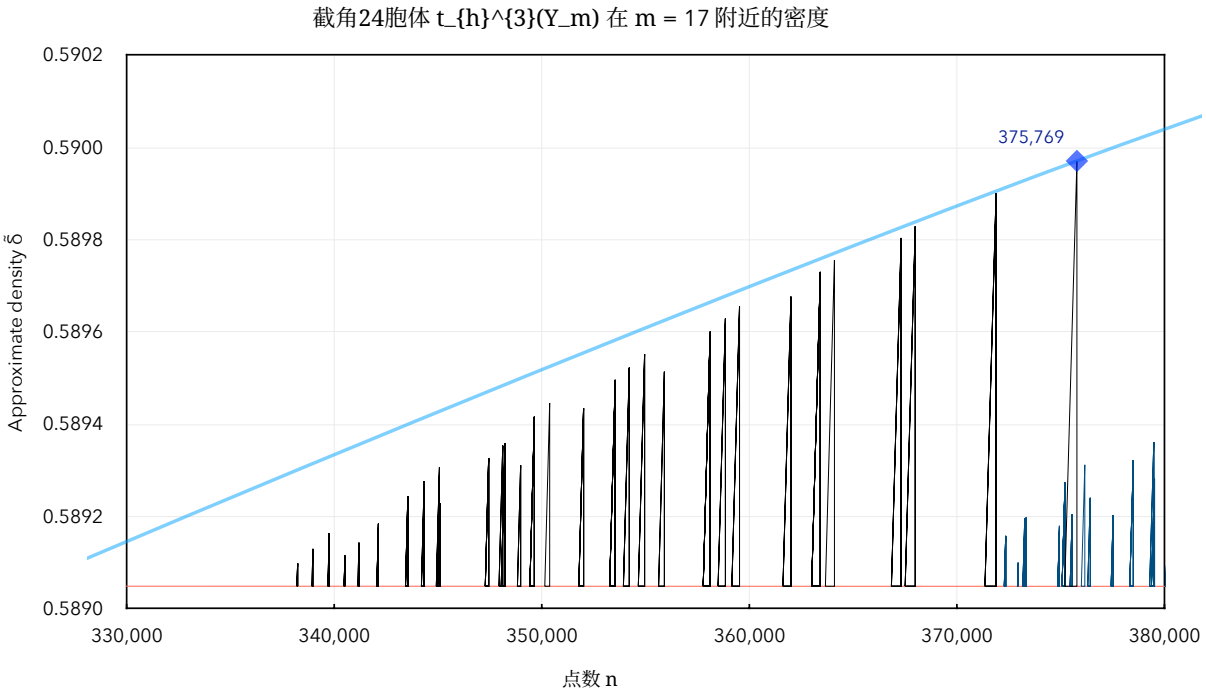


图 6.7：适用于$\mathbf{h} \in \left\{0,\ldots,\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right\}^3$的“三角形” $\widehat{\triangle}\left(t^3_{\mathbf{h}}(Y_{17}) \cap D_4\right)$。

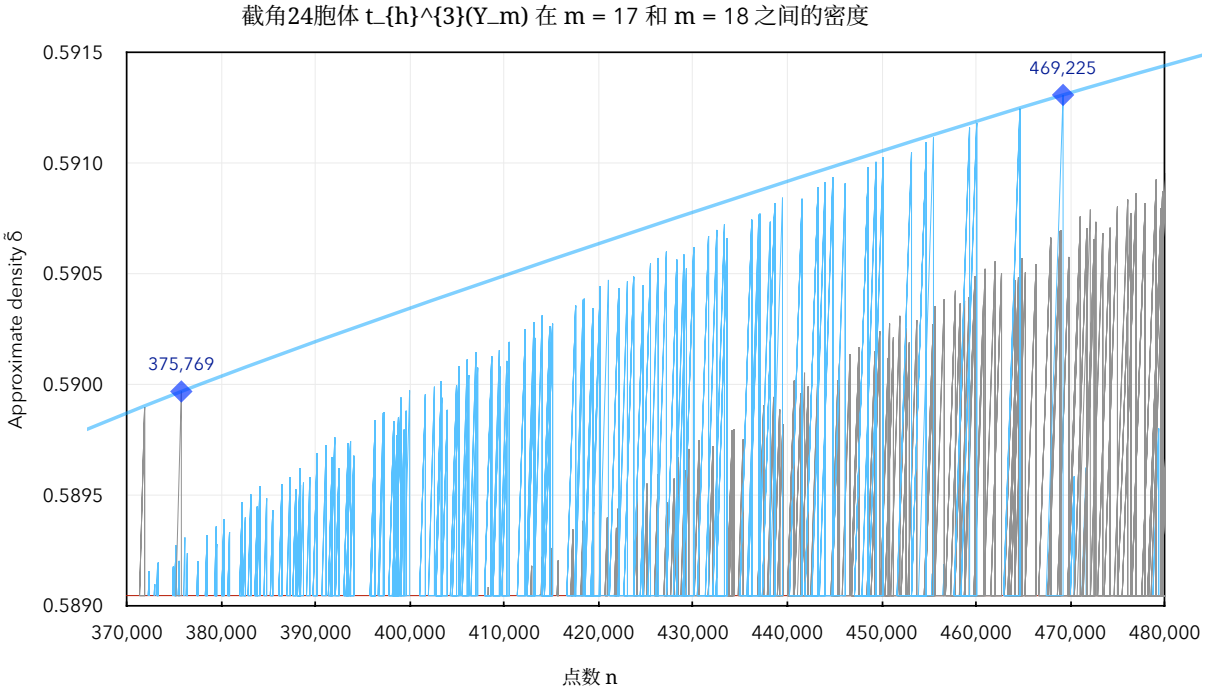


图 6.8：“三角形” $\widehat{\triangle}\left(t^3_{\mathbf{h}}(Y_{18}) \cap D_4\right)$ 对于 $\mathbf{h} \in \left\{0,\ldots,\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right\}^3$。

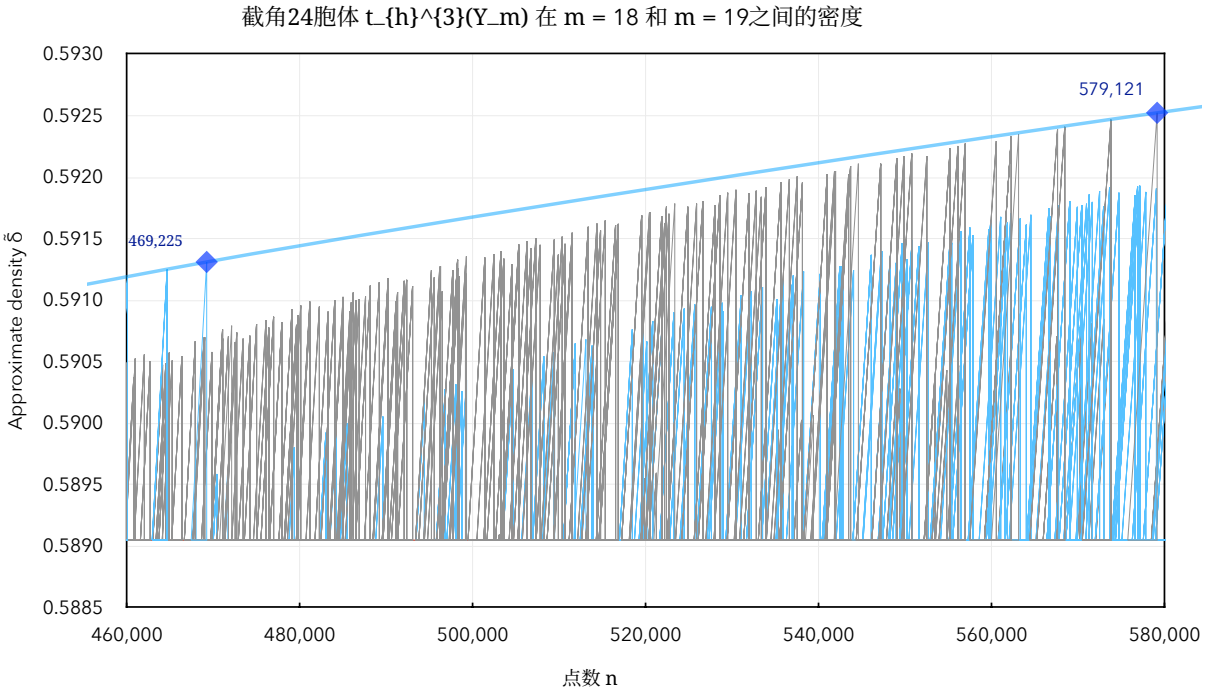


图6.9：用于 $\mathbf{h} \in \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right\}^3$ 的“三角形” $\widehat{\triangle}\left(t^3_{\mathbf{h}}(Y_{19}) \cap D_4\right)$。

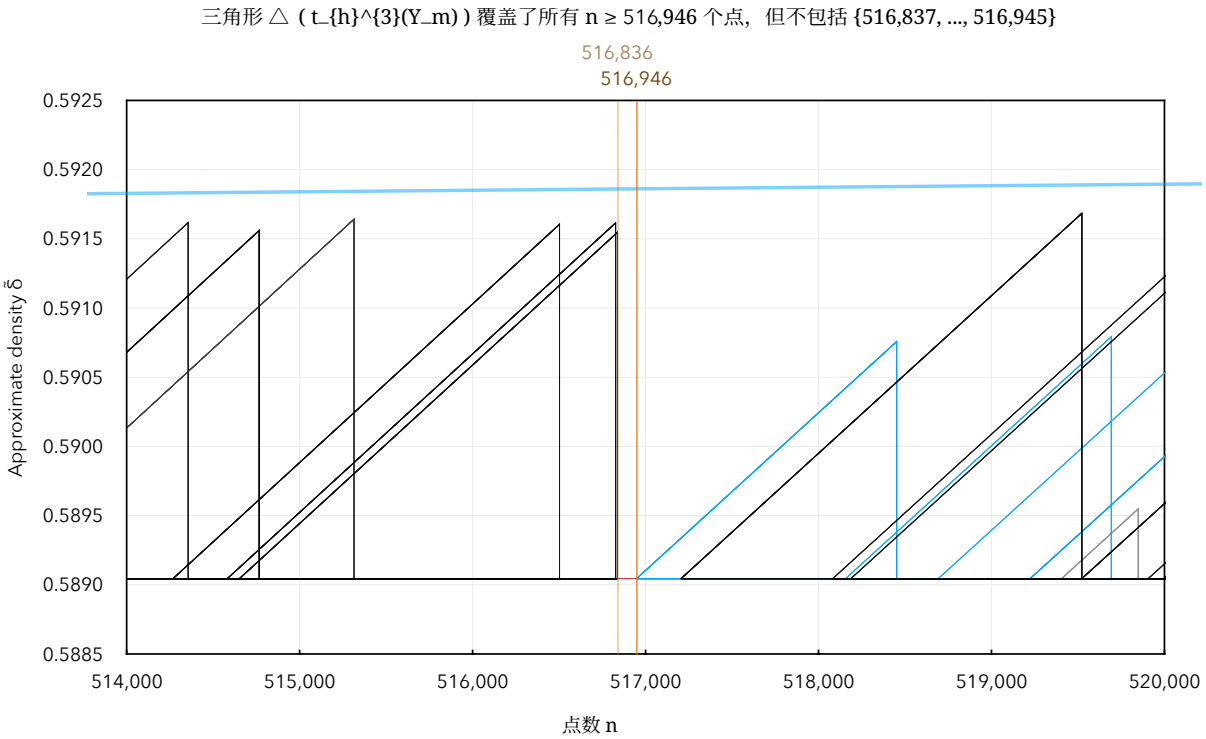


图 6.10：靠近 946 的 h 的“三角形” $\widehat{\triangle}\left(t^3_{\mathbf{h}}(Y_{19}) \cap D_4\right)$ 和 $\widehat{\triangle}\left(t^3_{\mathbf{h}}(Y_{20}) \cap D_4\right)$。在这张图中，较深的橙色竖线是 $x = 516{,}946 = \min \widetilde{L}\left(t^3_{(4,7,9)}(Y_{20}) \cap D_4\right)$，浅橙色竖线是 $x = 516{,}837 = G\left(t^3_{(0,1,7)}(Y_{19})\right)$。

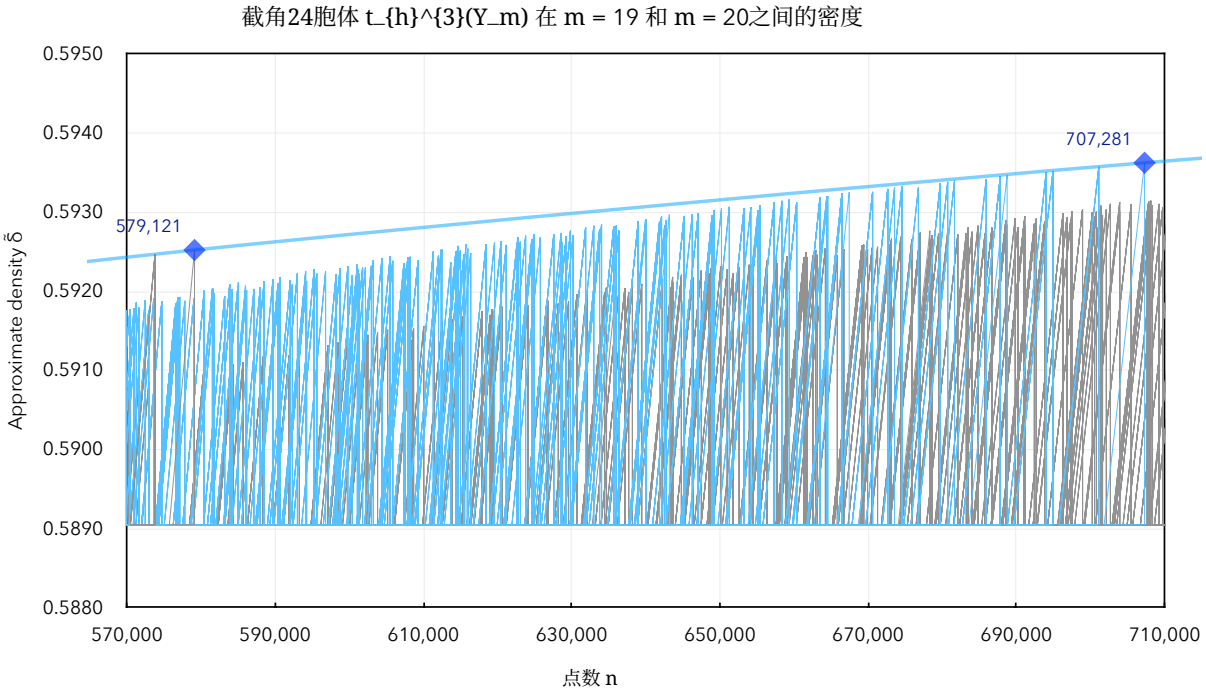


图 6.11：$\mathbf{h} \in \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right\}^3$的“三角形” $\widehat{\triangle}\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_{20}) \cap D_4\right)$。可以看到，$\widetilde{L}(Y_{20} \cap D_4)$和 $\widetilde{L}\left(t_{(0,0,1)}^3(Y_{20}) \cap D_4\right)$互不相交。

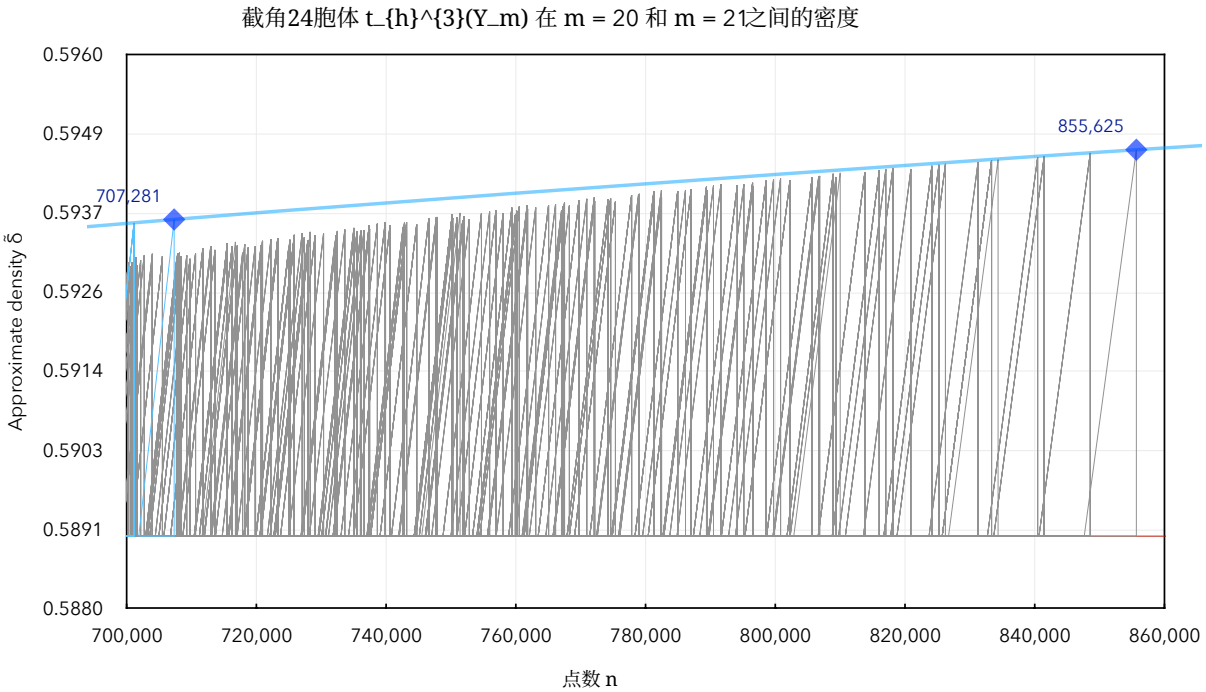


图 6.12：$\mathbf{h} \in \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right\}^3$的“三角形” $\widehat{\triangle}\left(t_{\mathbf{h}}^3(Y_{21}) \cap D_4\right)$。这幅图中最右侧的两个三角形分别是 $\widehat{\triangle}(Y_{21} \cap D_4)$和 $\widehat{\triangle}\left(t_{(0,0,1)}^3(Y_{21}) \cap D_4\right)^{\sim}$（以及其他排列 (0,1,0) 和 (1,0,0)）。可以看到，$L(Y_{21} \cap D_4)$和$\widetilde{L}\left(t_{(0,0,1)}^3(Y_{21}) \cap D_4\right)$部分重叠。