arXiv:2302.11620v1 [math.AC] 22 Feb 2023

SEC次级霍赫希尔德上同调与导子 NS

KYLIE BENNETT、ELIZABETH HEIL 和 JACOB LAUBACHER

Abstract. 本文介绍了导子的一种推广。利用这些所谓的次级导子，以及 Connes 长正合列的一个类似物，我们能够计算与交换三元组相关的次级霍赫希尔德上同调和循环上同调的低维情形。随后，我们建立了一个泛性质，为将次级 K¨ahler 微分与上述次级导子联系起来铺平了道路。

1. Introduction

霍赫希尔德上同调由 Hochschild 本人于 1945年 在 [11], 引入，其一种恰如其名的推广——次级霍赫希尔德上同调——由 Staic 于 2016年 在 [17]中提出。1964年，Gerstenhaber 运用前者研究域 $\mathbb{K}$ [10], 上的代数 A 的变形；而 Staic 则利用他的次级情形研究具有非平凡 B-代数结构的 A 。该结构由一个态射诱导而来。

$\mathbb{K}$-代数 $\varepsilon\colon B \longrightarrow A$，我们将其编码为三元组 (A, B, ε) 的形式。

次级霍赫希尔德上同调具有许多与通常霍赫希尔德上同调相似的性质（参见 [8], [15], 和 [18], 等）。我们感兴趣的一项性质涉及通常霍赫希尔德上同调与导子集合。

本文旨在研究与三元组 (A, B, ε) 相关联的次级霍赫希尔德上同调与导子集合的一种推广之间的关系。第 2 节提供所有必要的预备知识，力求使本文尽可能自成一体。接着，在第 3 节中，我们引入次级导子的概念。随后，我们将展示次级霍赫希尔德上同调和循环上同调在低维情形下的计算（分别见定理 3.6 和推论 3.7）。最后，第 4 节讨论这些次级导子的泛性质，并说明如何利用它们证明来自 [14]的次级 Kähler 微分确实非平凡。

2. 预备知识

按照惯例，我们令 $\mathbb{K}$ 为一个包含 $\mathbb{Q}$的域，并定义 $\otimes = \otimes_{\mathbb{K}}$，除非另有说明。接下来，我们规定所有 $\mathbb{K}$-代数都必须是结合的且具有乘法单位元。关于次级霍赫希尔德上同调，它是在一个三元组上定义的，具体如下：

定义 2.1. ([17]) 若 A 是一个 $\mathbb{K}$-代数，B 是一个交换的 $\mathbb{K}$-代数，且 $\varepsilon\colon B \longrightarrow A$ 是 $\mathbb{K}$-代数的一个态射，并满足 $\varepsilon(B) \subseteq \mathcal{Z}(A)$，则称 (A, B, ε) 为一个三元组。若 A 也交换，则称 (A, B, ε) 为一个交换三元组。

Date: 2023年2月24日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 13D03；次要分类号 16E40，13N15。*Key words and phrases.* 霍赫希尔德上同调、循环上同调、导子。

Corresponding author. Jacob Laubacher ✉jacob.laubacher@snc.edu ☎ 920-403-2961。

如今，三元组已得到相当广泛的研究，许多地方都能找到相关的例子、扩张和应用（参见[1], [2], [3], [4], [5], [8], [9], [13], 或 [18], 例如）。为方便起见且视情况需要，我们将用 $\mathcal{T} = (A,\ B,\ \varepsilon)$ 表示一个三元组，以简化记号。

2.1. 次级霍赫希尔德上同调。接下来我们回顾次级霍赫希尔德上同调，它由 Staic 于 [17] 2016年 引入。在那篇论文中，Staic 研究了系数取自 M 的三元组 (A, B, ε) 的次级霍赫希尔德上同调，并以此研究具有非平凡 B-代数结构的 A 的变形。几年后，作者在[15], 通过单纯形结构建立了与三元组 (A, B, ε) 相关的次级霍赫希尔德上同调，许多细节可见 [12]。本文将采用这一构造。

在记号方面，我们遵循 [15] 中采用的惯例。对于三元组 (A, B, ε)，我们定义$\overline{C}^n(A, B, \varepsilon) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n+1} \otimes B^{\otimes \frac{n(n+1)}{2}}, \mathbb{K})$。按照惯例（例如参见 [6],），我们将 $A^{\otimes n+1} \otimes B^{\otimes \frac{n(n+1)}{2}}$ 中的元素视为如下矩阵

$$\otimes \begin{pmatrix} a_0 & b_{0,1} & b_{0,2} & \cdots & b_{0,n-2} & b_{0,n-1} & b_{0,n} \\ 1 & a_1 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n-2} & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ 1 & 1 & a_2 & \cdots & b_{2,n-2} & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a_{n-2} & b_{n-2,n-1} & b_{n-2,n} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a_{n-1} & b_{n-1,n} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & a_n \end{pmatrix},$$

其中 $a_i \in A$、$b_{i,\ j} \in B$ 和 $1 \in_{\mathbb{K}}$，因此随后可以通过以下方式确定余边界映射 $\partial^n \colon \overline{C}^n(A, B, \varepsilon) \longrightarrow \overline{C}^{n+1}(A, B, \varepsilon)$

$$\partial^n f\Big(\otimes \begin{pmatrix} a_0 & b_{0,1} & \cdots & b_{0,n} & b_{0,n+1} \\ 1 & a_1 & \cdots & b_{1,n} & b_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n & b_{n,n+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_{n+1} \end{pmatrix} \Big)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f\Big(\otimes \begin{pmatrix} a_0 & b_{0,1} & \cdots & b_{0,i}b_{0,i+1} & \cdots & b_{0,n} & b_{0,n+1} \\ 1 & a_1 & \cdots & b_{1,i}b_{1,i+1} & \cdots & b_{1,n} & b_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_i\varepsilon(b_{i,i+1})a_{i+1} & \cdots & b_{i,n}b_{i+1,n} & b_{i,n+1}b_{i+1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & a_n & b_{n,n+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & a_{n+1} \end{pmatrix} \Big)$$

$$+ (-1)^{n+1} f\Big(\otimes \begin{pmatrix} a_{n+1}\varepsilon(b_{0,n+1})a_0 & b_{1,n+1}b_{0,1} & \cdots & b_{n-1,n+1}b_{0,n-1} & b_{n,n+1}b_{0,n} \\ 1 & a_1 & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1,n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_n \end{pmatrix} \Big)$$

对于所有 $n \geq 0$。文献 [15] 证明了 $\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0$，我们将诱导复形记为 $\mathbf{C}^\bullet(A, B, \varepsilon)$。

定义 2.2.（[15]）链复形 $\mathbf{C}^\bullet(A, B, \varepsilon)$ 的上同调称为与三元组（$A, B, \overline{\varepsilon}$）相关联的次级霍赫希尔德上同调，记作 $HH^*(A, B, \varepsilon)$。

注 2.3. 取 $B = \mathbb{K}$，很容易看出，与三元组（A, B, ε）相关联的次级霍赫希尔德上同调如何退化为与A相关联的通常霍赫希尔德上同调。用记号表示，对所有 $n \geq 0$，有 $HH^n(A, \mathbb{K}, \varepsilon) = HH^n(A)$。

最值得关注的是，我们将聚焦于低维中的链复形 $\mathbf{C}^\bullet(A, B, \overline{\varepsilon})$。具体而言，有

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, \mathbb{K}) \xrightarrow{\partial^0} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes 2} \otimes B, \mathbb{K}) \xrightarrow{\partial^1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes 3} \otimes B^{\otimes 3}, \mathbb{K}) \xrightarrow{\partial^2} \dots$$

使得

$$\partial^0 f\Big(\otimes \begin{pmatrix} a & \alpha \\ 1 & b \end{pmatrix} \Big) = f(a\varepsilon(\alpha)b) - f(b\varepsilon(\alpha)a)$$

and

$$\partial^1 f\Big(\otimes \begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ 1 & b & \gamma \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}\Big) = f\Big(\otimes \begin{pmatrix} a\varepsilon(\alpha)b & \beta\gamma \\ 1 & c \end{pmatrix}\Big) - f\Big(\otimes \begin{pmatrix} a & \alpha\beta \\ 1 & b\varepsilon(\gamma)c \end{pmatrix}\Big) + f\Big(\otimes \begin{pmatrix} c\varepsilon(\beta)a & \alpha\gamma \\ 1 & b \end{pmatrix}\Big).$$

2.2. 次级循环上同调。Connes 在 [7], 引入了循环上同调，更多细节可见 [16] 。这里我们回顾在 [15] 中引入的相应次级版本。我们首先考虑置换 $\lambda = (0, 1, 2, \dots, n)$ 和循环群 $C_{n+1} = \langle \lambda \rangle$。注意， C_{n+1} 在 $\overline{C}^n(A, B, \varepsilon)$ 上有一个自然作用，定义如下:

$$\lambda f\Big(\otimes \begin{pmatrix} a_0 & b_{0,1} & \cdots & b_{0,n-1} & b_{0,n} \\ 1 & a_1 & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1,n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_n \end{pmatrix}\Big) = (-1)^n f\Big(\otimes \begin{pmatrix} a_n & b_{0,n} & \cdots & b_{n-2,n} & b_{n-1,n} \\ 1 & a_0 & \cdots & b_{0,n-2} & b_{0,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_{n-2} & b_{n-2,n-1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}\Big).$$

于是，我们可以考虑通过设定 $\overline{C}^n_\lambda(A, B, \varepsilon) = \mathrm{Ker}(1 - \lambda)$ 构造的新复形，其中我们继续使用 ∂^n 第 2.1 节中的映射。由此得到以下定义。

定义 2.4。 ([15]) 链复形 $\mathbf{C}^\bullet_\lambda(A, B\varepsilon)$ 的上同调称为与三元组 相关联的次级循环上同调 (A, B, ε)，记作$HC^*(A, B, \varepsilon)$。

正如 所预料的那样，我们现在回顾 Connes 长正合列在次级情形下的形式 e.

定理 2.5. ([15]) 设 $\mathbb{K}$ 是一个零特征域。对于三元组 (A, B, ε)，我们有如下长正合列

$$\dots \xrightarrow{I^*} HH^n(A, B, \varepsilon) \xrightarrow{B^*} HC^{n-1}(A, B, \varepsilon) \xrightarrow{S^*} HC^{n+1}(A, B, \varepsilon) \xrightarrow{I^*} HH^{n+1}(A, B, \varepsilon) \xrightarrow{B^*} \dots$$

2.3. 二阶 K¨ahler 微分。 本小节沿用 [14], 该文中的讨论，其中我们看到，与交换三元组相关的二阶 Hochschild 同调对应于 K¨ahler 微分的一种推广。

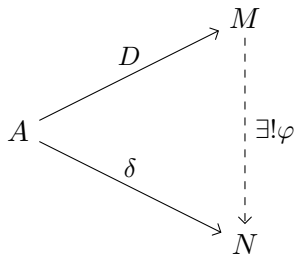
定义 2.6. ([14]) 对于交换三元组 $\mathcal{T} = (A, B, \varepsilon)$，记 $\Omega^1_{\mathcal{T}|_{\mathbb{K}}}$ 为由 $_{\mathbb{K}}$-线性符号 $d(\alpha \otimes a)$ 生成的左 $B \otimes A$-模，其中 $\alpha \in B$和 $a \in A$，其模结构由 $(\alpha \otimes a) \cdot d(\beta \otimes b) = a\varepsilon(\alpha)d(\beta \otimes b)$ 给出，并满足以下关系：

(i) $d(\lambda(\alpha \otimes a) + \mu(\beta \otimes b)) = \lambda d(\alpha \otimes a) + \mu d(\beta \otimes b)$，(ii) $d((\alpha \otimes a)(\beta \otimes b)) = a\varepsilon(\alpha)d(\beta \otimes b) + b\varepsilon(\beta)d(\alpha \otimes a)$，以及 (iii) $d(\alpha \otimes 1) + d(\alpha \otimes 1) = d(1 \otimes \varepsilon(\alpha))$，其中 a、$b \in A$、α、$\beta \in B$、λ 和 $\mu \in_{\mathbb{K}}$ 均任意。

本文的目标之一，是通过导子展示次级 K¨ahler 微分确实非平凡。

2.4. 泛导子。 最后，我们回顾一些与导子相关的事实，这些内容可见于 [16] 或 [19]等基础性著作。这些结果都是经典结论，通常被视为众所周知的事实。此外，第 4 节旨在为次级情形推导出类似的结果。

定义 2.7. 导子 $D : A \longrightarrow M$ 称为泛导子，如果对于任意其他导子 $\delta : A \longrightarrow N$，都存在唯一的 A-线性映射 $\varphi : M \longrightarrow N$，使得 $\delta = \varphi \circ D$。换句话说，下图交换：



命题 2.8. 对于交换的 A，映射 $d : A \longrightarrow \Omega^1_{A|_{\mathbb{K}}}$ 定义为

$$a \longmapsto d(a)$$

是泛导子。

命题 2.9. 对于交换的 A，我们有

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A|_{\mathbb{K}}}, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, M)$$

由 $f \longmapsto f \circ d$ 给出的是一个同构。

3. Secondary Derivations

在通常情形下，有 $HH^1(A) \cong \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, A^*)$ 的经典结果，其中 $HH^1(A)$ 表示 A 在维数 1 上的霍赫希尔德上同调，而 $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, A^*)$ 表示从 A 到 A^* 的所有 $_{\mathbb{K}}$-线性导子的集合。此外，还可以得出 $HC^1(A) \cong \mathrm{Der}^1(A, A^*)$，其中上标 1 表示我们在上述 $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, A^*)$ 集合中加入条件 $D(a \otimes b) = -D(b \otimes a)$ to$^{\mathbb{K}}$。

本节的主要目标是针对与上述情形相对应的次级情形，得到相关结果。

定义 3.1. 交换三元组 $\mathcal{T}=(A,B,\varepsilon)$ 的一个次级导子（取值于 M）是一个 $\mathbb{K}$-线性映射 $D\colon B\otimes A\longrightarrow M$，其具有 $(\alpha\otimes a)\cdot D(\beta\otimes b)=a\varepsilon(\alpha)D(\beta\otimes b)=D(\beta\otimes b)a\varepsilon(\alpha)=D(\beta\otimes b)\cdot(\alpha\otimes a)$ 的对称双模结构，并满足

(i) $D(\lambda(\alpha\otimes a)+\mu(\beta\otimes b))=\lambda D(\alpha\otimes a)+\mu D(\beta\otimes b)$，(ii) $D((\alpha\otimes a)(\beta\otimes b))=a\varepsilon(\alpha)D(\beta\otimes b)+D(\alpha\otimes a)b\varepsilon(\beta)$，以及 (iii) $D(\alpha\otimes 1)+D(\alpha\otimes 1)=D(1\otimes\varepsilon(\alpha))$

对于所有 a、$b\in A$、α、$\beta\in B$，以及 λ、$\mu\in\mathbb{K}$。所有此类次级导子组成的集合记为 $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{T},M)$。

注意到我们有 $(\alpha\otimes a)\ (\beta\otimes b)=\alpha\beta\otimes ab$，因此

$$D(\alpha\beta\otimes ab)=a\varepsilon(\alpha)D(\beta\otimes b)+D(\alpha\otimes a)b\varepsilon(\beta).$$

因此，立即可得

$$\begin{aligned}D(1\otimes ab)&=aD(1\otimes b)+D(1\otimes a)b,\\ D(\alpha\beta\otimes 1)&=\varepsilon(\alpha)D(\beta\otimes 1)+D(\alpha\otimes 1)\varepsilon(\beta),\text{and}\\ D(\alpha\otimes a)&=\varepsilon(\alpha)D(1\otimes a)+D(\alpha\otimes 1)a.\end{aligned}$$

人们可能会想知道次级导子是否具有李代数结构。这或许是未来工作中值得探索的方向。

注 3.2。容易看出 $D(1\otimes 1)=0$，因此 $D(\lambda\otimes\mu)=0$ 对于所有 λ，$\mu\in\mathbb{K}$。此外，我们注意到，定义 3.1 的前两个条件使得 D 成为交换代数 $B\otimes A$ 的一个具有对称双模结构的导子，而第三个条件则是附加条件。

注 3.3. 在将 $B=\mathbb{K}$ 进行上述识别后，注意到次级导子变为交换 $\mathbb{K}$-代数 A 到 A-对称双模 M 的通常的导子 $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A,M)$。特别地，可以看出，当 $B=\mathbb{K}$ 时，定义 3.1 中的最后一个条件变得平凡。

例 3.4. 对于由包含映射给出的 $A=M=\mathbb{K}[x]$，$B=\mathbb{K}[x^2]$ 和 $\iota\colon\mathbb{K}[x^2]\longrightarrow\mathbb{K}[x]$，我们断言，对于交换三元组 $\mathcal{T}=(\mathbb{K}[x],\mathbb{K}[x^2],\iota)$，其对应的次级导子集合 $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{T},\mathbb{K}[x])$ 非平凡。注意，当我们为 $\mathbb{K}$ 和 $\mathbb{K}$ 定义 $D(g\otimes 1)=g'/2\ D\ 1\otimes h\ =h'\qquad D\ g\otimes h\ =gh'+hg'/2\qquad g\in\ [x^2]\qquad h\in\ [x]$，( )，and ( ) 时，$D\in\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{T},\mathbb{K}[x])$。

在转而关注 $M=A^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A,\mathbb{K})$ 的情形之前，有几个简单的计算和一个观察结果会很有用。

例 3.5. 对于任意三元组 (A,B,ε)，容易看出

$$HH^0(A,B,\varepsilon)=HH^0(A)=(A^*)^A=\{f:A\longrightarrow\mathbb{K}\mid f(ab)=f(ba)\text{ for all }a,b\in A\}.$$

此外，根据定理 2.5，显然有 $HC^0(A,B,\varepsilon)\cong HH^0(A,B,\varepsilon)$。特别值得关注的是，当我们有一个交换三元组 (A,B,ε) 时，可得映射 $\partial^0\equiv 0$。这意味着 $\mathrm{Im}(\partial^0)$ 是平凡的。

定理 3.6。对于交换三元组 $\mathcal{T}=(A,B,\varepsilon)$，我们有

$$HH^1(A,B,\varepsilon)\cong\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{T},A^*).$$

证明。如例 3.5所述，由于 A 是交换的，我们得到 $\mathrm{Im}(\partial^0)$ 是平凡的，因此 $HH^1(A,B,\varepsilon) = \mathrm{Ker}(\partial^1)$。此外，$\mathrm{Ker}(\partial^1)$ 由所有从 $A^{\otimes 2}\otimes B$ 到 的 $\mathbb{K}$-线性映射组成，使得

$$f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} a\varepsilon(\alpha)b & \beta\gamma \\ 1 & c\end{pmatrix}\Big) - f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} a & \alpha\beta \\ 1 & b\varepsilon(\gamma)c\end{pmatrix}\Big) + f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} c\varepsilon(\beta)a & \alpha\gamma \\ 1 & b\end{pmatrix}\Big) = 0. \tag{3.1}$$

接下来，我们注意到，在识别 $M = A^*$ 下，$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{T}, A^*)$ 也由从 $A^{\otimes 2}\otimes B$ 到 的 $\mathbb{K}$-线性映射构成，但满足以下两个关系：

$$\begin{aligned} D\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} a & \alpha\beta \\ 1 & bc\end{pmatrix}\Big) &= D\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} ab\varepsilon(\alpha) & \beta \\ 1 & c\end{pmatrix}\Big) + D\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} ca\varepsilon(\beta) & \alpha \\ 1 & b\end{pmatrix}\Big) \text{ and} \\ D\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} a & \gamma \\ 1 & 1\end{pmatrix}\Big) + D\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} a & \gamma \\ 1 & 1\end{pmatrix}\Big) &= D\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & \varepsilon(\gamma)\end{pmatrix}\Big). \end{aligned} \tag{3.2}$$

要得到我们所需的同构，只需证明 (3.1) 蕴含 (3.2)，并证明其逆命题。

假设 (3.1) 成立，很容易看出如何满足 (3.2)：只需取 $\gamma = 1_B$ 即可得到第一个等式，而取 $b = c = 1_A$ 和 $\alpha = \beta = 1_B$ 则可得到第二个等式。

另一方面，假设 (3.2) 成立。注意，我们有

$$\begin{aligned} f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} a & \alpha\beta \\ 1 & bc\varepsilon(\gamma)\end{pmatrix}\Big) &= f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} a\varepsilon(\alpha\beta) & 1 \\ 1 & bc\varepsilon(\gamma)\end{pmatrix}\Big) + f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} abc\varepsilon(\gamma) & \alpha\beta \\ 1 & 1\end{pmatrix}\Big) \\ &= f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} a\varepsilon(\alpha\beta)bc & 1 \\ 1 & \varepsilon(\gamma)\end{pmatrix}\Big) + f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} a\varepsilon(\alpha\beta)b\varepsilon(\gamma) & 1 \\ 1 & c\end{pmatrix}\Big) \\ &\quad + f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} a\varepsilon(\alpha\beta)c\varepsilon(\gamma) & 1 \\ 1 & b\end{pmatrix}\Big) + f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} abc\varepsilon(\gamma)\varepsilon(\alpha) & \beta \\ 1 & 1\end{pmatrix}\Big) \\ &\quad + f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} abc\varepsilon(\gamma)\varepsilon(\beta) & \alpha \\ 1 & 1\end{pmatrix}\Big) \\ &= f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} a\varepsilon(\alpha\beta)bc & \gamma \\ 1 & 1\end{pmatrix}\Big) + f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} a\varepsilon(\alpha\beta)bc & \gamma \\ 1 & 1\end{pmatrix}\Big) \\ &\quad + f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} a\varepsilon(\alpha\beta)b\varepsilon(\gamma) & 1 \\ 1 & c\end{pmatrix}\Big) + f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} a\varepsilon(\alpha\beta)c\varepsilon(\gamma) & 1 \\ 1 & b\end{pmatrix}\Big) \\ &\quad + f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} abc\varepsilon(\gamma\alpha) & \beta \\ 1 & 1\end{pmatrix}\Big) + f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} abc\varepsilon(\gamma\beta) & \alpha \\ 1 & 1\end{pmatrix}\Big) \\ &= f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} ab\varepsilon(\alpha)c & \beta\gamma \\ 1 & 1\end{pmatrix}\Big) + f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} ab\varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta\gamma) & 1 \\ 1 & c\end{pmatrix}\Big) \\ &\quad + f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} ac\varepsilon(\beta)b & \alpha\gamma \\ 1 & 1\end{pmatrix}\Big) + f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} ac\varepsilon(\beta)\varepsilon(\alpha\gamma) & 1 \\ 1 & b\end{pmatrix}\Big) \\ &= f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} ab\varepsilon(\alpha) & \beta\gamma \\ 1 & c\end{pmatrix}\Big) + f\Big(\otimes_{\mathbb{K}}\begin{pmatrix} ca\varepsilon(\beta) & \alpha\gamma \\ 1 & b\end{pmatrix}\Big), \end{aligned}$$

这正是我们想要的。因此，同构得证。 □

推论 3.7。对于交换三元组 $\mathcal{T} = (A, B, \varepsilon)$，有

$$HC^1(A,B,\varepsilon) \cong \mathrm{Der}^1_{\mathbb{K}}(\mathcal{T}, A^*),$$

其中上标 1 表示我们添加了条件

$$D\Big(\otimes\begin{pmatrix}a & \alpha\\ 1 & b\end{pmatrix}\Big) = -D\Big(\otimes\begin{pmatrix}b & \alpha\\ 1 & a\end{pmatrix}\Big)$$

到 $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{T}, A^*)$.

证明。 首先我们注意到 $\mathcal{T} = (A, B, \varepsilon)$ 是一个交换三元组，因此当我们在低维情形下使用定理 3.6时，命题 2.5 将适用。具体而言，我们有

$$0 \longrightarrow HC^1(A, B, \varepsilon) \xrightarrow{I^*} \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{T}, A^*) \xrightarrow{B^*} \dots$$

因此，由正合性和第一同构定理可得

$$HC^1(A, B, \varepsilon) \cong \frac{HC^1(A, B, \varepsilon)}{\{0\}} = \frac{HC^1(A, B, \varepsilon)}{\mathrm{Ker}(I^*)} \cong \mathrm{Im}(I^*) \subseteq \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{T}, A^*).$$

因此，由于 I^* 由包含映射诱导，我们有 $\mathrm{Im}(I^*$包含第 2.2节中描述的循环映射，它们满足

$$D\Big(\otimes\begin{pmatrix}a & \alpha\\ 1 & b\end{pmatrix}\Big) = -D\Big(\otimes\begin{pmatrix}b & \alpha\\ 1 & a\end{pmatrix}\Big),$$

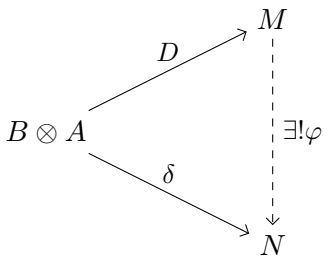
如所期望的。 □

注 3.8。 请注意，定理 3.6 和推论 3.7 在取 $B = \mathbb{K}$时，会归结为预期的经典结果，正如第 3 节开头所述。

4. The Universal Property

本节有两个目的：阐明次级导子的泛性质（在定义 3.1 中引入），并说明来自 ¨ 的次级 K [14] ähler 微分并非平凡（见定义 2.6）。特别是，本节的结果将与第 2.4 节回顾的内容相呼应。

定义 4.1. 次级导子 $D : B \otimes A \longrightarrow M$ 称为泛的，如果对于任意其他次级导子 $\delta : B \otimes A \longrightarrow N$，存在唯一的 A-线性映射$\varphi : M \longrightarrow N$ 使得 $\delta = \varphi \circ D$。换言之，以下图表交换：



命题 4.2. 对于交换三元组 $\mathcal{T} = (A, B, \varepsilon)$，我们有映射

$$d : B \otimes A \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{T}|_{\mathbb{K}}}$$

由 $\alpha \otimes a \longmapsto d(\alpha \otimes a)$ 给出的映射是泛宇宙次级导子。

证明。 为了验证该映射是次级导子，需要检查定义 3.1中的三个条件。不过，根据次级 K¨ähler 微分 $\Omega^1_{\mathcal{T}|_{\mathbb{K}}}$ 的定义（见定义 2.6），并且由于 A 是交换的，这些条件都显然成立。因此 $d\colon\ B\otimes A\longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{T}|_{\mathbb{K}}}$ 是一个次级导子。

该映射也是泛的，因为对于任意导子 $\delta\colon B\otimes A\longrightarrow N$，都存在唯一的映射$\varphi:\Omega^1_{\mathcal{T}|_{\mathbb{K}}}\longrightarrow N$，由 $d(\alpha\otimes a)\longmapsto\delta(\alpha\otimes a)$ 确定。由构造可立即得到 $\delta=\varphi\circ d$。□

命题 4.3. 对于交换三元组 $\mathcal{T}=(A,B,\varepsilon)$，我们有

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{\mathcal{T}|_{\mathbb{K}}},M)\longrightarrow \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{T},M)$$

由 $f\longmapsto f\circ d$ 给出的映射是一个同构。

证明。 我们首先注意到，其定义域由 A-线性态射构成，这将在下文中发挥作用。接下来我们证明 $f\circ d$ 是一个次级导子。根据定义 3.1，有三个条件需要验证；条件 (i) 显然成立，而对于 (ii)，我们有

$$\begin{aligned}(f\circ d)((\alpha\otimes a)(\beta\otimes b)) &= f(d((\alpha\otimes a)(\beta\otimes b)))\\ &= f(a\varepsilon(\alpha)d(\beta\otimes b)+b\varepsilon(\beta)d(\alpha\otimes a))\\ &= f(a\varepsilon(\alpha)d(\beta\otimes b))+f(b\varepsilon(\beta)d(\alpha\otimes a))\\ &= a\varepsilon(\alpha)f(d(\beta\otimes b))+b\varepsilon(\beta)f(d(\alpha\otimes a))\\ &= a\varepsilon(\alpha)(f\circ d)(\beta\otimes b)+b\varepsilon(\beta)(f\circ d)(\alpha\otimes a),\end{aligned}$$

而对于 (iii)，我们有

$$\begin{aligned}(f\circ d)(\alpha\otimes 1)+(f\circ d)(\alpha\otimes 1) &= f(d(\alpha\otimes 1))+f(d(\alpha\otimes 1))\\ &= f(d(\alpha\otimes 1)+d(\alpha\otimes 1))\\ &= f(d(1\otimes\varepsilon(\alpha)))\\ &= (f\circ d)(1\otimes\varepsilon(\alpha)).\end{aligned}$$

因此， $f\circ d$ 是一个次级导子。同构由 Ω 的泛性质得出$^1_{\mathcal{T}|_{\mathbb{K}}}$，这来自命题 4.2。 □

注 4.4。 取 $B=_{\mathbb{K}}$，注意到这些结果将化为通常情形，如第 2.4 节所述。

注 4.5。 由命题 4.3 以及例 3.4 （例如），我们得出次级 K¨ähler 微分 $\Omega^1_{\mathcal{T}|_{\mathbb{K}}}$ 并非平凡。

References

[1] Mamta Balodi、Abhishek Banerjee 和 Anita Naolekar。BV 算子与次级 Hochschild 复形。 *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*，358(11-12):1239–1258，2020年。[2] Samuel Carolus。 *Properties of higher order Hochschild cohomology*。OhioLINK 电子论文中心，俄亥俄州哥伦布，2019年。博士论文（Ph.D.）—鲍灵格林州立大学。[3] Samuel Carolus、Samuel A. Hokamp 和 JACOB LAUBACHER。由 Hochschild 上同调控制的变形理论。 *São Paulo J. Math. Sci.*，14(2):481–495，2020年。[4] Samuel Carolus 和 JACOB LAUBACHER。3-球面上的单纯形结构与广义高阶 Hochschild 同调。 *Categ. Gen. Algebr. Struct. Appl.*，15(1):93–143，2021年。[5] Samuel Carolus、JACOB LAUBACHER 和 Mihai D. Staic。适用于非交换情形的单纯形构造。 *Homology Homotopy Appl.*，23(1):49–60，2021年。

[6] Samuel Carolus 和 Mihai D. Staic。高阶 Hochschild 上同调上的 G-代数结构 $H^*_{S^2}(A,\ A)$。 *Algebra Colloq.*, 29(1):113–124，2022年。[7] Alain Connes。非交换微分几何。 *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*，(62):257–360，1985年。[8] Bruce R. Corrigan-Salter 和 Mihai D. Staic。高阶与次级霍赫希尔德上同调。

C. ，( ): –。[9]

R. Math. Acad. Sci. Paris 354 11 1049 1054, 2016

Apurba Das、Satyendra Kumar Mishra 和 Anita Naolekar。次级霍赫希尔德（上）同调上的非交换微分演算结构。 *Comm. Algebra*，50(6):2349–2365，2022年。[10] Murray Gerstenhaber。环与代数的变形。 *Ann. of Math. (2)*，79:59–103，1964年。[11] Gerhard Hochschild。关于结合代数的上同调群。 *Ann. of Math. (2)*，46 67，1945 58: –。[12] JACOB LAUBACHER。 *Secondary Hochschild and cyclic (co)homologies*。OhioLINK 电子论文中心，俄亥俄州哥伦布，2017年。博士论文（Ph.D.）—鲍灵格林州立大学。[13] JACOB LAUBACHER。次级 Hochschild 同调的性质。 *Algebra Colloq.*，25 242，2018 2 225( ): –。[14] JACOB LAUBACHER。次级 Hochschild 同调与微分。 *Mediterr. J. Math.*，20(1):52，2023年。[15] JACOB LAUBACHER、Mihai D. Staic 和 Alin Stancu。巴尔单纯模与次级循环（上）同调。 *J. Noncommut. Geom.*，12(3):865–887，2018年。[16] Jean-Louis Loday。

Cyclic homology 301 *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* ，[17] 卷。施普林格出版社，柏林，第二版， *Algebr. Represent. Theory*。[18] Mihai D. Staic。次级霍赫希尔德上同调。 *[Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 1998

motopy Appl. 17 1 129 146, 2015 *Homology Ho-* ，19(1):47–56，

2016年。[19] Mihai D. Staic 和 Alin Stancu。次级霍赫希尔德上同调上的运算。

An introduction to homological algebra 38 *Cambridge Studies in Advanced* ，( ): –。

Mathematics 1994

Charles A. Weibel。，卷。剑桥大学出版社，剑桥，。

Department of Mathematics, St. Norbert College, De Pere, WI 54115
Email address: kylie.bennett@snc.edu

Department of Mathematics, St. Norbert College, De Pere, WI 54115*Email address*: elizabeth.heil@snc.edu

Department of Mathematics, St. Norbert College, De Pere, WI 54115
Email address: jacob.laubacher@snc.edu