arXiv:2302.11625v1 [math.QA] 22 Feb 2023

量子舒伯特胞腔的自同构

GARRETT JOHNSON 和 HAYK MELIKYAN

Abstract. 研究了 De Concini、Kac、Procesi [7]和 Lusztig [26] 的量子舒伯特胞腔代数 $\mathcal{U}_q^{\pm}[w]$及其在若干关键不变子代数上的限制。我们建立了一些一般性的刚性结果，并将其用于彻底确定若干情形下的自同构群。

我们主要关注以下情形：底层李代数 $\mathfrak{g}$ 是有限维单李代数，秩为 $r > 1$，且 w 是魏尔群中的一个抛物元，例如 $w = w_o^J w_o$，其中 J 是单根的某个非空子集。这里， $\mathcal{U}_q^{\pm}[w]$ 是 $\mathfrak{g}$的抛物子代数的幂零根的包络代数的一种变形。在此背景下，我们猜想，除两个特定的低秩情形外， $\mathcal{U}_q^{\pm}[w]$的自同构群是一个秩为 r 的代数环面与保持 J不变的 Dynkin 图对称群的半直积。这一猜想是 Launois-Lenagan [23] 猜想和 Andruskiewitsch-Dumas[2] 猜想的推广形式；这两个猜想分别涉及量子矩阵代数和代数 $\mathcal{U}_q^+$（$\mathfrak{g}$）的自同构群。我们彻底确定了若干情形下的自同构群，包括 $\mathfrak{g}$ 为F_4 型或 G_2型的所有情形，以及量子舒伯特胞腔代数为量子对称矩阵代数的情形。

1. Introduction and summary of the results

量子舒伯特胞腔代数 $\mathcal{U}_q^{\pm}[w]$ 由 De Concini、Kac、Procesi [7] 和 Lusztig [26]引入。它们是 Drinfeld-Jimbo量子化包络代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$的一族子代数，由魏尔群的元素 w 进行索引，并已出现在多个领域中，包括《环论》 [28, 32], 、晶体基理论 [22, 27], 和簇代数 [11, 13]。当魏尔群元素 w 是一个抛物元时，会出现若干重要情形；设 $w_o^J w_o$对应于单根的某个非空子集 J。在此情况下，相应的代数 $\mathcal{U}_q^{\pm}[w]$ 可视为 $\mathfrak{g}$的一个抛物子代数的幂零根 $\mathfrak{n}_J$ 的包络代数的变形。在这种设置下，我们将量子舒伯特胞腔代数记为$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$，并简称其为量子化幂零根基。

在全文中，所有代数的底层基域均记作 $\mathbb{K}$。我们不需要假设 $\mathbb{K}$ 是代数闭的，也不需要假设其具有特征零。李代数 $\mathfrak{g}$ 在定义 $\mathbb{K}$-代数 $\mathcal{U}_q^{\pm}[w]$、 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 和 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 中所起的作用，可以视为纯粹的符号性作用。我们将非单位元的乘法群记作 $\mathbb{K}^\times$。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类：17B37；次分类：16T20、16W20。
Key words and phrases. 量子舒伯特胞腔代数、自同构、量子代数、幂零根基。作者的研究获得了美国国家科学基金会 DMS-1900823 号拨款的资助。

我们将转而研究这些代数的自同构。我们假设变形参数 $q \in \mathbb{K}^\times$ 不是单位根。基本上，量子代数的结构取决于 q 是否为单位根，因而存在一种二分性。当 q 是单位根时，这些代数更接近模李代数的变形（即正特征域上的李代数）。这些代数具有较大的中心，因此更接近交换代数。实际上，这使得我们对自同构的控制减弱了。在这种情况下，人们发展出了各种类型的非交换判别式 [4, 5, 6] ，将其作为研究自同构的工具（例如参见 [9, 10]）。

在若干情形下，量子化幂零根基的自同构群（当 q 不是单位根时）已经得到研究。例如，当底层李代数为 $\mathfrak{sl}(n)$，且 J 是单元素集（例如 $J = \{\alpha_k\}$）时，量子化幂零根基$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$同构于量子 $k \times (n-k)$矩阵代数。Launois 和 Lenagan 在 [23] 中证明，只要 $k \neq n-k$，且当 $(n,k) \notin \{(4,1),(4,3)\}$时，自同构群为 $(\mathbb{K}^\times)^{n-1}$；他们利用了高度一素理想的某些性质。当 $k = n-k$时，这些技巧并不适用，但他们猜想在这一剩余情形下，自同构群为 $(\mathbb{K}^\times)^{n-1} \rtimes \mathbb{Z}_2$。Alev 和 Chamarie 的工作 [1]早已证明，他们的猜想在 2×2 情形下成立。Launois 和 Lenagan 后来在 [24]中证明了他们的猜想在 3×3 情形下成立。最后，Yakimov 在[35]中证明了 Launois-Lenagan 猜想在其余情形下也成立。

当 $k = 1$ 或$n - k = 1$时，会出现一个关于自同构的有趣现象。在这种情况下，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 同构于 $(n-1)$ 维量子仿射空间 $\mathcal{A}_q\left(\mathbb{K}^{n-1}\right)$。作为一个代数，$\mathcal{A}_q\left(\mathbb{K}^{n-1}\right)$ 由元素x_1、……、x_{n-1}生成，并且当 $i < j$ 时满足定义关系 $x_i x_j = q x_j x_i$。在 [1],，Alev 和 Chamarie 研究了几类非交换代数的自同构，包括多参数和单参数量子仿射空间。他们的工作早于 Launois-Lenagan 猜想。有趣的是，当 $n \neq 4$ 时，$\mathcal{A}_q\left(\mathbb{K}^{n-1}\right)$的自同构会将每个生成元 x_i 映射为其自身的一个标量倍。Alev 和 Chamarie 在 [1, 定理 1.4.6] 中证明，每个 $\mathcal{A}_q\left(\mathbb{K}^3\right)$ 的自同构 ϕ 都具有如下形式

$$\phi(x_1) = a_1 x_1, \qquad \phi(x_2) = a_2 x_2 + b x_1 x_3, \qquad \phi(x_3) = a_3 x_3,$$

其中 a_1、a_2、$a_3 \in \mathbb{K}^\times$ 和 $b \in \mathbb{K}$。因此，$\mathcal{A}_q(\mathbb{K}^3)$ 的自同构群同构于半直积 $(\mathbb{K}^\times)^3 \rtimes \mathbb{K}$。另一方面，如果 $n \neq 4$，他们证明了 $\mathcal{A}_q(\mathbb{K}^{n-1})$ 的自同构群同构于 $(\mathbb{K}^\times)^{n-1}$。这里，每个自同构都会将 x_i 映射为其自身的一个非零倍数。

当 J 取为全部单根时，量子化幂零根基的自同构群在所有情形下也已得到确定。特别地，我们现在假设 $\mathfrak{g}$ 是一个任意选取的有限维复单李代数，其秩$(\mathfrak{g}) = r > 1$，并且 J 是全部单根。此时，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 是 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 的整个正部分。切瓦莱生成元 E_1、…、E_r 作为代数生成 $\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})$，并满足 q-Serre 关系。由此不难看出，对于每个 r-元组 $(a_1、\ldots、a_r) \in (\mathbb{K}^\times)^r$，都存在一个代数自同构 ϕ，使得 $\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})$ 满足 $\phi(E_i) = a_i E_i (i = 1、\ldots、r)$。此外，对于底层 Dynkin 图的每个对称性$\psi$，$\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})$ 都有一个代数自同构，其定义规则为 $E_i \mapsto E_{\psi(i)}$。Andruskiewitsch和 Dumas [2] 猜想，$\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})$ 的自同构群仅由这几类自同构生成。

也就是说，他们猜想

$$\mathrm{Aut}\left(\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})\right) \cong \left(\mathbb{K}^\times\right)^{\mathrm{rank}(\mathfrak{g})} \rtimes \text{Dynkin-Aut}\left(\mathfrak{g}\right),$$

其中，Dynkin-Aut(g) 是 $\mathfrak{g}$ 的 Dynkin 图的自同构群。Yakimov 在 [34] 中利用涉及量子环面的刚性结果证明了这一猜想。

在描述自同构群 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$（对于任意选取的 $\mathfrak{g}$ 和 J）时，我们需要引入固定 J 的 Dynkin 图对称性的子群，

$$\text{Dynkin-Aut}_J(\mathfrak{g}) := \{\psi \in \text{Dynkin-Aut}(\mathfrak{g}) \mid \psi(J) = J\}.$$

我们对量子化幂零根基的自同构群提出如下猜想。

猜想 1.1. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个秩为 $\mathfrak{g} > 1$ 的有限维复单李代数。假设 J 是单根的非空子集，并令 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 为相应的量子化幂零根基。那么

$$\mathrm{Aut}\left(\mathcal{U}_q\left(\mathfrak{n}_J\right)\right) \cong \left(\mathbb{K}^\times\right)^{\mathrm{rank}(\mathfrak{g})} \rtimes \text{Dynkin-Aut}_J(\mathfrak{g}).$$

若 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J) \ncong \mathcal{A}_q\,\mathbb{K}^3$，则成立。

我们注意到，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 与 $\mathcal{A}_q(\mathbb{K}^3)$ 仅在以下两种情形下同构：(1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4)$ 和 $J = \{\alpha_1\}$；或 (2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4)$ 和 $J = \{\alpha_3\}$。

上述猜想 1.1 已在若干情形下得到解决。如上所述，Launois-Lenagan 猜想的证明涵盖了 $\mathfrak{g}$ 属于类型 A_n 且 J 为单元素集的情形，而 Andruskiewitsch-Dumas 猜想处理的是 $\mathfrak{g}$ 任意且 J 为单根全集的情形。我们在其他一些情形下证明了猜想 1.1，包括底层李代数 $\mathfrak{g}$ 属于类型 F_4 或 G_2 的情形。

定理 1.2. 若 $\mathfrak{g}$ 是类型 F_4 的李代数，且 J 是 $\mathfrak{g}$ 的非空单根子集，则 $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)) \cong (\mathbb{K}^\times)^4$。

定理 1.3. 若 $\mathfrak{g}$ 是类型为 G_2 的李代数，且 J 是 $\mathfrak{g}$的单根的非空子集，则 $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)) \cong (\mathbb{K}^\times)^2$。

我们还建立了一些关于量子舒伯特胞腔代数自同构的一般定理（定理 4.1、4.2、4.3、4.4、4.5），这些定理可用于帮助确定其他若干量子化幂零根基的自同构群。更一般地，量子舒伯特胞腔代数属于一类更广泛的代数，称为 Cauchon-Goodearl-Letzter（CGL）扩张，这一概念源于 [3, 12]的研究。 [14] 中发展了一些研究 CGL 扩张自同构的一般方法。这些方法利用了 CGL 扩张 R某些关键子代数的性质，即正规子代数 $\mathcal{N}(R)$（由正规元生成的子代数）以及核 $\mathcal{C}(R)$。基本上，核 $\mathcal{C}(R)$越大，对自同构 [15, （定理 4.2]）的控制就越强。当核与整个代数重合时，对自同构的控制最强。大多数量子化幂零根基似乎都具有这一性质。

文献中还出现了其他一些量子化幂零根基的实例，尤其是在幂零根基 $\mathfrak{n}_J$ 是阿贝尔的情况下。例如，当底层李代数 $\mathfrak{g}$ 的类型为 C_n 和 $J = \{\alpha_n\}$时，相应的量子化幂零根基$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$是量子 $n \times n$ 对称矩阵 [21, 30]的代数。当 $\mathfrak{g}$ 是

类型为 D_n 和 $J = \{\alpha_{n-1}\}$ 或 $J = \{\alpha_n\}$的李代数时， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$是量子反对称矩阵 [31] 的代数。若 $\mathfrak{g}$ 的类型为 B_n 和 $J = \{\alpha_1\}$，则 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$是奇维量子欧几里得空间。该空间由 Faddeev、Reshetikhin 和 Takhtadzhyan 引入 [8, 定义 12]。该代数的简化关系见 [29, 第 2.1–2.2] 节。若 $\mathfrak{g}$ 的类型为 D_n 和 $J = \{\alpha_1\}$，则 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$是偶维量子欧几里得空间 [8, 29]。偶维和奇维量子欧几里得空间的自同构群已知均满足猜想 1.1 [14, 例 4。 10]。我们证明，当 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 是量子对称矩阵的代数时，猜想 1.1 成立。

定理 1.4. 若 $\mathfrak{g}$ 是类型为 C_n 、具有 $n > 1$ 和 $J = \{\alpha_n\}$ 的李代数（即 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 是由 $n \times n$ 量子对称矩阵构成的代数），则 $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)) \cong (\mathbb{K}^\times)^n$。

当 $\mathfrak{n}_J$ 非阿贝尔时，其他一些量子化幂零根基 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的例子也已得到研究。例如，文献 [20], 研究了 $\mathfrak{g}$ 为类型 A_n 且 J 为任意单根集时的量子化幂零根基，并证明 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 同构于一个余不变量代数。由此， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 可视为 $SL(n+1)$ 中某个抛物子群的幺幂子群坐标环的一种变形。

每个代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 都可以赋予一种 $\mathbb{N}$ 分次，使得相对于此分次， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 是连通且局部有限的。我们运用定理 4.1、4.2、4.3、4.4、4.5 中的结果说明，在 $\mathfrak{g}$ 和 J 的某些情况下，每个保持 $\mathbb{N}$ 分次的 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 自同构都会在次数为一的分次分量上对角作用（见命题 4.7）。

我们选择命题 4.7 中列出的第一种情形，即 $\mathfrak{g}$ 属于 B_6和 $J = \{\alpha_2, \alpha_5\}$型，并完整确定相应量子化幂零根基的自同构群。我们运用 [15, 定理 4.2] 关于 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的核的结果，证明每个自同构都保持 $\mathbb{N}$- 分次。命题 4.7 中列出的其他情形也可以采用相同的步骤。

定理 1.5. 若 $\mathfrak{g}$ 是 B_6 和 $J = \{\alpha_2, \alpha_5\}$型的李代数，则 $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)) \cong (\mathbb{K}^\times)^6$。

理想情况下，我们希望最终发展出一套足以完整确定所有情形下 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 自同构群的理论。更一般的目标是发展一套理论，以描述量子舒伯特胞腔代数 $\mathcal{U}_q^{\pm}[w]$ 的自同构群。有趣的是，Ceken、Palmieri、Wang 和 Zhang [4]描述了一族代数，其中每个代数的自同构群都同构于代数环面与有限群的半直积。尽管量子舒伯特胞腔不属于这族代数，但在许多情况下，它们的自同构群似乎具有这种形式。在一项相关研究中，可以尝试找出关于 w 的充要条件，使得 $\mathrm{Aut}\left(\mathcal{U}_q^{\pm}[w]\right)$ 同构于 $(\mathbb{K}^\times)^n \rtimes G$，其中 $n \in \mathbb{N}$ 为某个自然数， G 为有限群。

2. The algebra $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$

设 $\mathfrak{g}$ 是秩为 r 的有限维复单李代数。定义指标集 $\mathbf{I} := \{1, 2, \ldots r\}$，并设 $\Pi = \{\alpha_i\}_{i \in \mathbf{I}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 关于固定 Cartan 子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 的一组单根，其标记与 [17, 第 12.1] 节中的单根标记一致。

$\mathfrak{g}$ 的根系记为 Δ，正根集和负根集分别记为 Δ_+ 和 Δ_-。相应的 $\mathfrak{g}$ 三角分解记为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+,$$

其中

$$\mathfrak{n}^\pm := \bigoplus_{\alpha\in\Delta_\pm} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ for all } h \in \mathfrak{h}\}.$$

按照惯例，令 $Q = \oplus_{i\in\mathbf{I}}\mathbb{Z}\alpha_i$ 为 $\mathfrak{g}$ 的根格，并令 $\langle\ 、\ \rangle\colon Q \times Q \to \mathbb{Z}$ 为对称非退化的 ad-不变 $\mathbb{Z}$-双线性形式，其归一化方式为：对于短根 α，有 $\langle\alpha、\ \alpha\rangle = 2$。定义

$$c_{ij} := \frac{2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle}, \quad (i, j \in \mathbf{I}),$$

并令 $(c_{ij})_{i,\ j\in\mathbf{I}}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的相应 Cartan 矩阵。我们将 $\mathfrak{g}$ 的魏尔群 W 中的简单反射记为

$$s_i, \quad (i \in \mathbf{I}).$$

$\mathfrak{g}$ 的辫群 $\mathcal{B}_\mathfrak{g}$ 的相应生成元记为

$$T_i, \quad (i \in \mathbf{I}).$$

令 $q \in \mathbb{K}$ 非零且不是单位根，并令 $q_i = q^{\langle\alpha_i,\ \alpha_i\rangle/2}$，其中 $i \in \mathrm{I}$。按照惯例，定义

$$\widehat{q} := q - q^{-1}.$$

对于自然数 $n \in \mathbb{N}$，定义

$$[n]_{q_i} := \frac{q_i^n - q_i^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}, \qquad [n]_{q_i}! := [n]_{q_i}[n-1]_{q_i}\cdots[1]_{q_i}.$$

量子化泛包络代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 是一个结合 $\mathbb{K}$-代数，其标准切瓦莱生成元为

$$K_\mu, E_i, F_i, \quad (\mu \in Q, i \in \mathbf{I}).$$

代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 上存在标准的 Q-分次，

$$\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\lambda\in Q} \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})_\lambda, \quad \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})_\mu := \left\{u \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) : K_\lambda u = q^{\langle\lambda,\mu\rangle} u K_\lambda \text{ for all } \lambda \in Q\right\}.$$

关于此分次，Chevalley 生成元是齐次元素。特别地，

$$E_i \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})_{\alpha_i}, \quad F_i \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})_{-\alpha_i}, \quad K_\mu \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})_0, \qquad (i \in \mathbf{I}, \mu \in Q).$$

我们将陈述 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 的定义关系，但首先介绍缩写会很方便

$$[x, y] := xy - q^{\langle\mu,\eta\rangle} yx, \qquad x \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})_\mu, \quad y \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})_\eta, \tag{2.1}$$

对于 q-对易子。我们将在全文中采用这一记号。接下来，对于每个齐次元素 $x \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})_\mu$，我们根据以下条件定义线性算子 $\mathrm{ad}_q\, x\colon \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$：

$$(\mathrm{ad}_q\, x)\,(y) = [x, y],$$

对于每个齐次元素 $y \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$。由此， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 的定义关系为

$$\begin{aligned} &K_0 = 1, \qquad K_\mu K_\lambda = K_{\lambda+\mu}, \\ &K_\mu E_i = q^{\langle \mu, \alpha_i \rangle} E_i K_\mu, \qquad K_\mu F_i = q^{-\langle \mu, \alpha_i \rangle} F_i K_\mu, \\ &E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_{\alpha_i} - K_{-\alpha_i}}{q_i - q_i^{-1}} \end{aligned}$$

以及 q-Serre 关系

$$\begin{aligned} &(\mathrm{ad}_q\, E_i)^{1-c_{ij}}(E_j) = 0, \qquad (\text{for all } i \neq j), \\ &(\mathrm{ad}_q\, F_i)^{1-c_{ij}}(F_j) = 0, \qquad (\text{for all } i \neq j). \end{aligned}$$

代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$具有三角分解,

$$\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \cong \mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^+),$$

其中， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$、 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{h})$ 和 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^+)$ 分别是由F、 K和 E生成的 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$的子代数。

2.1. $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$上的 $\mathbb{Z}$-分次。 $\mathfrak{g}$ 的基本余权记作$\varpi_i^\vee (i \in \mathrm{I})$。它们由条件 $\langle \varpi_i^\vee$、 $\alpha_j \rangle = \delta_{ij}$（对所有 i， $j \in \mathrm{I}$）确定。我们将 $\mathfrak{g}$的余权格记为 $P^\vee = \oplus_{i \in \mathbf{I}} \mathbb{Z} \varpi_i^\vee$。对于每个整余权$\lambda \in P^\vee$（即对每个 $i \in \mathrm{I}$， $\langle \lambda$、 $\alpha_i \rangle \in \mathbb{Z}$），都有一个相应的 $\mathbb{Z}$-分次作用于 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$，其定义是将次数 $\langle \lambda$、 $\mu \rangle$ 赋给每个次数为 μ的 Q-齐次元素。为区分 Q-分次和 $\mathbb{Z}$-分次，我们将写作

$$\deg_Q(u) = \mu, \quad \deg_{\mathbb{Z}}(u) = n,$$

分别表示 $u \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 是一个次数为 $\mu \in Q$ 的 Q-齐次元素，以及一个次数为 n 的 $\mathbb{Z}$-齐次元素。严格来说，$\deg_{\mathbb{Z}}$ 取决于余权 λ。不过，只要上下文中余权 λ 的选择明确，我们就采用记号 $\deg_{\mathbb{Z}}$ ，而不使用 $\deg_\lambda$ 。

2.2. $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 的 Lusztig 对称。在 [26, 第 37.1 节中，Lusztig 通过 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 上的代数自同构定义了辫群 $\mathcal{B}_\mathfrak{g}$ 的作用。事实上，Lusztig 定义了对称 $T'_{i,\,1}$、 $T'_{i,\,-1}$、 $T''_{i,\,1}$ 和 $T''_{i,\,-1}$。根据 [26, 命题 37.1.2]，这些都是 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 的自同构；而根据 [26, 定理 39.4.3]，它们满足辫关系。为简便起见，我们采用缩写 $T_i := T''_{i,\,1}$。按照这一约定，Lusztig 对称由以下公式给出

$$\begin{aligned} &T_i(K_\mu) = K_{s_i(\mu)}, \\ &T_i(E_j) = \begin{cases} -F_i K_{\alpha_i}, & (i = j), \\ (\mathrm{ad}_q\, E_i)^{(-c_{ij})}(E_j), & (i \neq j), \end{cases} \\ &T_i(F_j) = \begin{cases} -K_{-\alpha_i} E_i, & (i = j), \\ (-q_i)^{-c_{ij}} (\mathrm{ad}_q\, F_i)^{(-c_{ij})}(F_j), & (i \neq j), \end{cases} \end{aligned}$$

其中， n 为非负整数,

$$(\mathrm{ad}_q\, E_i)^{(n)} := \frac{(\mathrm{ad}_q\, E_i)^n}{[n]_{q_i}!}, \qquad (\mathrm{ad}_q\, F_i)^{(n)} := \frac{(\mathrm{ad}_q\, F_i)^n}{[n]_{q_i}!}.$$

如果 $w \in W$具有一个约化表达式 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_N} \in W$，我们记作

$$T_w = T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_N}.$$

辫对称性的一个关键性质由以下命题给出（例如参见 [19, 命题8.20]）。

命题 2.1. 若 $w \in W$ 使得 $w(\alpha_i) = \alpha_j$, 则 $T_w(E_i) = E_j$。

3. The quantized nilradical $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$

对于每个非空的单根集合 J，令 $\mathfrak{p}_J$ 为从 $\mathfrak{g}$中删去 J中的根所得到的抛物子代数。$\mathfrak{p}_J$ 的 Levi 分解记作

$$\mathfrak{p}_J = \mathfrak{l}_J \ltimes \mathfrak{n}_J,$$

其中 $\mathfrak{l}_J$ 为 Levi 子代数, $\mathfrak{n}_J$ 为幂零根。

令 w_o 表示魏尔群的最长元，并令 $w_o^J \in W$ 为子群 $\langle s_i \mid i \notin J\rangle \subseteq W$中的最长元。定义

$$w_J := w_o^J w_o \in W.$$

对于一个约化表达式,

$$w_J = s_{i_1} \cdot s_{i_2} \cdots s_{i_N} \in W,$$

其中 N 是 w_J的长度，定义根

$$\beta_1 = \alpha_{i_1}, \beta_2 = s_{i_1}\alpha_{i_2}, ..., \beta_N = s_{i_1} \cdots s_{i_{N-1}}\alpha_{i_N},$$

以及根向量

$$X_{\beta_1} = E_{i_1}, X_{\beta_2} = T_{s_{i_1}} E_{i_2}, ..., X_{\beta_N} = T_{s_{i_1}} \cdots T_{s_{i_{N-1}}} E_{i_N}. \tag{3.1}$$

我们将根基根的集合记为

$$\Delta_w := \{\beta_1, \ldots, \beta_N\}.$$

这些根恰好是经 w_J^{-1} 作用后变为负根的正根。通过将上文（3.1）中的 E替换为 F, 可以类似地构造出一列负根。由根向量 $X_{\beta_1}, \ldots, X_{\beta_N}$生成的$\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$的子代数包含于正部分$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^+)$中（例如参见 [19, 命题 8.20]）。此子代数记为 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$,

$$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J) := \langle X_{\beta_1}, \ldots X_{\beta_N}\rangle \subseteq \mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^+),$$

我们称其为 $\mathfrak{p}_J$的量子化幂零根基，简称量子化幂零根基。由负根向量生成的 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$的子代数

$$X_{-\beta_1} = F_{i_1}, X_{-\beta_2} = T_{s_{i_1}} F_{i_2}, ..., X_{-\beta_N} = T_{s_{i_1}} \cdots T_{s_{i_{N-1}}} F_{i_N}.$$

与 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 同构。

量子化幂零根基属于一类更广泛的代数，称为量子舒伯特胞腔代数，它们由魏尔群中的元素 w 编号。更一般地，给定魏尔群元素 w 的一个约化表达式，相应的量子舒伯特胞腔代数 $\mathcal{U}_q^+[w]$ 可以用与 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 相同的方式构造，只需将上文中 w_J 的一个约化表达式替换为 w 的一个约化表达式。De Concini、Kac 和 Procesi [7, 命题 2.2] 证明了代数 $\mathcal{U}_q^+[w]$ 不依赖于 w 的约化表达式。此外，每个量子舒伯特胞腔 $\mathcal{U}_q^+[w]$ 都有一个 PBW基

$$X_{\beta_1}^{m_1} \cdots X_{\beta_N}^{m_N}, \quad m_1, ..., m_N \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

由标准单项式构成，并且它们可以表示为迭代 Ore 扩张，

$$\mathcal{U}_q^+[w] = \mathbb{K}[X_{\beta_1}][X_{\beta_2};\sigma_2,\delta_2]\cdots[X_{\beta_N};\sigma_N,\delta_N].$$

对于 $1 < i < j \leq N$，定义区间子代数

$$\mathbf{U}_{[i,j]} := \langle X_i, X_{i+1}, \ldots, X_j\rangle \subseteq \mathcal{U}_q^+[w] \tag{3.2}$$

为由 X_i、X_{i+1}、.....、X_j 生成的子代数。标准单项式

$$X_{\beta_i}^{m_i}\cdots X_{\beta_j}^{m_j}, \quad m_i,\ldots,m_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

构成 $\mathbf{U}_{[i,j]}$ 的一组基。Levendorskii-Soibelmann 整理规则 [25, Prop. 5.5.2] 告诉我们，对于所有 $1 \leq i < j \leq N$，

$$[X_{\beta_i}, X_{\beta_j}] \in \mathbf{U}_{[i+1,j-1]} \cap \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})_{\beta_i+\beta_j},$$

（回顾（2.1））。作为整理规则的推论，我们得到以下推论。

推论 3.1。如果 $1 \leq i < j \leq N$，并且不存在根在 $\{\beta_{i+1},\ldots,\beta_{j-1}\}$ 中的非负整数线性组合，使其和为 $\beta_i+\beta_j$，则 $[X_{\beta_i}, X_{\beta_j}] = 0$。

此外，每个量子舒伯特胞腔代数 $\mathcal{U}_q^+[w]$ 都具有量子簇代数结构（前提是变形参数 q 满足一些较弱的条件），[13] 并带有一组冻结变量

$$\{\Theta_1,\ldots,\Theta_r\}, \quad r = \#\{s_i \in W : s_i < w \text{ w.r.t. the Bruhat order}\}.$$

$\mathcal{U}_q^+[w]$ 的正规子代数（由正规元生成的子代数）由冻结变量生成 [15, 命题 2.7]。

4. Automorphisms of quantum Schubert cells

本节中，我们假设 R 是一个量子舒伯特胞腔代数，记作 $R = \mathcal{U}_q^+[w] \subseteq \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$。固定一个约化表达式

$$w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_N} \in W$$

并令

$$X_{\beta_1}, X_{\beta_2}, \ldots, X_{\beta_N} \in R$$

为相应的 Lusztig 根向量。回顾一下，R 可以写成迭代 Ore 扩张

$$R = \mathbb{K}[X_{\beta_1}][X_{\beta_2};\sigma_2,\delta_2]\cdots[X_{\beta_N};\sigma_N,\delta_N]. \tag{4.1}$$

注意，秩为 $r = \mathsf{rank}(\mathfrak{g})$ 的代数环面 $\mathcal{H} = (\mathbb{K}^\times)^r$ 通过代数自同构典范地作用于 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$。元素 $h = (h_1,\ldots,h_r) \in \mathcal{H}$ 的作用规则为

$$h.E_i = h_iE_i, \quad h.F_i = h_i^{-1}F_i, \quad h.K_\mu = K_\mu,$$

对所有 $1 \leq i \leq r$ 和 $\mu \in Q$均成立。该作用在 R下保持不变，并且每个 Lusztig 根向量 X_{β_i} 都是一个 $\mathcal{H}$-特征向量。事实上，每个 Q-齐次元素都是一个 $\mathcal{H}$-特征向量。此外，(4.1) 中的迭代 Ore 扩张表示是 R 的一个对称 Cauchon-Goodearl-Letzter（CGL）扩张表示（例如参见 [13, 定理 9.1.b]）。

4.1. 函数 η。将 [15], 应用于每个迭代 Ore 扩张表示R，如上面的 (4.1) 所示，我们定义 R的秩

$$\operatorname{rank}(R) = \#\{k \in \{1,\dots,N\} : \delta_k = 0\}.$$

令 S 为一个基数等于 rank(R) 的集合，并令 $\eta\colon \{1,\dots,N\} \to S$ 为一个函数，使得 $\eta(\{k \in \{1,\dots,N\}\colon \delta_k = 0\}) = S$。也就是说，我们为每个平凡导子 δ_k 在 S 中指定一个唯一元素。我们还要求，对于每个满足 $\delta_k \neq 0$ 的 $k \in \{1,\dots,N\}$，

$$\eta(k) = \eta\left(\max\{\ell \in \{1,\dots,k-1\} : \delta_k(X_{\beta_\ell}) \neq 0\}\right).$$

此类函数 η 的存在性已在 [15, 定理 4.3]，中得到证明，并且它在确定任意 CGL 扩张 R 的齐次素元时起着关键作用。当 $R = \mathcal{U}_q^+[w]$ 时， R 的秩与 w 的支撑的基数一致，

$$\operatorname{supp}(w) := \{i \in \mathbf{I} : s_i < w \text{ w.r.t. the Bruhat order}\}.$$

在此情形下，函数 $\eta\colon \{1,\dots,N\} \to$ supp(w) 可按以下规则定义

$$\eta(k) = i_k, \qquad (1 \le k \le N), \tag{4.2}$$

（例如参见 [13, 定理 9.5]）。

4.2. R 的核。仿照 [14, 第 4.1], 节，定义 $P_x(R)$为满足 X_{β_i}是素的那些 $i \in \{1,\dots,N\}$ 的集合。根据 [14, 命题 2.6],

$$P_x(R) = \left\{i \in \{1,\dots,N\} : \{i\} = \eta^{-1}(\eta(i))\right\}. \tag{4.3}$$

对于 $1 \le j < k \le N$，元素 $Q_{jk} := [X_{\beta_j}, X_{\beta_k}]$可以唯一地写成单项式 $X_{\beta_{j+1}}^{m_{j+1}} \cdots X_{\beta_{k-1}}^{m_{k-1}}$的线性组合。令 $F_x(R)$为满足任意 Q_{jk}中都不出现 X_{β_i} 的那些 $i \in P_x(R)$的集合。更准确地说， Q_{jk} 中没有任何带非零系数的单项式含有 X_{β_i} 的正幂。定义 $C_x(R) := \{1,\dots,N\} \setminus F_x(R)$。 R的核，记作 $\mathcal{C}(R)$，定义为由满足 $i \in C_x(R)$的 X_{β_i}生成的子代数，

$$\mathcal{C}(R) := \mathbb{K}\langle X_{\beta_i} : i \in C_x(R)\rangle.$$

4.3. 对角自同构与分次自同构。若代数自同构 $\phi\colon R \to R$ 将每个 Lusztig 根向量 X_{β_i} ($1 \le i \le N$) 映为自身的一个标量倍，则称其为对角自同构。这个概念取决于 w 的约化表达式。因此，每当我们提到此类自同构时，心中都固定了 w 的一个约化表达式。对角自同构构成 R 的自同构群 Aut(R) 的一个子群。我们将此子群记为 Diag-Aut(R)。因此，对于代数自同构 $\phi\colon R \to R$,

$$\phi \in \text{Diag-Aut}(R) \iff \phi(X_{\beta_i}) \in \mathbb{K}^\times X_{\beta_i}, \qquad (1 \le i \le N).$$

回顾第2.1节，每个余权 $\lambda \in P^\vee$ 都会在 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 上诱导一个 $\mathbb{Z}$-分次。由此，子代数 $R = \mathcal{U}_q^+[w] \subseteq \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 继承此分次，

$$R = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} R_d, \qquad R_d := \{u \in R \cap \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})_\mu : \langle \mu, \lambda\rangle = d\}.$$

我们始终假设 $\lambda \in P^\vee$ 的选取使得诱导的分次满足以下条件:

(1) $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$（也就是说， $R_d = 0$ 当且仅当 $d < 0$）,
(2) 对每个 $d \ge 0$， R_d 都是有限维的（即 R 是局部有限的）,

(3) $R_0 = \mathbb{K}$ （即 R 是连通的），以及
(4) R 作为代数由 R_1 生成。

这些条件仿照交换多项式环$\mathbb{K}[z_1, \ldots, z_N]$上的标准分次，其中每个变量 z_i的次数都设为 1。总可以选择 λ，使得上述前三个条件成立。例如，$\lambda = \sum_{i \in \mathbf{I}} \varpi_i^\vee$ 就是这样一种选择。不过，并非总能选取 λ 使全部四个条件都成立。举例来说，不难验证，当底层李代数的类型为G_2 且 $w = s_2 s_1 s_2$时，这样的 λ 并不存在。

代数自同构 $\phi : R \to R$ 若保持 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次，则称为分次代数自同构。也就是说，

$$\phi(R_d) = R_d$$

对所有 $d \geq 0$均成立。分次自同构的集合是 R的自同构群的一个子群。我们用 Gr-Aut(R) 表示分次自同构构成的子群。注意，我们有如下子群链：

$$\text{Diag-Aut}(R) \subseteq \text{Gr-Aut}(R) \subseteq \text{Aut}(R).$$

利用 (4.2) 和 (4.3)，可以很容易地根据约化表达式 $w = s_1 \cdots s_N$ 确定集合 P_x(R)。在许多情况下， P_x(R) 为空（且 $\mathcal{C}$(R) $= R$），在这种情况下，我们对 R 的自同构（例如见 [14]）掌握得最为充分。下面的定理给出了关于 R 的充分条件，以便得出 R 的每个自同构都是分次的。

定理 4.1. 设 $R = \mathcal{U}_q^+[w]$ 是一个量子舒伯特胞腔代数，其 Lusztig 根向量为 X_{β_1}, ..., X_{β_N}。设 $\mathcal{C}$(R) $= R$。还设 R 是连通分次、局部有限的，并由 R_1 生成。对于每个满足 $X_{\beta_i} \in R_1$ 的根基根 $\beta_i \in \Delta_w$，假设存在 $\beta_j \in \Delta_w$，使得对于某个标量 $\kappa \neq 1$， $X_{\beta_i} X_{\beta_j} = \kappa X_{\beta_j} X_{\beta_i}$ 成立。那么 R 的每个代数自同构都是分次自同构。换言之，

$$\text{Aut}(R) = \text{Gr-Aut}(R).$$

证明。 [14, 定理 4.2] 已证明，若 R 是一个连通分次代数形式的对称饱和 CGL 扩张，则将任意幺幂自同构限制在 $\mathcal{C}$(R) 上，所得映射为恒等式。由于 $\mathcal{C}$(R) $= R$, 因此 R的唯一幺幂自同构是恒等映射。根据 [14, 引理 4.7]，若对所有 $d \geq 0$均有 ϕ(R_d) $\subseteq \oplus_{j \geq d} R_j$，则每个自同构 ϕ 都是分次的。然而，这一条件已在 [23, 命题 4.2] 中得到证明。

□

4.4. 正规子代数 $\mathcal{N}$(R) 以及集合 $\mathsf{C}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{m}}$和 $\gamma_{\mathbf{d}}^{\mathbf{m}}$, ℓ。按照 [15],的定义，令 $\mathcal{N}$(R) 为 R 的正规子代数。它是由 R的正规元生成的子代数。根据 [15, 定理 4.3], $\mathcal{N}$(R) 由有限个Q-齐次素元生成

$$\{\Theta_i : i \in \text{supp}(w)\} \subseteq R.$$

这里我们指出，元素 $\Theta_i \in R$ 写作 $\Delta_{\varpi_i, w\varpi_i}$，见 [13, 第 9 节4]。我们有以下交换关系，

$$u\Theta_i = q^{-\langle (1+w)\varpi_i, \mu \rangle} \Theta_i u, \quad \deg_Q(u) = \mu, \quad i \in \text{supp}(w), \tag{4.4}$$

（例如参见 [33, 式 3.30]和 [13, 式 9.23]）。

对于 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、 $m \in \mathbb{Z}$ 和 $x \in R_1$，定义

$$\begin{aligned} C_d^m &:= \{x \in R_1 : xy = q^m yx \text{ for all } y \in \mathcal{N}(R)_d\}, \\ V_d^m(x) &:= \{y \in \mathcal{N}(R)_d : xy = q^m yx\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

对于 $d, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $m \in \mathbb{Z}$，定义集合

$$\gamma_{d,\ell}^m := \{x \in R_1 : \dim_{\mathbb{K}}(V_d^m(x)) = \ell\}. \tag{4.6}$$

下面的命题是一个显然的观察结果。

命题 4.2. 设 $\phi \in$ Gr-Aut(R)。令 C_d^m 和 $\gamma_{d,\ell}^m$ 如 (4.5) 和 (4.6) 中所定义。则每个 C_d^m 都是 ϕ-不变子空间，而每个 $\gamma_{d,\ell}^m$ 都是 ϕ-不变子集。

下面的定理给出了充分条件，用以确定 $\mathcal{N}(R)$ 的标准生成元 Θ_j 何时会在分次代数自同构 $\phi: R \to R$ 的作用下映为其自身的非零标量倍。

定理 4.3. 设 $\phi \in$ Gr-Aut(R)。对于每个 $i \in$ supp(w)，令 d_i 为 Θ_i 的次数。也就是说， $\Theta_i \in \mathcal{N}(R)_{d_i}$。如果对于某个 $j \in$ supp(w)，不存在由 $\{d_i$ 中的数构成的非负整数线性组合： $i \in$ supp(w) 和 $i \neq j\}$，使其和为 d_j，那么

$$\phi(\Theta_j) \in \mathbb{K}^\times \Theta_j.$$

证明。有序单项式 Θ_i's 构成正规子代数 $\mathcal{N}(R)$ [15, Theorem 4.6] 的一组基（在 $\mathbb{K}$ 上）。由于 $\{d_i : i \in$ supp(w) 中的数不存在非负整数线性组合能与 $i \neq j\}$ 相加得到 d_j，这意味着 $\mathcal{N}(R)_{d_j}$ 是由元素 Θ_j 张成的 $\mathbb{K}$ 上的一维向量空间。由于 $\mathcal{N}(R)$ 是 R 在 ϕ 作用下的不变子代数，因此我们有 $\phi(\mathcal{N}(R)_{d_j}) = \mathcal{N}(R)_{d_j}$。于是 $\phi(\Theta_j) \in \mathbb{K}^\times \Theta_j$。

□

以下定理给出了判定条件，用于确定 Lusztig 根向量 X_β 何时在分次代数自同构 ϕ 的作用下映为自身的非零标量倍： $R \to R$。

定理 4.4。设 $\phi \in$ Gr-Aut(R)，且对于某个 $i \in$ supp(w)，有 $\phi(\Theta_i) \in \mathbb{K}^\times \Theta_i$。此外，假设存在一个根基根 $\beta \in \Delta_w$，满足 $X_\beta \in R_1$，使得

$$\langle \beta - \beta', (1+w)\varpi_i \rangle \neq 0$$

对每个根基根 $\beta' \in \Delta_w \setminus \{\beta\}$ 且满足 $X_{\beta'} \in R_1$，则

$$\phi(X_\beta) \in \mathbb{K}^\times X_\beta.$$

证明. 设 $x_1, \ldots, x_n$ 是 R_1中的 Lusztig 根向量列表。不失一般性，假设 $x_1 = X_\beta$。存在整数 $d_1, \ldots, d_n$，可利用 (4.4) 显式计算，使得 $x_j \Theta_i = q^{d_j} \Theta_i x_j$。给定的假设意味着$d_1$ 不等于 $\{d_2, \ldots, d_n\}$中的任何数。

自同构 ϕ 将 x_1 映射为 x_1、...、 x_n的线性组合，记为 $\phi(x_1) = \sum c_j x_j$，($c_j \in \mathbb{K}$)。对关系 $x_1 \Theta_i = q^{d_1} \Theta_i x_1$ 应用 ϕ 可得 $\sum c_j x_j \Theta_i = \sum c_j q^{d_1} \Theta_i x_j = \sum c_j q^{d_j} \Theta_i x_j$。因此， $\sum c_j (q^{d_1} - q^{d_j}) \Theta_i x_j = 0$。元素$\Theta_i x_1$、...、$\Theta_i x_n$关于$Q$-分次是 Q-齐次的，且次数各不相同。因此，每个系数 $c_j(q^{d_1} - q^{d_j})$ 都等于零。由于 q 不是单位根， $c_2 = \cdots = c_n = 0$。

□

运用上述定理 4.4 的证明中所采用的相同技巧，我们可以得到一个更一般的结果。

定理 4.5。设 $\phi \in$分次自同构群(R)。定义集合

$$S(\phi, w) := \left\{ i \in \operatorname{supp}(w) \mid \phi(\Theta_i) \in \mathbb{K}^\times \Theta_i \right\}.$$

设 $\beta \in \Delta_w$ 是一个根基根，满足 $X_\beta \in R_1$，并且满足以下条件：对于每个满足 $X_{\beta'} \in R_1$ 的根基根 $\beta' \in \Delta_w \setminus \{\beta\}$，都存在 $i \in S(\phi, w)$，使得 $\langle \beta - \beta', (1 + w)\ \varpi_i \rangle \neq 0$，那么

$$\phi(X_\beta) \in \mathbb{K}^\times X_\beta.$$

利用上述定理，我们可以证明猜想 1.1 成立，例如，当底层李代数 $\mathfrak{g}$ 的类型为 G_2 时。

定理 4.6。若 $\mathfrak{g}$ 是类型为 G_2 的李代数，且 J 是 $\mathfrak{g}$的单根的非空子集，则 自同构群$(\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)) \cong (\mathbb{K}^\times)^2$。

证明。我们考虑 $\mathfrak{g}$的魏尔群最长元素的约化表达式 $w_o = s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2$。与此约化表达式相关联的相应根基根和根向量分别记为 $\beta_1, \ldots, \beta_6$ 和 $x_1, \ldots, x_6$。换言之，我们定义 $x_i := X_{\beta_i} (i = 1, \ldots, 6)$。$\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$的正部分$\mathcal{U}_q^+$由 $x_1, \ldots, x_6$生成。定义关系见 Hu 和 Wang 的工作 [16], , 其中他们用 Lyndon 词为根向量编索引。我们的记号与他们的记号之间的对应关系为 $x_1 \leftrightarrow E_1$, $[3]_q! x_2 \leftrightarrow E_{1112}$,$[2]_q x_3 \leftrightarrow E_{112}$, $[3]_q! x_4 \leftrightarrow E_{11212}$, $x_5 \leftrightarrow E_{12}$, $x_6 \leftrightarrow E_2$。根据 [16, 公式 2.2 - 2.7 和引理 3.1], , $\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})$中的定义关系为

$$\begin{aligned}
&x_1 x_2 = q^3 x_2 x_1, && x_2 x_6 = q^{-3} x_6 x_2 + \widehat{q} x_3 x_5 + \zeta x_4,\\
&x_1 x_3 = q x_3 x_1 + [3]_q x_2, && x_3 x_4 = q^3 x_4 x_3,\\
&x_1 x_4 = x_4 x_1 + q\widehat{q} x_3^2, && x_3 x_5 = q x_5 x_3 + [3]_q x_4,\\
&x_1 x_5 = q^{-1} x_5 x_1 + [2]_q x_3, && x_3 x_6 = x_6 x_3 + q\widehat{q} x_5^2,\\
&x_1 x_6 = q^{-3} x_6 x_1 + x_5, && x_4 x_5 = q^3 x_5 x_4,\\
&x_2 x_3 = q^3 x_3 x_2, && x_4 x_6 = q^3 x_6 x_4 + \eta x_5^3\\
&x_2 x_4 = q^3 x_4 x_2 + \eta x_3^3, && x_5 x_6 = q^3 x_6 x_5,\\
&x_2 x_5 = x_5 x_2 + q\widehat{q} x_3^2, &&
\end{aligned}$$

其中 $\zeta := q^{-3} - q^{-1} - q \in \mathbb{K}$ 和 $\eta = q^3 \frac{\widehat{q}^2}{[3]_q} \in \mathbb{K}$。

注意，当 J 是单元素集时，抛物元 $w_o^J w_o$ 有唯一的约化表达式，且它是最长元 w_o的约化表达式的一个子串。因此，每个量子化幂零根基 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$都同 $\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})$的某个区间子代数同构。特别地，当 $J = \{\alpha_1\}$时，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$同由 x_1、.....、x_5生成的子代数同构；而当 $J = \{\alpha_2\}$时，相应的量子化幂零根基同由 x_2、.....、x_6生成的子代数同构。为方便起见，我们将每个量子化幂零根基视为适当的区间子代数。

首先考虑 $J = \{\alpha_1\}$ 的情形。这里我们选取余权 $\lambda = \varpi_1 \in P^\vee$，以赋予 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 一个 $\mathbb{N}$-分次。关于此分次，一次生成元为 x_1 和 x_5。由定义关系可知，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 作为代数由其一次元素生成。利用 (4.3)，可得$\mathcal{C}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J))$ 由 x_1、x_3和 x_5生成。因此，$\mathcal{C}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)) = \mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$，且定理

4.1 可用于得出结论： $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的每个自同构都保持$\mathbb{N}$-分次。正规子代数的元素 Θ_1 和 Θ_2 的次数分别为 4 和 6。因此，由定理 4.3 可知，每个自同构都将 Θ_1 和 Θ_2 映为它们自身的非零倍数。最后，可以验证定理 4.5 可用于得出结论：每个自同构都将 x_1 和 x_5 映为它们自身的非零倍数。因此， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的每个自同构都是对角自同构。作为 CGL 扩张，代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的秩为 2。因此，由 [15,定理 5.3 和 5.5], 可得， $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)) \cong (\mathbb{K}^\times)^2$。

$J = \{\alpha_2\}$ 的情形处理方式类似，不过现在我们选择余权$\varpi_2 \in P^\vee$，为相应的量子化幂零根基赋予一个 $\mathbb{N}$分次。在这里，我们将 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$与 $\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})$中由 x_2、.....、x_6生成的子代数相对应。在此对应下， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$的一次根向量为 x_2、 x_3、 x_5和 x_6。同样地，我们看到， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$作为代数由其次数为 1 的元素生成，而核 $\mathcal{C}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J))$与 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$重合。定理 4.1 的所有假设均成立。因此，每个自同构都保持 $\mathbb{N}$分次。在此情形下，正规子代数的元素 Θ_1 和 Θ_2 的次数分别为 2 和 4。因此，根据定理 4.3, $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$的每个自同构都将 Θ_1 映为其自身的非零倍数。最后，通过应用定理 4.4, 我们可以得出结论：每个自同构都将每个一次根向量映为其自身的非零倍数。因此, 每个自同构都是对角自同构。最后， [15, 定理 5.3 和 5.5]表明， $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)) \cong (\mathbb{K}^\times)^2$。

$J = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ 的情形已在 [34]中确立。

□

定理 4.4 和 4.5 还可应用于其他若干情形，从而得出：量子化幂零根基的每个分次自同构都会将每个一次生成元映射为其自身的倍数。如果还能够证明某个特定的量子化幂零根基 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 满足定理 4.1 的全部假设，那么 Goodearl 和 Yakimov 在 [15, 定理 5.3 和 5.5] 中的结果便可用于得出 $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)) \cong (\mathbb{K}^\times)^{\mathrm{rank}(\mathfrak{g})}$。

命题 4.7. 如上，设 $\mathfrak{g}$ 为有限维复单李代数，且设 J 为单根的非空集合。选取余权 $\lambda := \sum_{j\in J} \varpi_j \in P^\vee$，从而赋予量子化幂零根基 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 一个 $\mathbb{N}$-分次。下面的列表穷尽列出了所有满足 $\mathrm{rank}(\mathfrak{g}) \le 9$ 的情形；在这些情形下，定理 4.4 和 4.5 可用于得出： $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的每个分次自同构都会将每个一次 Lusztig 根向量 X_β 映射为其自身的倍数。

(1) $\mathfrak{g}$ 的类型为 B_6，且 J 为 $\{\alpha_2, \alpha_5\}$ 或 $\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5\}$。(2) $\mathfrak{g}$ 的类型为 B_7 或 B_8，且 $J = \{\alpha_2, \alpha_6, \alpha_7\}$。(3) $\mathfrak{g}$ 的类型为 C_5，且 J 是 $\{\alpha_3, \alpha_5\}$、$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5\}$、 $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$、$\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5\}$之一。(4) $\mathfrak{g}$ 的类型为 C_6，且 J 为 $\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6\}$ 或 $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}$。(5) $\mathfrak{g}$ 的类型为 D_7，且 J 为 $\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6\}$ 或 $\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_7\}$。(6) $\mathfrak{g}$ 的类型为 D_8，且 J 为 $\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7\}$ 或 $\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$。(7) $\mathfrak{g}$ 的类型为 E_7，且 J 是 $\{\alpha_3, \alpha_5\}$、 $\{\alpha_4, \alpha_5\}$、 $\{\alpha_4, \alpha_7\}$、 $\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5\}$、$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_7\}$、 $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_6\}$、 $\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6\}$、 $\{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$、 $\{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_7\}$、$\{\alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}$、 $\{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$、 $\{\alpha_4, \alpha_6, \alpha_7\}$、 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6\}$、$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$、 $\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7\}$、 $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\}$、 $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7\}$、$\{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$、 $\{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7\}$之一。

(8) $\mathfrak{g}$ 的类型为 E_8，且 J 是 $\{\alpha_4,\alpha_6\}$、$\{\alpha_4,\alpha_7\}$、$\{\alpha_4,\alpha_8\}$、$\{\alpha_1,\alpha_4,\alpha_6\}$、$\{\alpha_1,\alpha_4,\alpha_7\}$、$\{\alpha_1,\alpha_4,\alpha_8\}$、$\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_7\}$、$\{\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6\}$、$\{\alpha_3,\alpha_4,\alpha_7\}$、$\{\alpha_3,\alpha_4,\alpha_8\}$、$\{\alpha_3,\alpha_5,\alpha_7\}$、$\{\alpha_4,\alpha_5,\alpha_7\}$、$\{\alpha_4,\alpha_6,\alpha_7\}$、$\{\alpha_4,\alpha_6,\alpha_8\}$、$\{\alpha_4,\alpha_7,\alpha_8\}$、$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_6\}$、$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_8\}$、$\{\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_7\}$、$\{\alpha_1,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_7\}$、$\{\alpha_1,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_8\}$、$\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5,\alpha_7\}$、$\{\alpha_2,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_8\}$、$\{\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_7\}$、$\{\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_7\}$、$\{\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_8\}$、$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_7\}$、$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_8\}$、$\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_8\}$之一。(9) $\mathfrak{g}$ 的类型为 F_4，且 J 是 $\{\alpha_3\}$、$\{\alpha_1,\alpha_3\}$、$\{\alpha_2,\alpha_3\}$、$\{\alpha_2,\alpha_4\}$之一。(10) $\mathfrak{g}$ 的类型为 G_2，且 $J=\{\alpha_1\}$ 或 $J=\{\alpha_2\}$

我们选择上述列出的第一种情形，即当 $\mathfrak{g}$ 属于类型 B_6 且 $J=\{\alpha_2,\alpha_5\}$ 时，并完全确定其自同构群。此时，尚需证明每个自同构都保持 $\mathbb{N}$-分次。

定理 4.8. 若 $\mathfrak{g}$ 属于类型 B_6 且 $J=\{\alpha_2,\alpha_5\}$，则 $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)) \cong (\mathbb{K}^\times)^6$。

证明。考虑约化表达式

$$(s_5s_6)(s_4s_5s_6)(s_3s_4s_5s_6)(s_2s_3s_4s_5s_6)(s_1s_2s_3s_4s_5s_6)(s_1s_2s_3s_4s_5)(s_3s_4)(s_2s_3)(s_1s_2)$$

对于抛物元 $w_o^J w_o$。这个魏尔群元素的长度为 31。由此，令 β_1、...、β_{31} 和 x_1、...、x_{31} 分别表示相应的根基根和根向量。我们将选取余权 $\varpi_2+\varpi_5$，为量子化幂零根基 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 配备 $\mathbb{N}$-分次。应用 (4.3)，可得核$\mathcal{C}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J))$ 与 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 重合。其次，对于每个根向量 $x_i (i=1,...,31)$，都存在另一个根向量 $x_j (j\neq i)$，使得对于某个标量 $\kappa\neq 1$，有 $x_ix_j=\kappa x_jx_i$。总可以直接令 $j=i+1$ 或 $j=i-1$。注意，在上面的约化字中，每个字母 s_k 总是与 s_{k-1} 或 s_{k+1} 相邻。若第 i 个字母是 s_k，而第 $(i+1)$ 个字母是 $s_{k\pm1}$，则 $x_ix_{i+1}=q^{\langle\alpha_k,\ s_k(\alpha_{k\pm1})\rangle}x_{i+1}x_i$。另一方面，若第 i 个字母是 s_k，而第 $(i-1)$ 个字母是 $s_{k\pm1}$，则$x_{i-1}x_i=q^{\langle\alpha_{k\pm1},\ s_{k\pm1}(\alpha_k)\rangle}x_ix_{i-1}$。无论哪种情况，定理 4.1 的相关假设均成立。

31 个 Lusztig 根向量中恰有 15 个的次数为 1。留给读者验证，其余每个根向量 x_i 都可以写成某个 j,k 的 q-交换子 $x_jx_k-q^{\langle\beta_j,\beta_k\rangle}x_kx_j$，至多相差一个标量倍。因此，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n})$ 由其次数为 1 的元素生成。于是，定理 4.1 的所有假设都成立。因此，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的每个自同构都保持$\mathbb{N}$分次。

正规元 $\Theta_1,\dots,\Theta_6$ 的次数依次为 4、8、10、12、14 和 7。因此，定理 4.3 告诉我们，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的每个自同构都会将 Θ_1、Θ_3 和 Θ_6 映射为它们自身的倍数。接下来，可以应用定理 4.5 得出结论：每个自同构都会将每个一次生成元 x_i 映射为其自身的倍数。因此，每个自同构都是对角自同构。最后，[15,定理 5.3 和 5.5] 推出 $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)) \cong (\mathbb{K}^\times)^6$。

□

5. The automorphism group of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ for $\mathfrak{g}=F_4$

现在考虑 $\mathfrak{g}$ 是 F_4 型李代数的情形。本节证明，对于 $\mathfrak{g}$ 的单根的任意非空子集 J，量子化幂零根基 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的自同构群同构于代数环面 $(\mathbb{K}^\times)^4$。

考虑 $\mathfrak{g}$ 的魏尔群中最长元 w_o 的以下约化表达式:

$$\mathbf{R}[w_o] = (1,2,1,3,2,3,1,2,4,3,2,1,3,2,3,4,3,2,3,1,2,3,4,3), \tag{5.1}$$

$$\mathbf{R}'[w_o] = (4,1,2,3,4,2,1,3,2,3,1,2,4,3,2,1,3,2,3,4,3,2,3,2). \tag{5.2}$$

我们考虑关于 w_o 的这两个特定约化表达式，主要是因为对于每个非空子集 $J \subseteq \Pi$，相应抛物元 w_J 的一个约化表达式，要么作为子串出现在 $\mathrm{R}[w_o]$ 中，要么作为子串出现在 $\mathrm{R}'[w_o]$ 中。因此，若将 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^+)$ 视为 $\mathbb{K}$ 上的迭代 Ore 扩张，则可知每个量子化幂零根基 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 都可以看作 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^+)$ 的一个区间子代数（定义见 (3.2)）。这有助于更高效地求出 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的显式表示。为使这一点更加明确，我们将与约化表达式 $\mathrm{R}[w_o]$ 和 $\mathrm{R}'[w_o]$ 相对应的 Lusztig 根向量分别记为

$$x_i := X_{\beta_i}, \quad y_i := X_{\beta'_i}, \quad (1 \le i \le \ell(w_o) = 24), \tag{5.3}$$

由于每个抛物元 w_J 都作为子串出现在 $\mathrm{R}[w_o]$ 或 $\mathrm{R}'[w_o]$ 中，因此每个量子化幂零根基 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 作为代数都同构于 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^+)$ 的一个子代数，该子代数由 x_i 或 y_i 的一个连续序列生成。当 $J = \{\alpha_2, \alpha_4\}$ 时，下面的例子说明了这一点。

例 5.1。设有 $J = \{\alpha_2, \alpha_4\}$。抛物元 $w_J \in W$ 具有一个约化表达式

$$w_J = s_2s_1s_3s_2s_3s_1s_2s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_3s_1s_2s_3s_4.$$

该表达式通过从 $\mathrm{R}[w_o]$ 中移除首尾字母得到。因此，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 同构于区间子代数 $\mathrm{U}_{[2,23]} \subseteq \mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^+)$,

$$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J) \cong \mathbb{K}\langle x_2, \ldots, x_{23}\rangle \subseteq \mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^+).$$

在此同构下，x_2、x_3、x_4、x_6、x_7、x_8、x_{22}、x_{23} 是次数为 1 的 Lusztig 根向量列表。

定理 5.2。若 $\mathfrak{g}$ 是 F_4 型李代数，且 J 是 $\mathfrak{g}$ 的单根的非空子集，则量子化幂零根基 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的每个自同构都是对角自同构。

证明。当 J 是单根的全集时，该情形已在 [34, 定理 5.1] 中处理。因此，我们设 J 是单根集合的非空真子集。在整个证明过程中，令 ϕ 为 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的任意代数自同构。代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 满足定理 4.1 的假设。因此，ϕ 是分次自同构。于是，集合 C_d^m 和 $\gamma_d^{m,\,\ell}$ 是 ϕ-不变的。

我们的目标是证明 ϕ 是一个对角自同构。引理 6.1 和 6.2 给出的交换关系表明，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 由一阶分量 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)_1$ 生成。因此，只需证明在映射 ϕ 作用下，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的每个一次生成元都映到其自身的一个标量倍。对于单根的每个子集 J，我们分别逐一处理。每种情形采用的策略相同。关键步骤之一是注意到，集合 C_d^m 和 $\gamma_d^{m,\,\ell}$（定义见 (4.5) 和 (4.6)）在 ϕ 作用下保持不变。在若干情形中，我们可以将 C_d^m 和 $\gamma_d^{m,\,\ell}$，或它们的交集，刻画为 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 中某个生成元的所有标量倍或所有非零标量倍所构成的集合。在这些情形下，我们可以立即得出结论：ϕ 将该生成元映到其自身的一个倍数。在其他情形中，我们可以证明 C_d^m（或其交集

C_d^m）是 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)_1$ 的向量子空间，且由 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的两个或三个生成元张成。在这些情形下，我们需要借助引理 6.1 和 6.2 的定义关系以及推论 3.1，才能得出结论：ϕ 确实将 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的每个一次生成元映到其自身。回顾一下，推论 3.1 为我们提供了充分条件，以判定某些 q-交换子（例如 $[x_i, x_j]$ 或 $[y_i, y_j]$）等于 0。在整个证明过程中，当我们声称某个 q-交换子等于 0 时，都默认应用了这一结果。

$J = \{\alpha_1\}$ 在这种情况下，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J) \cong \mathbf{U}'_{[2,16]}$。一次生成元为 y_2, y_3,y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_{10}, y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{15} 和 y_{16}。我们有$\mathbb{K}^\times y_2 = \gamma_6^6$,3,$\mathbb{K}^\times y_3 = \gamma_6^6$,2,$\mathbb{K}^\times y_4 = \gamma_{4,1}^4 \cap \gamma_4^2$, 1,$\mathbb{K}^\times y_5 = \gamma_{4,1}^2 \cap \gamma_4^0$,2,$\mathbb{K}^\times y_6 = \gamma_6^2$,3,$\mathbb{K}^\times y_7 = \gamma_{6,2}^2 \cap \gamma_{6\ 1}^{-2}$, ,$\mathbb{K}^\times y_8 = \gamma_{6,3}^0 \cap \gamma_6^2$,1, $\mathbb{K}^\times y_{10} = \gamma_{6,3}^0 \cap \gamma_{6\ 1}^{-2}$, , $\mathbb{K}^\times y_{11} = \gamma_6^{-2}{}_{,2} \cap \gamma_6^2$,1, $\mathbb{K}^\times y_{12} = \gamma_{6\ 3}^{-2}$, ,$\mathbb{K}^\times y_{13} = \gamma_4^{-2}{}_{,1} \cap \gamma_4^0$, 2, $\mathbb{K}^\times y_{14} = \gamma_4^{-2}{}_{,1} \cap \gamma_{4\ 1}^{-4}$, , $\mathbb{K}^\times y_{15} = \gamma_{6\ 2}^{-6}$, , $\mathbb{K}^\times y_{16} = \gamma_{6\ 3}^{-6}$, 。因此，$\phi$ 是一个对角自同构。

$J = \{\alpha_2\}$ 在这种情况下，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J) \cong \mathbf{U}^{[2,21]}$。一次生成元为 x_2、x_3、x_4、x_6、x_7、x_8、x_{13}、x_{15}、x_{17}、x_{19}、x_{20}和 x_{21}。我们有 $\mathbb{K}x_2 = C_4^2 \cap C_6^2$、$\mathbb{K}x_3 = C_4^2 \cap C_6^{-2}$、$\mathbb{K}x_4 = C_4^1 \cap C_6^2$、$\mathbb{K}x_6 = C_4^1 \cap C_6^{-2}$、$\mathbb{K}x_{17} = C_4^{-1} \cap C_6^2$、$\mathbb{K}x_{19} = C_4^{-1} \cap C_6^{-2}$、$\mathbb{K}x_{20} = C_4^{-2} \cap C_6^2$、$\mathbb{K}x_{21} = C_4^{-2} \cap C_6^{-2}$、$\mathbb{K}x_7 \oplus \mathbb{K}x_{13} = C_4^0 \cap C_6^2$和 $\mathbb{K}x_8 \oplus \mathbb{K}x_{15} = C_4^0 \cap C_6^{-2}$。

因此，$\phi(x_7) = ax_7 + bx_{13}$ 对于某些 $a, b \in \mathbb{K}$。通过将 ϕ 应用于关系$[x_7, x_{17}] = 0$ 并利用 $[x_{13}, x_{17}] = 0$，我们得出 $b = 0$。因此，$\phi(x_7) \in \mathbb{K}x_7$。类似地，将 ϕ 应用于关系 $[x_{13}, x_{17}] = 0$ 后，我们得出 $\phi(x_{13}) \in \mathbb{K}x_{13}$。同理，通过将 ϕ 应用于关系 $[x_8, x_{19}] = 0$ 和 $[x_{15}, x_{19}] = 0$，可得 $\phi(x_8) \in \mathbb{K}x_8$ 以及 $\phi(x_{15}) \in \mathbb{K}x_{15}$。因此，$\phi$ 是一个对角自同构。

$J = \{\alpha_3\}$ 这里，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J) \cong \mathbf{U}'_{[4,23]}$。一次生成元为 y_4, y_5, y_{17}, y_{19},y_{21} 和 y_{23}。我们有 $\mathbb{K}y_4 = C_6^1 \cap C_8^2$, $\mathbb{K}y_5 = C_6^{-1} \cap C_8^2$, $\mathbb{K}y_{17} = C_6^1 \cap C_8^0$,$\mathbb{K}y_{19} = C_6^1 \cap C_8^{-2}$, $\mathbb{K}y_{21} = C_6^{-1} \cap C_8^0$ 和 $\mathbb{K}y_{23} = C_6^{-1} \cap C_8^{-2}$。因此，$\phi$ 是一个对角自同构。

$J = \{\alpha_4\}$ 在这种情况下，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J) \cong \mathbf{U}^{[9,23]}$。一次生成元为 x_9、x_{10}、x_{13}、x_{15}、x_{17}、x_{19}、x_{22} 和 x_{23}。我们有 $\mathbb{K}x_9 = C_6^3$ $\mathbb{K}^\times x_{10} = C_6^1 \cap \gamma_{8,\ 2}^4$，$\mathbb{K}^\times x_{13} = C_6^1 \cap \gamma_{8,\ 1}^4$，$\mathbb{K}^\times x_{15} = C_6^1 \cap \gamma_{8,\ 0}^4$，$\mathbb{K}^\times x_{17} = C_6^{-1} \cap \gamma_{8\ 0,}^{-4}$，$\mathbb{K}^\times x_{19} = C_6^{-1} \cap \gamma_{8\ 1,}^{-4}$，$\mathbb{K}^\times x_{22} = C_6^{-1} \cap \gamma_{8\ 2,}^{-4}$，以及 $\mathbb{K}x_{23} = C_6^{-3}$。因此，$\phi$ 是一个对角自同构。

$J = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ 这里，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J) \cong \mathbf{U}^{[1,21]}$。一次生成元为 x_1、x_3、x_6、x_8、x_{15}、x_{19}和 x_{21}。我们有 $\mathbb{K}x_3 = C_6^2$、$\mathbb{K}x_6 = C_6^1$、$\mathbb{K}x_{19} = C_6^{-1}$、$\mathbb{K}x_{21} = C_6^{-2}$和 $\mathbb{K}x_1 \oplus \mathbb{K}x_8 \oplus \mathbb{K}x_{15} = C_6^0$。因此，$\phi(x_3) \in \mathbb{K}x_3$、$\phi(x_6) \in \mathbb{K}x_6$、$\phi(x_{19}) \in \mathbb{K}x_{19}$、$\phi(x_{21}) \in \mathbb{K}x_{21}$，并且存在标量 $a_{ij} \in \mathbb{K}$、$(1 \le i, j \le 3)$使得

$$\begin{aligned}\phi(x_1) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_8 + a_{13}x_{15}\\ \phi(x_8) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_8 + a_{23}x_{15}\phi(\\ x_{15}) &= a_{31}x_1 + a_{32}x_8 + a_{33}x_{15}\end{aligned}$$

将 ϕ 应用于关系 $[x_6, x_{15}] = 0$，并利用关系 $[x_6, x_8] = 0$ 和$[x_1, x_6] = x_4$ 将无序单项式整理为有序单项式，可得

$$a_{31}\left(\left(q^2 - q\right)x_1x_6 - q^2x_4\right) + a_{32}\left(1 - q^{-1}\right)x_6x_8 = 0.$$

因此 $a_{31} = a_{32} = 0$。所以 $\phi(x_{15}) \in \mathbb{K}x_{15}$。

接下来，我们将 ϕ 应用于关系 $[x_6, x_8] = 0$，并利用关系 $[x_1, x_6] = x_4$和 $[x_6, x_{15}] = 0$ 将无序单项式化为有序单项式，从而得到 $-q^2a_{21}x_4 + a_{23}(1-q)x_6x_{15} = 0$。因此 $a_{21} = a_{23} = 0$。于是，$\phi(x_8) \in \mathbb{K}x_8$。

关系 $[x_1, x_{19}] = x_{17}$和 $[x_8, x_{17}] = 0$蕴含 $[x_8, [x_1, x_{19}]] = 0$。将 ϕ 应用于该关系，并利用关系 $[x_8, x_{15}] = [x_8, x_{19}] = [x_{15}, x_{19}] =0$ 将任意无序单项式化为有序单项式，我们得到

$$a_{12}\left(1 - q^{-4}\right)x_8^2x_{19} + a_{13}\left(1 - q^{-3}\right)x_8x_{15}x_{19} = 0.$$

因此 $a_{12} = a_{13} = 0$。故 $\phi(x_1) \in \mathbb{K}x_1$，我们得出 ϕ 是一个对角自同构。

$J = \{\alpha_1, \alpha_3\}$ 在这种情况下，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J) \cong \mathrm{U}'_{[2,23]}$。一次生成元为 y_2、y_3、y_{17}、y_{19}、y_{21} 和 y_{23}。我们有 $\mathbb{K}y_2 = C_8^0 \cap C_{22}^2$、$\mathbb{K}y_3 = C_8^0 \cap C_{22}^{-2}$、$\mathbb{K}y_{17} =C_8^1 \cap C_{22}^2$、$\mathbb{K}y_{19} = C_8^1 \cap C_{22}^{-2}$、$\mathbb{K}y_{21} = C_8^{-1} \cap C_{22}^2$ 和 $\mathbb{K}y_{23} = C_8^{-1} \cap C_{22}^{-2}$。因此 ϕ 是一个对角自同构。

$J = \{\alpha_1, \alpha_4\}$ 在这种情况下，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J) \cong \mathrm{U}'_{[1,20]}$。一次生成元为 y_1、y_2、y_3、y_5、y_{11}、y_{12}、y_{17}、y_{19} 和 y_{20}。我们有 $\mathbb{K}^\times y_1 = C_{10}^2 \cap \gamma_{14,\,1}^2$、$\mathbb{K}^\times y_2 = C_{10}^2 \cap \gamma_{14,\,1}^4$、$\mathbb{K}y_3 = C_{10}^2 \cap C_{14}^0$、$\mathbb{K}y_5 = C_{10}^0 \cap C_{14}^0$、$\mathbb{K}y_{11} = C_{10}^{-2} \cap C_{14}^0$、$\mathbb{K}^\times y_{12} = C_{10}^{-2} \cap \gamma_{14,\,1}^{-4}$、$\mathbb{K}^\times y_{17} = C_{10}^0 \cap \gamma_{14,\,1}^2$、$\mathbb{K}^\times y_{19} = C_{10}^0 \cap \gamma_{14,\,1}^{-2}$ 和 $\mathbb{K}^\times y_{20} = C_{10}^{-2} \cap \gamma_{14,\,1}^{-2}$。因此 ϕ 是一个对角自同构。

$J = \{\alpha_2, \alpha_3\}$ 在此，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J) \cong \mathrm{U}'_{[3,24]}$。一次生成元为 y_3、y_{17}、y_{21}和 y_{24}。我们有 $\mathbb{K}y_3 = C_{14}^2$、$\mathbb{K}y_{17} = C_{10}^1$、$\mathbb{K}y_{21} = C_{10}^{-1}$和$\mathbb{K}y_{24} = C_{14}^{-2}$。因此，$\phi$ 是一个对角自同构。

$J = \{\alpha_2, \alpha_4\}$ 在此情形下，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J) \cong \mathrm{U}_{[2,23]}$。一次生成元为 x_2、x_3、x_4、x_6、x_7、x_8、x_{22}和 x_{23}。我们有 $\mathbb{K}x_2 = C_{10}^2 \cap C_{14}^2$、$\mathbb{K}x_3 = C_{10}^{-2} \cap C_{14}^2$、$\mathbb{K}x_4 = C_{10}^2 \cap C_{14}^0$、$\mathbb{K}x_6 = C_{10}^{-2} \cap C_{14}^0$、$\mathbb{K}x_7 = C_{10}^2 \cap C_{14}^{-2}$、$\mathbb{K}x_8 = C_{10}^{-2} \cap C_{14}^{-2}$、$\mathbb{K}x_{22} = C_{14}^1$和 $\mathbb{K}x_{23} = C_{14}^{-1}$。因此，$\phi$ 是一个对角自同构。

$J = \{\alpha_3, \alpha_4\}$ 我们有 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J) \cong \mathrm{U}_{[4,24]}$。一次生成元为 x_4、x_6、x_{22} 和 x_{24}。我们有 $\mathbb{K}x_4 = C_{12}^2$、$\mathbb{K}x_{24} = C_{12}^{-2}$ 和 $\mathbb{K}x_6 \oplus \mathbb{K}x_{22} = C_{12}^0$。因此，存在标量 a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}、γ、$\delta \in \mathbb{K}$，使得 $\phi(x_6) = a_{11}x_6 + a_{12}x_{22}$、$\phi(x_{22}) = a_{21}x_6 + a_{22}x_{22}$、$\phi(x_4) = \gamma x_4$ 以及 $\phi(x_{24}) = \delta x_{24}$。

首先注意到，关系 $[x_4, x_{24}] = (q+q^{-1})x_7$ 蕴含 $\phi(x_7) = \gamma\delta x_7$。接下来将 ϕ 应用于关系 $[x_6, x_7] = 0$，并利用关系 $[x_7, x_{22}] = x_{17}$ 将无序单项式整理为有序单项式，得到

$$a_{12}\left(\left(q^2 - 1\right)x_7x_{22} - q^2x_{17}\right) = 0.$$

因此 $a_{12} = 0$。由此 $\phi(x_6) \in \mathbb{K}x_6$。

关系 $[x_4, x_{22}] = x_{13}$ 和 $[x_4, x_{13}] = 0$ 意味着 $[x_4, [x_4, x_{22}]] = 0$。将 ϕ 应用于此关系，并利用关系 $[x_4, x_6] = \left(q + q^{-1}\right) x_5$ 和 $[x_4, x_5] = 0$ 将无序单项式化为有序单项式，我们得到

$$a_{21}\left(1 - q^{-1}\right)\left((1-q)\, x_4^2 x_6 + \left(q + q^{-1}\right)^2 x_4 x_5\right) = 0.$$

因此 $a_{21} = 0$。所以 $\phi(x_{22}) \in \mathbb{K} x_{22}$。由此，$\phi$ 是一个对角自同构。

$J = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 在这种情况下，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J) \cong \mathbf{U}'_{[2,24]}$。一次生成元为 y_2、y_{17}、y_{21} 和 y_{24}。我们有 $\mathbb{K} y_{17} = C_{12}^{1}$、$\mathbb{K} y_{21} = C_{12}^{-1}$ 和 $\mathbb{K} y_2 \oplus \mathbb{K} y_{24} = C_{12}^{0}$。因此，存在 b_2、b_{24}、c_2、$c_{24} \in \mathbb{K}$，使得 $\phi(y_2) = b_2 y_2 + b_{24} y_{24}$ 且 $\phi(y_{24}) = c_2 y_2 + c_{24} y_{24}$。将 ϕ 应用于关系 $[y_2, y_{17}] = 0$，并利用恒等式 $[y_{17}, y_{24}] = y_{19}$，可得

$$0 = (b_2 y_2 + b_{24} y_{24}) y_{17} - y_{17}(b_2 y_2 + b_{24} y_{24}) = b_{24}\left(q\widehat{q} y_{17} y_{24} - q^2 y_{19}\right).$$

因此 $b_{24} = 0$。接下来我们注意到 $[y_2, y_{24}] = y_3$ 和 $[y_2, y_3] = 0$。因此我们有关系 $[y_2, [y_2, y_{24}]] = 0$。将 ϕ 应用于该关系，可得 $c_2 \widehat{q}^2 y_2^3 = 0$。所以 $c_2 = 0$，由此得出 ϕ 是一个对角自同构。

$J = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$ 在这种情况下，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J) \cong \mathbf{U}^{[1,23]}$。一次生成元为 x_1、x_3、x_6、x_8、x_{22} 和 x_{23}。我们有 $\mathbb{K} x_3$、$= C_{18}^{2}$、$\mathbb{K} x_8 = C_{18}^{-2}$、$\mathbb{K} x_{22} = C_{18}^{1}$、$\mathbb{K} x_{23} = C_{18}^{-1}$ 和 $\mathbb{K} x_1 \oplus \mathbb{K} x_6 = C_{18}^{0}$。因此，存在 b_1、b_6、c_1、$c_6 \in \mathbb{K}$，使得 $\phi(x_1) = b_1 x_1 + b_6 x_6$ 且 $\phi(x_6) = c_1 x_1 + c_6 x_6$。将 ϕ 应用于关系 $[x_1, x_{22}] = 0$ 可得

$$0 = (b_1 x_1 + b_6 x_6) x_{22} - x_{22}(b_1 x_1 + b_6 x_6) = b_6\left((1-q) x_6 x_{22} + q x_{15}\right).$$

因为 $[x_6, x_{22}] = x_{15}$。因此 $b_6 = 0$。类似地，将 ϕ 应用于关系 $[x_3, x_6] = 0$，我们得到

$$0 = x_3(c_1 x_1 + c_6 x_6) - q^2(c_1 x_1 + c_6 x_6) x_3 = -c_1 q^2 x_2$$

因为 $[x_1, x_3] = x_2$。因此 $c_1 = 0$。所以 ϕ 是一个对角自同构。

$J = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$ 在这种情况下，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J) \cong \mathbf{U}'_{[1,23]}$。一次生成元为 y_1、y_2、y_3、y_{21} 和 y_{23}。我们有 $\mathbb{K} y_1 = C_{30}^{0}$、$\mathbb{K} y_2 \oplus \mathbb{K} y_{21} = C_{30}^{2}$ 以及 $\mathbb{K} y_3 \oplus \mathbb{K} y_{23} = C_{30}^{-2}$。因此，存在 a_2、a_{21}、b_2、b_{21}、c_3、c_{23}、d_3、$d_{23} \in \mathbb{K}$，使得 $\phi(y_2) = a_2 y_2 + a_{21} y_{21}$、$\phi(y_{21}) = b_2 y_2 + b_{21} y_{21}$、$\phi(y_3) = c_3 y_3 + c_{23} y_{23}$，以及 $\phi(y_{23}) = d_3 y_3 + d_{23} y_{23}$。关系 $[y_1, y_{17}] = 0$ 和 $[y_1, y_{21}] = y_{17}$ 给出 $[y_1, [y_1, y_{21}]] = 0$。将 ϕ 应用于该关系，并利用交换关系 $y_1 y_2 = y_2 y_1$，得到 $b_2(2 - q - q^{-1}) y_1^2 y_2 = 0$。因此，$b_2 = 0$。接下来，由于 $[y_1, y_{21}] = y_{17}$ 和 $[y_2, y_{17}] = 0$，我们有关系 $[y_2, [y_1, y_{21}]] = 0$。将 ϕ 应用于该关系，并利用恒等式 $[y_{17}, y_{21}] = 0$，得到 $a_{21}\left(q^{-1} - 1\right) y_{17} y_{21} = 0$。因此，$a_{21} = 0$。进一步注意到 $[y_{21}, y_{23}] = [2]_q y_{22}$ 和 $[y_{21}, y_{22}] = 0$。因此，$[y_{21}, [y_{21}, y_{23}]] = 0$。将 ϕ 应用于该关系，并利用恒等式 $[y_3, y_{21}] = y_5$ 和 $[y_5, y_{21}] = [2]_q y_{11}$，得到 $d_3 [2]_q q^2 y_{11} = 0$。于是，$d_3 = 0$。最后，将 ϕ 应用于关系 $[y_1, y_3] = 0$，并利用恒等式 $[y_1, y_{23}] = y_{19}$，得到 $c_{23}\left((1-q) y_1 y_{23} + q y_{19}\right) = 0$。因此，$c_{23} = 0$。所以，$\phi$ 是一个对角自同构。

$J = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 在这种情况下， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J) \cong \mathbf{U}^{[2,24]}$。一次生成元为 x_2、x_3、 x_{22}和 x_{24}。我们有 $\mathbb{K}x_2 = C_{18}^2$、 $\mathbb{K}x_3 = C_{18}^{-2}$以及 $\mathbb{K}x_{22} \oplus \mathbb{K}x_{24} = C_{18}^0$。将 ϕ 应用于关系 $[x_2, x_{22}] = 0$ ，并利用关系 $[x_2, x_{24}] = x_4$ 将无序单项式化为有序单项式，可以得出 $\phi(x_{22}) \in \mathbb{K}x_{22}$。

由于 $\mathbb{K}x_{22} \oplus \mathbb{K}x_{24}$ 是一个 ϕ-不变子空间，存在标量 γ、$\delta \in \mathbb{K}$，使得 $\phi(x_{24}) = \gamma x_{22} + \delta x_{24}$。关系 $[x_2, x_{24}] = x_4$ 和 $[x_3, x_4] = 0$ 给出了关系 $[x_3, [x_2, x_{24}]] = 0$。将 ϕ 应用于此关系，并利用关系 $[x_2, x_{22}] = [x_2, x_3] = [x_3, x_{22}] = 0$ 将任意无序单项式化为有序单项式，可得 $\gamma\left(q^{-2} - 1\right) x_2 x_3 x_{22} = 0$。因此 $\gamma = 0$。故 $\phi(x_{24}) \in \mathbb{K}x_{24}$，且 ϕ 是一个对角自同构。

□

现在我们能够证明本节的主要结果。下面的定理证明了当底层李代数 $\mathfrak{g}$ 属于类型 F_4 时的猜想 1.1。

定理 5.3. 若 $\mathfrak{g}$ 是类型为 F_4 的李代数，且 J 是 $\mathfrak{g}$的单根的非空子集，则 $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)) \cong (\mathbb{K}^\times)^4$。

证明。根据定理 5.2， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的每个自同构都是对角自同构。作为 CGL 扩张，代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的秩为 4。因此，根据 [15, 定理 5.3 和 5.5], $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)) \cong (\mathbb{K}^\times)^4$。

□

6. Two lemmas regarding $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ when $\mathfrak{g} = F_4$

本节将证明两个关于量子化幂零根基 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的引理，讨论底层李代数 $\mathfrak{g}$ 为类型 F_4，且 J 是任意非空单根子集的情形。

回顾第2.1节，对于每个余权 $\lambda \in P^\vee$， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 上都有一个诱导的$\mathbb{Z}$-分次。我们将使用余权 $\lambda = \sum_{i \in J} \varpi_i^\vee \in P^\vee$。本节的两个引理明确说明， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 中每个高度为 $\mathrm{height}(\beta) > 1$ 的 Lusztig 根向量 X_β，都可以写成其他 Lusztig 根向量的一个 q-交换子，至多相差一个标量倍。由这些引理可直接得出，每个量子化幂零根基 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 作为代数均由次数为 1 的 Lusztig 根向量生成。因此， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 是一个局部有限、连通的$\mathbb{N}$-分次代数，并由其次数为 1 的分次分量生成。

引理 6.1. 设 $\mathfrak{g}$ 为 F_4 型李代数，设 x_1，...， x_{24} 为 Lusztig 根向量（回顾（5.3））， 它们对应于 $\mathfrak{g}$ 的魏尔群的最长元的约化表达式 $\mathbf{R}[w_o]$ （见（5.1））。则

$$
\begin{aligned}
x_2 &= [x_1, x_3], \\
x_4 &= [x_1, x_6], \\
x_4 &= [x_2, x_{24}], \\
x_5 &= \tfrac{1}{[2]_q}[x_4, x_6], \\
x_6 &= [x_3, x_{24}], \\
x_7 &= [x_1, x_8], \\
x_7 &= \tfrac{1}{[2]_q}[x_4, x_{24}], \\
x_8 &= \tfrac{1}{[2]_q}[x_6, x_{24}], \\
x_9 &= [x_6, x_{13}],
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x_{10} &= [x_8, x_{13}], \\
x_{11} &= \tfrac{1}{[2]_q}[x_{10}, x_{13}], \\
x_{12} &= \tfrac{1}{[2]_q}[x_{10}, x_{15}], \\
x_{13} &= [x_1, x_{15}], \\
x_{13} &= [x_4, x_{22}], \\
x_{14} &= \tfrac{1}{[2]_q}[x_{13}, x_{15}], \\
x_{15} &= [x_6, x_{22}], \\
x_{16} &= [x_{15}, x_{17}], \\
x_{17} &= [x_1, x_{19}],
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x_{17} &= [x_7, x_{22}], \\
x_{18} &= \tfrac{1}{[2]_q}[x_{17}, x_{19}], \\
x_{19} &= [x_8, x_{22}], \\
x_{20} &= [x_1, x_{21}], \\
x_{20} &= \tfrac{1}{[2]_q}[x_{17}, x_{22}], \\
x_{21} &= \tfrac{1}{[2]_q}[x_{19}, x_{22}], \\
x_{23} &= [x_{22}, x_{24}].
\end{aligned}
$$

证明。在本引理的整个证明过程中，我们采用以下缩写

$$E_{ij} := [E_i, E_j], \qquad i, j \in \mathbf{I},$$

对于一个 q-交换子，并归纳地定义嵌套的 q-交换子

$$E_{i_1 i_2 \cdots i_n} := [E_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1}}, E_{i_n}]$$

对于 $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbf{I}$.

由于 s_1 是约化表达式 $R[w_o]$中出现的第一个简单反射，因此显然有 $x_1 = E_1$。由命题 2.1 可直接推出， $x_3 = E_2$,$x_{22} = E_4$ 和 $x_{24} = E_3$。至此，我们已将每个切瓦莱生成元E_i 与相应的 Lusztig 根向量对应起来。接下来，我们将说明其余的 Lusztig 根向量 x_i 如何写成其他 Lusztig 根向量的 q-交换子，至多相差一个标量倍。下一步将聚焦于那些满足$\langle \deg_Q(x_i)\ \varpi_1^\vee + \varpi_2^\vee + \varpi_3^\vee + \varpi_4^\vee \rangle = 2$ 的 x_i 。换言之，我们关注满足 $\deg_Q(x_i)$ 的高度为 2 的那些 x_i。简言之，当 $\deg_Q(x_i)$ 的高度为 d 时，我们称 x_i 的 $\mathbb{N}$-次数为 d。我们计算

$$\begin{aligned}
x_2 &= \mathbf{T}_1(E_2) = E_{12} = [x_1, x_3], \\
x_6 &= \mathbf{T}_{\underline{121}32}(E_3) = \mathbf{T}_{2\cdot 1232}(E_3) = \mathbf{T}_2(E_3) = E_{23} = [x_3, x_{24}], \\
x_{23} &= \mathbf{T}_{\underline{12132312432132342312 3}}(E_4) = \mathbf{T}_{4\cdot 12132132432132343213 2}(E_4) = \mathbf{T}_4(E_3) \\
&= E_{43} = [x_{22}, x_{24}],
\end{aligned}$$

其中，在上述计算中，我们采用下划线记法（如上文的 $\mathbf{T}_{\underline{121}32}$），以突出显示从计算的一步到下一步时，魏尔群中的辫关系应用于带下划线的部分。我们采用点记法（如上文的 $\mathbf{T}_{2\cdot 1232}$ ），将一个约化词分成两部分，以指明在特定步骤中应用了哪些 Lusztig 对称。我们继续计算

$$\begin{aligned}
x_4 &= \mathbf{T}_{12\cdot 1}(E_3) = \mathbf{T}_{1\cdot 2}(E_3) = T_1(E_{23}) = E_{123} = [E_{12}, E_3] = [x_2, x_{24}], \\
[2]_q x_8 &= [2]_q \mathbf{T}_{\underline{1213231}}(E_2) = [2]_q \mathbf{T}_{23\cdot 12321}(E_2) = [2]_q \mathbf{T}_{23}(E_2) = E_{233} = [E_{23}, E_3] \\
&= [x_6, x_{24}], \\
x_{15} &= \mathbf{T}_{\underline{12132312432132}32}(E_3) = \mathbf{T}_{23\cdot 123412321232}(E_3) = \mathbf{T}_{23}(E_4) = E_{234} \\
&= [E_{23}, E_4] = [x_6, x_{22}].
\end{aligned}$$

到目前为止，我们已经确定了如何将每个 x_i 次数不超过 3 的 Lusztig 根向量写成较小 $\mathbb{N}$次数的 Lusztig 根向量的 q-交换子。我们将继续采用这种方法，接下来重点考察 x_i 次数等于 4 的 Lusztig 根向量$\mathbb{N}$。我们计算

$$\begin{aligned}
[2]_q x_7 &= [2]_q \mathbf{T}_{12\underline{13}23}(E_1) = [2]_q \mathbf{T}_{123\cdot 123}(E_1) = [2]_q \mathbf{T}_{1\cdot 23}(E_2) = \mathbf{T}_1(E_{233}) \\
&= E_{1233} = [E_{123}, E_3] = [x_4, x_{24}], \\
x_{13} &= \mathbf{T}_{12\underline{13}23124321}(E_3) = \mathbf{T}_{123\cdot 123124321}(E_3) = \mathbf{T}_{123}(E_4) = E_{1234} = [E_{123}, E_4] \\
&= [x_4, x_{22}], \\
[2]_q x_{19} &= [2]_q \mathbf{T}_{\underline{121323124321323}432}(E_3) = [2]_q \mathbf{T}_{2342\cdot 12321432132432}(E_3) \\
&= [2]_q \mathbf{T}_{234\cdot 2}(E_3) = [2]_q \mathbf{T}_{234}(E_{23}) = [2]_q [\mathbf{T}_{23\cdot 4}(E_2), \mathbf{T}_{234}(E_3)] \\
&= [2]_q [\mathbf{T}_{23}(E_2), E_4] = [E_{233}, x_{22}] = [2]_q [x_8, x_{22}], \\
x_{19} &= \mathbf{T}_{\underline{121323124321323}432}(E_3) = \mathbf{T}_{2324\cdot 12321432132432}(E_3)
\end{aligned}$$

$=\mathrm{T}_{232\cdot 4}(E_3)\ =\mathrm{T}_{232}(E_{43})\ =[\mathrm{T}_{232}(E_4),\ \mathrm{T}_{232}(E_3)]=[E_{234},E_3]=[x_{15},x_{24}]$.接下来，我们说明如何将每个 x_i 次数等于 5 的 Lusztig 根向量 $\mathbb{N}$（即 x_5、x_{17} 和 x_{21}）写成较小$\mathbb{N}$次数的 Lusztig 根向量的 q-交换子。我们有

$$
\begin{aligned}
[2]_q x_5 &= [2]_q\mathbf{T}_{121\cdot 3}(E_2)=\mathbf{T}_{121}([E_3,E_{32}])=\mathbf{T}_{121}([E_3,\mathbf{T}_{32}(E_3)])\\
&=[\mathbf{T}_{121}(E_3),\mathbf{T}_{12132}(E_3)]=[x_4,x_6],\\
x_{17} &= \mathbf{T}_{12\underline{13231243213}234}(E_3)=\mathbf{T}_{12324\cdot 12324321234}(E_3)=\mathbf{T}_{1232\cdot 4}(E_3)\\
&=\mathbf{T}_{1232}(E_{43})=[\mathbf{T}_{123\cdot 2}(E_4),\mathbf{T}_{1232}(E_3)]=[\mathbf{T}_{123}(E_4),E_3]=[E_{1234},E_3]\\
&=[x_{13},x_{24}],\\
[2]_q x_{17} &= [2]_q\mathbf{T}_{12\underline{13231243213}234}(E_3)=[2]_q\mathbf{T}_{12324\cdot 12324321234}(E_3)=[2]_q\mathbf{T}_{123\underline{24}}(E_3)\\
&=[2]_q\mathbf{T}_{1234\cdot 2}(E_3)=[2]_q\mathbf{T}_{1234}([E_2,E_3])=[2]_q[\mathbf{T}_{123\cdot 4}(E_2),\mathbf{T}_{1234}(E_3)]\\
&=[2]_q[\mathbf{T}_{1\cdot 23}(E_2),E_4]=[\mathbf{T}_1(E_{233}),E_4]=[E_{1233},E_4]=[2]_q[x_7,x_{22}],\\
[2]_q x_{21} &= [2]_q\mathbf{T}_{\underline{121323124321323431}1}(E_2)=[2]_q\mathbf{T}_{23243\cdot 123241321324321}(E_2)\\
&=[2]_q\mathbf{T}_{2324\cdot 3}(E_2)=\mathbf{T}_{2324}([E_3,E_{32}])=[\mathbf{T}_{232\cdot 4}(E_3),\mathbf{T}_{23\underline{24}}(E_{32})]\\
&=[\mathbf{T}_{232}(E_{43}),\mathbf{T}_{234\cdot 2}(E_{32})]=[[\mathbf{T}_{23\cdot 2}(E_4),\mathbf{T}_{232}(E_3)],\mathbf{T}_{234}(E_3)]\\
&=[[\mathbf{T}_{23}(E_4),E_3],E_4]=[E_{234},E_3],E_4]=[E_{2343},E_4]=[x_{19},x_{22}].
\end{aligned}
$$

继续以这种方式进行，我们得到

$$
\begin{aligned}
x_9 &= \mathbf{T}_{121323\cdot 12}(E_4)\ =\mathbf{T}_{12132\cdot 3}(E_4)\ =\mathbf{T}_{12132}(E_{34})\ =[\mathbf{T}_{12132}(E_3),\mathbf{T}_{12\underline{132}}(E_4)]\\
&=[x_6,\mathbf{T}_{123\cdot 12}(E_4)]=[x_6,\mathbf{T}_{123}(E_4)]=[x_6,x_{13}],\\
x_{10} &= \mathbf{T}_{121323\underline{124}}(E_3)\ =\mathbf{T}_{12132314\cdot 2}(E_3)=\mathbf{T}_{12132314}(E_{23})\\
&=[\mathbf{T}_{1213231\cdot 4}(E_2),\mathbf{T}_{1213\cdot 2314}(E_3)]=[\mathbf{T}_{1213231}(E_2),\mathbf{T}_{12\underline{13}}(E_4)]\\
&=[x_8,\mathbf{T}_{123\cdot 1}(E_4)]=[x_8,\mathbf{T}_{123}(E_4)]=[x_8,x_{13}],\\
[2]_q x_{11} &= [2]_q\mathbf{T}_{121323124\cdot 3}(E_2)\ =\mathbf{T}_{121323124}([E_3,E_{32}])\\
&=[\mathbf{T}_{121323124}(E_3),\mathbf{T}_{12\underline{1323124}}(E_{32})]=[x_{10},\mathbf{T}_{12312314\cdot 2}(E_{32})]\\
&=[x_{10},\mathbf{T}_{123\cdot 12314}(E_3)]=[x_{10},\mathbf{T}_{123}(E_4)]=[x_{10},x_{13}],\\
[2]_q x_{14} &= [2]_q\mathbf{T}_{121323124321\cdot 3}(E_2)\ =\mathbf{T}_{121323124321}([E_3,E_{32}])\\
&=[\mathbf{T}_{121323124321}(E_3),\ \mathbf{T}_{121323124321}(E_{32})]=[x_{13},\mathbf{T}_{121323124321}\mathbf{T}_{32}(E_3)]\\
&=[x_{13},x_{15}],\\
[2]_q x_{12} &= [2]_q\mathbf{T}_{\underline{12132312432}}(E_1)\ =[2]_q\mathbf{T}_{231213423\cdot 12}(E_1)\ =[2]_q\mathbf{T}_{2312134\cdot 23}(E_2)\\
&=\mathbf{T}_{2312134}(E_{233})\ =[\mathbf{T}_{2312134}(E_{23}),\mathbf{T}_{23\cdot 12134}(E_3)]\\
&=[\mathbf{T}_{23121342}(E_3),\mathbf{T}_{23}(E_4)]=[\mathbf{T}_{23121342\cdot 1}(E_3)\ E_{234}]\\
&=[\mathbf{T}_{\underline{121323124}}(E_3)\ E_{234}]=[x_{10},x_{15}],\\
x_{16} &= \mathbf{T}_{121323124321323\cdot 3}(E_4)=\mathbf{T}_{121323124321323}(E_{34})\\
&=[\mathbf{T}_{121323124321323}(E_3),\mathbf{T}_{121323124321323}(E_4)]\\
&=[\mathbf{T}_{121323124321323}(E_3),\mathbf{T}_{121323124321323}\mathbf{T}_{34}(E_3)]=[x_{15},x_{17}],\\
[2]_q x_{18} &= [2]_q\mathbf{T}_{1213231243213234\cdot 3}(E_2)\ =\mathbf{T}_{1213231243213234}([E_3,E_{32}])\\
&=[\mathbf{T}_{1213231243213234}(E_3),\mathbf{T}_{1213231243213234}(E_{32})]\\
&=[x_{17},\mathbf{T}_{1213231243213234}\mathbf{T}_{32}(E_3)]=[x_{17},x_{19}],
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}[2]_q x_{20} &= [2]_q \mathbf{T}_{12\underline{1323123432132343}23}(E_1) = [2]_q \mathbf{T}_{123243\cdot 1232143231423}(E_1)\\ &= [2]_q \mathbf{T}_{12324\cdot 3}(E_2) = \mathbf{T}_{12324}([E_3, E_{32}]) = [\mathbf{T}_{1232\cdot 4}(E_3), \mathbf{T}_{123\underline{24}}(E_{32})]\\ &= [\mathbf{T}_{1232}(E_{43}), \mathbf{T}_{1234\cdot 2}(E_{32})] = [[\mathbf{T}_{123\cdot 2}(E_4), \mathbf{T}_{1232}(E_3)], \mathbf{T}_{1234}(E_3)]\\ &= [[\mathbf{T}_{123}(E_4), E_3], E_4] = [E_{1234}, E_3], E_4] = [E_{12343}, E_4] = [x_{17}, x_{22}].\end{aligned}$$

最后，我们可以利用 q-结合性证明其余的恒等式，

$$\begin{aligned}x_4 &= [x_2, x_{24}] = [[x_1, x_3], x_{24}] = [x_1, [x_3, x_{24}]] = [x_1, x_6],\\ [2]_q x_7 &= [x_4, x_{24}] = [[x_1, x_6], x_{24}] = [x_1, [x_6, x_{24}]] = [2]_q [x_1, x_8],\\ x_{13} &= [x_4, x_{22}] = [[x_1, x_6], x_{22}] = [x_1, [x_6, x_{22}]] = [x_1, x_{15}],\\ x_{17} &= [x_7, x_{22}] = [[x_1, x_8], x_{22}] = [x_1, [x_8, x_{22}]] = [x_1, x_{19}],\\ [2]_q x_{20} &= [x_{17}, x_{22}] = [[x_1, x_{19}], x_{22}] = [x_1, [x_{19}, x_{22}]] = [2]_q [x_1, x_{21}].\end{aligned}$$

□

引理 6.2. 设 $\mathfrak{g}$ 为 F_4 型李代数，且设 y_1、……、y_{24} 为 Lusztig 根向量（回顾（5.3）），它们对应于 $\mathfrak{g}$ 的魏尔群的最长元的约化表达式 $\mathbf{R}'[w_o]$（见（5.1））。则

$$\begin{aligned}y_3 &= [y_2, y_{24}],\\ y_4 &= [y_3, y_{17}],\\ y_5 &= [y_3, y_{21}],\\ y_6 &= \tfrac{1}{[2]_q}[y_4, y_{17}],\\ y_7 &= \tfrac{1}{[2]_q}[y_4, y_{19}],\\ y_8 &= [y_5, y_{17}],\\ y_9 &= \tfrac{1}{[2]_q}[y_8, y_{10}],\end{aligned}\qquad\begin{aligned}y_{10} &= [y_5, y_{19}],\\ y_{11} &= \tfrac{1}{[2]_q}[y_5, y_{21}],\\ y_{12} &= \tfrac{1}{[2]_q}[y_5, y_{23}],\\ y_{13} &= [y_{10}, y_{17}],\\ y_{14} &= [y_{12}, y_{17}],\\ y_{15} &= \tfrac{1}{[2]_q}[y_{14}, y_{17}],\\ y_{16} &= \tfrac{1}{[2]_q}[y_{14}, y_{19}],\end{aligned}\qquad\begin{aligned}y_{17} &= [y_1, y_{21}],\\ y_{18} &= \tfrac{1}{[2]_q}[y_{17}, y_{19}],\\ y_{19} &= [y_1, y_{23}],\\ y_{19} &= [y_{17}, y_{24}],\\ y_{20} &= [y_{19}, y_{21}],\\ y_{22} &= \tfrac{1}{[2]_q}[y_{21}, y_{23}],\\ y_{23} &= [y_{21}, y_{24}].\end{aligned}$$

证明。在本引理的证明中，我们对 q-交换子采用与引理 6.1 的证明中相同的缩写。

首先注意到，（5.1）中 w_o 的两个约化表达式具有一个公共子串，即 $\mathbf{R}'[6, 23] = \mathbf{R}[2, 19]$。因此，存在代数同构 $\Phi\colon \mathbf{U}'_{[6,23]} \to \mathbf{U}^{[2,19]}$，使得对所有 $i \in [6, 23]$ 都有 $\Phi(y_i) = x_{i-4}$。于是，引理 6.1 中给出的 x_i 之间的交换关系可转化为 y_i 之间的交换关系。特别地，我们有 $y_9 = \frac{1}{[2]_q}[y_8, y_{10}]$、$y_{13} = [y_{10}, y_{17}]$、$y_{14} = [y_{12}, y_{17}]$、$y_{15} = \frac{1}{[2]_q}[y_{14}, y_{17}]$、$y_{16} = \frac{1}{[2]_q}[y_{14}, y_{19}]$、$y_{18} = \frac{1}{[2]_q}[y_{17}, y_{19}]$、$y_{20} = [y_{19}, y_{21}]$，以及 $y_{22} = \frac{1}{[2]_q}[y_{21}, y_{23}]$。

接下来，我们应用命题 2.1 来确定哪些 y_i 对应于标准的切瓦莱生成元 E_i。我们得到 $y_1 = E_4$、$y_2 = E_1$、$y_{21} = E_3$ 和 $y_{24} = E_2$。接着，我们确定哪些 y_i 可以写成这些 E_i 的 q-交换子。例如，我们有 $y_3 = \mathbf{T}_{\underline{41}}(E_2) = \mathbf{T}_{1\cdot 4}(E_2) = \mathbf{T}_1(E_2) = E_{12} = [y_2, y_{24}]$。这里要说明的是，我们采用了与上文 $\mathbf{T}_{\underline{41}}$ 相同的下划线记法，以及与上文 $\mathbf{T}_{1\cdot 4}$ 相同的点记法，这些记法均用于引理 6.1 的证明。由此，我们还得到 $y_{17} = \mathbf{T}_{4\cdot 1234213231243 21}(E_3) = \mathbf{T}_4(E_3) = E_{43} = [y_1, y_{21}]$ 和 $y_{23} = \mathbf{T}_{\underline{4123421323124321323432}}(E_3) = \mathbf{T}_{32\cdot 1232143234123214323 4}(E_3) = \mathbf{T}_{32}(E_3) = E_{32} = [y_{21}, y_{24}]$。

既然我们已经确立了该引理中的一些恒等式，就可以继续采用同样的策略来确立更多恒等式。我们有

$$\begin{aligned}
y_5 &= \mathbf{T}_{\underline{412}3}(E_4) = \mathbf{T}_{12\cdot 43}(E_4) = \mathbf{T}_{12}(E_3) = E_{123} = [y_3, y_{21}],\\
y_{19} &= \mathbf{T}_{\underline{4123421323124321321}32}(E_3) = \mathbf{T}_{432\cdot 123214323412321}(E_3) = \mathbf{T}_{4\cdot 32}(E_3) = \mathbf{T}_4(E_{32})\\
&= E_{432} = [y_{17}, y_{24}],\\
y_4 &= \mathbf{T}_{41\cdot 2}(E_3) = \mathbf{T}_{41}([E_2, E_3]) = [\mathbf{T}_{4\cdot 1}(E_2), \mathbf{T}_{4\cdot 1}(E_3)] = [\mathbf{T}_4(E_{12}), \mathbf{T}_4(E_3)]\\
&= [E_{12}, E_{43}] = [y_3, y_{17}].
\end{aligned}$$

接下来，我们计算几个基于已有恒等式推导出的恒等式。我们有

$$\begin{aligned}
[2]_q y_6 &= [2]_q \mathbf{T}_{4123\cdot 4}(E_2) = [2]_q \mathbf{T}_{41\cdot 23}(E_2) = \mathbf{T}_{41}(E_{233})\\
&= [\mathbf{T}_{41}(E_{23}), \mathbf{T}_{4\cdot 1}(E_3)] = [y_4, \mathbf{T}_4(E_3)] = [y_4, y_{17}],\\
y_7 &= \mathbf{T}_{41234\cdot 2}(E_1) = \mathbf{T}_{41234}([E_2, E_1]) = [\mathbf{T}_{41234}(E_2), \mathbf{T}_{41234}(E_1)] = [y_6, E_2]\\
&= [y_6, y_{24}],\\
y_8 &= \mathbf{T}_{412342\cdot 1}(E_3) = \mathbf{T}_{412\underline{34}2}(E_3) = \mathbf{T}_{41232\cdot 4}(E_3) = \mathbf{T}_{41232}([E_4, E_3])\\
&= [\mathbf{T}_{4123\cdot 2}(E_4), \mathbf{T}_{4\cdot 1232}(E_3)] = [\mathbf{T}_{4123\cdot 2}(E_4), \mathbf{T}_{4\cdot 1232}(E_3)]\\
&= [\mathbf{T}_{4123}(E_4), \mathbf{T}_4(E_3)] = [y_5, y_{17}],\\
y_{10} &= \mathbf{T}_{4123421\cdot 32}(E_3) = \mathbf{T}_{4123421}([E_3, E_2]) = [\mathbf{T}_{412342\cdot 1}(E_3), \mathbf{T}_{4123421}(E_2)]\\
&= [\mathbf{T}_{412342}(E_3), E_2] = [y_8, y_{24}],\\
[2]_q y_{11} &= [2]_q \mathbf{T}_{\underline{412342}1323}(E_1) = [2]_q \mathbf{T}_{123\cdot 4321323}(E_1) = [2]_q \mathbf{T}_{1\cdot 23}(E_2)\\
&= \mathbf{T}_1([E_{23}, E_3]) = [\mathbf{T}_1(E_{23}), \mathbf{T}_1(E_3)] = [E_{123}, E_3] = [y_5, y_{21}],\\
y_{12} &= \mathbf{T}_{\underline{41234213231}}(E_2) = \mathbf{T}_{1232\cdot 4321323}(E_2) = \mathbf{T}_{123\cdot 2}(E_1) = \mathbf{T}_{123}([E_2, E_1])\\
&= [\mathbf{T}_{123}(E_2), \mathbf{T}_{123}(E_1)] = [\mathbf{T}_{123}(E_2), E_2] = [y_{11}, y_{24}].
\end{aligned}$$

最后，我们可以利用 q-结合性来确立其余恒等式，

$$\begin{aligned}
&[2]_q y_7 = [2]_q[y_6, y_{24}] = [[y_4, y_{17}], y_{24}] = [y_4, [y_{17}, y_{24}]] = [y_4, y_{19}],\\
&y_{19} = [[E_4, E_3], E_2] = [E_4, [E_3, E_2]] = [y_1, y_{23}],\\
&y_{10} = [y_8, y_{24}] = [[y_5, y_{17}], y_{24}] = [y_5, [y_{17}, y_{24}] = [y_5, y_{19}],\\
&[2]_q y_{12} = [2]_q[y_{11}, y_{24}] = [[y_5, y_{21}], y_{24}] = [y_5, [y_{21}, y_{24}]] = [y_5, y_{23}],
\end{aligned}$$

□

7. Quantum Symmetric Matrices

$n\times n$量子对称矩阵 [21, 30] 的代数是量子化幂零根基$\mathcal{U}_q$（$\mathfrak{n}_J$），对应于底层李代数 $\mathfrak{g}$ 为 C_n 型且 $J = \{\alpha_n\}$的情形。本节将证明，在这种情况下猜想 1.1 成立。

令 x_{ij} $(1 \le i \le j \le n)$ 表示量子对称矩阵代数的标准生成元。定义关系见 [21, 命题 5.2]。令 $\mathcal{N}_J$ 为 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的正规子代数。它由正规元素 $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ 生成。这里，量子化幂零根基 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 是 $\mathbb{N}$-分次的，且对所有 $1 \le i \le j \le n$，$\deg(x_{ij}) = 1$。鉴于此，$\deg(\Theta_i) = i$ (对于 $1 \le i \le n$)。单根为 $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ (对于 $1 \le i < n$) 和 $\alpha_n = 2e_n$。基本权为 $\varpi_i = e_1 + \cdots + e_i$(对于 $1 \le i \le n$)。令 $Q = \mathbb{Z}\alpha_1 + \cdots + \mathbb{Z}\alpha_n$ 并

$P = \mathbb{Z}\varpi_1 + \cdots + \mathbb{Z}\varpi_n$ 分别为根格和权格，并令$\langle -, - \rangle$ 为 P 上由规则 $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ 定义的对称双线性型。代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 是 Q-分次的，且

$$\deg_Q(x_{ij}) = e_i + e_j = (\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots \alpha_n) + (\alpha_j + \alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_{n-1}).$$

考虑抛物元 $w_J := w_o^J w_o \in W$。我们有约化表达式

$$w_J = (s_n s_{n-1} \cdots s_1)(s_n s_{n-1} \cdots s_2) \cdots (s_n s_{n-1}) s_n. \tag{7.1}$$

回顾 (4.4) 中的交换关系，

$$x_{ij}\Theta_k = q^{-\langle \deg_Q(x_{ij}), (1+w_J)\varpi_k \rangle}\Theta_k x_{ij}$$

对于 $1 \le i \le j \le n$ 和 $1 \le k \le n$。

命题 7.1. 设 $\mathfrak{g}$ 是类型为 C_n 且具有 $n > 1$的李代数，并设$J = \{\alpha_n\}$。若 ψ 是量子化幂零根基 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$的自同构，则对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$， $\psi(\Theta_i) \in \mathbb{K}^\times \Theta_i$。

证明。与定理 4.8 的证明一样，通过考察约化表达式 (7.1) 的相关性质，可以看出定理 4.1 中涉及核以及存在形如 $xy = \kappa yx$ 的关系的假设均得到满足。因此， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$的每个自同构都保持 $\mathbb{N}$-分次。

正规子代数 $\mathcal{N}_J$ 在 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的任意代数自同构下保持不变。由于 $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{N}_J)_1 = 1$（实际上，$(\mathcal{N}_J)_1 = \mathbb{K}\Theta_1$），因此 $\psi(\Theta_1) \in \mathbb{K}^\times \Theta_1$。此外，由于 $\mathbb{K}x_{nn} = \{x \in (\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J))_1 : \ x\Theta_1 = q^2\Theta_1 x\}$, $\psi(x_{nn}) = \mathbb{K}^\times x_{nn}$。

对于 $k \in \{1, \ldots, n\}$， $\dim_{\mathbb{K}}((\mathcal{N}_J)_k) = \mathcal{P}(k)$，其中 $\mathcal{P}$ 是分拆函数。我们还有 $x_{nn}\Theta_k = q^2\Theta_k x_{nn}$，对每个 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ 都成立。

对于固定的自然数 $k \in \mathbb{N}$，我们用一个弱递增的自然数序列 $\nu_1 \le \nu_2 \le \cdots$ 表示 $k \in \mathbb{N}$ 的一个分拆 ν（并记作$\nu \vdash k$），使得$\sum_i \nu_i = k$。对于一个分拆 $\nu \vdash k$，我们令 $\mathrm{parts}(\nu)$ 表示 ν 的部分数，并记作 $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mathrm{parts}(\nu)})$，并定义单项式

$$\Theta^\nu := \Theta_{\nu_1}\Theta_{\nu_2} \cdots \Theta_{\nu_{\mathrm{parts}(\nu)}} \in (\mathcal{N}_J)_k .$$

设

$$\psi(\Theta_k) = \sum_{\nu \vdash k} c_{\nu,k}\Theta^\nu, \qquad (1 \le k \le n).$$

对于标量 $c_{\nu,\ k} \in \mathbb{K}$。对于 $1 \le k < n$，我们将自同构 ψ 作用于关系 $x_{nn}\Theta_k = q^2\Theta_k x_{nn}$，从而得到

$$\sum_{\nu \vdash k} c_{\nu,k} x_{nn}\Theta^\nu = \sum_{\nu \vdash k} q^2 c_{\nu,k}\Theta^\nu x_{nn}.$$

然而，由于对每个 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$都有 $x_{nn}\Theta_k = q^2\Theta_k x_{nn}$，因此在上述求和中，我们可以用 $q^{2\cdot \mathrm{parts}(\nu)}\Theta^\nu x_{nn}$替换 $x_{nn}\Theta^\nu$。于是，

$$\sum_{\nu \vdash k} \left(q^{2\cdot \mathrm{parts}(\nu)} - q^2\right) c_{\nu,k}\Theta^\nu x_{nn} = 0.$$

由于 q 不是单位根，上述求和中出现的非零系数 $c_{\nu,\ k}$ 仅对应于满足 $\mathrm{parts}(\nu) = 1$ 的项。换言之，求和 $\sum_{\nu \vdash k} c_{\nu,\ k}\Theta^\nu$ 中至多有一个单项式 Θ^ν 的系数非零，即 Θ_k。因此，对于 $k < n$， $\psi(\Theta_k) \in \mathbb{K}^\times \Theta_k$。

最后，考虑 Θ_n。由于 Θ_n 生成了 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的中心（例如参见 [18]），因此 $\psi(\Theta_n) \in \mathbb{K}^\times \Theta_n$。

□

定理 7.2. 若 $\mathfrak{g}$ 是类型为 C_n 的李代数，具有 $n > 1$ 和 $J = \{\alpha_n\}$ （即，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 是 $n \times n$量子对称矩阵的代数），则 $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)) \cong (\mathbb{K}^\times)^n$。

证明。设 ϕ 是 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的一个自同构。由命题 7.1 可知，定理 4.1 的所有假设均满足。因此，ϕ 是一个分次自同构。

接下来，我们将应用定理 4.5，证明每个满足 x_{ij} 的 $i + j \neq n + 1$ 都会被 ϕ 映为自身的一个倍数。首先，设 i 和 j 的选取满足 $1 \leq i \leq j \leq n$ 和 $i + j < n + 1$，并考虑相应的元素 x_{ij}。我们证明，对于每个其他的 Lusztig 根向量 $x_{k\ell}$，都存在一个正规元 Θ_p，使得 x_{ij} 和 $x_{k\ell}$ 与 Θ_p 的交换关系不同。等价地，这意味着 $\langle (e_i + e_j) - (e_k + e_\ell), (1 + w_J)\varpi_p \rangle \neq 0$。由此，定理 4.5 推得 x_{ij} 会被自同构 ϕ 映为自身的一个倍数。需要考虑两种情形。若 $i \neq k$，令 $p = \ = \min(i, k)$。另一方面，若 $i = k$，令 $p = \ = \min(j, \ell)$。现在，设 i 和 j 的选取满足 $1 \leq i \leq j \leq n$ 和 $i + j > n + 1$，并考虑相应的 Lusztig 根向量 x_{ij}。与前面一样，我们将证明，对于每个其他的 Lusztig 根向量 $x_{k\ell}$，都存在一个正规元 Θ_p，使得 x_{ij} 和 $x_{k\ell}$ 与 Θ_p 的交换关系不同。此处，若 $j \neq \ell$，令 $p = \ = \max(j - 1, \ell - 1)$。然而，若 $j = \ell$，则令 $p = \ = \max(i - 1, k - 1)$。

现在我们将证明，每个带有 $i + j = n + 1$ 的 Lusztig 根向量 x_{ij} 都会被 ϕ 映射为自身的一个倍数。定理 4.5 在此不适用，因为这些 x_{ij} 与每个正规元 Θ_p 的交换方式都相同。事实上，这些x_{ij} 中的每一个都与正规子代数中的所有元素交换。其他x_{ij}都不会如此。这意味着 $S := \mathrm{span}_{\mathbb{K}} \{x_{ij} \mid i + j = n + 1\}$ 是 ϕ-不变向量子空间 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)_1$。对于每个 $y \in S$，定义

$$C(y) := \left\{ x \in (\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J))_1 \mid yx = qxy \right\}.$$

每个 $C(y)$ 都是一个向量空间。注意，$\dim(C(y)) = \dim(C(\phi(y)))$。由 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 的定义关系可得，$C(x_{ij})$ 由以下元素张成：$\{x_{ik} : k < j\} \cup \{x_{kj} : k < i\}$。因此，$\dim(C(x_{ij})) = n - i$。满足 $\dim(C(y)) = n - i$ 的 $y \in S$ 中，只有 x_{ij} 的非零倍数。因此，$\phi(x_{ij}) \in \mathbb{K}^\times x_{ij}$。

现在我们已经证明，ϕ 是一个对角自同构。由于 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}_J)$ 作为 CGL 扩张的秩为 n，[15, 定理 5.3 和 5.5] 推出 $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{U}_q\,(\mathfrak{n}_J)) \cong (\mathbb{K}^\times)^n$。

□

References

[1] J. Alev 和 M. Chamarie, *Dérivations et automorphismes de quelques algèbres quantiques*, 《代数通讯》, 20, (1992), 第 6 期, 1787 - 1802。[2] N. Andruskiewitsch 和 F. Dumas, *On the automorphisms of* $\mathcal{U}_q^+$ （$\mathfrak{g}$）, 载于: 《量子群》, 107–133, IRMA 数学与理论物理讲义 12, 欧洲数学会, 苏黎世, 2008。[3] G. Cauchon, *Effacement des dérivations et spectres premiers d'algèbres quantiques*, 《代数杂志》, (2003), 260, 第 2 期, 476-518。[4] S. Ceken、J. H. Palmieri、Y.-H. Wang 和 J.J. Zhang, *The discriminant controls automorphism groups of noncommutative algebras* **269**, 2015 551 584 , 《数学进展》, ( ), –。[5] S. Ceken、J. H. Palmieri、Y.-H.Wang 和 J.J. Zhang, *The discriminant criterion and automorphism groups of quantized algebras* **286**, 2016 754 801 , 《数学进展》, ( ), –。[6] K. Chan、J. Gaddis、R. Won 和 J.J. Zhang, *Reflexive hull discriminants and applications*, 《数学精选》, 28, 第 40 期, (2022), https://doi.org/10.1007/s00029-021-00755-x [7] C. De Concini、V. Kac 和 C. Procesi, *Some quantum analogues of solvable Lie groups*, 载于: 《几何与分析》（孟买, 1992）, 第 41-65 页, 塔塔基础研究院, 孟买, 1995。

[8] L. D. Faddeev、N. Yu. Reshetikhin 和 L. A. Takhtadzhyan, *Quantization of Lie groups and Lie algebras* **1**, 1990 193 225 , 《列宁格勒数学杂志》, ( ), -。[9] J. Gaddis、E. Kirkman 和 W. F. Moore。 *On the discriminant of twisted tensor products*。《代数杂志》, 477, (2017), 29–55。[10] J. Gaddis 和 T. Lamkin, *Centers and automorphisms of PI quantum matrix algebras*, arXiv:2207.11956, 即将发表于 *Contemporary Mathematics*。[11] C. Geiß、B. Leclerc 和 J. Schr¨oer, *Cluster structures on quantum coordinate rings*, 《数学精选》（新系列）, 19, (2013), 337 - 397。[12] K. Goodearl 和 E. Letzter, *The Dixmier–Moeglin equivalence in quantum coordinate rings and quantized Weyl algebras* 2000 **352**, 3, 1381 1403 , 《美国数学会汇刊》, ( ) 第 - 期。[13] K. Goodearl 和 M. Yakimov, *Quantum cluster algebra structures on quantum nilpotent algebras* **247** 2017 1169, + 119 , 《美国数学会回忆录》, ( ), 第 vii 期, 第 页。[14] K. Goodearl 和 M. Yakimov, *Unipotent and Nakayama automorphisms of quantum nilpotent algebras* , 载于: 《交换代数与非交换代数几何 II》, D. Eisenbud 等编, 第 181-212 页, MSRI 出版物第 68 卷, 剑桥大学出版社, 2015。[15] K. Goodearl 和 M. Yakimov, *From quantum Ore extensions to quantum tori via noncommutative UFDs* 2016 672 716 , 《数学进展》, 300, ( ), -。[16] N. Hu 和 X. Wang, *Convex PBW-type Lyndon bases and restricted two-parameter quantum groups of type G_2* **241**, 2009 2, 243 273 , 《太平洋数学杂志》, ( ), 第 - 期。[17] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, 施普林格出版社, 纽约, 1972。[18] H. P. Jakobsen, *The center of $\mathcal{U}_q$（$\mathfrak{n}_\omega$）*, 《代数通讯》, 46, (2018), 第 1 期, 262 - 282。[19] J.C. Jantzen, *Lectures on Quantum groups*, 《数学研究生教材》6, 美国数学会, 1996。[20] A. Jaramillo 和 G. Johnson, *Quantized nilradicals of parabolic subalgebras of $\mathfrak{sl}$ n and* ( ), 《代数 *algebras of coinvariants* 2022 **50**, 11, 4997 5015 通讯》, ( ), 第 - 期。[21] A. Kamita, *Quantum deformations of prehomogeneous vector spaces III*, 《广岛数学杂志》, 30, (2000), 79 - 115。[22] M. Kashiwara, *Crystalizing the q-analogue of universal enveloping algebras*, 《数学物理通讯》, 133, (1990), 249 - 260。[23] S. Launois 和 T. H. Lenagan, *Primitive ideals and automorphisms of quantum matrices*, 《代数与表示论》10（2007）, 339–365。[24] S. Launois 和 T. H. Lenagan, *Automorphisms of quantum matrices*, 《格拉斯哥数学杂志》, 55(A), (2013), 89-100。[25] S.Z. Levendorskii 和 Yan Soibelmann, *Algebras of functions on compact quantum groups, Schubert cells and quantum tori* **139**, 1991 141 170 , 《数学物理通讯》, ( ), -。[26] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, 《数学进展丛书》110, Birkh¨auser, 1993。[27] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, 《美国数学会杂志》, 3, (1990), 447 - 498。[28] A. M´ eriaux 和 G. Cauchon, *Admissible diagrams in U_q^w $\mathfrak{g}$ and combinatoric properties of Weyl groups* **14**, 2010 645 687 , 《表示论》, ( ), -。[29] I. M. Musson, *Ring theoretic properties of the coordinate rings of quantum symplectic and Euclidean space* 1992, , 载于《环论》, 俄亥俄州立大学—丹尼森双年会议论文集, S. K. Jain 和 S. T. Rizvi 编, 世界科技出版公司, 新加坡, (1993), 248-258。[30] M. Noumi, *Macdonald's symmetric polynomials as zonal spherical functions on some quantum homogeneous spaces* **123**, 1996 16 77 , 《数学进展》, ( ), -。[31] E. Strickland, *Classical invariant theory for the quantum symplectic group*, 《数学进展》123, (1996), 78-90。[32] M. Yakimov, *Invariant prime ideals in quantizations of nilpotent Lie algebras*, 《伦敦数学会会刊》（第 3 辑）101（2010）, 第 2 期, 454-476。[33] M. Yakimov, *On the spectra of quantum groups*, 《美国数学会回忆录》, 229, (2014), 第 1078 期, vi+91。[34] M. Yakimov, *Rigidity of quantum tori and the Andruskiewitsch-Dumas conjecture*, 《数学精选》20, (2014), 第 2 期, 421–464。[35] M. Yakimov, *The Launois-Lenagan conjecture*, 《代数杂志》, 392, (2013), 1-9。

Department of Mathematics and Physics, North Carolina Central University, Durham,NC 27707, USA*Email address*: gjohns62@nccu.edu
Department of Mathematics and Physics, North Carolina Central University, Durham, NC 27707, USA*Email address*: gmelikian@nccu.edu