arXiv:2302.11658v1 [math-ph] 22 Feb 2023

共形场论、孤子与椭圆 Calogero–Sutherland 模型

Bjorn K. Berntson*[1], Edwin Langmann[1, 2], and Jonatan Lenells[3]

[1]KTH 皇家理工学院物理系，瑞典斯德哥尔摩 10691[2]Nordita、KTH 皇家理工学院和斯德哥尔摩大学，瑞典斯德哥尔摩 10691[3]KTH 皇家理工学院数学系，瑞典斯德哥尔摩 10044

摘要

我们在环面上构造了一种非手性共形场论（CFT），该理论可实现椭圆 Calogero–Sutherland（eCS）模型的二次量子化。我们证明，提供这种二次量子化的共形场论算子同时定义了一种孤子方程——非手性中长波（ncILW）方程的量子版本。我们还证明，该共形场论算子是广义 eCS 模型的二次量子化；这种模型可以描述任意数量的四种不同类型的粒子。我们提出，这些粒子可以被识别为量子 ncILW 方程的孤子。

1 引言

本文受到 Abanov 和 Wiegmann 的工作启发，该工作揭示了共形场论、孤子方程以及 Calogero–Moser–Sutherland 型量子可积系统之间的显著联系 [1]；另见 [2, 3, 4]。特别地，我们证实了[4] 中的设想：应当存在 Benjamin–Ono 方程的一个有趣推广 [5, 6]，它与共形场论（CFT）和椭圆 Calogero–Sutherland（eCS）模型相关[1] （见[7] ，其中综述了量子 Calogero–Moser–Sutherland 系统）。这一推广的一个自然候选是中长波（ILW）方程 [8, 9, 10], ，但我们得到的并不是该方程。相反，我们得到的是一个带有 ILW 型非局部项的双组分方程；这一双组分方程是在 [11] 中提出的，并被称为（周期性[2]）非手性 ILW（ncILW）方程。我们的主要结果可概括如下：同一个为 eCS 模型提供二次量子化的共形场论算符 *[12, 13]* 也定义了 ncILW 方程的量子版本。我们还证明，这个共形场论算符实际上是 eCS 模型一个推广的二次量子化，该推广能够描述任意数量的四种不同类型的量子粒子，从而扩展了 [14] 中关于三角情形的既有结果。本文中的部分结果已在 [11], 中公布，而 ncILW 方程经典版本的可积性则在[15, 16]中得到确立。

在本文中，$\ell > 0$、$\delta > 0$和 $g > 0$ 均为固定常数。如下面所述，这三个参数既出现在 ncILW 方程中，也出现在椭圆 Calogero–Sutherland 模型中。基于下文所述的原因

*现地址：Riverlane Research，剑桥，CB2 3BZ，英国[1]我们所说的 *elliptic Calogero-Sutherland model* 是指 *quantum A-type elliptic Calogero-Moser-Sutherland model*。[2]在本文的其余部分， *ncILW equation* 是 *periodic ncILW equation*的简称。

在第 6 节中，我们的一般结果仅限于参数 g取有理数值的情形。我们还使用以下缩写

$$\kappa := \frac{\pi}{2\ell}, \quad q := \mathrm{e}^{-2\kappa\delta}, \quad c_0 := \frac{1}{3}\kappa^2 - 8\kappa^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}. \tag{1.1}$$

我们采用如下单位制：普朗克常数、 $\hbar$以及椭圆 Calogero–Sutherland 粒子的质量均设为 1。

ncILW 方程描述了两个关于位置 $x \in \mathbb{R}$ 和时间 $t \in \mathbb{R}$ 的 2ℓ-周期标量函数 u 和 v的时间演化（即， $u = u(x,t) = u(x+2\ell,t)$， v也类似），如下所示：

$$\begin{aligned} u_t + 2uu_x + \frac{g}{2}(Tu_{xx} + \tilde{T}v_{xx}) &= 0, \\ v_t - 2vv_x - \frac{g}{2}(Tv_{xx} + \tilde{T}u_{xx}) &= 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

˜其中，下标表示偏导数，而 T、T 是由下式定义的积分变换：

$$\begin{aligned} (Tf)(x) &:= \frac{1}{\pi} \fint_{-\ell}^{\ell} \zeta_1(x'-x) f(x')\,\mathrm{d}x', \\ (\tilde{T}f)(x) &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \zeta_1(x'-x+\mathrm{i}\delta) f(x')\,\mathrm{d}x', \end{aligned} \tag{1.3}$$

with

$$\zeta_1(z) := \lim_{M\to\infty} \sum_{m=-M}^{M} \kappa \cot(\kappa(z - 2\mathrm{i}m\delta)) \qquad (z \in \mathbb{C}). \tag{1.4}$$

由于偏导数$\frac{\partial}{\partial x}$ 与积分算子 T 和 $\tilde{T}$ 在作用于零均值函数时可交换，因此 (1.2) 中的项 Tu_{xx}既可解释为 $(Tu)_{xx}$，也可解释为 $T(u_{xx})$，˜对 T也同样如此。式 (1.4) 中定义的函数 ζ_1 是 Weierstrassζ-函数的 2ℓ-周期变体，其半周期为 $(\ell, \mathrm{i}\delta)$（见附录A）。在经典情形下，不失一般性可以令 $g = 2$；而在量子情形下，[3] g 是一个重要参数；参数 $\delta > 0$ 在两种情形下都很重要，其中三角情形通过取极限 $\delta \to \infty$得到。参数 ℓ 确定了一个长度尺度，并且对于本文的大部分讨论，可以令 $\ell = \pi$；然而，由于 $\ell \to \infty$ 从物理学角度来看是一个重要的极限情形，我们在方程中保留 ℓ。为简化记号，我们还使用式 (1.1) 中定义的冗余参数 κ。注意，当 $\kappa \to 0$时，对于 $\ell = \pi$， $\kappa = 1/2$ $(z) \to (\pi/\delta)\coth(\pi z/\delta)$；并且当 $\ell \to \infty$时， $\zeta_1(z + \mathrm{i}\delta) \to (\pi/\delta)\tanh(\pi z/\delta)$。

椭圆 Calogero–Sutherland 模型由以下哈密顿量定义[4]

$$H_{N;g}(\boldsymbol{x}) := -\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_{1\le j<k\le N} g(g-1)\wp_1(x_j - x_k) \tag{1.5}$$

其中 $\wp_1(z) := -\zeta_1'(z)$ 等于魏尔斯特拉斯椭圆 $\wp$-函数，其半周期为（ℓ，$\mathrm{i}\delta$），相差一个加性常数（见附录 A），其中变量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots\ldots, x_N)$ 位于环面 $[-\ell,\ell]^N$上，且 $N \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$任意。我们证明，在 [12, 13] 中构造的算子，即 eCS 哈密顿量（1.5）的二次量子化，允许一种自然推广，从而定义 ncILW 方程（1.2）的量子版本。我们还证明，该算子实际上是一个二次量子化

[3]这是因为 (1.2) 在 $(u(x,t)\ \ v(x,t)) \to (su(x,t/s)\ \ sv(x,t/s))$ $g \to sg$ $(s>0)$ 下保持不变。 [4]更准确地说，¨式 (1.5) 中的薛定谔算子在适当的定义域上定义了一个对称算符，而 eCS 哈密顿量则是该对称算符的一个特定自伴扩张。

其中，推广后的椭圆 Calogero–Sutherland 模型中的每个粒子 $j=1$、……、N 都具有两个标签 $r_j=\pm$ 和 $m_j\in\{1,-1/g\}$，相应的薛定谔算子可以写成

$$H_{N;g}^{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})}(\boldsymbol{x}) \coloneqq -\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2m_j}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+\sum_{1\le j<k\le N} m_j m_k g(g-1)\wp_{r_j,r_k}(x_j-x_k) \tag{1.6}$$

其中 $\boldsymbol{r}=(r_1,\dots,r_N)\in\{\pm\}^N$, $\boldsymbol{m}=(m_1,\dots,m_N)\in\{1,-1/g\}^N$，且

$$\wp_{r,r'}(x)\coloneqq\begin{cases}\wp_1(x) & (r=r')\\ \wp_1(x+\mathrm{i}\delta) & (r=-r').\end{cases} \tag{1.7}$$

显然，标准椭圆 Calogero–Sutherland 哈密顿量 (1.5) 对应于所有粒子具有相同标签的特殊情形：$(r_j,m_j)=(+,1)$，其中 $j=1,\dots,N$。另一个有趣的特殊情形是 $(x_j,r_j,m_j)=(x_j,+,1)$，其中 $j=1,\dots,N_1<N$，以及 $(x_j,r_j,m_j)=(\tilde{x}_{j-N_1},+,-1/g)$，其中 $j=N_1+1,\dots,N_1+M_1$，且 $M_1=N-N_1$；此时 (1.6) 中的算子可化为（将 $(N_1,M_1)\to(N,M)$ 重新命名）

$$H_{N,M;g}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})=H_{N;g}(\boldsymbol{x})-gH_{M;1/g}(\tilde{\boldsymbol{x}})+\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}(1-g)\wp_1(x_j-\tilde{x}_k). \tag{1.8}$$

该算子定义了 Sergeev 和 Veselov 引入的变形 eCS 模型 [17]，该模型预计具有可积性（正如附录B中所述，目前这一可积性问题的状况较为复杂）。一般而言，可以将（1.6）中的算子写成

$$\begin{aligned}H_{N_1,M_1,N_2,M_2;g}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y},\tilde{\boldsymbol{y}})&=H_{N_1,M_1;g}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})+H_{N_2,M_2;g}(\boldsymbol{y},\tilde{\boldsymbol{y}})\\&+\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_2}g(g-1)\wp_1(x_j-y_k+\mathrm{i}\delta)+\sum_{j=1}^{M_1}\sum_{k=1}^{M_2}g(g-1)\wp_1(\tilde{x}_j-\tilde{y}_k+\mathrm{i}\delta)\\&+\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{M_2}(1-g)\wp_1(\tilde{x}_j-y_k+\mathrm{i}\delta)+\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{M_2}(1-g)\wp_1(x_j-\tilde{y}_k+\mathrm{i}\delta),\end{aligned} \tag{1.9}$$

其中，N_1、M_1、N_2、$M_2\in\mathbb{Z}_{\ge0}$分别是带有标签 $(r_j、m_j)=(+,1)$、$(-,1)$、$(+、-1/g)$、$(-、-1/g)$ 的粒子数，且 $N_1+M_1+N_2+M_2=N$。这定义了变形 eCS 模型的一个推广，用于描述任意数量的四种不同粒子；我们预计该模型具有可积性（支持这一猜想的论据见附录 B）。标签 r_j 可以解释为手征性指标，其中 $r_j=-$ 和 $+$ 分别对应左行粒子和右行粒子；标签 m_j 则区分两种不同的粒子类型，其中 $m_j=1$ 和 $-1/g$ 分别对应电子和空穴（后者是凝聚态物理中的一种解释，详见 [11]）。所有粒子都通过取决于粒子间距离 $|x|$ 的二体相互作用彼此作用；同手征粒子的相互作用势与 $\wp_1(x)$ 成正比，而相反手征粒子的相互作用势与 $\wp_1(x+\mathrm{i}\delta)$ 成正比；[5]前者在 $x\to0$ 时是奇异的且具有排斥性，而后者是非奇异的且具有吸引性（注意，当 $x\to0$ 时，$\wp_1(x)\to(\pi/\delta)^2/\sinh(\pi x/\delta)^2$，并且 $\wp_1(x+\mathrm{i}\delta)\to-(\pi/\delta)^2/\cosh(\pi x/\delta)^2$）。此外，在 $\delta\to\infty$ 的极限下，$\wp_1(x)\to\kappa^2/\sin(\kappa x)^2$，且 $\wp_1(x+\mathrm{i}\delta)\to0$；因此，在此极限下，不同手征粒子之间的相互作用消失，而（1.9）中的算子化为两个相互对易的变形三角 Calogero–Sutherland 哈密顿量之和。

我们的结果在物理学的不同领域都有应用。文献中提出了两种凝聚态物理应用，分别涉及分数量子霍尔效应和相互作用量子多体系统的流体力学描述

[5]注意，$\wp_1(x)=\wp_1(-x)$，且 $\wp_1(x+\mathrm{i}\delta)=\wp_1(x-\mathrm{i}\delta)$。

。 [11]第三种应用与粒子物理学有关：正如我们在第7节的结论中所讨论的，我们的结果表明，本文构建的非手征共形场论对应于数学物理文献中在 Coleman 的开创性工作之后得到广泛研究的量子正弦-戈登理论的一个非相对论极限 [18]和 Mandelstam [19]；关于这一主题的近期研究，见 [20] 。如果确实如此，我们的结果就为量子正弦-戈登理论与有质量 Thirring 模型之间的 Coleman 对应提供了一个非相对论版本 [18]。

论文结构。第2节概述了我们的主要结果。在第3节中，我们介绍构成本文构造基础的福克空间、海森堡代数和顶点算子。在第4节中，我们将任意子定义为顶点算子的特殊情形，并引入一个共形场论算符，记为$\mathcal{H}_{3,\,\nu}$，它是本文的核心对象。通过推广 [13], 的构造，我们证明$\mathcal{H}_{3,\,\nu}$给出了椭圆 Calogero–Sutherland 模型的二次量子化。在第5节中，我们证明第一个主要结果（定理5.6），即算符$\mathcal{H}_{3,\,\nu}$也定义了 ncILW 方程的量子版本。在第6节中，我们证明第二个主要结果（定理6.2），表明算符$\mathcal{H}_{3,\,\nu}$还给出了广义 eCS 模型的二次量子化，该模型描述任意数量的四种粒子。结论见第7节。附录A汇集了某些特殊函数的定义和性质。附录B证明，广义 eCS 模型量子可积，当且仅当变形 eCS 模型（1.8）量子可积。附录C 包含正文中若干结果的证明。在附录D中，我们利用玻色子-费米子对应，推导出算符$\mathcal{H}_{3,\,\nu}$的费米子表示。

记号。我们分别用 $\mathbb{Z}$、 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$表示整数集、实数集和复数集。我们分别用 $\mathbb{Z}_{\neq 0}$、 $\mathbb{Z}_{>0}$、 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 表示非零整数集、正整数集和非负整数集， $\mathbb{R}$也类似。我们记 i 为 $=\sqrt{-1}$， $\bar{z}$ 是 $z\in\mathbb{C}$的复共轭。有时我们用 ∂_x 代替 $\frac{\partial}{\partial x}$ 等。我们用 $r=\pm$ 简写 $r=+$，用 $-$ 和 $\{\pm\}$ 简写集合 $\{+,-\}$。我们采用对易子和反对易子的常用简写：$[A,B]:=AB-BA$， $\{A,B\}:=AB+BA$。

2 结果概述

我们概述本文的结果，并省略一些技术细节；为使此处呈现的结果在数学上严谨，我们将在后文讨论这些细节。

2.1 任意子的构造

粗略地说，我们所说的任意子是指量子场 $\phi_\nu(x)$，它由实统计参数 ν 和位置变量 $x\in[-\ell,\ell]$标记，作用于某个带有真空 Ω 的福克空间 $\mathcal{F}$ 上，并满足以下（形式上的）交换关系

$$\phi_\nu(x)\phi_{\nu'}(x')=\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\pi\nu\nu'}\phi_{\nu'}(x')\phi_\nu(x) \tag{2.1}$$

对于 $x\gtrless x'$，并满足关系 $\phi_\nu(x)^\dagger=\phi_{-\nu}(x)$ 以及条件

$$\lim_{x\to y}2\pi(x-x')^{\nu^2}\langle\Omega,\phi_\nu(x)\phi_\nu(x')^\dagger\Omega\rangle=1, \tag{2.2}$$

其中 $\dagger$ 和 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 分别是 $\mathcal{F}$ 中的希尔伯特空间伴随和内积；参见 [21]。特别是，对于 $\nu^2=1$，任意子是（标准手征）费米子；对于 ν^2 奇整数 ≥ 3，它们是复合费米子；对于 ν^2 偶整数，它们是玻色子。

我们的出发点是椭圆 Calogero–Sutherland 模型的一种已知二次量子化[6]，它由厄米算子 $\mathcal{H}_{3,\,\nu}$ 作用于 $\mathcal{F}$ 给出，并由它与这类任意子算子乘积之间的以下对易关系刻画：

$$[\mathcal{H}_{3,\nu},\phi_\nu(x_1)\cdots\phi_\nu(x_N)]\Omega=\left(H_{N,\nu^2}(\boldsymbol{x})+\tfrac{1}{2}N\nu^4c_0\right)\phi_\nu(x_1)\cdots\phi_\nu(x_N)\Omega \tag{2.3}$$

对任意 $N\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，其中 $H_{N,\ \nu^2}(\boldsymbol{x})$ 是式（1.5）中针对 $g=\nu^2$ [12, 13]的 eCS 哈密顿量。请注意，这与常规二次量子化相似：一个算子 $\mathcal{H}_{3,\ \nu}$作用于福克空间，便可在量子力学模型中描述任意数量 N的粒子；然而，这种方法更为强大，因为它天然适用于底层 eCS 模型的可积性。

在三角极限 $\delta\to\infty$下，可以利用 1+1 时空维数中的手征费米子福克空间 $\mathcal{F}=\mathcal{F}_{\rm c}$ [21]构造这种二次量子化。对于有限的 δ，可将福克空间 $\mathcal{F}$构造为该手征福克空间两份副本的张量积的子空间，以容纳这种二次量子化；这一构造具有有限温度下共形场论的物理诠释 $1/2\delta$ [13]（注意，2δ 在此对应于 [13]中的参数 β）。本文结果的关键在于另一种物理诠释：后一个福克空间也容纳非手征共形场论，即 $\mathcal{F}_{\rm c}\otimes\mathcal{F}_{\rm c}$ 中的手征费米子可以自然地组合成非手征（狄拉克）费米子；利用完整的福克空间 $\mathcal{F}_{\rm c}\otimes\mathcal{F}_{\rm c}$，除了前文描述的任意子 $\phi_\nu(x)$ 之外，还存在代数独立的任意子，我们将其记作 $\phi_{-,\ \nu}(x)$。此外，我们发现 $\mathcal{H}_{3,\ \nu}$ 存在一种自然推广，使得当任意子 $\phi_\nu(x_j)$ 替换为 $\phi_{-,\ \nu}(x_j)$ 时，对于 $j=1$、……、N，式（2.3）仍原样成立。

因此，与 [13]相比，概念上的变化在于：我们在更大的福克空间$\mathcal{F}=\mathcal{F}_{\rm c}\otimes\mathcal{F}_{\rm c}$ 上进行研究，从而增加了自由度。正如备注 3.5中所讨论的，从凝聚态物理学的角度来看，这种变化是自然的，因为它使我们能够将这个非手征共形场论解释为一个 Luttinger模型 [22]。为了强调这两个作用于更大空间的任意子算子 $\mathcal{F}$ 地位平等，以下我们使用符号 $\phi_{+,\nu}(x)$，而不是 $\phi_\nu(x)$，从而可以用 $\phi_{r,\nu}(x)$ 表示两个任意子，其中 $r=\pm$ 为手征性指标。我们还使用简写记号

$$\phi^N_{r,\nu}(\boldsymbol{x}):=\phi_{r,\nu}(x_1)\cdots\phi_{r,\nu}(x_N)\quad(r=\pm,\ N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}), \tag{2.4}$$

其中$\phi^0_{r,\nu}(\boldsymbol{x}):=I$ 是恒等算子。这使我们可以将椭圆 Calogero–Sutherland 模型在 $\mathcal{F}$ 上的这两种二次量子化写为：

$$[\mathcal{H}_{3,\nu},\phi^N_{r,\nu}(\boldsymbol{x})]\Omega=\left(H_{N;\nu^2}(\boldsymbol{x})+\tfrac{1}{2}N\nu^4c_0\right)\phi^N_{r,\nu}(\boldsymbol{x})\Omega\quad(r=\pm). \tag{2.5}$$

为引入更多记号，我们回顾一下：可以利用手征玻色子 $\rho_\pm(x)$从真空 Ω 生成费米子 Fock 空间 $\mathcal{F}_{\rm c}\otimes\mathcal{F}_{\rm c}$，它们满足（形式上的）对易关系

$$[\rho_r(x),\rho_{r'}(x')]=-2\pi{\rm i}r\delta_{r,r'}\partial_x\delta(x-x')\quad(r,r'=\pm) \tag{2.6}$$

对于 $x,\ x'\in[-\ell,\ell]$，其中 $\partial_x:=\frac{\partial}{\partial x}$，$\delta_{r,\ r'}$ 表示克罗内克 delta，而 $\delta(x-x')$ 表示 2ℓ周期狄拉克 δ。[7] 利用这些手征玻色子，上文讨论的任意子场算子（形式上）可表示为

[6]为避免误解，我们强调，这与量子多体物理教材中讨论的传统二次量子化有所不同。[7]我们稍微宽泛地使用了这一术语，因为严格来说，手征玻色子是 $\partial_x^{-1}\rho_\pm(x)$，其反导数隐藏了零模（包括所谓的克莱因因子），而这些对于使其在数学上严谨至关重要。

by

$$\phi_{r,\nu}(x) = {}^{\times}_{\times} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\nu\partial_x^{-1}\rho_r(x)} {}^{\times}_{\times} \quad (r=\pm) \tag{2.7}$$

其中，此处及下文中，${}^{\times}_{\times}\cdots{}^{\times}_{\times}$表示正规序；参见定义 4.1。

2.2 量子 ncILW 方程

我们的第一个主要结果（定理 5.6）表明，上文讨论的共形场论算符 $\mathcal{H}_{3,\nu}$ 可以写成

$$\mathcal{H}_{3,\nu} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\ell}^{\ell} \sum_{r=\pm} {}^{\times}_{\times}\left[\frac{\nu}{3}\rho_r^3 + \frac{(\nu^2-1)}{2}\big(\rho_r T\rho_{r,x} + \rho_{-r}\tilde{T}\rho_{r,x}\big)\right]{}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x \tag{2.8}$$

其中积分算子 T 和 $\tilde{T}$ 定义于（1.3），而 ρ_r 和 $\rho_{r,x}$ 分别是 $\rho_r(x)$ 和 $\partial_x\rho_r(x)$ 的简写；定理 5.6(*a*) 对此公式作出了精确定义。这定义了 ncILW 方程（1.2）的一个量子版本；为说明这一点，我们计算海森堡运动方程 $\rho_{r,t} = \mathrm{i}[\mathcal{H}_{3,\nu},\rho_r](r=\pm)$，并通过改变归一化：$\hat{u} := \nu\rho_+/2$ 和 $\hat{v} := \nu\rho_-/2$，得到

$$\begin{aligned}
&\hat{u}_t + 2\,{}^{\times}_{\times}\hat{u}\hat{u}_x{}^{\times}_{\times} + \frac{1}{2}(\nu^2-1)[T\hat{u}_{xx} + \tilde{T}\hat{v}_{xx}] = 0,\\
&\hat{v}_t - 2\,{}^{\times}_{\times}\hat{v}\hat{v}_x{}^{\times}_{\times} - \frac{1}{2}(\nu^2-1)[T\hat{v}_{xx} + \tilde{T}\hat{u}_{xx}] = 0,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

其中，u 和 v 上的帽子用于将这些变量与其在（1.2）中的经典对应量区分开来；精确定义见定理 5.6(*b*)。在我们的单位制中，（ν^2-1 式（2.9）应解释为$\nu^2-\hbar$，其中普朗克常数为 $\hbar$。因此，在经典极限 $\hbar\to 0$下，算子 $\hat{u}$和 $\hat{v}$ 变为函数，且可以忽略正规序 ${}^{\times}_{\times}\cdots{}^{\times}_{\times}$，（2.9）便化为（1.2）中的 ncILW 方程，其中 $g=\nu^2$。我们最近证明了（1.2）中的经典 ncILW 方程是一个可积孤子方程 [15, 16]。如后文将进一步讨论的，我们猜想由（2.8）定义的该模型的量子版本同样是可积的。

2.3 广义 eCS 模型的二次量子化

我们的第二个主要结果（定理 6.2）涉及 eCS 模型的一种推广。为了阐明这一结果，我们注意到 $\mathcal{H}_{3,\,\nu}$ 在（2.8）中满足

$$\mathcal{H}_{3,\nu} = -\nu^2\mathcal{H}_{3,-1/\nu}. \tag{2.10}$$

这提示我们在（2.5）中将 $\nu\to -1/\nu$ 替换，然后利用（2.10）将 $\mathcal{H}_{3,\,-1/\nu}$ 替换为 $-\mathcal{H}_{3,\,\nu}/\nu^2$，从而得到

$$-\frac{1}{\nu^2}[\mathcal{H}^{3,\nu}, \phi^N_{r,-1/\nu}(\boldsymbol{x})]\Omega = \big(H_{N;1/\nu^2}(\boldsymbol{x}) + \tfrac{1}{2}(N/\nu^4)c_0\big)\,\phi^N_{r,-1/\nu}(\boldsymbol{x})\Omega \quad (r=\pm). \tag{2.11}$$

正如我们将要证明的，只要耦合参数 $g>0$ 是有理数，这一结论就成立；因此，在这种情形下，算子 $\mathcal{H}_{3,\nu}$ 给出了椭圆 Calogero–Sutherland 模型的四重二次量子化。事实上，我们证明了以下一般性结果，其中包括所有这些椭圆 Calogero–Sutherland 模型的二次量子化作为特殊情形：

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{H}_{3,\nu}, \phi^{N_1}_{+,\nu}(\boldsymbol{x})\phi^{M_1}_{+,-1/\nu}(\tilde{\boldsymbol{x}})\phi^{N_2}_{-,\nu}(\boldsymbol{y})\phi^{M_2}_{-,-1/\nu}(\tilde{\boldsymbol{y}})]\Omega\\
&= \big(H_{N_1,M_1,N_2,M_2;\nu^2}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y},\tilde{\boldsymbol{y}}) + c_{N_1,M_1,N_2,M_2;\nu^2}\big)\,\phi^{N_1}_{+,\nu}(\boldsymbol{x})\phi^{M_1}_{+,-1/\nu}(\tilde{\boldsymbol{x}})\phi^{N_2}_{-,\nu}(\boldsymbol{y})\phi^{M_2}_{-,-1/\nu}(\tilde{\boldsymbol{y}})\Omega
\end{aligned} \tag{2.12}$$

对于任意 $N_1, M_1, N_2, M_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，其中 $H_{N_1,M_1,N_2,M_2;g}(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}, \tilde{\boldsymbol{y}})$ 是式（1.9）中的广义椭圆 Calogero–Sutherland 哈密顿量，而常数

$$c_{N_1,M_1,N_2,M_2;g} := \tfrac{1}{2}\big((N_1+N_2)g^2 - (M_1+M_2)/g\big)c_0. \tag{2.13}$$

值得注意的是，将广义 eCS 哈密顿量写成形式（1.6）后，我们可以将（2.12）–（2.13）写为

$$[\mathcal{H}_{3,\nu}, \phi_{r_1,m_1\nu}(x_1)\cdots\phi_{r_N,m_N\nu}(x_N)]\Omega = \Big(H^{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})}_{N;\nu^2}(\boldsymbol{x}) + c^{(\boldsymbol{m})}_{N;\nu}\Big)\,\phi_{r_1,m_1\nu}(x_1)\cdots\phi_{r_N,m_N\nu}(x_N)\Omega \tag{2.14}$$

with

$$c^{(\boldsymbol{m})}_{N;\nu} = \tfrac{1}{2}\nu\sum_{j=1}^{N}(\nu m_j)^3 c_0. \tag{2.15}$$

由此可清楚看出，广义 eCS 哈密顿量（1.6）中的每个粒子都对应一个任意子 $\phi_{r_j,\ m_j\nu}(x_j)$，其中 $r_j = \pm$ 且 $m_j = 1,\ -1/g$。这种记法不仅有助于简洁地陈述结果，也有助于证明结果；精确表述见定理 6.2 。

3 预备知识

我们沿用 [13, 节 2], 中的内容，但对部分记号作了调整；参见注 3.1 和注 3.4。

3.1 福克空间、克莱因因子与海森堡代数

我们定义构造所依托的福克空间 $\mathcal{F}$，以及量子场论算子代数 $\mathcal{A}$。

我们考虑带有恒等式 I 和星运算 $\dagger$ 的 $*$-代数 $\mathcal{A}$，该代数由算子 $a_{r,\ n}$ 和 R_r $(r = \pm,\ n \in \mathbb{Z})$ 生成，并由以下关系刻画

$$[a_{r,n}, a_{r',m}] = n\delta_{n,-m}\delta_{r,r'}I, \quad [a_{r,n}, R_{r'}] = \delta_{n,0}\delta_{r,r'}R_{r'}, \quad R_+R_- = -R_-R_+ \tag{3.1}$$

以及

$$a^\dagger_{r,n} = a_{r,-n}, \quad R^\dagger_r = R^{-1}_r \tag{3.2}$$

对所有的 $r,\ r' = \pm$ 和 $n,\ m \in \mathbb{Z}$ 都成立。我们假设该代数 $\mathcal{A}$ 表示在希尔伯特空间 $\mathcal{F}$ 上，并满足以下条件：(i) 对于 A 上的算子 $\mathcal{F}$，$A^\dagger$ 是其希尔伯特空间伴随；(ii) 满足以下最高权条件，

$$a_{\pm,n}\Omega = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{3.3}$$

其中 $\Omega \in \mathcal{F}$ 为真空；(iii) $\mathcal{F}$ 上的希尔伯特空间内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 满足

$$\langle\Omega, R_+^{\mu_+}R_-^{\mu_-}\Omega\rangle = \delta_{\mu_+,0}\delta_{\mu_-,0} \quad (\mu_\pm \in \mathbb{Z}). \tag{3.4}$$

这些条件不仅完全刻画了 $\mathcal{A}$的表示，同时也提供了一种构造希尔伯特空间 $\mathcal{F}$的方法。事实上，利用 (3.1)–(3.4)，可以验证这些元素

$$\eta = \prod_{r=\pm}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_{r,-n}^{m_{r,n}}}{\sqrt{m_{r,n}!\,n^{m_{r,n}}}}\cdot R_+^{\mu_+}R_-^{\mu_-}\Omega \quad (m_{r,n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \mu_r \in \mathbb{Z}) \tag{3.5}$$

其中仅允许有限多个系数 $m_{r,n}$ 非零，且这些元素构成一组正交归一系。（这里我们稍微滥用了记号，将代数 $\mathcal{A}$ 与其在 $\mathcal{F}$ 上的表示等同起来。）记 $\mathcal{D}$ 为这些元素 η 的复系数有限线性组合所构成的空间，则希尔伯特空间 $\mathcal{F}$ 可由 $\mathcal{D}$ 经过范数完备化得到。这些定义意味着 R_+ 和R_-是作用于 $\mathcal{F}$ 上的酉算子，并且 $R_\pm^\mu$ 有定义当且仅当 $\mu \in \mathbb{Z}$；我们将 $R_\pm$称为 克莱因因子 (更多细节参见 [23])。注意以下关系

$$R_+^{\mu_+} R_-^{\mu_-} R_+^{\nu_+} R_-^{\nu_-} = (-1)^{\mu_-\nu_+} R_+^{\mu_+ + \nu_+} R_-^{\mu_- + \nu_-} = (-1)^{\mu_-\nu_+ - \mu_+\nu_-} R_+^{\nu_+} R_-^{\nu_-} R_+^{\mu_+} R_-^{\mu_-} \tag{3.6}$$

对于任意的 $\mu_\pm$、 $\nu_\pm \in \mathbb{Z}$ 和 $R_\pm^0 = I$。此外，元素 $a_{\pm,\, n}$ 是两组彼此对易的海森堡代数的生成元。

我们引入算子

$$Q_\pm := \nu_0 a_{\pm,0} \tag{3.7}$$

其中 $\nu_0 > 0$ 是下文进一步说明的常数；见（6.1）。由于（ η （3.5）中的所有 $Q_\pm$都是 $\nu_0\mu_\pm$的本征态，其本征值为 $Q_\pm$ 是本征值属于 $\nu_0\mathbb{Z}$的自伴算子。因此，对于所有 $\alpha \in \mathbb{R}$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha Q_\pm}$ 都是作用在 $\mathcal{F}$上的良定义酉算子。我们将 $Q_\pm$ 称为 荷。克莱因因子是升荷算子，具体而言，

$$[Q_r, R_{r'}] = \delta_{r,r'}\nu_0 R_{r'} \quad (r, r' = \pm) \tag{3.8}$$

其中 $\delta_{r、\, r'}$ 是克罗内克 delta。我们还注意到恒等式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha Q_r} R_{r'}^\mu = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_{r,r'}\alpha\mu\nu_0} R_{r'}^\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha Q_r} \quad (\alpha \in \mathbb{R},\, \mu \in \mathbb{Z},\, r = \pm,\, r' = \pm), \tag{3.9}$$

这可由（3.8）中的对易关系推出。

注 3.1。 此处我们使用指标 $r = \pm$ 而非 $A = 1$，以强调其不同的物理解释，详见第 [13] **4.1** 节。注意，此处的 $a_{+、\, n}$ 以及 $a_{-、\, n}$ 分别对应 ρ_1（n）和 $-\hat{}\rho_2$（n）中的 $\hat{}$ [13], ; 后一个关系中负号的含义将在注3.4中解释。

3.2 正规序

我们讨 论 $\mathcal{A}$ 中的一种正规排序方案，并陈述一些我们需要的相关技术结果 d.

定义 3.2。正规序运算 $\overset{\times}{\times}\cdot\overset{\times}{\times}$是一个线性映射 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$，满足

$$\overset{\times}{\times} AB \overset{\times}{\times} = \overset{\times}{\times} BA \overset{\times}{\times} \qquad (A, B \in \mathcal{A}), \tag{3.10}$$

定义如下：对于单项式元素 $M = R_+^{\mu_+} R_-^{\mu_-} a_{r_1,n_1} \cdots a_{r_k,n_k}$，$\mu_\pm \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,$n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ 和 $r_1, \ldots, r_k \in \{\pm\}$，通过以下规则归纳定义

$$\overset{\times}{\times} R_+^{\mu_+} R_-^{\mu_-} \overset{\times}{\times} := R_+^{\mu_+} R_-^{\mu_-} \quad (\mu_+, \mu_- \in \mathbb{Z}) \tag{3.11}$$

and

$$\overset{\times}{\times} M a_{\pm,n} \overset{\times}{\times} = \overset{\times}{\times} a_{\pm,n} M \overset{\times}{\times} := \begin{cases} \overset{\times}{\times} M \overset{\times}{\times}\, a_{\pm,n} & (n \in \mathbb{Z}_{>0}) \\ \frac{1}{2}\big(\overset{\times}{\times} M \overset{\times}{\times}\, a_{\pm,0} + a_{\pm,0} \overset{\times}{\times} M \overset{\times}{\times} \big) & (n = 0) \\ a_{\pm,n} \overset{\times}{\times} M \overset{\times}{\times} & (n \in \mathbb{Z}_{<0}), \end{cases} \tag{3.12}$$

并通过线性将此定义扩展到 $\mathcal{A}$ 的非单项式元素。

此定义意味着 $\,{}^{\times}_{\times} AB {}^{\times}_{\times} = {}^{\times\times}_{\times\times} A {}^{\times\times}_{\times\times} B {}^{\times\times}_{\times\times}$，也就是说，在正规序操作中可以插入更多正规序而不改变结果。为便于后文引用，我们指出 (3.10) 和 $R_- R_+ = -R_+ R_-$ 意味着

$$ {}^{\times}_{\times} R_-^{\mu_-} R_+^{\mu_+} {}^{\times}_{\times} = R_+^{\mu_+} R_-^{\mu_-} = (-1)^{\mu_+\mu_-} R_-^{\mu_-} R_+^{\mu_+} \quad (\mu_+, \mu_- \in \mathbb{Z}). \tag{3.13} $$

定义 3.2 以及 (3.1)–(3.4) 表明，对于固定向量 $\eta, \eta' \in \mathcal{D}$，表达式

$$ \langle \eta, {}^{\times}_{\times} a_{r_1,n_1} \cdots a_{r_k,n_k} {}^{\times}_{\times} \eta' \rangle $$

仅对有限多个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、$n_1$、...、$n_k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ 以及 r_1、...、$r_k \in \{\pm\}$ 的取值非零。因此，表达式

$$ S := s_0 I + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r_1,\dots,r_k = \pm} \sum_{n_1,\dots,n_k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}} s^{r_1,\dots,r_k}_{n_1,\dots,n_k} {}^{\times}_{\times} a_{r_1,n_1} \cdots a_{r_k,n_k} {}^{\times}_{\times}, \tag{3.14} $$

对于任意复数 s_0 和 $s^{r_1,\dots,n_1 \dots}{}^{r_k}_{,,n_k}$，根据 $(\eta, \eta') \mapsto \langle \eta, S\eta' \rangle$，定义了 $\mathcal{D}$ 上的一个半 sesquilinear 形式。

以下　　结果保证了我们所使用的所有量子场论算子都是定义良好的。

引理 3.3. 对于任意 $\mu_\pm \in \mathbb{Z}$, $\alpha_\pm \in \mathbb{C}$，以及 $S = {}^{\times}_{\times} S {}^{\times}_{\times}$ 如 (3.14)，

$$ {}^{\times}_{\times} R_+^{\mu_+} R_-^{\mu_-} \mathrm{e}^{\alpha_+ Q_+} \mathrm{e}^{\alpha_- Q_-} S {}^{\times}_{\times} = \mathrm{e}^{\alpha_+ Q_+/2} \mathrm{e}^{\alpha_- Q_-/2} R_+^{\mu_+} R_-^{\mu_-} \mathrm{e}^{\alpha_+ Q_+/2} \mathrm{e}^{\alpha_- Q_-/2} S \tag{3.15} $$

在 $\mathcal{D}$ 上定义了一个半 sesquilinear 形式。

证明。设 W 满足 ${}^{\times}_{\times} W {}^{\times}_{\times} = W$。反复应用恒等式

$$ {}^{\times}_{\times} a^n_{\pm,0} W {}^{\times}_{\times} = \frac{1}{2} \left({}^{\times}_{\times} a^{n-1}_{\pm,0} W {}^{\times}_{\times} \, a_{\pm,0} + a_{\pm,0} \, {}^{\times}_{\times} a^{n-1}_{\pm,0} W {}^{\times}_{\times} \right) $$

我们得到

$$ {}^{\times}_{\times} a^n_{\pm,0} W {}^{\times}_{\times} = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j_{\pm,0} W a^{n-j}_{\pm,0} $$

其中 $\binom{n}{j}$ 是通常的二项式系数。因此，对于任意的 $\alpha \in \mathbb{C}$，利用指数函数的泰勒级数，

$$ \begin{aligned} {}^{\times}_{\times} \mathrm{e}^{\alpha Q_\pm} W {}^{\times}_{\times} &= {}^{\times}_{\times} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \nu_0 a_{\pm,0})^n}{n!} W {}^{\times}_{\times} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\nu_0)^n}{n!} \, {}^{\times}_{\times} a^n_{\pm,0} W {}^{\times}_{\times} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\nu_0)^n}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j_{\pm,0} W a^{n-j}_{\pm,0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(\alpha\nu_0 a_{\pm,0}/2)^j}{j!} W \frac{(\alpha\nu_0 a_{\pm,0}/2)^{n-j}}{(n-j)!} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha\nu_0 a_{\pm,0}/2)^j}{j!} \right) W \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha\nu_0 a_{\pm,0}/2)^j}{j!} \right) = \mathrm{e}^{\alpha Q/2} W \mathrm{e}^{\alpha Q/2}. \end{aligned} $$

特别是，$\,{}^{\times}_{\times} \mathrm{e}^{\alpha_\pm Q_\pm} R_\pm^{\mu_\pm} {}^{\times}_{\times} = \mathrm{e}^{\alpha_\pm Q_\pm/2} R_\pm^{\mu_\pm} \mathrm{e}^{\alpha_\pm Q_\pm/2}$，并且由于 $[R_\pm, Q_\mp] = [R_\pm, S] = [Q_\pm, S] = [Q_+, Q_-] = 0$，结论得证。 □

3.3 Bogoliubov 变换与顶点算子

我们定义了代数 $\mathcal{A}$ 的一个单参数族表示，它在某个极限情形下退化为上述定义表示。我们还定义并研究了相应的顶点算子。

Let

$$b_{r,n} := c_n a_{r,n} - s_n a_{-r,-n} \quad (n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}), \quad b_{r,0} := a_{r,0} \quad (r = \pm) \tag{3.16}$$

with

$$c_n := \sqrt{\frac{1}{1-q^{2|n|}}}, \quad s_n := \sqrt{\frac{q^{2|n|}}{1-q^{2|n|}}} \quad (n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}) \tag{3.17}$$

以及 q 在 (1.1) 中。利用关系 $c_n^2 - s_n^2 = 1$，容易验证算子 $b_{r,n}$ 满足与算子 $a_{r,n}$相同的关系，即

$$[b_{r,n}, b_{r',m}] = n\delta_{n,-m}\delta_{r,r'}I, \quad [b_{r,n}, R_{r'}] = \delta_{n,0}\delta_{r,r'}R_{r'}, \quad b_{r,n}^\dagger = b_{r,-n} \tag{3.18}$$

对所有 $r, r' = \pm$ 和 $n, m \in \mathbb{Z}$ 均成立。换言之，对每个取值范围为 $0 \leq q < 1$, $\rho(a_{r,n})$ 的 q : $= b_{r,n}$, 以及满足 $\rho(R_r)$: $= R_r$ （对 $r = \pm$ 和 $n \in \mathbb{Z}$ ）的 $*$，都定义了代数 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{F}$ 上的一个 ρ-表示。

注 3.4。我们的 $b_{+,n}$ 对应于 [13, 中的 $\pi(\hat{}\rho(n))$，即]式 (19)a_+；回忆一下这些对应关系：$a_{+,n}$ =$\hat{}\rho_1($ $n)$ 和 $a_{-,n}$ = $-\hat{}\rho_2(n)$，它们导致 Bogoliubov 变换 (3.16) 和 [13, 式 (19)] 中 s_n 项的符号相反。

注 3.5. 值得注意的是，上述构造有如下凝聚态物理解释：存在一个具有特定相互作用的 Luttinger模型哈密顿量，该哈密顿量可通过 Bogoliubov 变换对角化（3.16)–(3.17)；参见 [11, 第 III.A 节]。利用关于 Luttinger模型的众所周知的结果 [22, 第 IV 节], , 可以在 $\mathcal{F}$上构造一个酉算子 $\mathcal{U}$，使其具有以下性质：(i) $b_{r,\ n} = \mathcal{U}^\dagger a_{r,\ n}\mathcal{U}(r = \pm,$ $n \in \mathbb{Z}$);
(ii) 该 Luttinger模型哈密顿量的基态为 $\tilde{}\Omega := \mathcal{U}^\dagger\Omega$，其中 $\tilde{}\Omega$满足最高权条件

$$b_{\pm,n}\tilde{\Omega} = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}). \tag{3.19}$$

条件 (3.19) 与 (3.3) 类似，但涉及经 Bogoliubov 变换的 Heisenberg代数算子$b_{\pm,\ n}$ ，而非$a_{\pm,\ n}$。因此，在我们的模型中有两个不同的真空态：真空 Ω 可解释为非相互作用费米子模型的基态，而 $\tilde{}$真空 Ω 可解释为 Luttinger模型的基态。我们强调，本文所采用的正规序约定是相对于非相互作用真空 Ω 而言的。

现在，我们引入一类对我们有用的算子。

定义 3.6（顶点算子）。对于任意整数向量 $\mu = (\mu_+, \mu_-) \in \mathbb{Z}^2$ 以及复值序列 $\alpha =(\alpha_{r,n})_{r=\pm, n\in\mathbb{Z}}$, 令

$$\Phi_\mu(\alpha) := {}^{\times}_{\times} R_+^{\mu_+} R_-^{\mu_-} \mathrm{e}^{\mathrm{i}J(\alpha)} {}^{\times}_{\times} \tag{3.20}$$

with

$$J(\alpha) := \sum_{r=\pm}\left(\alpha_{r,0}Q_r + \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}} \alpha_{r,n}b_{r,-n}\right) = \sum_{r=\pm}\left(\alpha_{r,0}Q_r + \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}} (\alpha_{r,n}c_n - \alpha_{-r,-n}s_n)a_{r,-n}\right). \tag{3.21}$$

我们称这类算子 $\Phi_\mu(\alpha)$ 为（正则化的）顶点算子。下面是一条关于顶点算子的技术性结论，我们将反复用到。

引理 3.7。 (a) 对于任意整数向量 $\mu=(\mu_+,\mu_-)\in\mathbb{Z}^2$ 以及复值序列$\alpha=(\alpha_{r,n})_{r=\pm,n\in\mathbb{Z}}$，顶点算子 $\Phi_\mu(\alpha)$ 在 (3.20) 中是定义良好的半双线性型，定义在 $\mathcal{D}$上，并满足

$$\Phi_\mu(\alpha)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{r=\pm}\alpha_{r,0}Q_r/2}R_+^{\mu_+}R_-^{\mu_-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{r=\pm}\alpha_{r,0}Q_r/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}J^+(\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}J^-(\alpha)} \tag{3.22}$$

其中

$$\begin{aligned}J^+(\alpha)&:=\sum_{r=\pm}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{r,n}c_n-\alpha_{-r,-n}s_n)a_{r,-n},\\ J^-(\alpha)&:=\sum_{r=\pm}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{r,-n}c_n-\alpha_{-r,n}s_n)a_{r,n},\end{aligned} \tag{3.23}$$

也就是说， $J^+(\alpha)$ 和 $J^-(\alpha)$ 分别是 $J(\alpha)$ 的产生部分和湮灭部分，满足

$$J^-(\alpha)\Omega=J^+(\alpha)^\dagger\Omega=0. \tag{3.24}$$

(b) 对于满足以下条件的 $\alpha=(\alpha_{r,n})_{r=\pm,n\in\mathbb{Z}}$ ，顶点算子 $\Phi_\mu(\alpha)$

$$\sum_{r=\pm}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n||\alpha_{r,n}|^2<\infty \tag{3.25}$$

生成一个 $*$ -代数，其由定义在定义域 $\mathcal{D}$ 上的良定义半双线性型构成，并满足星关系由 n 给出

$$\Phi_\mu(\alpha)^\dagger=(-1)^{\mu_+\mu_-}\Phi_{-\mu}(-\alpha^*) \tag{3.26}$$

其中

$$(\alpha^*)_{r,n}:=\overline{\alpha_{r,-n}} \tag{3.27}$$

其中上横线表示复共轭，乘法规则为

$$\Phi_\mu(\alpha)\Phi_{\mu'}(\beta)=\chi_{\mu,\mu'}(\alpha,\beta)\Phi_{\mu+\mu'}(\alpha+\beta)=\frac{\chi_{\mu,\mu'}(\alpha,\beta)}{\chi_{\mu',\mu}(\beta,\alpha)}\Phi_{\mu'}(\beta)\Phi_\mu(\alpha) \tag{3.28}$$

其中 $(\mu+\mu')_\pm:=\mu_\pm+\mu'_\pm$、$(\alpha+\beta)_{r,\ n}:=\alpha_{r,\ n}+\beta_{r,\ n}$，

$$\chi_{\mu,\mu'}(\alpha,\beta):=(-1)^{\mu_-\mu'_+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{r=\pm}(\alpha_{r,0}\mu'_r-\beta_{r,0}\mu_r)\nu_0/2}\mathrm{e}^{-[J^-(\alpha),J^+(\beta)]} \tag{3.29}$$

and

$$[J^-(\alpha),J^+(\beta)]=\sum_{r=\pm}\sum_{n=1}^{\infty}n\big(c_n^2\alpha_{r,-n}\beta_{r,n}+s_n^2\alpha_{r,n}\beta_{r,-n}-c_ns_n(\alpha_{-r,n}\beta_{r,n}+\alpha_{-r,-n}\beta_{r,-n})\big). \tag{3.30}$$

此外，

$$\langle\Omega,\Phi_\mu(\alpha)\Omega\rangle=\delta_{\mu_+,0}\delta_{\mu_-,0}. \tag{3.31}$$

(c) 任意数量 N 个顶点算子 $\Phi_{\mu_j}(\alpha_j)$（$j=1$、...、N）的乘积在 $*$ 代数在上文（b）中定义，与其正规序形式的关系如下，

$$\Phi_{\mu_1}(\alpha_1)\cdots\Phi_{\mu_N}(\alpha_N)=\prod_{1\le j<k\le N}\chi_{\mu_j,\mu_k}(\alpha_j,\alpha_k)^{\times}_{\times}\Phi_{\mu_1}(\alpha_1)\cdots\Phi_{\mu_N}(\alpha_N)^{\times}_{\times} \tag{3.32}$$

与 $\chi_{\mu,\mu'}(\alpha,\beta)$ 见（3.29）。此外，这种乘积的真空期望值

$$\langle\Omega,\Phi_{\mu_1}(\alpha_1)\cdots\Phi_{\mu_N}(\alpha_N)\Omega\rangle, \tag{3.33}$$

仅当 $\sum_{j=1}^{N}(\mu_j)_r=0$ 对于 $r=\pm$ 时才非零；若属于这种情形，其值等于

$$\prod_{1\le j<k\le N}\chi_{\mu_j,\mu_k}(\alpha_j,\alpha_k). \tag{3.34}$$

（d）如果 α 满足条件（3.25），并且在如下意义下为实数：$\alpha=\alpha^*$（见下文注释*4*），那么 $\Phi_\mu(\alpha)$ 正比于作用于 $\mathcal{F}$ 上的酉算子。

为方便读者，我们将在下文给出这个引理的简明自包含证明。在此之前，先作几点说明。

1. 引理3.7 中总结的结果广为人知，尽管通常采用不同的语言来表述（例如，可从[13, 23], 追踪到一些相关文献）。

2. 引理3.7（a）和（c）保证了本文其余部分中的计算都有明确定义。简言之，我们采用的策略如下。正如将会看到的，任意子是序列$\Phi_\mu(\alpha)$对应的顶点算子，其中序列 α 满足$\alpha_{r,n}\propto \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\kappa x}/\mathrm{i}n$（$n\in\mathbb{Z}_{\neq0}$，$x\in\mathbb{R}$并且对于这类序列，条件（3.25）不成立；这与任意子并非算子、而是算子值分布这一事实相对应。不过，我们可以通过如下方式对相关序列 α 进行正则化，从而精确定义任意子：

$$\alpha_{r,n}\to \mathrm{e}^{-2\kappa\epsilon|n|}\alpha_{r,n}\quad(n\in\mathbb{Z}_{\neq0})$$

带有 $\epsilon>0$ 正则化参数。正则化顶点算子与酉算子成正比，可以毫无问题地相乘；计算完成后，可以取极限，去掉所有正则化参数。这可以看作是对一种著名策略的推广：将 2ℓ-周期狄拉克 δ 函数 $\delta(x)$视为以下 C^∞-函数在 $\epsilon\to0^+$时的极限，从而赋予其数学意义，

$$\delta(x;\epsilon):=\frac{1}{2\ell}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}nx-|n|\epsilon)}\quad(x\in\mathbb{R},\epsilon>0). \tag{3.35}$$

3. 如下文将更详细说明，乘法规则（3.28）–（3.30）是（3.9）、（3.13）以及适用于具有 A 和 B且其对易子为 $\mathbb{C}$数的算子的 Baker-Campbell-Hausdorff 公式的直接推论：

$$[A,B]=cI\Rightarrow \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B=\mathrm{e}^{c/2}\mathrm{e}^{A+B}=\mathrm{e}^c\mathrm{e}^B\mathrm{e}^A\qquad(c\in\mathbb{C}). \tag{3.36}$$

在实际进行顶点算子计算时，通常直接使用（3.9）、（3.13）和（3.36），往往更为方便（而不是使用（3.28）–（3.30））。

4. 为了说明上述定义的对合 $*$，我们回顾一下，通过逆傅里叶变换，序列对 $\alpha=(\alpha_{r,n})_{r=\pm,n\in\mathbb{Z}}$ 可以自然地对应于圆上的一对复值函数，

$$\check{\alpha}_r(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_{r,n}\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}nx}\quad(r=\pm,x\in[-\ell,\ell]).$$

在这一对应关系下，α^* 对应于复共轭函数 $\overline{\check{\alpha}_r(x)}$。特别地，$\alpha=\alpha^*$ 当且仅当函数 $\overline{\check{\alpha}_r(x)}$ 为实值函数。

5. 满足 $\mu=(\mu_+,\mu_-)\in\mathbb{Z}^2$ 且 $\mathbb{C}$ 值序列 $\alpha=(\alpha_{r,n})_{r=\pm,n\in\mathbb{Z}}$以及 $\alpha=\alpha^*$ 和 (3.25) 的有序对 (μ,α) 的集合在加法运算下构成一个阿贝尔群。式 (3.29) 中定义的函数 $\chi_{\mu,\mu'}(\alpha,\beta)$ 是该群的一个非平凡 2-余循环，而 $(\mu,\alpha)\mapsto\Phi_\mu(\alpha)$ 是该群的一个射影表示。该群是环群的一个重要例子（通常将 α 解释为一对函数，如上文注释 4 所述）。

引理 *3.7* 的证明。 (a) 这由引理 3.3 得出（将指数函数理解为泰勒级数）。

(b) 根据 3.21 中 $J(\alpha)$ 的定义，可得 $J(\alpha)^\dagger=J(\alpha^*)$，进而可得 $J^\pm(\alpha)^\dagger=J^\mp(\alpha^*)$；见式（3.23）。因此，利用式（3.22）、（3.2）和（3.13），

$$\begin{aligned}\Phi_\mu(\alpha)^\dagger&=\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{r=\pm}\alpha_{r,0}Q_r/2}R_+^{\mu_+}R_-^{\mu_-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{r=\pm}\alpha_{r,0}Q_r/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}J^+(\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}J^-(\alpha)}\big)^\dagger\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_{r=\pm}\overline{\alpha_{r,0}}Q_r/2}R_-^{-\mu_-}R_+^{-\mu_+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_{r=\pm}\overline{\alpha_{r,0}}Q_r/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}J^+(\alpha^*)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}J^-(\alpha^*)}=(-1)^{\mu_+\mu_-}\Phi_{-\mu}(-\alpha^*).\end{aligned}$$

乘法规则（3.28）可由式（3.6）、（3.9）、（3.22）以及 Baker-Campbell-Hausdorff 公式（3.36）推出；事实上，这些公式意味着

$$\begin{aligned}\Phi_\mu(\alpha)\Phi_{\mu'}(\beta)&=\,^{\times}_{\times}R_+^{\mu_+}R_-^{\mu_-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}J(\alpha)}\,^{\times\times}_{\times\times}R_+^{\mu'_+}R_-^{\mu'_-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}J(\beta)}\,^{\times}_{\times}\\&=(-1)^{\mu_-\mu'_+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{r=\pm}(\alpha_{r,0}\mu'_r-\beta_{r,0}\mu_r)\nu_0/2}\mathrm{e}^{-[J^-(\alpha),J^+(\beta)]}\,^{\times}_{\times}R_+^{\mu_++\mu'_+}R_-^{\mu_++\mu'_-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}J(\alpha+\beta)}\,^{\times}_{\times}\end{aligned}\tag{3.37}$$

由此得到式（3.28）。另一方面，由式（3.1）和（3.23），我们可推得

$$\begin{aligned}[J^-(\alpha),J^+(\beta)]&=\sum_{r,r'=\pm}\sum_{n,m=1}^{\infty}(\alpha_{r,-n}c_n-\alpha_{-r,n}s_n)(\beta_{r',m}c_m-\beta_{-r',-m}s_m)\underbrace{[a_{r,n},a_{r',-m}]}_{\delta_{r,r'}n\delta_{n,m}}\\&=\sum_{r=\pm}\sum_{n=1}^{\infty}n\big(c_n^2\alpha_{r,-n}\beta_{r,n}+s_n^2\alpha_{-r,n}\beta_{-r,-n}-c_ns_n(\alpha_{-r,n}\beta_{r,n}+\alpha_{r,-n}\beta_{-r,-n})\big).\end{aligned}\tag{3.38}$$

在其中两项中改变 $r\to-r$，可得式（3.30）。最后，式（3.31）由式（3.4）和（3.22）得出。

(c) 注意到，根据 (3.22)，

$$\,^{\times}_{\times}\Phi_{\mu_1}(\alpha_1)\cdots\Phi_{\mu_N}(\alpha_N)\,^{\times}_{\times}=\Phi_{\mu_1+\cdots+\mu_N}(\alpha_1+\cdots+\alpha_N),\tag{3.39}$$

因此 (3.32) 等价于

$$\Phi_{\mu_1}(\alpha_1)\cdots\Phi_{\mu_N}(\alpha_N)=\prod_{1\le j<k\le N}\chi_{\mu_j,\mu_k}(\alpha_j,\alpha_k)\Phi_{\mu_1+\cdots+\mu_N}(\alpha_1+\cdots+\alpha_N)\tag{3.40}$$

对所有 $N=2,3,\ldots\ldots$。这可以用归纳法证明：当 $N=2$ 时，(3.40) 是 (3.28) 中的第一个恒等式，而从 N 到 $N+1$ 的归纳步骤由 (3.28) 中的第一个恒等式推出，因为

$$\chi_{\mu_1+\cdots+\mu_N,\mu_{N+1}}(\alpha_1+\cdots+\alpha_N,\alpha_{N+1})=\prod_{j=1}^{N}\chi_{\mu_j,\mu_{N+1}}(\alpha_j,\alpha_{N+1})\tag{3.41}$$

由（3.29）以及映射 $\alpha\mapsto J^-(\alpha)$ 是线性的这一事实。结合（3.40）和（3.31），即可得到关于（3.33）中真空期望值的所述结果。

（d）要理解这一点，注意到（3.9）、（3.22）和（3.36）意味着

$$\Phi_\mu(\alpha) = \mathrm{e}^{\sum_{r=\pm} \mathrm{i}\nu_0\alpha_{r,0}\mu_r/2}\mathrm{e}^{[J^-(\alpha),J^+(\alpha)]/2}U_\mu(\alpha) \tag{3.42}$$

with

$$U_\mu(\alpha) := R_+^{\mu_+}R_-^{\mu_-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}J(\alpha)} \tag{3.43}$$

（回忆一下 $\sum_{r=\pm}\alpha_{r,0}Q_r + J^+(\alpha) + J^-(\alpha) = J(\alpha)$）。假设 $\alpha = \alpha^*$，则有

$$[J^-(\alpha), J^+(\alpha)] = \sum_{r=\pm}\sum_{n=1}^{\infty} n\big(c_n^2 + s_n^2\big)|\alpha_{r,n}|^2 - 2\sum_{r=\pm}\sum_{n=1}^{\infty} nc_n s_n \mathrm{Re}(\alpha_{r,n}\alpha_{-r,n}), \tag{3.44}$$

当且仅当满足（3.25）中的条件时，这些求和才是有限的[8] 并且，在这种情形下， $U_\mu(\alpha)$ 是一个酉算子： $U_\mu(\alpha)U_\mu(\alpha)^\dagger = U_\mu(\alpha)^\dagger U_\mu(\alpha) = I$。 □

4 任意子与椭圆 Calogero–Sutherland 模型

我们将对任意子以及椭圆 Calogero–Sutherland 模型的二次量子化给出精确定义。这推广了[13]中的结果。

4.1 任意子

任意子可以作为顶点算子的特殊情形得到，具体如下。

定义 4.1（任意子）。统计参数为 $\nu \in \nu_0\mathbb{Z}$ 且位置为 $x \in [-\ell, \ell]$ 的（正则化）任意子定义为

$$\phi_{r,\nu}(x;\epsilon) := {}^{\times}_{\times} R_r^{\nu/\nu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu(2r\kappa Q_r x + K_r(x;\epsilon))}{}^{\times}_{\times} \quad (r = \pm) \tag{4.1}$$

with

$$K_r(x;\epsilon) := \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}} \frac{1}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}nrx - |n|\epsilon)}b_{r,n}. \tag{4.2}$$

为说明这一点，我们注意到， $\phi_\epsilon(x)$ 中定义的任意子[13, 式（37）] 可以与我们的任意子 $\phi_{+,\,\nu}(x;\ \epsilon)$ [9] 相对应。正如我们在此处的论述所清楚表明的，另有一组独立的任意子 $\phi_{-,\,\nu}(x;\ \epsilon)$，它们与任意子 $\phi_{+,\,\nu}(x;\ \epsilon)$ 处于同等地位，唯一的区别是参数 x 的自变量发生了符号变化：对这组其他任意子的朴素选择应为

$$\tilde{\phi}_\epsilon(x) := \phi_{-,\nu}(-x;\epsilon), \tag{4.3}$$

如果不进行这一符号变化。我们之所以进行这一符号变化，其原因将在下面总结式（4.1）中所定义任意子的性质的结果中变得清楚：当且仅当进行这一符号变化时，我们才能得到平移不变的任意子关联函数；参见（4.13）。正如第5节将进一步阐述的，这一符号变化对我们结果的物理解释产生了深远影响。

现在我们总结任意子的各种性质。

[8]由于 $c_n^2 = 1 + s_n^2$ 并且 s_n 趋于零的速度如同 q^n 当 $n \to \infty$时，（3.25）决定了这些和的收敛性。[9]注意，Q，ν，以及 $\mu\nu$ 在[13, 式（37）] 中分别对应于 Q_+/ν_0，ν_0 以及此处的 ν。

命题 4.2. (*a*) 任意子 $\phi_{r,\ \nu}(x;\ \epsilon)$ 与 $\mathcal{F}$ 上的酉算子成比例，并且满足

$$\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\phi_{r',\nu'}(x';\epsilon') = (-1)^{\delta_{r,-}\delta_{r',+}\nu\nu'/\nu_0^2}\theta_{r,r'}(x-x';\epsilon+\epsilon')^{\nu\nu'}\ {}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\phi_{r',\nu'}(x';\epsilon')^{\times}_{\times} \tag{4.4}$$

对于所有 ν、$\nu' \in \nu_0\mathbb{Z}$、r、$r' \in \{\pm\}$、x、$x' \in [-\ell,\ell]$ 以及 ϵ、$\epsilon' > 0$，其中包含特殊函数

$$\theta_{r,r'}(x;\epsilon) \coloneqq \begin{cases} \tilde{\theta}_1(r\kappa x, q;\kappa\epsilon) & (r = r') \\ \tilde{\theta}_4(\kappa x, q;\kappa\epsilon) & (r = -r') \end{cases} \qquad (r, r' = \pm), \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_1(x,q;\epsilon) &\coloneqq (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x-2\epsilon})\prod_{m=1}^{\infty}\big(1-q^{2m}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x-2\epsilon}\big)\big(1-q^{2m}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x-2\epsilon}\big), \\ \tilde{\theta}_4(x,q;\epsilon) &\coloneqq \prod_{m=1}^{\infty}\big(1-q^{2m-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x-2\epsilon}\big)\big(1-q^{2m-1}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x-2\epsilon}\big). \end{aligned} \tag{4.6}$$

(*b*) 任意子满足交换关系

$$\phi_{\nu,r}(x;\epsilon)\phi_{\nu',r'}(x';\epsilon') = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu\nu'\mathrm{sgn}(r(x-x');\epsilon+\epsilon')}\phi_{\nu',r'}(x';\epsilon')\phi_{\nu,r}(x;\epsilon) & (r' = r) \\ (-1)^{\nu\nu'/\nu_0^2}\phi_{\nu',r'}(x';\epsilon')\phi_{\nu,r}(x;\epsilon) & (r' = -r) \end{cases} \tag{4.7}$$

with

$$\mathrm{sgn}(x;\epsilon) \coloneqq -\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\log\left(\frac{1-\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}x-\epsilon)}}{\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-2\kappa\epsilon}}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}, \epsilon > 0) \tag{4.8}$$

对于所有 ν、$\nu' \in \nu_0\mathbb{Z}$、r、$r' \in \{\pm\}$、x、$x' \in [-\ell,\ell]$ 以及 ϵ、$\epsilon' > 0$，其中对数分支的选取使得 $\mathrm{sgn}(x;\ \epsilon)$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 连续，且 $\mathrm{sgn}(0;\epsilon) = 0$。

(*c*) 任意子的伴随算子如下，

$$\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)^{\dagger} = \phi_{r,-\nu}(x;\epsilon), \tag{4.9}$$

以及以下周期性，

$$\phi_{r,\nu}(x+2\ell;\epsilon) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\pi\nu Q_r}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\pi\nu Q_r} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\pi\nu^2}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu Q_r}, \tag{4.10}$$

对于所有 $\nu \in \nu_0\mathbb{Z}$、$x \in [-\ell,\ell]$ 和 $\epsilon > 0$。

(*d*) 任意多个任意子组成的乘积与其正规序形式之间的关系如下，N

$$\begin{aligned} &\phi_{\nu_1,r_1}(x_1;\epsilon_1)\cdots\phi_{\nu_N,r_N}(x_N;\epsilon_N) \\ &\quad= \prod_{1\le j<k\le N}(-1)^{\delta_{r_j,-}\delta_{r_k,+}\nu_j\nu_k/\nu_0^2}\theta_{r_j,r_k}(x_j-x_k;\epsilon_j+\epsilon_k)^{\nu_j\nu_k} \\ &\qquad\qquad \times\ {}^{\times}_{\times}\phi_{\nu_1,r_1}(x_1;\epsilon_1)\cdots\phi_{\nu_N,r_N}(x_N;\epsilon_N)^{\times}_{\times}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

使用 (4.5)–(4.6) 中的特殊函数，对所有 $\nu_j \in \nu_0\mathbb{Z}$、$r_j \in \{\pm\}$、$x_j \in [-\ell,\ell]$ 和 $\epsilon_j > 0$（$j = 1,$ ....., N）均成立。因此，关联函数 $\langle\Omega\,\phi_{\nu_1,\ r_1}(x_1;\ \epsilon_1)\cdots\phi_{\nu_N,\ r_N}(x_N;\ \epsilon_N)\Omega\rangle$ 非零，当且仅当右手性和左手性粒子的以下总电荷均为零，

$$Q_{\pm} \coloneqq \sum_{j=1}^{N}\delta_{\pm,r_j}\nu_j/\nu_0; \tag{4.12}$$

更具体地说，

$$\langle\Omega, \phi_{\nu_1,r_1}(x_1;\epsilon_1)\cdots\phi_{\nu_N,r_N}(x_N;\epsilon_N)\Omega\rangle \\ = \delta_{Q_+,0}\delta_{Q_-,0}\prod_{1\le j<k\le N}(-1)^{\delta_{r_j,-\delta_{r_k},+\nu_j\nu_k/\nu_0^2}}\theta_{r_j,r_k}(x_j-x_k;\epsilon_j+\epsilon_k)^{\nu_j\nu_k}. \quad (4.13)$$

在给出命题 4.2 的证明之前，我们先作几点说明，并定义稍后会用到的特殊函数。

1. 式（4.8）中定义的函数 $\mathrm{sgn}(x;\epsilon)$ 是符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$ 的正则化版本（其中 $\mathrm{sgn}(\pm1)$ 在 $x\gtrless0$ 时等于 ±1，在 $x=0$ 时等于 $\epsilon\to0^+$，分别如此）：极限 $x\mathrm{sgn}(x;\epsilon)$ 和 $x\mathrm{sgn}(x-z;\epsilon)$。一种推导方法是利用 log() 的泰勒级数和解析延拓，得到

$$\mathrm{sgn}(x;\epsilon)=\frac{x}{\ell}+\frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq0}}\frac{1}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}nx-|n|\epsilon)}, \quad (4.14)$$

这意味着 $\mathrm{sgn}(-x;\epsilon)=-\mathrm{sgn}(x;\epsilon)$，且 $\partial_x\mathrm{sgn}(x;\epsilon)=2\delta(x;\epsilon)$，其中 $\delta(x;\epsilon)$ 是式（3.35）中定义的正则化狄拉克δ函数（回忆一下 $\kappa/\pi=1/2\ell$）；关于 $\mathrm{sgn}(x;\epsilon)$ 的后两个条件有唯一解，当 $\epsilon\to0^+$ 取极限时，该解等于 $\mathrm{sgn}(x)$。因此，式（4.7）明确表述并推广了式（2.1）中的交换关系。

2. 任意子是费米子的一种推广；费米子对应于特殊情形 $\nu=\pm1$。另一个对物理应用很重要的特殊情形是复合费米子，对应于 ν，$\nu'=\pm\sqrt{r_0}$ 以及 $\nu_0=1/\sqrt{r_0}$（例如[10]），其中 $r_0>0$ 是奇整数：在这些情形下，（4.7）中的所有交换关系都变为反对易关系。

3. 命题 4.2 中的一个重要组成部分是特殊函数 $\tilde\theta_1(x,q;\epsilon)$ 和 $\tilde\theta_4(x,q;\epsilon)$（见（4.6）：对任意子乘积进行正规序时会出现这些函数；同时，它们也是任意子关联函数的构成基块。记作

$$\tilde\theta_1(x,q;\epsilon)=-2\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\epsilon}\sin(x+\mathrm{i}\epsilon)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-2q^{2m}\mathrm{e}^{-2\epsilon}\cos(2x)+q^{4m}\mathrm{e}^{-4\epsilon}\right), \\ \tilde\theta_4(x,q;\epsilon)=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-2q^{2m-1}\mathrm{e}^{-2\epsilon}\cos(2x)+q^{4m-2}\mathrm{e}^{-4\epsilon}\right) \quad (4.15)$$

可以看出，$\tilde\theta_1(x,q;\epsilon)$ 和 $\tilde\theta_4(x,q;\epsilon)$ 在 $\epsilon\to0^+$ 极限下，分别与雅可比 theta 函数 $\theta_1(x,q)$ 和 $\theta_4(x,q)$ 成正比。事实上，将（4.15）与（A.4）进行比较可知，

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\tilde\theta_1(x,q;\epsilon)=\frac{\theta_1(x,q)}{\mathrm{i}q^{1/4}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})}, \qquad \lim_{\epsilon\to0^+}\tilde\theta_4(x,q;\epsilon)=\frac{\theta_4(x,q)}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})}.$$

因此，我们将 $\tilde\theta_1(x,q;\epsilon)$ 和 $\tilde\theta_4(x,q;\epsilon)$ 分别视为 theta 函数 $\theta_1(x,q)$ 和 $\theta_4(x,q)$ 的正则化版本（归一化差异与我们的讨论无关）。

4. 我们注意到以下关系：

$$\tilde\theta_1(\kappa(x+\mathrm{i}\delta),q;\epsilon)=q^{-1/2}\mathrm{e}^{-\kappa\mathrm{i}x}\tilde\theta_4(\kappa x,q;\epsilon), \quad (4.16)$$

利用定义（4.6）和 $\mathrm{e}^{-2\kappa\delta}=q$ 即可验证。这推广了 theta 函数 $\theta_1(x,q)$ 与 $\theta_4(x,q)$ 之间一个众所周知的关系；见（A.8）。

[10] 如引理 6.1 之后的解释所示，ν_0 并非唯一；例如，若 $\sqrt{r_0}$ 是一个奇整数，也可以选择 $\nu_0=1$。

为后续使用，我们定义与函数 $\theta_{r,\ r'}(x;\ \epsilon)$ 密切相关的函数。这些函数在（4.5）中定义，并将在第 4.2 节和第6节中发挥重要作用。

定义 4.3。正则化 eCS 势为

$$\wp_{r,r'}(x;\epsilon) \coloneqq -\partial_x^2 \log \theta_{r,r'}(x;\epsilon) \quad (r,r'=\pm) \tag{4.17}$$

对所有 $x \in [-\ell,\ell]$ 和 $\epsilon > 0$。

注意，这个定义、（4.5）、（4.15）和（4.16）意味着[11]

$$\wp_{r,r'}(x;\epsilon) = \begin{cases} \wp_1(x;\epsilon) & (r=r') \\ \wp_1(x+\mathrm{i}\delta;\epsilon) & (r=-r') \end{cases} \quad (r,r'=\pm) \tag{4.18}$$

with

$$\wp_1(x;\epsilon) \coloneqq -\partial_x^2 \log\Big(\sin(\kappa(x+\mathrm{i}\epsilon)) \prod_{m=1}^{\infty} \big(1-2q^{2m}\mathrm{e}^{-2\kappa\epsilon}\cos(2\kappa x)+q^{4m}\mathrm{e}^{-4\kappa\epsilon}\big)\Big) \tag{4.19}$$

修正后的魏尔斯特拉斯函数的正则化版本 $\wp_1(x) = -\partial_x\zeta_1(x)$：$\lim_{\epsilon\to 0^+}\wp_1(x;\epsilon) = \wp_1(x)$；参见（A.6）。

命题 *4.2* 的证明。（a）我们注意到，任意子是定义 3.6 中的顶点算子：$\phi_{r,\ \nu}(x;\epsilon) = \Phi_\mu(\alpha)$，其中 $\mu = (\mu_+,\mu_-) \in \mathbb{Z}^2$ 和 $\alpha = (\alpha_{r',\ n})_{r'=\pm,\ n\in\mathbb{Z}}$ 由下式给出

$$\mu_{r'} = \delta_{r,r'}\frac{\nu}{\nu_0}, \quad \alpha_{r',0} = -2r\delta_{r,r'}\nu\kappa x, \quad \alpha_{r',n} = \frac{\delta_{r,r'}}{\mathrm{i}n}\nu\mathrm{e}^{-2\kappa(\mathrm{i}r'nx+|n|\epsilon)} \quad (n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}); \tag{4.20}$$

因为 $\alpha = \alpha^*$（即，$\alpha_{r',\ n} = \alpha_{r',\ -n}$）且 $\sum_{r'=\pm}\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_{r',\ n}|^2 < \infty$，引理3.7（$d$）表明 $\phi_{r,\ \nu}(x;\ \epsilon)$ 与一个酉算子成比例。（4.4）的证明较为冗长，因此推迟到证明的最后给出。

（b）设 $\mu = (\mu_+,\ \mu_-)$ 和 $\alpha = (\alpha_{r',\ n})_{r'=\pm,\ n\in\mathbb{Z}}$ 如（4.20）中所述，使得 $\phi_{r,\ \nu}(x;\ \epsilon) = \Phi_\mu(\alpha)$。类似地，设 $\mu' = (\mu'_+,\ \mu'_-)$ 和 $\alpha' = (\alpha'_{r'',\ n})_{r''=\pm,\ n\in\mathbb{Z}}$ 满足 $\phi_{r',\ \nu'}(x';\ \epsilon') = \Phi_{\mu'}(\alpha')$。那么，恒等式（3.28）中的第一个恒等式和（4.4）表明

$$\chi_{\mu,\mu'}(\alpha,\alpha') = (-1)^{\delta_{r,-}\delta_{r',+}\nu\nu'/\nu_0^2}\theta_{r,r'}(x-x';\epsilon+\epsilon')^{\nu\nu'}. \tag{4.21}$$

结合（3.28）中的第二个恒等式以及关系式 $(-1)^{\delta_{r,\ -}\delta_{r',\ +}-\delta_{r',\ -}\delta_{r,\ +}} = (-1)^{\delta_{r,\ -r'}}$，可得

$$\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\phi_{r',\nu'}(x';\epsilon') = (-1)^{\delta_{r,-r'}\nu\nu'/\nu_0^2}\left(\frac{\theta_{r,r'}(x-x';\epsilon+\epsilon')}{\theta_{r',r}(x'-x;\epsilon+\epsilon')}\right)^{\nu\nu'}\phi_{r',\nu'}(x';\epsilon')\phi_{r,\nu}(x;\epsilon). \tag{4.22}$$

我们使用（4.5）–（4.6）来计算 $r'=r$，

$$\frac{\theta_{r,r}(x-x';\epsilon+\epsilon')}{\theta_{r,r}(x'-x;\epsilon+\epsilon')} = \frac{\tilde\theta_1(r\kappa(x-x'),q;\kappa(\epsilon+\epsilon'))}{\tilde\theta_1(r\kappa(x'-x),q;\kappa(\epsilon+\epsilon'))} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa r(x-x')}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa r(x-x')-2\kappa(\epsilon+\epsilon')}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa r(x-x')}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa r(x-x')-2\kappa(\epsilon+\epsilon')}}$$
$$= \frac{1-\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}r(x-x')-(\epsilon+\epsilon'))}}{\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}r(x-x')}-\mathrm{e}^{-2\kappa(\epsilon+\epsilon')}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\mathrm{sgn}(r(x-x');\epsilon+\epsilon')}$$

[11]利用 $\wp_1(-x;\ \epsilon) = \wp_1(x;\ \epsilon)$。

其中 sgn（x； ϵ）见（4.8），对于 $r'=-r$,

$$\frac{\theta_{r,-r}(x-x';\epsilon+\epsilon')}{\theta_{r,-r}(x'-x;\epsilon+\epsilon')}=\frac{\tilde{\theta}_4(\kappa(x-x'),q;\kappa(\epsilon+\epsilon'))}{\tilde{\theta}_4(\kappa(x'-x),q;\kappa(\epsilon+\epsilon'))}=1;$$

将其代入（4.22）可得（4.7）–（4.8）。

（c）我们将（3.22）–（3.23）特化，写出任意子为

$$\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\kappa Q_r rx}R_r^{\nu/\nu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\kappa Q_r rx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu K_r^+(x;\epsilon)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu K_r^-(x;\epsilon)}\quad(r=\pm)\tag{4.23}$$

其中（回顾（3.16）–（3.17））

$$\begin{aligned}K_r^+(x;\epsilon)&:=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{i}n}\Big(\mathrm{e}^{2\kappa(-\mathrm{i}nrx-n\epsilon)}c_n a_{r,-n}+\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}nrx-n\epsilon)}s_n a_{-r,-n}\Big),\\K_r^-(x;\epsilon)&:=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{i}n}\Big(\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}nrx-n\epsilon)}c_n a_{r,n}+\mathrm{e}^{2\kappa(-\mathrm{i}nrx-n\epsilon)}s_n a_{-r,n}\Big),\end{aligned}\tag{4.24}$$

分别是 K_r（x； ϵ）在（4.1）中对应于 $+$ 和 $-$的产生部分和湮灭部分。注意，$K_r^{\pm}$满足 $K_r^{\pm}$（x； ϵ）$^{\dagger}=K_r^{\mp}$（x； ϵ），这是（3.2）的结果。结合这一点和（4.23），利用（3.2）进行如下计算，即可验证（3.2），

$$\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)^{\dagger}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\nu\kappa Q_r x}R_r^{-\nu/\nu_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\nu\kappa Q_r x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu K_r^+(x;\epsilon)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu K_r^-(x;\epsilon)}=\phi_{r,-\nu}(x;\epsilon).\tag{4.25}$$

根据任意子的定义（4.1）–（4.2）以及 2ℓ-周期性可得 K_r（x； ϵ），从而得到（4.10）中的第一个等式。（4.10）中的第二个等式则由（3.9）推出。

（d）这是引理3.7(c) 的特殊情形，使用了（4.21）（详情请参见上文（a）的证明）。

最后我们证明（4.4）。首先，我们结合（4.23）与（3.9），并利用 Baker-Campbell-Hausdorff 公式（3.36）进行计算，得到

$$\begin{aligned}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\phi_{r',\nu'}(x';\epsilon')&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\nu\kappa Q_r x}R_r^{\nu/\nu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\nu\kappa Q_r x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu K_r^+(x;\epsilon)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu K_r^-(x;\epsilon)}\\&\quad\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r'\nu'\kappa Q_{r'}x'}R_{r'}^{\nu'/\nu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r'\nu'\kappa Q_{r'}x'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu K_{r'}^+(x';\epsilon')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu' K_{r'}^-(x';\epsilon')}\\&=\mathrm{e}^{-\delta_{r,r'}\mathrm{i}\nu\nu'\kappa(rx-r'x')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\nu\kappa Q_r x-\mathrm{i}r'\nu'\kappa Q_{r'}x'}R_r^{\nu/\nu_0}R_{r'}^{\nu'/\nu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\nu\kappa Q_r x-\mathrm{i}r'\nu'\kappa Q_{r'}x'}\\&\quad\times\mathrm{e}^{-\nu\nu'[K_r^-(x;\epsilon),K_{r'}^+(x';\epsilon')]}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu K_r^+(x;\epsilon)-\mathrm{i}\nu K_{r'}^+(x';\epsilon')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu K_r^-(x;\epsilon)-\mathrm{i}\nu' K_{r'}^-(x';\epsilon')}\\&=(-1)^{\delta_{r,-}\delta_{r',+}\nu\nu'/\nu_0^2}\mathrm{e}^{-\nu\nu'(\delta_{r,r'}\mathrm{i}\kappa r(x-x')+[K_r^-(x;\epsilon),K_{r'}^+(x';\epsilon')])}\,{}^{\times}_{\times}\,\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\phi_{r',\nu'}(x';\epsilon')\,{}^{\times}_{\times},\end{aligned}\tag{4.26}$$

其中最后一步用到了 $R_r^{\nu/\nu_0}R_{r'}^{\nu'/\nu_0}=(-1)^{\delta_{r,-}\delta_{r',+}\nu\nu'/\nu_0^2}\,{}^{\times}_{\times}\,R_r^{\nu/\nu_0}R_{r'}^{\nu'/\nu_0}\,{}^{\times}_{\times}$（这仅在（$r$、 r'）$=(-,+)$ 的情形下并非平凡，此时可由（3.13）推出）。接下来，利用定义和直接计算，我们得到以下对易子

$$[K_r^-(x;\epsilon),K_{r'}^+(x';\epsilon')]=\begin{cases}C(r(x-x');\epsilon+\epsilon') & (r'=r)\\ \tilde{C}(x-x';\epsilon+\epsilon') & (r'=-r)\end{cases}\tag{4.27}$$

其中

$$\begin{aligned}C(x;\epsilon)&:=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\big(\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}nx-n\epsilon)}c_n^2+\mathrm{e}^{2\kappa(-\mathrm{i}nx-n\epsilon)}s_n^2\big),\\\tilde{C}(x;\epsilon)&:=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n s_n}{n}\big(\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}nx-n\epsilon)}+\mathrm{e}^{2\kappa(-\mathrm{i}nx-n\epsilon)}\big).\end{aligned}\tag{4.28}$$

事实上，对于 $r'=r$，利用（3.1）和（4.24），

$$\begin{aligned}[K_{\pm}^{-}(x;\epsilon),K_{\pm}^{+}(x';\epsilon')] &= -\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{2\kappa(\pm\mathrm{i}nx-n\epsilon)}c_n\frac{1}{\mathrm{i}m}\mathrm{e}^{2\kappa(\mp\mathrm{i}mx'-m\epsilon')}c_m\underbrace{[a_{\pm,n},a_{\pm,-m}]}_{n\delta_{n,m}}\\ &\quad+\frac{1}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{2\kappa(\mp\mathrm{i}nx-n\epsilon)}s_n\frac{1}{\mathrm{i}m}\mathrm{e}^{2\kappa(\pm\mathrm{i}mx'-m\epsilon')}s_m\underbrace{[a_{\mp,n}a_{\mp,-m}]}_{n\delta_{n,m}}\Big)\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(\mathrm{e}^{2\kappa(\pm\mathrm{i}n(x-x')-n(\epsilon+\epsilon'))}c_n^2+\mathrm{e}^{2\kappa(\mp\mathrm{i}n(x-x')-n(\epsilon+\epsilon'))}s_n^2\Big)=C(\pm(x-x'),\epsilon+\epsilon'),\end{aligned}\tag{4.29}$$

对于 $r'=-r$，也同样如此，

$$\begin{aligned}[K_{\pm}^{-}(x;\epsilon),K_{\mp}^{+}(x';\epsilon')] &= -\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{2\kappa(\pm\mathrm{i}nx-n\epsilon)}c_n\frac{1}{\mathrm{i}m}\mathrm{e}^{2\kappa(\mp\mathrm{i}mx'-m\epsilon')}s_m\underbrace{[a_{\pm,n},a_{\pm,-m}]}_{n\delta_{n,m}}\\ &\quad+\frac{1}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{2\kappa(\mp\mathrm{i}nx-n\epsilon)}s_n\frac{1}{\mathrm{i}m}\mathrm{e}^{2\kappa(\pm\mathrm{i}mx'-m\epsilon')}c_m\underbrace{[a_{\mp,n},a_{\mp,-m}]}_{n\delta_{n,m}}\Big)\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_ns_n}{n}\Big(\mathrm{e}^{2\kappa(\pm\mathrm{i}n(x-x')-n(\epsilon+\epsilon'))}+\mathrm{e}^{2\kappa(\mp\mathrm{i}n(x-x')-n(\epsilon+\epsilon'))}\Big)=\tilde{C}(x-x',\epsilon+\epsilon').\end{aligned}\tag{4.30}$$

接下来，我们代入（3.17），并利用几何级数以及函数 $\log(1-x)$ 的泰勒级数进行计算

$$\begin{aligned}C(x;\epsilon)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1-q^{2n})}\mathrm{e}^{-2\kappa n\epsilon}\big(\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}nx}+q^{2n}\mathrm{e}^{-2\kappa\mathrm{i}nx}\big)\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-2\kappa n\epsilon}\big(q^{2nm}\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}nx}+q^{2n(m+1)}\mathrm{e}^{-2\kappa\mathrm{i}nx}\big)\\ &=-\log(1-\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}x-\epsilon)})-\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\log\big(1-q^{2m}\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}x-\epsilon)}\big)+\log(1-q^{2m}\mathrm{e}^{-2\kappa(\mathrm{i}x+\epsilon)})\Big),\end{aligned}$$

这意味着

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa x-C(x;\epsilon)}=(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa x}-\mathrm{e}^{\kappa(\mathrm{i}x-2\epsilon)})\prod_{m=1}^{\infty}\big(1-q^{2m}\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}x-\epsilon)}\big)\big(1-q^{2m}\mathrm{e}^{-2\kappa(\mathrm{i}x+\epsilon)}\big)=\tilde{\theta}_1(\kappa x,q;\kappa\epsilon).\tag{4.31}$$

同样，

$$\begin{aligned}\tilde{C}(x;\epsilon)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\mathrm{e}^{-2\kappa n\epsilon}\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\kappa x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\kappa x}\big)\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-2\kappa n\epsilon}\big(q^{n(2m+1)}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\kappa x}+q^{n(2m+1)}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\kappa x}\big)\\ &=-\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\log\big(1-q^{2m+1}\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}x-\epsilon)}\big)+\log\big(1-q^{2m+1}\mathrm{e}^{2\kappa(-\mathrm{i}x-\epsilon)}\big)\Big),\end{aligned}$$

这意味着

$$\mathrm{e}^{-\tilde{C}(x;\epsilon)} = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - q^{2m-1}\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}x-\epsilon)}\right)\left(1 - q^{2m-1}\mathrm{e}^{-2\kappa(\mathrm{i}x+\epsilon)}\right) = \tilde{\theta}_4(\kappa x, q; \kappa\epsilon). \tag{4.32}$$

结合（4.27）、（4.31）和（4.32），我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\nu\nu'(\delta_{r,r'}\mathrm{i}\kappa r(x-x')+[K_r^-(x;\epsilon),K_{r'}^+(x';\epsilon')])} &= \begin{cases}\left(\mathrm{e}^{-\kappa(x-x')-C(r(x-x');\epsilon+\epsilon')}\right)^{\nu\nu'} & (r'=r),\\ \left(\mathrm{e}^{-\tilde{C}(x-x';\epsilon+\epsilon')}\right)^{\nu\nu'} & (r'=-r),\end{cases}\\ &= \theta_{r,r'}(x-x';\epsilon+\epsilon')^{\nu\nu'},\end{aligned} \tag{4.33}$$

将此代入（4.26），即可得到（4.4）–（4.6）。 □

4.2 eCS模型的二次量子化

我们首先定义算子 $\mathcal{H}_{3,\,\nu}$，它在本文中起着核心作用。

回顾电荷算子的定义：$Q_r = \nu_0 a_{r,\,0}$ $(r = \pm)$，并且我们有两组海森堡算子$a_{r,\,n}$ 和$b_{r,\,n}$：后者由前者经过（3.16）中的 Bogoliubov 变换得到。

定义 见 4.4。对于实参数 ν 和 ν_0，若 ν/ν_0 是有限非零整数，则令

$$\mathcal{H}_2 := \sum_{r=\pm} W_{2,r} \tag{4.34}$$

and

$$\mathcal{H}_{3,\nu} := \frac{1}{2}\left(\nu \sum_{r=\pm} W_{3,r} + (1-\nu^2)\mathcal{C}\right), \tag{4.35}$$

with

$$W_{2,r} := (2\kappa)\left(\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}} {}^{\times}_{\times} b_{-n,r} b_{n,r} {}^{\times}_{\times} + \frac{1}{2}Q_r^2\right) \quad (r=\pm), \tag{4.36}$$

$$W_{3,r} := (2\kappa)^2\left(\frac{1}{3}\sum_{\substack{n,m\in\mathbb{Z}_{\neq 0}\\ n+m\neq 0}} {}^{\times}_{\times} b_{r,-n} b_{r,-m} b_{r,n+m} {}^{\times}_{\times} + Q_r \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}} {}^{\times}_{\times} b_{-n,r} b_{n,r} {}^{\times}_{\times} + \frac{1}{3}Q_r^3\right) \quad (r=\pm), \tag{4.37}$$

$$\mathcal{C} := (2\kappa)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=\pm} n a_{r,-n} a_{r,n} = (2\kappa)^2 \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{r=\pm} |n| {}^{\times}_{\times} a_{r,-n} a_{r,n} {}^{\times}_{\times}. \tag{4.38}$$

根据引理 3.3，$\mathcal{H}_2$ 和 $\mathcal{H}_{3,\,\nu}$ 至少在 $\mathcal{D}$上以半双线性型的意义良好定义；可以证明它们实际上定义了自伴算子（例如，可以利用 [24], 中的结果证明）。

注释 4.5. 正则化eCS哈密顿量 $H_{N;g}(\boldsymbol{x};\epsilon)$ 在 (4.40) 中，以及 H_N^{ϵ} 在 [13, 方程 (61)] 相差一个因子 1/2：$H_{N;g}(\boldsymbol{x};\,\epsilon) = (1/2)H_N^{\epsilon}$。这就是 (1/2 （4.35）中出现因子

注记 4.6。如前所述，本文中定义于 [13, 方程 (57)–(59)] 的算子 $\mathcal{H}_{3,\nu}$ 是本文的重要组成部分，并且它推广了其中定义的算子 $\mathcal{H}$。虽然并不显然，但后者确实可以用本文的记号写成 $\mathcal{H} = \nu W_{3,+} + (1-\nu^2)\mathcal{C} - \nu^4 c_\epsilon a_{+,0}^4$。为验证这一点，需考虑以下事实：(i) 参数 $2\kappa = \pi/\ell$ 在 [13] 中被设为 1，因此我们需要在此处的 $W_{3,\pm}$, $W_{2,\pm}$ 和 $\mathcal{C}$ 定义中插入适当的因子 2κ 的幂；若要与 [13]，比较，则令 $2\kappa = 1$。(ii) 注意，[13] 中的 Q 对应于我们的 $a_{+,0}$，因此，[13, 方程 (58)] 中的 W^3 和 W^2，是将 Q_+ 替换为 $a_{+,0}$ 后，由我们的 $W_{3,+}$ 和 $W_{2,+}$ 得到的；回想一下，$Q_+ = \nu_0 a_{+,0}$。(iii) 在 [13] 中，$\nu = \nu_0$，而在本文中，参数 ν_0 和 ν 允许彼此不同（这一细节对于第 6 节中的推广很重要）。(iv) [13, 方程 (57)] 中 Q^3 项前面的因子等于 $\nu[(\nu^3-1)/3 - (\nu-1)]$。

对于满足 ν/ν_0 为整数的非零实数 ν，$N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N) \in [-\ell, \ell]^N$，且 $\epsilon > 0$，我们引入以下简写记号，表示任意子乘积 N，

$$\phi_{r,\nu}^N(\boldsymbol{x};\epsilon) := \phi_{r,\nu}(x_1;\epsilon)\cdots\phi_{r,\nu}(x_N;\epsilon) \quad (r=\pm), \tag{4.39}$$

并定义相应的 eCS 哈密顿量正则化版本（1.5），

$$H_{N;g}(\boldsymbol{x};\epsilon) := -\sum_{j=1}^N \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_{1\leq j<k\leq N} g(g-1)\wp_1(x_j - x_k; 2\epsilon) \quad (g>0), \tag{4.40}$$

其中 $\wp_1(x;\epsilon)$ 是式（$\wp$中定义的正则化修正 Weierstrass $\wp$-函数（4.19）。

以下是 [13, 命题 2] 的推广；从数学角度看，这一推广很容易得到，但从概念上说却迈出了一大步：它提出了该模型的一种新的物理学解释，并由此引出了我们的新结果。

命题 4.7。算子 $\mathcal{H}_{3,\nu}$ 在 (4.35) 中定义，在如下意义上对正则化 eCS 哈密顿量（(4.40)提供二重二次量子化：以下关系在两种情形下均成立 $r=\pm$,

$$\big[\mathcal{H}_{3,\nu}, \phi_{r,\nu}^N(\boldsymbol{x};\epsilon)\big]\Omega = \big(H_{N;\nu^2}(\boldsymbol{x};\epsilon) + \tfrac{1}{2}N\nu^4 c_\epsilon\big)\,\phi_{r,\nu}^N(\boldsymbol{x};\epsilon)\Omega + \Psi_{r,\nu}(\boldsymbol{x};\epsilon)\Omega, \tag{4.41}$$

其中常数

$$c_\epsilon := \frac{1}{3}\kappa^2 - 8\kappa^2\sum_{n=1}^\infty n s_n^2 \mathrm{e}^{-4\kappa n\epsilon} - 8\kappa^2\sum_{n,m=1}^\infty s_n^2 s_m^2 \mathrm{e}^{-2\kappa(n+m)\epsilon}(\mathrm{e}^{-2\kappa|n-m|\epsilon} - \mathrm{e}^{-2\kappa(n+m)\epsilon}) \tag{4.42}$$

化简为 c_0 在(1.1) 当 $\epsilon \to 0^+$时，且以下修正项在极限 $\epsilon \to 0^+$时趋于零，[12]

$$\Psi_{r,\nu}(\boldsymbol{x};\epsilon) := \sum_{j=1}^N \phi_{r,\nu}(x_1;\epsilon)\cdots\phi_{r,\nu}(x_{j-1};\epsilon)\,{}^{\times}_{\times}\mathcal{R}_{r,\nu}(x_j;\epsilon)\phi_{r,\nu}(x_j;\epsilon){}^{\times}_{\times} \times \phi_{r,\nu}(x_{j+1};\epsilon)\cdots\phi_{r,\nu}(x_N;\epsilon), \tag{4.43}$$

$$\mathcal{R}_{r,\nu}(x;\epsilon) = (2\kappa)^2\sum_{n,m=1}^\infty \Big(\nu s_n^2\left(\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}mrx} b_{r,m} - \mathrm{e}^{-2\kappa\mathrm{i}mrx} b_{r,-m}\right)\mathrm{e}^{-2\kappa n\epsilon} - \mathrm{e}^{-2\kappa\mathrm{i}(n-m)rx}\,{}^{\times}_{\times} b_{r,-n} b_{r,m}{}^{\times}_{\times}\Big)\left(\mathrm{e}^{-2\kappa(n+m)\epsilon} - \mathrm{e}^{-2\kappa|n-m|\epsilon}\right). \tag{4.44}$$

[12]我们注意到，(4.44) 对 $\kappa = 1/2$ 修正了 [13, 式 (64)]中的排印错误。

此外，对于 $r=\pm$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_N)\in[-\ell,\ell]^N$和 $\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_N)\in[-\ell,\ell]^N$，有

$$\langle\Omega,[\mathcal{H}_{3,\nu},\phi^N_{r,\nu}(\boldsymbol{x};\epsilon)^\dagger\phi^N_{r,\nu}(\boldsymbol{y};\epsilon)]\Omega\rangle=0. \tag{4.45}$$

基于参考文献的证明 *[13]*。下面说明命题 4.7 如何由参考文献 [13]中的结果得出。对于希望看到自包含证明的读者，我们指出，命题 4.7 是定理6.2 在第 6 节中证明的一个特殊情形。

采用本文中的记号，[13, 式 (60)] 可写为

$$\big[\nu W_{+,3}+(1-\nu^2)\mathcal{C},\phi^N_{+,\nu}(\boldsymbol{x};\epsilon)\big]\Omega=\Big(2H_{N;\nu^2}(\boldsymbol{x};\epsilon)+N\nu^4c_\epsilon\Big)\phi^N_{+,\nu}(\boldsymbol{x};\epsilon)\Omega+\Psi_{+,\nu}(\boldsymbol{x};\epsilon)\Omega \tag{4.46}$$

（为说明这一点，注意此处 ν_0, $\nu W_{3,+}+(1-\nu^2)\mathcal{C}$, a_+,0 和 $2H_{N;\nu^2}(\boldsymbol{x};\epsilon)$ 分别对应 ν, $\mathcal{H}+\nu^4c_\epsilon Q$, Q $H_N^{2\epsilon}$ [13], 4 5 4 6 $[Q,\phi^N_\epsilon\ \boldsymbol{x}\ ]=$ 和 in——这一点在注释 . 和 . 中有说明；由于 ( )$N\phi^N_\epsilon(\boldsymbol{x})$，在 [13, 式 (60)] 左端将 $\nu^4c_\epsilon Q$ 加到 $\mathcal{H}$ 上，相当于在右端加上项$N\nu^4c_\epsilon\Phi_\epsilon(\boldsymbol{x})\Omega$）。由定义可知，(4.37) 中的 W_-,3 与 ϕ^N_+,$\nu(\boldsymbol{x};\epsilon)$ 对易，因此，无须改变右端，我们便可将 (4.46) 左端的 $\nu W_{+,3}+(1-\nu^2)\mathcal{C}$ 替换为 $2\mathcal{H}_{3,\nu}=\nu W_{+,3}+\nu W_{-,3}+(1-\nu^2)\mathcal{C}$。将所得恒等式除以 2，即得 $r=+$ 的 (4.41)。

如第 4.1 节所述，任意子 ϕ_-,$\nu(-x;\epsilon)$ 与任意子ϕ_+,$\nu(x;\epsilon)$处于同等地位。因此，根据对称性，我们可以从 (4.41) 中的情形 $r=+$，通过将所有 ϕ_+,$\nu(x_j;\ \epsilon)$ 和 a_+,$_n$ 分别替换为 ϕ_-,$\nu(-x_j;\ \epsilon)$ 和 a_-,$_n$，得到情形 $r=-$ 的相应结果。利用 H_N,$_g(-\boldsymbol{x};\epsilon)=H_N$,$_g(\boldsymbol{x};\epsilon)$ 改变所得恒等式中的 $\boldsymbol{x}\to-\boldsymbol{x}$，即可得到$r=-$对应的 (4.41)。

由于 $[a_{+,0},\phi^N_{+,\nu}(\boldsymbol{x};\ \epsilon)^\dagger\phi^N_{+,\ \nu}(\boldsymbol{y};\ \epsilon)]=0$, [13, 式 (66)] 推出（4.45）对于 $r=+$成立；通过上述对称性论证，可得到 $r=-$对应的结果。 □

5 ncILW 方程的推导

我们证明，算子 $\mathcal{H}_{3,\ \nu}$ 在（4.35）中定义了 ncILW 方程（1.2）的一个量子版本 .

我们首先将公式（2.7）与我们的任意子数学精确定义（ [11], 4.1）进行比较。公式（2.7）是基于物理学考量提出的形式表达式。这启发我们给出以下手征玻色子的定义 $\rho_\pm$。

定义 5.1.（正则化的）手征玻色子定义为

$$\rho_r(x;\epsilon):=r\partial_x\big(2\kappa Q_rrx+K_r(x;\epsilon)\big)=2\kappa Q_r+\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq0}}2\kappa\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}rnx-|n|\epsilon)}b_{r,n}\quad(r=\pm) \tag{5.1}$$

其中 $x\in[-\ell,\ell]$ 和 $\epsilon>0$。

以下结果总结了手征玻色子的性质，证实从物理学角度来看，定义 5.1 是令人满意的。

引理 5.2. 手征玻色子是厄米的，$\rho_r(x;\epsilon)=\rho_r(x;\epsilon)^\dagger$，它们可延拓为实数轴上的 2ℓ-周期函数，$\rho_r(x+2\ell;\epsilon)=\rho_r(x;\ \epsilon)$ 对于 $x\in\mathbb{R}$，并满足以下正则对易关系，

$$[\rho_r(x;\epsilon),\rho_{r'}(x';\epsilon')]=-2\pi\mathrm{i}r\delta_{r,r'}\partial_x\delta(x-x';\epsilon+\epsilon')\quad(r,r'=\pm) \tag{5.2}$$

与正则化狄拉克δ函数 (3.35)。

证明。 厄米性由 $(b_{r,\ n})^{\dagger} = b_{r,\ -n}$； 2ℓ-周期性显然。为证明（5.2），我们利用（3.18）和（3.35）进行计算

$$[\rho_r(x;\epsilon),\rho_{r'}(x';\epsilon')] = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}_{\neq 0}} (2\kappa)^2 \mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}rnx+\mathrm{i}r'mx'-|n|\epsilon-|m|\epsilon')} \underbrace{[b_{r,n},b_{r',m}]}_{n\delta_{n,-m}\delta_{r,r'}}$$

$$= (2\kappa)^2\delta_{r,r'} \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}} n\mathrm{e}^{2\kappa[\mathrm{i}rn(x-x')-|n|(\epsilon+\epsilon')]} = (2\kappa)^2\delta_{r,r'} \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}} rn\mathrm{e}^{2\kappa[\mathrm{i}n(x-x')-|n|(\epsilon+\epsilon')]}$$

$$= (2\kappa)^2\delta_{r,r'}\frac{1}{2\kappa r\mathrm{i}}(2\ell)\partial_x\delta(x-x';\epsilon+\epsilon'), \quad (5.3)$$

这是（5.2），因为 $(2\kappa)^2(2\ell)/2\kappa r\mathrm{i} = -2\pi\mathrm{i}r$。 □

从物理学的角度来看，人们会想知道定义 4.4 中的算子是否是局部的，也就是说，它们是否可以写成手征玻色子正规序幂的积分。下面的结果表明，除算子 $\mathcal{C}$ 之外，其他情形均如此；该算子则可以˜利用（ T 和 T （1.3）中的积分算子以局部形式表示。

引理 5.3。 定义 $W_{2,\pm}$、 $W_{3,\pm}$、以及 $\mathcal{C}$ 中的算子 *4.4*可以用手征玻色子表示如下：

$$W_{2,r} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{4\pi}\int_{-\ell}^{\ell} {}^{\times}_{\times}\rho_r(x;\epsilon)^2{}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x \quad (r=\pm), \tag{5.4}$$

$$W_{3,r} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{6\pi}\int_{-\ell}^{\ell} {}^{\times}_{\times}\rho_r(x;\epsilon)^3{}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x \quad (r=\pm), \tag{5.5}$$

$$\mathcal{C} = -\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{4\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\sum_{r=\pm} {}^{\times}_{\times}\rho_r(x;\epsilon)(T\rho_{r,x})(x;\epsilon)+\rho_{-r}(x;\epsilon)(\tilde{T}\rho_{r,x})(x;\epsilon){}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x, \tag{5.6}$$

˜采用记号 $\rho_{r,\ x}(x;\ \epsilon)\colon = \partial_x\rho_r(x;\ \epsilon)$ 以及积分算子 (1.3) 的定义 T、 T。注 5.4。 等式（5.4）应在半双线性型的意义下理解，即（5.4）表示

$$\langle\eta, W_{2,r}\eta'\rangle = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{4\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\langle\eta, {}^{\times}_{\times}\rho_r(x;\epsilon)^2{}^{\times}_{\times}\,\eta'\rangle\mathrm{d}x \qquad \text{for } r=\pm \text{ and all } \eta,\eta'\in\mathcal{D}.$$

对 (5.5)–(5.6) 及本文其他类似等式，也适用类似的解释。

引理 *5.3* 的证明。 我们从

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\ell}^{\ell} {}^{\times}_{\times}\rho_r(x;\epsilon)^2{}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x = (2\kappa)^2(2\ell)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}} {}^{\times}_{\times}b_{r,-n}b_{r,n}{}^{\times}_{\times}+Q_r^2\right) = (2\kappa)^2(2\ell)\frac{2}{(2\kappa)}W_{2,r},$$

由此得到（5.4），因为 $(2\kappa)^2(2\ell)2/(2\kappa) = 4\pi$。类似地，

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\ell}^{\ell} {}^{\times}_{\times}\rho_r(x;\epsilon)^3{}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x = (2\kappa)^3(2\ell)\Bigg(\sum_{\substack{n,m\in\mathbb{Z}_{\neq 0}\\ n+m\neq 0}} {}^{\times}_{\times}b_{r,-n}b_{r,-m}b_{r,n+m}{}^{\times}_{\times}$$

$$+3Q_r\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}} {}^{\times}_{\times}b_{,-n}b_{r,n}{}^{\times}_{\times}+Q_r^3\Bigg) = (2\kappa)^3(2\ell)\frac{3}{(2\kappa)^2}W_{3,r},$$

由此得到（5.5），因为 $(2\kappa)^3(2\ell)3/(2\kappa)^2 = 6\pi$。

为推导 5.6) 中关于 $\mathcal{C}$ 的表达式，我们使用 4.38) 以及 Bogoliubov 变换的逆变换 3.16),

$$a_{r,n} = c_n b_{r,n} + s_n b_{-r,-n} \quad (n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}) \tag{5.7}$$

计算

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= (2\kappa)^2 \frac{1}{2} \sum_{r=\pm} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{\times}_{\times} \big(c_n b_{r,-n} + s_n b_{-r,n}\big)\big(c_n b_{r,n} + s_n b_{-r,-n}\big)^{\times}_{\times} \\ &= (2\kappa)^2 \frac{1}{2} \sum_{r=\pm} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{\times}_{\times} (c_n^2 + s_n^2) b_{r,-n} b_{r,n} + 2c_n s_n b_{-r,n} b_{r,n}{}^{\times}_{\times}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

另一方面，附录 A 中的引理 A 以及恒等式

$$\frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}n\kappa(x-x')} \rho_r(x';\epsilon)\,\mathrm{d}x' = 2\kappa \mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}nx - |n|\epsilon)} b_{r,rn} \quad (r = \pm, n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}) \tag{5.9}$$

give

$$\begin{aligned}(T\rho_{r,x})(x;\epsilon) &= -\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}} (2\kappa)^2 |n| (c_n^2 + s_n^2) \mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}rnx - |n|\epsilon)} b_{r,n}, \\ (\tilde{T}\rho_{r,x})(x;\epsilon) &= -\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}} (2\kappa)^2 |n| 2c_n s_n \mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}rnx - |n|\epsilon)} b_{r,n}, \end{aligned} \qquad (r = \pm). \tag{5.10}$$

因此，注意到含有 $n = 0$ 的项在积分后没有贡献，

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-\ell}^{\ell} \sum_{r=\pm}^{\times}{}_{\times} \rho_r(x;\epsilon)(T\rho_{r,x})(x;\epsilon) + \rho_{-r}(x;\epsilon)(\tilde{T}\rho_{r,x})(x;\epsilon)^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x \\ &\quad = -\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-\ell}^{\ell} \sum_{r=\pm} \sum_{n,m\in\mathbb{Z}_{\neq 0}}^{\times}{}_{\times} (2\kappa)^3 \mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}rnx - |n|\epsilon)} b_{r,n} |m| (c_m^2 + s_m^2) \mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}rmx - |m|\epsilon)} b_{r,m} \\ &\qquad + (2\kappa)^3 \mathrm{e}^{2\kappa(-\mathrm{i}rnx - |n|\epsilon)} b_{-r,n} |m| 2c_m s_m \mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}rmx - |m|\epsilon)} b_{r,m}{}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x \\ &\quad = -(2\kappa)^3 (2\ell) \sum_{r=\pm} \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}} |n|^{\times}_{\times} (c_n^2 + s_n^2) b_{r,-n} b_{r,n} + 2c_n s_n b_{-r,n} b_{r,n}{}^{\times}_{\times} = -2(2\kappa)(2\ell)\mathcal{C}, \end{aligned} \tag{5.11}$$

其中最后一步用到了 5.8)。由于 $2(2\kappa)(2\ell) = 4\pi$，这就证明了 5.6)。 □

将引理 5.3 中的结果代入 $\mathcal{H}_{3,\nu}$ 在 4.35) 中的定义，我们得到 $\mathcal{H}_{3,\nu}$ 在 2.8) 中的结果，除去极限过程 $\lim_{\epsilon\to 0^+}$：将后一个极限理解在内，式 2.8) 本身在数学上是严谨的。

为了准确表述量子 ncILW 方程，我们认为先如下定义正则化乘积 $\circ$ 更为方便。

定义 5.5（正则化乘积）。设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是关于变量 $x \in \mathbb{R}$ 的两个 2ℓ-周期量子场，则

$$(f \circ g)(x;\epsilon) \coloneqq (\delta_\epsilon * (fg))(x) \tag{5.12}$$

其中 $(fg)(x) \coloneqq f(x)g(x)$ 表示逐点乘积，并且

$$(\delta_\epsilon * f)(x) \coloneqq \int_{-\ell}^{\ell} \delta(x - x';\epsilon) f(x')\,\mathrm{d}x' \quad (\epsilon > 0) \tag{5.13}$$

其中正则化狄拉克δ函数 $\delta(x;\ \epsilon)$ 定义为 (3.35)。（注意，$*$ 在 (5.13) 中表示卷积，不要与 (3.27) 中序列的对合混淆。）

用傅里叶级数来表示这些运算很有意思。采用以下约定

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}_n\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}nx}\quad\Leftrightarrow\quad\hat{f}_n=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\mathrm{e}^{-2\kappa\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x \tag{5.14}$$

对于 $g(x)$ 也类似，我们很容易验证

$$(\delta_\epsilon*f)(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}_n\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}nx-|n|\epsilon)} \tag{5.15}$$

and

$$(f\circ g)(x;\epsilon)=\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\hat{f}_n\hat{g}_m\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}(n+m)x}\mathrm{e}^{-2\kappa|n+m|\epsilon}. \tag{5.16}$$

特别地，我们的正则化玻色子是这种情形的特殊情形：$\rho_r(x;\ \epsilon)=(\delta_\epsilon*\rho_r)(x)$（其中 $\rho_r(x)$ 是将 $\rho_r(x;\ \epsilon)$ 中的 $\epsilon=0$ 设为给定值后得到的）。显然，$(\delta_\epsilon*f)(x)\to f(x)$，且当 $\epsilon\to0^+$ 时，$(f\circ g)(x;\ \epsilon)\to f(x)g(x)$，前提是这些极限作为算子值连续函数存在，但情况未必如此：一般而言，我们将 $f(x;\ \epsilon):=(\delta_\epsilon*f)(x)$ 视为 $f(x)$ 的正则化版本。此外，$f(x;\ \epsilon)g(x;\ \epsilon)$ 和 $(f\circ g)(x;\ \epsilon)$ 是逐点乘积 $f(x)g(x)$ 的两种正则化版本。对于算子值分布，这种乘积通常没有良好定义；后两种正则化彼此不同：

$$(f\circ g)(x;\epsilon)-f(x;\epsilon)g(x;\epsilon)=\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\hat{f}_n\hat{g}_m\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}(n+m)x}\left(\mathrm{e}^{-2\kappa|n+m|\epsilon}-\mathrm{e}^{-2\kappa(|n|+|m|)\epsilon}\right) \tag{5.17}$$

对于 $\epsilon>0$，一般而言并不为零，但在极限 $\epsilon\to0^+$ 下它们相等。

现在我们可以准确说明 $\mathcal{H}_{3,\ \nu}$ 在何种意义下定义了 ncILW 方程的量子版本；我们给出两种互补的表述，(a) 和 (b)。

定理 5.6。(a) 算子 $\mathcal{H}_{3,\ \nu}$ 在定义*4.4* 中定义，可写为

$$\mathcal{H}_{3,\nu}=\lim_{\epsilon\to0}\frac{2}{\pi g}\int_{-\ell}^{\ell}{}^{\times}_{\times}\frac{1}{3}(\hat{u}^3+\hat{v}^3)+\frac{g-1}{4}(\hat{u}T\hat{u}_x+\hat{v}T\hat{v}_x+\hat{u}\tilde{T}\hat{v}_x+\hat{v}\tilde{T}\hat{u}_x){}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x \tag{5.18}$$

其中 $g=\nu^2$，$\hat{}u=\hat{}u(x;\epsilon):=\nu\rho_+(x;\epsilon)/2$ 和 $\hat{}v=\hat{}v(x;\ \epsilon):=\nu\rho_-(x;\ \epsilon)/2$ 是满足正则对易关系的正则化玻色子场：

$$[\hat{u}(x;\epsilon),\hat{u}(x';\epsilon')]=-\frac{g\pi\mathrm{i}}{2}\delta'(x-x';\epsilon+\epsilon'),\quad[\hat{v}(x;\epsilon),\hat{v}(x';\epsilon')]=\frac{g\pi\mathrm{i}}{2}\delta'(x-x';\epsilon+\epsilon'), \tag{5.19}$$

$\tilde{}$以及 $[\hat{}u(x;\ \epsilon),\hat{}v(x';\ \epsilon')]=0$，还有 $T,\tilde{T}$（1.3）中的积分算子；我们使用简写记号 $\hat{}u^3=\hat{}u(x;\epsilon)^3$，$\hat{}uT\hat{}u_x=\hat{}u(x;\ \epsilon)(T\hat{}u_x)(x;\ \epsilon)$ 等。

(b) 由（a）得到的海森堡运动方程为

$$\begin{aligned}\partial_t\hat{u}&:=\mathrm{i}[\mathcal{H}_{3,\nu},\hat{u}]=-2{}^{\times}_{\times}\hat{u}\circ\hat{u}_x{}^{\times}_{\times}-\tfrac{1}{2}(g-1)(T\hat{u}_{xx}+\tilde{T}\hat{v}_{xx}),\\ \partial_t\hat{v}&:=\mathrm{i}[\mathcal{H}_{3,\nu},\hat{v}]=+2{}^{\times}_{\times}\hat{v}\circ\hat{v}_x{}^{\times}_{\times}+\tfrac{1}{2}(g-1)(T\hat{v}_{xx}+\tilde{T}\hat{u}_{xx}),\end{aligned} \tag{5.20}$$

以及$\hat{}u=\hat{}u(x,t;\epsilon)$，$T\hat{}u_{xx}=(T\hat{}u_{xx}(x,\ t;\ \epsilon)$，等等，以及 $\circ$ 定义*5.5*中逐点乘积的正则化版本。

我们将定理5.6(a)视为量子 ncILW 模型的一种可能定义：该模型由哈密顿量$\mathcal{H}_{3,\ \nu}$以具有对易关系的量子场表示。在定理5.6(b)中，我们陈述了式（1.2）的量子类比。

证明　　定理 *5.6*。 部分（a）是引理5.2、引理 5.3 以及（4.35）的直接推论　　.

部分（b） 可由对易子关系推出；为便于后文引用，我们将其汇总为一个引理　　.

引理 5.7。以下对易关系成立：

$$\mathrm{i}[W_{2,r},\rho_{r'}(x;\epsilon)]=-r\delta_{r,r'}\rho_{r,x}(x;\epsilon)\quad(r=\pm),\tag{5.21}$$

$$\mathrm{i}[W_{3,r},\rho_{r'}(x;\epsilon)]=-2r\delta_{r,r'}(\rho_r\circ\rho_{r,x})(x;\epsilon)\quad(r=\pm),\tag{5.22}$$

$$\mathrm{i}[\mathcal{C},\rho_r(x;\epsilon)]=r\Big((T\rho_{r,xx})(x;\epsilon)+(\tilde{T}\rho_{-r,xx})(x;\epsilon)\Big)\quad(r=\pm),\tag{5.23}$$

其中 $\circ$ 属于定义 5.5，$\rho_{r,\ x}(x;\ \epsilon)=\partial_x\rho_r(x;\ \epsilon)$，$\rho_{r,\ xx}(x;\ \epsilon)=\partial_x^2\rho_r(x;\ \epsilon)$，且 T、$\tilde{T}$ 属于（1.3）。

证明。我们先证明（5.23）。利用（5.1）、（5.8）以及恒等式（注意，${}^{\times}_{\times}b_{r',}{}_{\mp n}b_{\pm r',\ n}{}^{\times}_{\times}$和 $b_{r',}{}_{\mp n}b_{\pm r',\ n}$ 仅相差一个常数）

$$\begin{aligned}\sum_{r'=\pm}[{}^{\times}_{\times}b_{r',\mp n}b_{\pm r',n}{}^{\times}_{\times},\rho_r(x;\epsilon)]&=\sum_{m\in\mathbb{Z}_{\neq0}}2\kappa\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}rmx-|m|\epsilon)}[b_{r',\mp n}b_{\pm r',n},b_{r,m}]\\&=\sum_{m\in\mathbb{Z}_{\neq0}}2\kappa\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}rmx-|m|\epsilon)}\big(b_{r',\mp n}\delta_{\pm r',r}n\delta_{n,-m}\mp\delta_{r',r}n\delta_{\mp n,-m}b_{\pm r',n}\big)\\&=2\kappa n\big(\mathrm{e}^{2\kappa(-\mathrm{i}nrx-|n|\epsilon)}b_{\pm r,\mp n}\mp\mathrm{e}^{2\kappa(\pm\mathrm{i}rnx-|n|\epsilon)}b_{\pm r,n}\big)\end{aligned}\tag{5.24}$$

计算

$$\begin{aligned}\mathrm{i}[\mathcal{C},\rho_r(x;\epsilon)]&=\mathrm{i}(2\kappa)^2\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|\sum_{r'=\pm}\big[{}^{\times}_{\times}(c_n^2+s_n^2)b_{r',-n}b_{r',n}+2c_ns_nb_{-r',n}b_{r',n}{}^{\times}_{\times},\rho_r(x;\epsilon)\big]\\&=\mathrm{i}(2\kappa)^3\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|n\big[(c_n^2+s_n^2)(\mathrm{e}^{2\kappa(-\mathrm{i}nrx-|n|\epsilon)}b_{r,-n}-\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}rnx-|n|\epsilon)}b_{r,n})\\&\qquad+2c_ns_n(\mathrm{e}^{2\kappa(-\mathrm{i}nrx-|n|\epsilon)}b_{-r,n}+\mathrm{e}^{2\kappa(-\mathrm{i}rnx-|n|\epsilon)}b_{-r,n})\big]\\&=-\mathrm{i}(2\kappa)^3\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|n\big[(c_n^2+s_n^2)\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}rnx-|n|\epsilon)}b_{r,n}-2c_ns_n\mathrm{e}^{2\kappa(-\mathrm{i}nrx-|n|\epsilon)}b_{-r,n}\big]\\&=-r\partial_x\sum_{n\in\mathbb{Z}}(2\kappa)^2|n|\big[(c_n^2+s_n^2)\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}rnx-|n|\epsilon)}b_{r,n}+2c_ns_n\mathrm{e}^{2\kappa(-\mathrm{i}nrx-|n|\epsilon)}b_{-r,n}\big],\end{aligned}\tag{5.25}$$

其中，在第三步的一个项中，我们重新命名了求和指标 $n\to-n$。比较˜（5.25）与（5.10），并利用 ∂_x 在作用于零均值函数时与积分算子 T 和 T 可交换这一性质，可得（5.23）。

对易　　子关系（5.21）–（5.22）在附录C.1 中用另一种方法证明。 □

回忆（4.35），由（5.22）–（5.23）可得

$$\partial_t\rho_r:=\mathrm{i}[\mathcal{H}_{3,\nu},\rho_r]=-\nu r\rho_r\circ\rho_{r,x}-\tfrac{1}{2}r(\nu^2-1)(T\rho_{r,xx}+\tilde{T}\rho_{-r,xx})\quad(r=\pm),\tag{5.26}$$

略去公共自变量（x，t；ϵ）。这等价于（5.20）。 □

6 广义 eCS 模型的二次量子化

我们推广第 4.2 节的结果，并得到广义 eCS 模型的二次量子化，该模型可以描述任意数量的四种粒子。

为说明这一推广的动机，我们注意到，在（4.35）中定义的算子 $\mathcal{H}_{3,\nu}$ 满足 $\mathcal{H}_{3,\nu}=-\nu^2\mathcal{H}_{3,-1/\nu}$。这表明，通过改变（4.41）中的 $\nu\to-1/\nu$ 并利用后一个对称关系，应该可以得到耦合参数为 $(-1/\nu)^2=1/g$ 的 eCS 模型的二次量子化。然而，要实现这一点，任意子 $\phi_{-1/\nu,r}(x;\ \epsilon)$ 也必须定义良好；而要满足这一条件，我们需要找到一个参数 $\nu_0>0$，使得不仅 ν/ν_0，而且 $-1/\nu\nu_0$ 也是整数；幸运的是，这样的 ν_0 往往存在。

引理 6.1. 存在一个参数 $\nu_0>0$，使得 ν/ν_0 和 $-1/\nu\nu_0$ 都是整数，当且仅当 $g:=\nu^2$ 是有理数；在这种情形下，

$$g=\frac{r_0}{s_0}>0,\quad \nu_0=\frac{1}{\sqrt{r_0s_0}}\quad (r_0,s_0\in\mathbb{Z}_{\neq0}). \tag{6.1}$$

证明。我们设 $r_0:=\nu/\nu_0$ 且 $s_0:=1/\nu\nu_0$。这意味着 $\nu=r_0\nu_0=1/s_0\nu_0$ 且 $\nu_0=\nu/r_0=1/\nu s_0$，从而得到（6.1）中的关系。反过来，（6.1）和 $\nu=\pm\sqrt{g}$ 意味着 $\nu/\nu_0=\pm\sqrt{r_0/s_0}\sqrt{r_0s_0}=\pm|r_0|$且 $-1/\nu\nu_0=\mp\sqrt{s_0/r_0}\sqrt{r_0s_0}=\mp|s_0|$。 □

因此，若且唯若 $g>0$ 是有理数，$\mathcal{H}_{3,\nu}$ 就给出了椭圆 Calogero–Sutherland 模型的四重二次量子化。对于给定的有理数 g，可将其写为 $g=r_0/s_0$，其中 r_0 和 s_0 是没有公因数的正整数，据此，整数 r_0 和 s_0 可由 g 唯一确定。然而，这可以推广如下：若 (r_0,s_0) 是满足（6.1）的一对整数，则对于任意 $k\in\mathbb{Z}_{\neq0}$，$(r_0',s_0')=(kr_0,ks_0)$ 也是这样的一对。对于不同的这类数对，我们的构造也不同（在特殊情形下，这一点见 [14]）；因此，我们允许这种推广。由此，我们的构造由一对非零整数 (r_0,s_0) 确定，且满足 $r_0/s_0=g>0$，而不是由 g 本身确定。为简便起见，我们在记号中不标明这种推广。

这四种不同的椭圆 Calogero–Sutherland 模型的二次量子化对应于四种不同的任意子 $\phi_{\nu,r}(x;\epsilon)$ 和 $\phi_{-1/\nu,r}(x;\epsilon)$，$r=\pm$。下面的结果表明，命题 4.7 有一个有趣的推广：其中 $\phi^N_{\nu,r}(\boldsymbol{x};\ \epsilon)=\phi_{\nu,r}(x_1;\ \epsilon)\cdots\phi_{\nu,r}(x_N;\ \epsilon)$ 可以替换为任意混合乘积 $\phi_{\nu_1,r_1}(x_1;\ \epsilon)\cdots\phi_{\nu_N,r_N}(x_N;\ \epsilon)$，其中 $\nu_j\in\{\nu,-1/\nu\}$ 和 $r_j=\pm$对于 $j=1$、……、N均为任意值。回顾一下，Ω 是福克空间中的真空，而 $\wp_{r,r'}(x;\epsilon)$ 对于 $r,r'=\pm$是定义 4.3 中定义的正则化 eCS 势。我们发现，将 $\nu_j=\nu$ 或$\nu_j=-1/\nu$ 的选择参数化为 $\nu_j=m_j\nu$，其中 $m_j=1$ 或 $m_j=-1/\nu^2=-1/g$，会比较方便。

定理 6.2。（a）设 r_0、$s_0\in\mathbb{Z}$，使得 $g=r_0/s_0>0$ 且 $\nu_0=1/\sqrt{r_0s_0}$，N 为任意正整数，$\nu=\sqrt{g}$ 且

$$\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x};\epsilon):=\phi_{r_1,m_1\nu}(x_1;\epsilon)\cdots\phi_{r_N,m_N\nu}(x_N;\epsilon) \tag{6.2}$$

取任意参数 $\boldsymbol{m}:=(m_1,\ \ldots\ldots,\ m_N)\in\{1,-1/g\}^N$和 $\boldsymbol{r}=(r_1,\ \ldots\ldots,\ r_N)\in\{\pm\}^N$，对于$\boldsymbol{x}=(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_N)\in[-\ell,\ell]^N$和 $\epsilon>0$。那么，算子 $\mathcal{H}_{3,\ \nu}$见定义 4.4 满足

$$[\mathcal{H}_{3,\nu},\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x};\epsilon)]\Omega=\left(H^{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})}_{N;\nu^2}(\boldsymbol{x};\epsilon)+c^{(\boldsymbol{m})}_{N;\nu}(\epsilon)\right)\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x};\epsilon)\Omega+\Psi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x};\epsilon)\Omega \tag{6.3}$$

具有如下正则化哈密顿量,

$$H_{N;g}^{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})}(\boldsymbol{x};\epsilon) := -\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2m_j}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_{1\le j<k\le N} m_j m_k g(g-1)\wp_{r_j,r_k}(x_j-x_k;2\epsilon), \tag{6.4}$$

以下常数,

$$c_{N;\nu}^{(\boldsymbol{m})}(\epsilon) = \tfrac{1}{2}\nu\sum_{j=1}^{N}(\nu m_j)^3 c_\epsilon \tag{6.5}$$

其中 c_ϵ 由 (4.42)给出，而以下修正项在极限 $\epsilon\to 0^+$时趋于零,

$$\Psi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}^{N}(\boldsymbol{x};\epsilon) = \nu^2\sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{r_1,m_1\nu}(x_1;\epsilon)\cdots\phi_{r_{j-1},m_{j-1}\nu}(x_{j-1};\epsilon)\,{}^{\times}_{\times}\mathcal{R}_{r_j,m_j\nu}(x_j;\epsilon)\phi_{r_j,m_j\nu}(x_j;\epsilon){}^{\times}_{\times}$$
$$\times\,\phi_{r_{j+1},m_{j+1}\nu}(x_{j+1};\epsilon)\cdots\phi_{r_N,m_N\nu}(x_N;\epsilon), \tag{6.6}$$

其中

$$\mathcal{R}_{r,\nu}(x;\epsilon) := (2\kappa)^2\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\nu s_n^2\left(\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}mrx}b_{r,m} - \mathrm{e}^{-2\kappa\mathrm{i}mrx}b_{r,-m}\right)\mathrm{e}^{-2\kappa n\epsilon} - \mathrm{e}^{-2\kappa\mathrm{i}(n-m)rx}\,{}^{\times}_{\times}b_{r,-n}b_{r,m}{}^{\times}_{\times}\right)$$
$$\times\left(\mathrm{e}^{-2\kappa(n+m)\epsilon} - \mathrm{e}^{-2\kappa|n-m|\epsilon}\right). \tag{6.7}$$

(*b*) 恒等式

$$\langle\Omega,[\mathcal{H}_{3,\nu},\phi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}^{N}(\boldsymbol{x};\epsilon)^\dagger R_+^{\mu_+}R_-^{\mu_-}\phi_{\boldsymbol{r}',\boldsymbol{m}'}^{M}(\boldsymbol{y};\epsilon)]\Omega\rangle = 0 \tag{6.8}$$

对任意整数 $\mu_\pm\in\mathbb{Z}$、任意非负整数 N,M 以及任意参数取值均成立

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{m} = (m_1\ldots,m_N)\in\{1,-1/\nu^2\}^N, && \boldsymbol{m}' = (m_1'\ldots,m_M')\in\{1,-1/\nu^2\}^M,\\
&\boldsymbol{r} = (r_1,\ldots,r_N)\in\{\pm\}^N, && \boldsymbol{r}' = (r_1',\ldots,r_M')\in\{\pm\}^M,\\
&\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_N)\in[-\ell,\ell]^N, && \boldsymbol{y} = (y_1,\ldots,y_N)\in[-\ell,\ell]^M.
\end{aligned}$$

注 6.3. 恒等式 (6.8) 主要在以下情形中值得关注： μ_+ 和 μ_- 由下式给出

$$\mu_r = \sum_{j=1}^{N}\delta_{r_j,r}m_j\nu/\nu_0 - \sum_{j=1}^{M}\delta_{r_j',r}m_j'\nu/\nu_0 \quad (r=\pm). \tag{6.9}$$

事实上，如果（6 .9）不成立，那么根据（6.8），等式左边为零3.31）.

值得注意的是，定理 6.2 的 (a) 和 (b) 部分是推导推广 [13, 命题 3]的核函数恒等式所必需的。本文不再进一步讨论此事，因为这些核函数恒等式早已为人所知：通过将变量的某些部分平移虚半周期 $\mathrm{i}\delta$，即可从 [25,推论 2。2] 中得到，具体说明见附录B.2。我们预期，这些核函数恒等式可用于构造广义 eCS 模型的本征函数，从而推广 [26]中的结果。

6.1 定理 6.2 的证明

此外　　对于算子 $W_{2,\ r}$ 和 $W_{3,\ r}$ 定义于 (5.4)–(5.5)，我们还考虑算子

$$W_{1,r} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell} \rho_r(x;\epsilon)\,\mathrm{d}x \quad (r=\pm). \tag{6.10}$$

注意

$$W_{k,r} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2k\pi}\int_{-\ell}^{\ell} {}^{\times}_{\times}\rho_r(x;\epsilon)^k{}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x, \qquad (k=1,2,3,\ r=\pm). \tag{6.11}$$

引理 6.4. 对于 r，$r'=\pm$ 和 $k=1$，2，3，算子 $W_{k,\ r'}$ 和任意子 $\phi_{r,\ \nu}(x;\ \epsilon)$ 在定义 4.1 中给出的对象满足对易关系

$$[W_{1,r'},\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)] = \nu\delta_{r,r'}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon) \tag{6.12}$$

$$[W_{2,r'},\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)] = \mathrm{i}r\delta_{r,r'}(\phi_{r,\nu})'(x;\epsilon), \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}[W_{3,r'},\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)] = \delta_{r,r'}\Big(&-\nu^{-1}(\phi_{r,\nu})''(x;\epsilon) + \mathrm{i}r(\nu^2-1)\,{}^{\times}_{\times}\rho_r'(x;\epsilon)\phi_{r,\nu}(x;\epsilon){}^{\times}_{\times}\\ &+2\nu\,{}^{\times}_{\times}\mathcal{R}_{r,\nu}(x;\epsilon)\phi_{r,\nu}(x;\epsilon){}^{\times}_{\times} + \nu^3 c_\epsilon\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\Big),\end{aligned} \tag{6.14}$$

其中 c_ϵ 如 (4.42) 和 $\mathcal{R}_{r,\ \nu}$ 由式 (6.7) 定义。

证明。 参见附录C.2。 □

回顾（4.35），我们计算 $\sum_{r=\pm} W_{3,\ r}$ 和 $\mathcal{C}$ 与 $\phi^N_{\boldsymbol{r}、\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x};\ \epsilon)$ 的对易子

.

首先，利用引理6.4，我们计算

$$\begin{aligned}&\frac{\nu}{2}\sum_{r=\pm}[W_{3,r},\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x};\epsilon)]\\ &=\frac{\nu}{2}\sum_{r=\pm}\sum_{j=1}^{N}\phi_{r_1,m_1\nu}(x_1;\epsilon)\cdots[W_{3,r},\phi_{r_j,m_j\nu}(x_j;\epsilon)]\cdots\phi_{r_N,m_N\nu}(x_N;\epsilon)\\ &=-\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2m_j}\partial^2_{x_j}\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x};\epsilon)+\mathcal{X}+\frac{\nu}{2}c_\epsilon\sum_{j=1}^{N}m_j^3\nu^3\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x};\epsilon),\\ &\quad+\nu^2\sum_{j=1}^{N}m_j\phi_{r_1,m_1\nu}(x_1;\epsilon)\cdots{}^{\times}_{\times}\mathcal{R}_{r_j,m_j\nu}(x_j;\epsilon)\phi_{r_j,m_j\nu}(x_j;\epsilon){}^{\times}_{\times}\cdots\phi_{r_N,m_N\nu}(x_N;\epsilon)\end{aligned} \tag{6.15}$$

其中 $\mathcal{X}$ 是以下内容的简写

$$\mathcal{X} := \frac{\nu}{2}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{i}r_j(m_j^2\nu^2-1)\phi_{r_1,m_1\nu}(x_1;\epsilon)\cdots{}^{\times}_{\times}\rho_{r_j}'(x_j;\epsilon)\phi_{r_j,m_j\nu}(x_j;\epsilon){}^{\times}_{\times}\cdots\phi_{r_N,m_N\nu}(x_N;\epsilon). \tag{6.16}$$

第二个对易子由以下引理给出。

引理 6.5。算子 $\mathcal{C}$ 满足

$$\frac{1-\nu^2}{2}[\mathcal{C},\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x};\epsilon)]\Omega = -\mathcal{X}\Omega + \sum_{1\le j<k\le N} m_jm_k\nu^2(\nu^2-1)\wp_{r_j,r_k}(x_k-x_j;2\epsilon)\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x};\epsilon)\Omega, \tag{6.17}$$

其中 $\mathcal{X}$ 由式（6.16）给出。

证明。见附录C.3。 □

因此，由式（4.35）、（6.15）和（6.17）可得

$$[\mathcal{H}_{3,\nu},\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x};\epsilon)]\Omega=-\sum_{j=1}^N\frac{1}{2m_j}\partial_{x_j}^2\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x};\epsilon)\Omega+\mathcal{X}\Omega+\frac{\nu}{2}c_\epsilon\sum_{j=1}^N m_j^3\nu^3\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x};\epsilon)\Omega$$
$$+\nu^2\sum_{j=1}^N m_j\phi_{r_1,m_1\nu}(x_1;\epsilon)\cdots{}^{\times}_{\times}\mathcal{R}_{r_j,m_j\nu}(x_j;\epsilon)\phi_{r_j,m_j\nu}(x_j;\epsilon){}^{\times}_{\times}\cdots\phi_{r_N,m_N\nu}(x_N;\epsilon)\Omega$$
$$-\mathcal{X}\Omega+\sum_{1\le j<k\le N}m_jm_k\nu^2(\nu^2-1)\wp_{r_j,r_k}(x_j-x_k;2\epsilon)\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x};\epsilon)\Omega,$$

这就证明了定理a的第（6.2）部分。

为证明（b），令 $\Phi:={}^{\times}_{\times}\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x};\epsilon)^\dagger R_+^{\mu_+}R_-^{\mu_-}\phi^M_{\boldsymbol{r}',\boldsymbol{m}'}(\boldsymbol{y};\epsilon){}^{\times}_{\times}$。相差一个乘法常数，$\Phi$等于$\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x};\epsilon)^\dagger R_+^{\mu_+}R_-^{\mu_-}\phi^M_{\boldsymbol{r}',\boldsymbol{m}'}(\boldsymbol{y};\epsilon)$。此外，$\Phi$ 具有（3.20）的形式。事实上，我们有

$$\Phi={}^{\times}_{\times}R_+^{\mu'_+}R_-^{\mu'_-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}J(\alpha)}{}^{\times}_{\times}$$

其中

$$\mu'_r:=\mu_r-\left(\sum_{j=1}^N\delta_{r_j,r}m_j\nu/\nu_0-\sum_{j=1}^M\delta_{r'_j,r}m'_j\nu/\nu_0\right)\quad(r=\pm),$$
$$J(\alpha):=\sum_{j=1}^N m_j\nu(2r_j\kappa Q_rx_j+K_{r_j}(x_j;\epsilon))-\sum_{j=1}^M m'_j\nu(2r'_j\kappa Q_{r'_j}y_j+K_{r_j}(y_j;\epsilon)).$$

因此，定理b的第（6.2 ）部分可直接由下面的引理推出。

引理 6.6。假设 $\Phi=\Phi_{\mu'}(\alpha)={}^{\times}_{\times}R_+^{\mu'_+}R_-^{\mu'_-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}J(\alpha)}{}^{\times}_{\times}$，其中 $J(\alpha)$ 具有（*3.21*）的形式。那么，

$$\langle\Omega,[\mathcal{H}_{3,\nu},\Phi]\Omega\rangle=0.$$

证明。参见附录C.4。 □

7 结论

我们构造了一个由量子场论算子定义的系统$\mathcal{H}_{3,\ \nu}$ 见定义4.4。该系统统一了看似不同的可积系统：一方面，它可被视为一种量子多体系统的二次量子化，该系统是对椭圆 Calogero–Sutherland 模型的推广（参见定理6.2）；另一方面，它对应于一种称为周期 ncILW 方程的孤子方程的量子版本（参见定理5.6）。

在三角情形 $q=0$下，广义 eCS 模型化为变形 Calogero-Sutherland 模型，其精确本征函数已得到深入研究，称为超 Jack 多项式[27, 28]；在这种情形下，这些本征函数可用于构造$\mathcal{H}_{3的\ \nu}$ [14]三角极限的精确本征态。我们预期，以类似的方式，广义 eCS 模型的本征函数可给出本文所构造并研究的算子$\mathcal{H}_{3的\nu}$ 本征态。

目前，这些本征函数尚未在一般情形下完全得知；相关的一些结果见 [26] 。因此，本文有充分的理由构造广义 eCS 模型的本征函数。

本文研究的共形场论模型定义在玻色子 Fock 空间 $\mathcal{F}$ 上，而共形场论算符 $\mathcal{H}_{3,\ \nu}$ 可解释为玻色子量子场论中的哈密顿量。根据称为玻色子-费米子对应的数学结果，Fock 空间 $\mathcal{F}$ 与由费米子 $\psi_r(x)$、 $r=\pm$ 和 $x\in[-\ell,\ell]$生成的费米子 Fock 空间 $\mathcal{F}_{\mathrm{F}}$ 相同，这些费米子满足正则反对易关系

$$\{\psi_r(x),\psi^\dagger_{r'}(y)\}=\delta_{r,r'}\delta(x-y),\quad \{\psi_r(x),\psi_{r'}(y)\}=0\quad (r,r'=\pm;x,y\in[-\ell,\ell]) \tag{7.1}$$

其中 $\psi^\dagger_r(x):=\psi_r(x)^\dagger$，且哈密顿量（形式上）定义为

$$\mathcal{H}^{\mathrm{F}}_2=\sum_{r=\pm}\int_{-\ell}^{\ell}:\psi^\dagger_r(x)r(-\mathrm{i}\partial_x)\psi_r(x):\mathrm{d}x \tag{7.2}$$

其中冒号表示（加法）正规序；严格的数学表述见附录D 。更具体地说，如附录D中所详述，费米子 $\psi_r(x)$可通过对任意子 $\phi_{r,\ -1}(x;\epsilon)/\sqrt{2\ell}$ (即 $\nu=-1$)在 $\nu_0=1$下取极限 $\epsilon\to0$ 得到，而费米子哈密顿量 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}}_2$ 与玻色子哈密顿量 $\mathcal{H}_2$ （在4.34）中定义）之间的关系如下：

$$\mathcal{H}_2=G^2\mathcal{H}^{\mathrm{F}}_2-\kappa(1/\nu_0^2-1)\sum_{r=\pm}Q_r^2 \tag{7.3}$$

与该常数

$$G:=\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m}) \tag{7.4}$$

（这一关系在 $\nu_0=1$ and $q=0$ 的特殊情形下是众所周知的；例如参见 [23, 命题 2。14]） 。事实上，定义于 ($\mathcal{H}_{3,\ \nu}$ 定义于 (4.35) 的玻色子算符与由 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}}_{3,\ \nu}$ 定义的费米子算符之间也存在类似关系：

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\mathrm{F}}_{3,\nu}=\frac{\nu}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\sum_{r=\pm}&:\psi^\dagger_r(x)(-\partial_x^2)\psi_r(x):\mathrm{d}x\\&+\frac{1}{2}(\nu^2-1)G^2\int_{-\ell}^{\ell}\oint_{-\ell}^{\ell}\sum_{r=\pm}J_r(x)\wp_1(x-x')J_r(x')\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'\\&+\frac{1}{2}(\nu^2-1)G^2\int_{-\ell}^{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sum_{r=\pm}J_r(x)\wp_1(x-x'+\mathrm{i}\delta)J_{-r}(x')\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x',\end{aligned} \tag{7.5}$$

其中费米子密度 $J_r(x)$ 定义为 $J_r(x)=:\ \psi^\dagger_r(x)\psi_r(x):$。事实上，正如附录D (见 (D.17))中将要说明的，我们有

$$\mathcal{H}_{3,\nu}=G^2\mathcal{H}^{\mathrm{F}}_{3,\nu}+\frac{\nu}{2}G^2\int_{-\ell}^{\ell}\sum_{r=\pm}:\psi^\dagger_r(x)\left(2\tilde\kappa Q_r r\mathrm{i}\partial_x+\frac{2+\nu_0}{3}(\tilde\kappa Q_r)^2+c_0\right)\psi_r(x):\mathrm{d}x, \tag{7.6}$$

其中 $\tilde\kappa:=2\kappa(1/\nu_0-1)$ 和 c_0 定义于 (1.1)。

式（7.5）中的算子具有自然的物理解释：它描述了带有味指标 $r=\pm$ 的非相对论费米子，这些费米子之间存在一种标准密度-密度类型的特定二体相互作用。因此，本文研究的量子场论具有两种互补的

描述：一种用玻色子表述，另一种用费米子表述。注意，$\nu^2 = 1$是一个自由费米子点：在这一特殊情形下，式（7.5）定义了一个相互作用费米子的量子场论模型；根据玻色子-费米子对应关系，它等价于一个相互作用玻色子的量子场论。

Ruijsenaars 在尝试开发用于构造正弦-戈登理论量子版本的数学工具时，发现了椭圆 Calogero–Sutherland 模型的相对论性推广 [29] 。[30]量子正弦-戈登理论是一种描述相互作用玻色子的相对论不变量子场论，对应于一种称为正弦-戈登方程的孤子方程的量子版本。此外，根据 Coleman 提出的一个著名猜想 [18] （该猜想最近在自由费米子点得到了证明）[20], ，量子正弦-戈登理论等价于有质量 Thirring 模型；后者是一种描述相互作用费米子的相对论不变量子场论。我们认为，将定义在圆上的量子正弦-戈登理论解释为椭圆 Ruijsenaars 模型的二次量子化是可行的；[13] 这使我们认为：(i) ncILW 方程是正弦-戈登方程的非相对论极限；(ii)（7.5）中的哈密顿量 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}}_{3,\ \nu}$ 可以由有质量 Thirring 模型的非相对论极限得到；(iii) $\mathcal{H}_{3、\ \nu}$ 与 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}}_{3、\nu}$之间的关系（7.6）是 Coleman 对应的非相对论极限。因此，我们认为，我们的结果有助于使量子正弦-戈登理论和 Coleman 猜想获得严格的数学表述。

致谢。感谢 Martin Halln ¨as、Masatoshi Noumi、Hjalmar Rosengren 和 Junichi Shiraishi 富有启发性的讨论。B.K.B. 感谢 Olle Engkvist Byggm ¨astare 基金会提供的资助，资助编号为 211-0122。E.L. 感谢欧洲研究理事会提供的资助，资助协议编号为 2020-810451。J.L. 感谢 Ruth and Nils-Erik Stenb ¨ack 基金会、瑞典研究理事会提供的资助（资助编号为 2021-03877），以及欧洲研究理事会提供的资助（资助协议编号为 682537）。

A 特殊函数

我们汇总正文中使用的特殊函数及相关恒等式。我们基本遵循 [31] 的惯例，但将椭圆函数的半周期写作 (ω_1, ω_2)，而不是 (ω_1, ω_3)。特别地，$\tau := \omega_2/\omega_1$ 以及 $q := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}$。此外，我们采用简写$\kappa := \pi/2\omega_1$。正文中，半周期取为 $(\omega_1, \omega_2) = (\ell, \mathrm{i}\delta)$。在本附录中，$z$ 是一个复变量。

A.1 椭圆函数

我们回顾半周期为（ω_1，ω_2）的 Weierstrass ζ 函数和 $\wp$ 函数的标准定义[31,第 23 节。2],

$$\zeta(z) := \frac{1}{z} + \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0)} \left(\frac{1}{z - 2n\omega_1 - 2m\omega_2} + \frac{1}{2n\omega_1 + 2m\omega_2} + \frac{z}{(2n\omega_1 + 2m\omega_2)^2} \right) \tag{A.1}$$

and

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0)} \left(\frac{1}{(z - 2n\omega_1 - 2m\omega_2)^2} - \frac{1}{(2n\omega_1 + 2m\omega_2)^2} \right). \tag{A.2}$$

[13]圆变为实线的极限对应于双曲Ruijsenaars模型 [30]。

正文中定义的修正的魏尔斯特拉斯函数 $\zeta_1(z)$ 和 $\wp_1(z)$ 与标准函数的关系如下:

$$\zeta_1(z) = \zeta(z) - \frac{\eta_1}{\omega_1} z, \quad \wp_1(z) = \wp(z) + \frac{\eta_1}{\omega_1}, \quad \eta_1 := \zeta(\omega_1) \tag{A.3}$$

（例如，可以通过比较 [31, 公式 23.8。4] 与我们的定义（1.4）来验证；请回想$\wp$（z）$= -\partial_z \zeta$（z），并且我们在正文中将 $\wp_1$（z）定义为：$= -\partial_z \zeta_1$（z）。

对于以下两个基本 theta 函数，我们采用雅可比记号 [31, 第 20.5(i) 节],

$$\begin{aligned} \theta_1(z,q) :=& 2q^{1/4}\sin(z)\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})(1-2q^{2m}\cos(2z)+q^{4m}), \\ \theta_4(z,q) :=& \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})(1-2q^{2m-1}\cos(2z)+q^{4m-2}). \end{aligned} \tag{A.4}$$

上面的修正的魏尔斯特拉斯函数 $\zeta_1(z)$ 和 $\wp_1(z)$ 与 θ函数 $\theta_1(z,q)$ 的关系如下,

$$\zeta_1(z) = \partial_z \log \theta_1(\kappa z, q) \tag{A.5}$$

and

$$\wp_1(z) = -\partial_z^2 \log \theta_1(\kappa z, q); \tag{A.6}$$

为验证这一点，使用 $\theta_1(z,q)$ 与魏尔斯特拉斯 σ 函数 [31, 公式 23.6。9] 的以下关系

$$\sigma(z) = 2\omega_1 \exp\left(\frac{\eta_1}{2\omega_1} z^2\right) \frac{\theta_1(\kappa z, q)}{\pi \theta_1'(0,q)} \tag{A.7}$$

以及众所周知的关系 $\zeta(z) = \partial_z \log \sigma(z)$ 和 $\wp(z) = -\partial_z \zeta(z)$。

需要注意的是，$\zeta_1(z)$ 是 $2\omega_1$-周期的（但不是 $2\omega_2$-周期的）。我们还注意到，恒等式（见 [31,公式 20.2.14])

$$\theta_1(z + \pi\tau/2, q) = \mathrm{i} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi\tau}{4}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} \theta_4(z,q) \tag{A.8}$$

意味着

$$\wp_1(z + \mathrm{i}\delta) = -\partial_z^2 \log \theta_4(\kappa z, q). \tag{A.9}$$

A.2 积分变换

˜我们推导出一些与积分变换相关的恒等式 T 以及 T 在 (1.3) 中的恒等式。与正文一样，我们设 $(\omega_1, \omega_2) = (\ell, \mathrm{i}\delta)$。

函数 $\zeta_1(z)$ (1.4) 具有如下级数表示 [31, 式 23.8。2]

$$\zeta_1(z) = \kappa \cot(\kappa z) + 4\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin(2n\kappa z), \qquad (|\mathrm{Im}(z)| < 2\delta, z \notin \Lambda), \tag{A.10}$$

使用 $\kappa = \pi/2\ell$。这一结果在 [32] 中通过计算 $\partial_z \log \theta_1(z,q)$ 的傅里叶级数得出。同样，我们可以使用 [31, 式 20.5.13] 中的级数

$$\frac{\theta_4'(z;q)}{\theta_4(z;q)} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin(2nz) \qquad (|\mathrm{Im}(z)| < \pi\,\mathrm{Im}(\tau/2)) \tag{A.11}$$

以及恒等式（A.6）和（A.8）来证明

$$\zeta_1(z+\mathrm{i}\delta) = -\mathrm{i}\kappa + 4\kappa\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\sin(2n\kappa z) \qquad (|\mathrm{Im}(z)|<\delta). \tag{A.12}$$

在极限 $\delta\to\infty$中，我们有 $q\to 0$ 因此，(A.10) 和 (A.12表明，积分变换T 和 T（定义见 (1.3）满足

$$\lim_{\delta\to\infty}(Tf)(x) = \frac{1}{2\ell}\fint_{-\ell}^{\ell}\cot(\kappa(x'-x))f(x')\,\mathrm{d}x' \tag{A.13}$$

and

$$\lim_{\delta\to\infty}(\tilde{T}f)(x) = -\frac{\mathrm{i}}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x')\,\mathrm{d}x', \tag{A.14}$$

˜使用 $\kappa=\pi/2\ell$；特别地， $T\to 0$ 作用于零均值函数。值得注意的是，(A.13) 右侧是周期为 Hf 的 x 函数的希尔伯特变换 (2ℓ- 周期函数 $f(x)$。

˜最后，我们陈述并证明一个所需结果，该结果将积分算子 T、 T 与系数 c_n、 s_n 联系起来；这些系数出现在 Bogoliubov 变换 (3.16) 中。

˜引理 A.1。 积分算子 T和 T （见 (1.3)）作用于导数 $f_x(x)\colon=\partial_x f(x)$时， 2ℓ周期为 C^3 的函数 $f(x)$ 在 $x\in\mathbb{R}$ 上的作用可计算为

$$\begin{aligned}(Tf_x)(x) &= -\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}}2\kappa|n|(c_n^2+s_n^2)\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}n\kappa(x-x')}f(x')\,\mathrm{d}x',\\ (\tilde{T}f_x)(x) &= -\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}}4\kappa|n|c_n s_n\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}n\kappa(x-x')}f(x')\,\mathrm{d}x',\end{aligned} \tag{A.15}$$

与 c_n 以及 s_n 在(3.17)中。

证明。对于 $x\in\mathbb{R}$ 和 $\epsilon>0$，我们计算得

$$\cot(\kappa(x\mp\mathrm{i}\epsilon)) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa x\pm\kappa\epsilon}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa x\mp\kappa\epsilon}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa x\pm\kappa\epsilon}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa x\mp\kappa\epsilon}} = \pm\mathrm{i}\frac{1+\mathrm{e}^{\mp 2\mathrm{i}\kappa x-2\kappa\epsilon}}{1-\mathrm{e}^{\mp 2\mathrm{i}\kappa x-2\kappa\epsilon}} = \pm\mathrm{i}\Big(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\mp 2\mathrm{i}n\kappa x-2\kappa n\epsilon}\Big), \tag{A.16}$$

从而

$$\cot(\kappa(x-\mathrm{i}\epsilon))+\cot(\kappa(x+\mathrm{i}\epsilon)) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\sin(2n\kappa x)\mathrm{e}^{-2\kappa n\epsilon} \quad (x\in\mathbb{R},\epsilon>0). \tag{A.17}$$

由于 $\zeta_1(z)$ 在 $z=0$处有一个留数为 1 的简单极点，因此（1.3）中第一个定义里的柯西主值积分等价于

$$(Tf)(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\big(\zeta_1(x'-x+\mathrm{i}\epsilon)+\zeta_1(x'-x-\mathrm{i}\epsilon)\big)f(x')\,\mathrm{d}x'. \tag{A.18}$$

利用（A.10）和（A.17），以及恒等式

$$\sin(2n\kappa(x+\mathrm{i}\epsilon))+\sin(2n\kappa(x-\mathrm{i}\epsilon)) = 2\cosh(2n\kappa\epsilon)\sin(2n\kappa x),$$

我们得到

$$\zeta_1(x+\mathrm{i}\epsilon)+\zeta_1(x-\mathrm{i}\epsilon)=4\kappa\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-2\kappa n\epsilon}+\frac{2q^{2n}}{1-q^{2n}}\cosh(2n\kappa\epsilon)\right)\sin(2n\kappa x). \tag{A.19}$$

由于 $0<q<1$，(A.19) 中的级数对于 $x\in\mathbb{R}$ 在所有充分小的 $\epsilon>0$ 下绝对且一致收敛。利用 $4\kappa/2\pi=1/\ell$，我们得到，对于 $x\in\mathbb{R}$，

$$(Tf_x)(x)=\lim_{\epsilon\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-2\kappa n\epsilon}+\frac{2q^{2n}}{1-q^{2n}}\cosh(2n\kappa\epsilon)\right)\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sin(2n\kappa(x'-x))f_x(x')\,\mathrm{d}x', \tag{A.20}$$

这里我们利用级数的一致收敛性来交换求和与积分。根据假设，f_x 是 2ℓ-周期的，并且在 $\mathbb{R}$上 C^2 。因此，分部积分两次后，我们得到

$$\int_{-\ell}^{\ell}\sin(2n\kappa(x'-x))f_x(x')\,\mathrm{d}x'=-\int_{-\ell}^{\ell}\frac{\sin(2n\kappa(x'-x))}{(2n\kappa)^2}f_{xxx}(x')\,\mathrm{d}x'=O(n^{-2})$$

对于 $x\in\mathbb{R}$一致成立。特别地，对于每个 $x\in\mathbb{R}$，(A.20) 中级数的各项对于所有充分小的 $\epsilon>0$，均一致有界于 Cn^{-2}。因此，我们可以将极限移入 (A.20) 的求和号内。注意到 $1+2q^{2n}/(1-q^{2n})=c_n^2+s_n^2$ 对于 $n\geq 1$ 成立，从而得到

$$(Tf_x)(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n^2+s_n^2)\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sin(2n\kappa(x'-x))f_x(x')\,\mathrm{d}x'. \tag{A.21}$$

计算

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sin(2n\kappa(x'-x))f_x(x')\mathrm{d}x'&=-2n\kappa\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\cos(2n\kappa(x'-x))f(x')\,\mathrm{d}x'\\&=-2n\kappa\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\left(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}n\kappa(x-x')}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}n\kappa(x-x')}\right)f(x')\,\mathrm{d}x'\end{aligned} \tag{A.22}$$

通过分部积分并化简，我们得到（A.15）中的第一个恒等式。

现在证明（A.15）中的第二个恒等式。利用（A.12）以及（1.3）中的第二个定义，我们得到

$$(\tilde{T}f_x)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\Big(-\mathrm{i}\kappa+4\kappa\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\sin(2n\kappa(x'-x))\Big)f_x(x')\,\mathrm{d}x'. \tag{A.23}$$

由于 $q^n/(1-q^{2n})=c_ns_n$ for $n\geq 1$ and $4\kappa/\pi=2/\ell$，我们得到

$$(\tilde{T}f_x)(x)=-\frac{\mathrm{i}}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f_x(x')\,\mathrm{d}x'+\sum_{n=1}^{\infty}2c_ns_n\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sin(2n\kappa(x'-x))f_x(x')\,\mathrm{d}x' \tag{A.24}$$

求和与积分的交换是合理的，因为 $0<q<1$。右侧第一项因 2ℓ周期性 f而消失，因此代入（A.22）即可得到结果。

□

B 广义 eCS 模型的可积性

有几种相辅相成的论证，强烈表明变形 eCS 模型具有量子可积性。附录 B.1中讨论了这些论证。附录B.2中，我们证明广义 eCS 模型具有量子可积性，当且仅当由（1.8）定义的变形 eCS 模型具有量子可积性。

B.1 变形 eCS模型

椭圆 Calogero–Sutherland 模型有一种相对论性量子可积推广，称为椭圆 Ruijse- naars 模型 [29]。此外，还存在一种同样具有量子可积性的变形椭圆 Ruijsenaars 模型 [33]。由于变形 eCS 模型是变形椭圆 Ruijsenaars 模型的一个极限情形，参考文献 [33] 中的结果强烈表明，变形 eCS 模型具有量子可积性。然而，从 Ruijsenaars 模型到 Calogero–Sutherland 模型的极限过程颇为微妙，因此，要从前者的量子可积性推导出后者的量子可积性，需要进行非平凡的工作（见 [34, 第 4 节。3]据我们所知，针对变形 Ruijsenaars 模型尚未开展这项工作。

下面我们列出另外三个理由，说明变形 eCS 模型应当是量子可积的。

1. 变形 eCS 模型在特殊情形 $M = 1$、一般$N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$下的量子可积性已在参考文献 [35]中得到证明。2. 关于一般 N、M 情形下 eCS 模型量子可积性的论证，最近见于[36]。3. 本文的结果强烈表明，式（1.9）中的广义 eCS 模型具有与 eCS 模型相同的强意义上的量子可积性。

B.2 广义 eCS模型

我们证明，式（1.8）中的变形 eCS 模型的量子可积性蕴含式（1.9）中的广义 eCS 模型的量子可积性（这是对一个著名论证的推广，该论证可追溯至 Calogero）。

我们从式（1.8）中的变形椭圆 Calogero–Sutherland 哈密顿量出发，并对一组变量作解析延拓如下：

$$x_{j-N_1} = \tilde{x}_j + \mathrm{i}\delta \quad (j - N_1 = 1, \ldots, M_1), \quad y_{j-N_2} = \tilde{y}_j + \mathrm{i}\delta \quad (j - N_2 = 1, \ldots, M_2); \tag{B.1}$$

可以验证，这一代换给出了广义 eCS 哈密顿量（1.9）。

变形 eCS 模型的量子可积性意味着存在一个足够大的彼此对易的微分算子族，其中包括（1.8）中的算子。显然，我们可以在所有这些微分算子中进行代换（B.1），从而得到广义 eCS 模型的一族彼此对易的微分算子。因此，变形 eCS 模型的量子可积性意味着广义 eCS 模型的量子可积性。

C 证明

我们将证明正文中陈述的某些结果。

C.1 对易关系

我们证明（5.21）–（5.22）中的对易关系。

我们先说明定义 5.5 和（5.14）–（5.16）的两个推论：对于 $f(x)$ 满足 $f(x;\ \epsilon)\colon=(\delta_\epsilon * f)(x)$ 在 $\mathcal{D}$上定义良好，构成一个半 sesquilinear 形式，我们有

$$\lim_{\epsilon'\to 0^+}\int_{-\ell}^{\ell}\delta(x-x';\epsilon+\epsilon')f(x';\epsilon')\,\mathrm{d}x'=f(x;\epsilon)\quad(\epsilon>0)\tag{C.1}$$

and

$$\lim_{\epsilon'\to 0^+}\int_{-\ell}^{\ell}\delta(x-x';\epsilon+\epsilon')f(x';\epsilon')^2\,\mathrm{d}x'=(f\circ f)(x;\epsilon)\quad(\epsilon>0).\tag{C.2}$$

为证明（5.21），我们利用 ${}^{\times}_{\times}\rho_{r'}(x';\ \epsilon')^2{}^{\times}_{\times}$和 $\rho_{r'}(x';\ \epsilon')^2$仅相差一个定义良好的 $\mathbb{C}$-数函数，进行计算：

$$\begin{aligned}[\rho_r(x;\epsilon),{}^{\times}_{\times}\rho_{r'}(x';\epsilon')^2{}^{\times}_{\times}]&=[\rho_r(x;\epsilon),\rho_{r'}(x';\epsilon')^2]\\&=\rho_{r'}(x';\epsilon')[\rho_r(x;\epsilon),\rho_{r'}(x';\epsilon')]+[\rho_r(x;\epsilon),\rho_{r'}(x';\epsilon')]\rho_{r'}(x';\epsilon')\\&=-4\pi\mathrm{i}r\delta_{r,r'}\partial_x\delta(x-x';\epsilon+\epsilon')\rho_{r'}(x';\epsilon'),\end{aligned}\tag{C.3}$$

在最后一步代入（5.2）。因此，利用（5.4）和（C.1），我们可以计算：

$$\begin{aligned}\mathrm{i}[\rho_r(x;\epsilon),W_{r'}^2]&=\lim_{\epsilon'\to 0^+}\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\ell}^{\ell}[\rho_r(x;\epsilon),{}^{\times}_{\times}\rho_{r'}(x';\epsilon')^2{}^{\times}_{\times}]\,\mathrm{d}x'\\&=\lim_{\epsilon'\to 0^+}\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\big(-4\pi\mathrm{i}r\delta_{r,r'}\partial_x\delta(x-x';\epsilon+\epsilon')\rho_{r'}(x';\epsilon')\big)\,\mathrm{d}x'\\&=r\delta_{r,r'}\partial_x\lim_{\epsilon'\to 0^+}\int_{-\ell}^{\ell}\delta(x'-x;\epsilon+\epsilon')\rho_r(x';\epsilon')\,\mathrm{d}x'=r\delta_{r,r'}\partial_x\rho_r(x;\epsilon),\end{aligned}\tag{C.4}$$

这等价于（5.21）。

为证明（5.22），注意到根据定义 3.2、（3.16）和（5.1），

$${}^{\times}_{\times}\rho_r(x;\epsilon)^3{}^{\times}_{\times}={}^{\times}_{\times}\rho_r(x;\epsilon)^2{}^{\times}_{\times}\tilde{\rho}_r^-(x;\epsilon)+\tilde{\rho}_r^+(x;\epsilon){}^{\times}_{\times}\rho_r(x;\epsilon)^2{}^{\times}_{\times}\tag{C.5}$$

其中 $\tilde{\rho}_r^{\pm}(x;\epsilon)\colon=\kappa Q_r+\rho_r^{\pm}(x;\ \epsilon)$，其中

$$\rho_r^{\pm}(x;\epsilon)\coloneqq\sum_{n=1}^{\infty}2\kappa\Big(\mathrm{e}^{2\kappa(\mp\mathrm{i}rnx-|n|\epsilon)}c_n a_{r,\mp n}-\mathrm{e}^{2\kappa(\pm\mathrm{i}rnx-|n|\epsilon)}s_n a_{-r,\mp n}\Big)\tag{C.6}$$

分别是 $\rho_r(x;\epsilon)$ 关于 $+$ 和 $-$的产生部分和湮灭部分。因此，

$$\begin{aligned}[\rho_r(x;\epsilon),{}^{\times}_{\times}\rho_{r'}(x';\epsilon')^3{}^{\times}_{\times}]&=[\rho_r(x;\epsilon),{}^{\times}_{\times}\rho_{r'}(x';\epsilon')^2{}^{\times}_{\times}]\tilde{\rho}_{r'}^-(x';\epsilon')+\tilde{\rho}_{r'}^+(x';\epsilon')[\rho_r(x;\epsilon),{}^{\times}_{\times}\rho_{r'}(x';\epsilon')^2{}^{\times}_{\times}]\\&\quad+{}^{\times}_{\times}\rho_{r'}(x';\epsilon')^2{}^{\times}_{\times}[\rho_r(x;\epsilon),\tilde{\rho}_{r'}^-(x';\epsilon')]+[\rho_r(x;\epsilon),\tilde{\rho}_{r'}^+(x';\epsilon')]{}^{\times}_{\times}\rho_{r'}(x';\epsilon')^2{}^{\times}_{\times}\\&=[\rho_r(x;\epsilon),{}^{\times}_{\times}\rho_{r'}(x';\epsilon')^2{}^{\times}_{\times}]\tilde{\rho}_{r'}^-(x';\epsilon')+\tilde{\rho}_{r'}^+(x';\epsilon')[\rho_r(x;\epsilon),{}^{\times}_{\times}\rho_{r'}(x';\epsilon')^2{}^{\times}_{\times}]\\&\quad+[\rho_r(x;\epsilon),\rho_{r'}(x';\epsilon')]{}^{\times}_{\times}\rho_{r'}(x';\epsilon')^2{}^{\times}_{\times},\end{aligned}\tag{C.7}$$

因为 $[\rho_r(x;\ \epsilon)\tilde{\rho}_{r'}^{\pm}(y;\ \epsilon')]$ 是定义良好的 $\mathbb{C}$-数值函数，且 $\tilde{\rho}_{r'}^+(y;\ \epsilon')+\tilde{\rho}_{r'}^-(y;\ \epsilon')=\rho_{r'}(y;\ \epsilon)$。代入 (5.2) 和 (C.3)，再次利用定义 3.2，可得，

$$\begin{aligned}[\rho_r(x;\epsilon),{}^{\times}_{\times}\rho_{r'}(x';\epsilon')^3{}^{\times}_{\times}]&=-4\pi\mathrm{i}r\delta_{r,r'}\partial_x\delta(x-x';\epsilon+\epsilon')\rho_{r'}(x';\epsilon')\tilde{\rho}_{r'}^-(x';\epsilon')\\&\quad-4\pi\mathrm{i}r\delta_{r,r'}\partial_x\delta(x-x';\epsilon+\epsilon')\tilde{\rho}_{r'}^+(x';\epsilon')\rho_{r'}(x';\epsilon')\\&\quad-2\pi\mathrm{i}r\delta_{r,r'}\partial_x\delta(x-x';\epsilon+\epsilon'){}^{\times}_{\times}\rho_{r'}(x';\epsilon')^2{}^{\times}_{\times}\\&=-6\pi\mathrm{i}r\delta_{r,r'}\partial_x\delta(x-x';\epsilon+\epsilon'){}^{\times}_{\times}\rho_r(x';\epsilon')^2{}^{\times}_{\times}.\end{aligned}\tag{C.8}$$

因此，采用与上文类似的方法，利用（5.5）和（C.2），

$$\begin{aligned}\mathrm{i}[\rho_r(x;\epsilon),W^3_{r'}] &= \lim_{\epsilon'\to 0^+}\frac{\mathrm{i}}{6\pi}\int_{-\ell}^{\ell}[\rho_r(x;\epsilon),{}^{\times}_{\times}\rho_{r'}(x';\epsilon')^3{}^{\times}_{\times}]\,\mathrm{d}x'\\ &= \lim_{\epsilon'\to 0^+}\frac{\mathrm{i}}{6\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\big(-6\pi\mathrm{i}r\delta_{r,r'}\partial_x\delta(x-x';\epsilon+\epsilon'){}^{\times}_{\times}\rho_r(x';\epsilon')^2{}^{\times}_{\times}\big)\,\mathrm{d}x'\\ &= r\delta_{r,r'}\partial_x\lim_{\epsilon'\to 0^+}\int_{-\ell}^{\ell}\delta(x-y;\epsilon+\epsilon'){}^{\times}_{\times}\rho_r(x';\epsilon')^2{}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x' = r\delta_{r,r'}\partial_x{}^{\times}_{\times}(\rho_r\circ\rho_r)(x;\epsilon){}^{\times}_{\times},\end{aligned}\tag{C.9}$$

这与（5.22）等价，因为 ${}^{\times}_{\times}\rho_r\circ\rho_{r,x}{}^{\times}_{\times} = {}^{\times}_{\times}\rho_{r,x}\circ\rho_r{}^{\times}_{\times}$；后者可由以下计算得出，

$$\begin{aligned}{}^{\times}_{\times}(\rho_{r,x}\circ\rho_r)(x;\epsilon){}^{\times}_{\times} &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\ell}^{\ell}\delta(x-x';\epsilon+\epsilon'){}^{\times}_{\times}\rho_{r,x'}(x';\epsilon')\rho_r(x';\epsilon'){}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x'\\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\ell}^{\ell}\delta(x-x';\epsilon+\epsilon'){}^{\times}_{\times}\rho_r(x';\epsilon')\rho_{r,x'}(x';\epsilon'){}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x' = {}^{\times}_{\times}(\rho_r\circ\rho_{r,x})(x;\epsilon){}^{\times}_{\times}.\end{aligned}\tag{C.10}$$

C.2 引理6.4的证明

我们用统一的方法证明（6.12）–（6.14）：通过推导 $\mathrm{e}^{t\rho_{r'}(x';\epsilon')}$ 与$\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)$ 之间的对易关系，我们可以计算任意 k 值下 $W_{k,r'}$ 与任意子 $\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)$ 的对易子。

由（C.6）和（4.24），我们注意到

$$r(K^{\pm}_r)'(x;\epsilon) = \rho^{\pm}_r(x;\epsilon),\tag{C.11}$$

这里及下文中，撇号表示对函数的第一个自变量求微分。方程（4.1）、（5.1）和（C.11）推出以下恒等式

$$(\phi_{r,\nu})'(x;\epsilon) = -\mathrm{i}\nu r{}^{\times}_{\times}\rho_r(x;\epsilon)\phi_{r,\nu}(x;\epsilon){}^{\times}_{\times}\tag{C.12}$$

and

$$(\phi_{r,\nu})''(x;\epsilon) = -\mathrm{i}\nu r{}^{\times}_{\times}\rho'_r(x;\epsilon)\phi_{r,\nu}(x;\epsilon){}^{\times}_{\times} - \nu^2{}^{\times}_{\times}\rho_r(x;\epsilon)^2\phi_{r,\nu}(x;\epsilon){}^{\times}_{\times},\tag{C.13}$$

我们稍后会用到这一点。接下来，通过对（4.27）求微分，我们计算

$$r[\rho^{\mp}_r(x;\epsilon),K^{\pm}_{r'}(x';\epsilon')] = \begin{cases} rC'(\pm r(x-x');\epsilon+\epsilon') & r=r'\\ \tilde{C}'(\pm(x-x');\epsilon+\epsilon') & r=-r'.\end{cases}\tag{C.14}$$

由（4.28），可得

$$\begin{aligned}C'(z;\epsilon) &= 2\kappa\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}\big(\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}nz-|n|\epsilon)}c_n^2 - \mathrm{e}^{2\kappa(-\mathrm{i}nz-|n|\epsilon)}s_n^2\big)\\ &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{2\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\big(\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}nz}+2i\sin(2\kappa nz)s_n^2\big)\mathrm{e}^{-2\kappa|n|\epsilon} = 2\pi\mathrm{i}\delta_-(z;\epsilon) - 4\pi j(z;\epsilon),\\ \tilde{C}'(z;\epsilon) &= 2\kappa\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}c_ns_n\big(\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}nz-|n|\epsilon)} - \mathrm{e}^{2\kappa(-\mathrm{i}nz-|n|\epsilon)}\big)\\ &= -\frac{4\pi}{2\ell}\sum_{n=1}^{\infty}c_ns_n\sin(2\kappa nz)\mathrm{e}^{-2\kappa|n|\epsilon} = -4\pi\tilde{j}(z;\epsilon),\end{aligned}\tag{C.15}$$

其中

$$\delta_\pm(x;\epsilon) \coloneqq \frac{1}{2\ell}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{2\kappa(\mp \mathrm{i}nx-|n|\epsilon)} \quad (x\in\mathbb{R},\epsilon>0), \tag{C.16}$$

$$\begin{aligned} j(x;\epsilon) &\coloneqq \frac{1}{2\ell}\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2 \sin(2\kappa n x)\mathrm{e}^{-2\kappa n\epsilon} \\ \tilde{j}(x;\epsilon) &\coloneqq \frac{1}{2\ell}\sum_{n=1}^{\infty} c_n s_n \sin(2\kappa n x)\mathrm{e}^{-2\kappa n\epsilon} \end{aligned} \qquad (x\in\mathbb{R},\epsilon>0). \tag{C.17}$$

因此,

$$r[\rho_r^{\mp}(x;\epsilon), K_{r'}^{\pm}(x';\epsilon')] = \begin{cases} r(2\pi\mathrm{i}\delta_-(\pm r(x-x');\epsilon+\epsilon') - 4\pi j(\pm r(x-x');\epsilon+\epsilon')) & r=r' \\ -4\pi\tilde{j}(\pm(x-x');\epsilon+\epsilon') & r=-r', \end{cases} \tag{C.18}$$

利用（4.23）、正规序的定义、Baker-Campbell-Hausdorff 公式（3.36）以及对易子（C.18），我们得到

$$\begin{aligned} \phi_{r,\nu}(x;\epsilon) \,{}^{\times}_{\times}\mathrm{e}^{t\rho_{r'}(x';\epsilon')}{}^{\times}_{\times} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\nu\kappa Q_r x} R_r^{\nu/\nu_0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\nu\kappa Q_r x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu K_r^+(x;\epsilon)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu K_r^-(x;\epsilon)} \mathrm{e}^{2t\kappa Q_{r'}} e^{t\rho_{r'}^+(x';\epsilon')} e^{t\rho_{r'}^-(x';\epsilon')} \\ &= \mathrm{e}^{-t\kappa\delta_{r,r'}\nu} \mathrm{e}^{[-\mathrm{i}\nu K_r^-(x;\epsilon), t\rho_{r'}^+(x';\epsilon')]} \,{}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\mathrm{e}^{t\rho_{r'}(x';\epsilon')}{}^{\times}_{\times} \\ &= \mathrm{e}^{-\nu t(\kappa\delta_{r,r'}+\mathrm{i}[K_r^-(x;\epsilon),\rho_{r'}^+(x';\epsilon')])} \,{}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\mathrm{e}^{t\rho_{r'}(x';\epsilon')}{}^{\times}_{\times} \\ &= \mathrm{e}^{-\nu t\delta_{r,r'}(\kappa+2\pi\delta_-(r(x-x');\epsilon+\epsilon')+4\pi\mathrm{i}j(r(x-x');\epsilon+\epsilon'))} \mathrm{e}^{-\nu t\delta_{r,-r'}(-4r\pi\mathrm{i}\tilde{j}(x-x';\epsilon+\epsilon'))} \\ &\quad \times \,{}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\mathrm{e}^{t\rho_{r'}(x';\epsilon')}{}^{\times}_{\times}. \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \,{}^{\times}_{\times}\mathrm{e}^{t\rho_{r'}(x';\epsilon')}{}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon) &= \mathrm{e}^{2t\kappa Q_{r'}} \mathrm{e}^{t\rho_{r'}^+(x';\epsilon')} e^{t\rho_{r'}^-(x';\epsilon')} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\nu\kappa Q_r x} R_r^{\nu/\nu_0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\nu\kappa Q_r x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu K_r^+(x;\epsilon)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu K_r^-(x;\epsilon)} \\ &= e^{t\kappa\delta_{r,r'}\nu} \mathrm{e}^{[t\rho_{r'}^-(x';\epsilon'), -\mathrm{i}\nu K_r^+(x;\epsilon)]} \,{}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\mathrm{e}^{t\rho_{r'}(x';\epsilon')}{}^{\times}_{\times} \\ &= \mathrm{e}^{\nu t(\kappa\delta_{r,r'}-\mathrm{i}[\rho_{r'}^-(x';\epsilon'),K_r^+(x;\epsilon)])} \,{}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\mathrm{e}^{t\rho_{r'}(x';\epsilon')}{}^{\times}_{\times} \\ &= \mathrm{e}^{\nu t\delta_{r,r'}(\kappa+2\pi\delta_+(r(x-x');\epsilon+\epsilon')-4\pi\mathrm{i}j(r(x-x');\epsilon+\epsilon'))} \mathrm{e}^{\nu t\delta_{r,-r'}(4r\pi\mathrm{i}\tilde{j}(x-x';\epsilon+\epsilon'))} \\ &\quad \times \,{}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\mathrm{e}^{t\rho_{r'}(x';\epsilon')}{}^{\times}_{\times}. \end{aligned}$$

我们定义函数

$$\Delta_\pm(x;\epsilon) \coloneqq \kappa + 2\pi\delta_\pm(x;\epsilon) \mp 4\pi\mathrm{i}j(x;\epsilon) \quad (x\in\mathbb{R},\epsilon>0), \tag{C.19}$$

它们将（3.35）中的正则化狄拉克δ函数分解如下,

$$\delta(x;\epsilon) = \frac{1}{2\ell} + \delta_+(x;\epsilon) + \delta_-(x;\epsilon) = \frac{\Delta_+(x;\epsilon)+\Delta_-(x;\epsilon)}{2\pi} \quad (x\in\mathbb{R},\epsilon>0). \tag{C.20}$$

那么我们可以将上式写成

$$\begin{aligned} \phi_{r,\nu}(x;\epsilon) \,{}^{\times}_{\times}\mathrm{e}^{t\rho_{r'}(x';\epsilon')}{}^{\times}_{\times} &= \begin{cases} \mathrm{e}^{-\nu t\Delta_-(r(x-x');\epsilon+\epsilon')} \,{}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\mathrm{e}^{t\rho_{r'}(x';\epsilon')}{}^{\times}_{\times}, & r=r', \\ \mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}\nu t\tilde{j}(r(x-x');\epsilon+\epsilon')} \,{}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\mathrm{e}^{t\rho_{r'}(x';\epsilon')}{}^{\times}_{\times}, & r=-r', \end{cases} \\ \,{}^{\times}_{\times}\mathrm{e}^{t\rho_{r'}(x';\epsilon')}{}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon) &= \begin{cases} \mathrm{e}^{\nu t\Delta_+(r(x-x');\epsilon+\epsilon')} \,{}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\mathrm{e}^{t\rho_{r'}(x';\epsilon')}{}^{\times}_{\times}, & r=r', \\ \mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}\nu t\tilde{j}(r(x+x');\epsilon+\epsilon')} \,{}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\mathrm{e}^{t\rho_{r'}(x';\epsilon')}{}^{\times}_{\times} & r=-r'. \end{cases} \end{aligned} \tag{C.21}$$

对易子

$$[\phi_{r,\nu}(x;\epsilon), {}^{\times}_{\times}\mathrm{e}^{t\rho_{r'}(x';\epsilon')}{}^{\times}_{\times}] = \delta_{r,r'}\big(\mathrm{e}^{-\nu t\Delta_-(r(x-x');\epsilon+\epsilon')} - \mathrm{e}^{\nu t\Delta_+(r(x-x');\epsilon+\epsilon')}\big) {}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\mathrm{e}^{t\rho_{r'}(x';\epsilon')}{}^{\times}_{\times} \tag{C.22}$$

可直接由（C.21）得出，由此对任意子与 W^k、 W^k 的对易子可通过微分得到。我们先考虑 $k=1$的情形；对（C.22）关于 t求微分，并令 $t=0$，得到

$$\begin{aligned}[\phi_{r,\nu}(x;\epsilon), \rho_{r'}(x';\epsilon')] &= \delta_{r,r'}\big(-\nu\Delta_-(r(x-x');\epsilon+\epsilon') - \nu\Delta_+(r(x-x');\epsilon+\epsilon')\big) {}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon){}^{\times}_{\times} \\ &= -\delta_{r,r'}2\pi\nu\delta(r(x-x');\epsilon+\epsilon')\phi_{r,\nu}(x;\epsilon),\end{aligned} \tag{C.23}$$

这里我们用到了

$$\Delta_-(z;\epsilon) + \Delta_+(z;\epsilon) = 2\pi\delta(z;\epsilon). \tag{C.24}$$

对（C.23）关于 x' 从 $-\ell$ 到 ℓ 积分，并利用

$$\int_{-\ell}^{\ell}\delta(r(x-x');\epsilon)\,\mathrm{d}x' = 1, \tag{C.25}$$

在 6.12）的极限下，我们得到 $\epsilon'\to 0^+$。

现在考虑 $k=2$的情形。先对（C.22）关于 t 求两次微分，然后令$t=0$。利用（C.24）以及恒等式

$$\Delta_-(z;\epsilon)^2 - \Delta_+(z;\epsilon)^2 = (4\pi)^2\mathrm{i}\delta(z;\epsilon)j(z;\epsilon) - 2\pi\mathrm{i}\delta'(z;\epsilon), \tag{C.26}$$

我们得到

$$\begin{aligned}&[\phi_{r,\nu}(x;\epsilon), {}^{\times}_{\times}\rho_{r'}(x';\epsilon')^2{}^{\times}_{\times}] = \\ &\delta_{r,r'}\nu^2\big(\Delta_-(r(x-x');\epsilon+\epsilon')^2 - \Delta_+(r(x-x');\epsilon+\epsilon')^2\big) {}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon){}^{\times}_{\times} \\ &-2\delta_{r,r'}\nu\big(\Delta_-(r(x-x');\epsilon+\epsilon') + \Delta_+(r(x-x');\epsilon+\epsilon')\big) {}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\rho_{r'}(x';\epsilon'){}^{\times}_{\times} = \\ &\delta_{r,r'}\nu^2\left[(4\pi)^2\mathrm{i}\delta(r(x-x');\epsilon+\epsilon')j(r(x-x');\epsilon+\epsilon') - 2\pi\mathrm{i}\delta'(r(x-x');\epsilon+\epsilon')\right]\phi_{r,\nu}(x;\epsilon) \\ &-4\delta_{r,r'}\pi\nu\delta(r(x-x');\epsilon+\epsilon') {}^{\times}_{\times}\rho_r(x';\epsilon')\phi_{r,\nu}(x;\epsilon){}^{\times}_{\times}.\end{aligned} \tag{C.27}$$

再次在 $-\ell$ 和 ℓ之间对 x' 积分，我们使用以下积分

$$\begin{aligned}&\int_{-\ell}^{\ell}\delta(r(x-x');\epsilon+\epsilon')j(r(x-x');\epsilon+\epsilon')\,\mathrm{d}x' = 0, \\ &\int_{-\ell}^{\ell}\delta'(r(x-x');\epsilon+\epsilon')\,\mathrm{d}x' = 0, \\ &\int_{-\ell}^{\ell}\delta(r(x-x');\epsilon+\epsilon')\rho_r(x';\epsilon')\,\mathrm{d}x' = \rho_r(x;\epsilon+2\epsilon'),\end{aligned} \tag{C.28}$$

得到

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon'\to 0}\frac{1}{4\pi}\int_{-\ell}^{\ell}[\phi_{r,\nu}(x;\epsilon), {}^{\times}_{\times}\rho_{r'}(x';\epsilon')^2{}^{\times}_{\times}]\,\mathrm{d}x' &= -\delta_{r,r'}\nu\lim_{\epsilon'\to 0}{}^{\times}_{\times}\rho_r(x;\epsilon+2\epsilon')\phi_{r,\nu}(x;\epsilon){}^{\times}_{\times} \\ &= -\delta_{r,r'}\nu\,{}^{\times}_{\times}\rho_r(x;\epsilon)\phi_{r,\nu}(x;\epsilon){}^{\times}_{\times}.\end{aligned} \tag{C.29}$$

回顾（C.12），可得

$$[\phi_{r,\nu}(x;\epsilon), W_{2,r'}] = -\mathrm{i}r\delta_{r,r'}(\phi_{r,\nu})'(x;\epsilon),$$

即（6.13）。

最后，我们考虑情形 $k=3$。对（C.22）关于 t 求三阶导数，并令 $t=0$，得到

$$\begin{aligned}[\phi_{r,\nu}(x),{}^{\times}_{\times}\rho_{r'}(x';\epsilon')^3{}^{\times}_{\times}] &= -\nu^3\delta_{r,r'}\big(\Delta_-(r(x-x');\epsilon+\epsilon')^3+\Delta_+(r(x-x');\epsilon+\epsilon')^3\big){}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon){}^{\times}_{\times}\\ &+3\nu^2\delta_{r,r'}\big(\Delta_-(r(x-x');\epsilon+\epsilon')^2-\Delta_+(r(x-x');\epsilon+\epsilon')^2\big){}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\rho_{r'}(x';\epsilon'){}^{\times}_{\times}\\ &-3\nu\delta_{r,r'}\big(\Delta_-(r(x-x');\epsilon+\epsilon')+\Delta_+(r(x-x');\epsilon+\epsilon')\big){}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\rho_{r'}(x';\epsilon')^2{}^{\times}_{\times}\\ &=: X_1+X_2+X_3. \end{aligned}\tag{C.30}$$

应用恒等式 [13]

$$\Delta_-(z;\epsilon)^3+\Delta_+(z;\epsilon)^3=-96\pi^3\delta(z;\epsilon)j(z;\epsilon)^2+24\pi^2\delta'(z;\epsilon)j(z;\epsilon)-\pi\delta''(z;\epsilon)+2\pi\kappa^2\delta(z;\epsilon),\tag{C.31}$$

以及（C.26）和（C.24）分别于 X_1、X_2和 X_3中，我们可以写成

$$\begin{aligned} X_1 =& -\nu^3\delta_{r,r'}\Big(-96\pi^3\delta(r(x-x');\epsilon+\epsilon')j(r(x-x');\epsilon+\epsilon')^2\\ &+24\pi^2\delta'(r(x-x');\epsilon+\epsilon')j(r(x-x');\epsilon+\epsilon'),\\ &-\pi\delta''(r(x-x');\epsilon+\epsilon')+2\pi\kappa^2\delta(r(x-x');\epsilon+\epsilon')\Big)\phi_{r,\nu}(x;\epsilon),\\ X_2 =& 3\nu^2\delta_{r,r'}\big((4\pi)^2\mathrm{i}\delta(r(x-x');\epsilon+\epsilon')j(r(x-x');\epsilon+\epsilon')\\ &-2\pi\mathrm{i}\delta'(r(x-x');\epsilon+\epsilon')\big){}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\rho_r(x';\epsilon'){}^{\times}_{\times}\\ X_3 =& -3\nu\delta_{r,r'}2\pi\delta(r(x-x');\epsilon+\epsilon'){}^{\times}_{\times}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\rho_r(x';\epsilon')^2{}^{\times}_{\times}. \end{aligned}\tag{C.32}$$

对 X_1 关于 x' 从 $-\ell$ 到 ℓ 进行积分，并利用这些积分

$$\begin{aligned} &\int_{-\ell}^{\ell}\delta(r(x-x');\epsilon+\epsilon')j(r(x-x');\epsilon+\epsilon')^2\,\mathrm{d}x'\\ &\quad=\frac{1}{2(2\ell)^2}\sum_{n,m=1}^{\infty}s_n^2s_m^2\mathrm{e}^{-2\kappa(n+m)(\epsilon+\epsilon')}\big(\mathrm{e}^{-2\kappa|n-m|(\epsilon+\epsilon')}-\mathrm{e}^{-2\kappa(n+m)(\epsilon+\epsilon')}\big),\\ &\int_{-\ell}^{\ell}\delta'(r(x-x');\epsilon+\epsilon')j(r(x-x');\epsilon+\epsilon')\,\mathrm{d}x'=-j'(0;2(\epsilon+\epsilon')),\\ &\int_{-\ell}^{\ell}\delta''(r(x-x');\epsilon+\epsilon')\,\mathrm{d}x'=0,\\ &\int_{-\ell}^{\ell}\delta(r(x-x');\epsilon)\,\mathrm{d}x'=1, \end{aligned}\tag{C.33}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon'\to0}\int_{-\ell}^{\ell}X_1\,\mathrm{d}x' =& -\nu^3\delta_{r,r'}\Big(-96\pi^3\frac{1}{2(2\ell)^2}\sum_{n,m=1}^{\infty}s_n^2s_m^2\mathrm{e}^{-2\kappa(n+m)\epsilon}\big(\mathrm{e}^{-2\kappa|n-m|\epsilon}-\mathrm{e}^{-2\kappa(n+m)\epsilon}\big)\\ &-24\pi^2j'(0;2\epsilon)+2\pi\kappa^2\Big)\phi_{r,\nu}(x;\epsilon).\end{aligned}$$

对 x' 从 $-\ell$ 积分到 ℓ，并使用积分 X_2

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon'\to0}\int_{-\ell}^{\ell}\delta(r(x-x');\epsilon+\epsilon')j(r(x-x');\epsilon+\epsilon')\rho_r(x';\epsilon')\,\mathrm{d}x'\\ &=-\frac{\mathrm{i}\pi}{(2\ell)^2}\sum_{n,m=1}^{\infty}s_n^2\left(\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}mrx}b_{r,m}-\mathrm{e}^{-2\kappa\mathrm{i}mrx}b_{r,-m}\right)\left(\mathrm{e}^{-2\kappa|n-m|\epsilon}-\mathrm{e}^{-2\kappa(n+m)\epsilon}\right)\mathrm{e}^{-2\kappa n\epsilon}\end{aligned}\tag{C.34}$$

and

$$\int_{-\ell}^{\ell} \delta'(r(x-x');\epsilon+\epsilon')\rho_r(x';\epsilon')\,\mathrm{d}x' = r\rho_r'(x;\epsilon+2\epsilon'),$$

我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon'\to 0}\int_{-\ell}^{\ell} X_2\,\mathrm{d}x' = 3\nu^2\delta_{r,r'}(4\pi)^2\mathrm{i}\,{}^{\times}_{\times}\Bigg(&-\frac{\mathrm{i}\pi}{(2\ell)^2}\sum_{n,m=1}^{\infty} s_n^2\left(\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}mrx}b_{r,m}-\mathrm{e}^{-2\kappa\mathrm{i}mrx}b_{r,-m}\right)\\ &\times\left(\mathrm{e}^{-2\kappa|n-m|\epsilon}-\mathrm{e}^{-2\kappa(n+m)\epsilon}\right)\mathrm{e}^{-2\kappa n\epsilon}\Bigg)\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\,{}^{\times}_{\times}\\ &-3\nu^2\delta_{r,r'}2\pi\mathrm{i}\,{}^{\times}_{\times}r\rho_r'(x;\epsilon)\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\,{}^{\times}_{\times}.\end{aligned}$$

对 X_3 关于 x' 从 $-\ell$ 到 ℓ 积分，利用以下由（C.2）推出的恒等式:

$$\lim_{\epsilon'\to 0^+}\int_{-\ell}^{\ell}\delta(r(x-x');\epsilon+\epsilon')\rho_r(x';\epsilon')^2\,\mathrm{d}x' = (2\kappa)^2\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}(n+m)rx-2\kappa|n+m|\epsilon}\tilde{b}_{r,n}\tilde{b}_{r,m} \tag{C.35}$$

with

$$\tilde{b}_{r,n} := \begin{cases} b_{r,n}, & n\neq 0,\\ Q_r=\nu_0 b_{r,0}, & n=0,\end{cases} \tag{C.36}$$

我们得到

$$\lim_{\epsilon'\to 0}\int_{-\ell}^{\ell} X_3\,\mathrm{d}x' = -3\nu\delta_{r,r'}2\pi(2\kappa)^2\,{}^{\times}_{\times}\left(\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}(n+m)rx-2\kappa|n+m|\epsilon}\tilde{b}_{r,n}\tilde{b}_{r,m}\right)\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\,{}^{\times}_{\times}.$$

结合上述结果并利用恒等式

$$j'(0;2\epsilon) = \frac{2\kappa^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n s_n^2\mathrm{e}^{-4\kappa n\epsilon},$$

我们得到

$$[W_{3,r'},\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)] = -\frac{1}{6\pi}\lim_{\epsilon'\to 0}\int_{-\ell}^{\ell}(X_1+X_2+X_3)\,\mathrm{d}x' = Y_1+Y_2+Y_3,$$

其中

$$\begin{aligned}Y_1 \coloneqq{}& \kappa^2\nu^3\delta_{r,r'}\Bigg(-8\sum_{n,m=1}^{\infty} s_n^2 s_m^2\mathrm{e}^{-2\kappa(n+m)\epsilon}\left(\mathrm{e}^{-2\kappa|n-m|\epsilon}-\mathrm{e}^{-2\kappa(n+m)\epsilon}\right)\\ &-8\sum_{n=1}^{\infty} n s_n^2\mathrm{e}^{-4\kappa n\epsilon}+\frac{1}{3}\Bigg)\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\\ Y_2 \coloneqq{}& -8\kappa^2\nu^2\delta_{r,r'}\,{}^{\times}_{\times}\sum_{n,m=1}^{\infty} s_n^2\left(\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}mrx}b_{r,m}-\mathrm{e}^{-2\kappa\mathrm{i}mrx}b_{r,-m}\right)\\ &\times\left(\mathrm{e}^{-2\kappa|n-m|\epsilon}-\mathrm{e}^{-2\kappa(n+m)\epsilon}\right)\mathrm{e}^{-2\kappa n\epsilon}\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\,{}^{\times}_{\times}\\ Y_3 \coloneqq{}& \mathrm{i}r\nu^2\delta_{r,r'}\,{}^{\times}_{\times}\rho_r'(x;\epsilon)\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\,{}^{\times}_{\times}+\delta_{r,r'}\nu\,{}^{\times}_{\times}\left((2\kappa)^2\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}(n+m)rx-2\kappa|n+m|\epsilon}\tilde{b}_{r,n}\tilde{b}_{r,m}\right)\phi_{r,\nu}(x;\epsilon)\,{}^{\times}_{\times}.\end{aligned}$$

显然，$Y_1 = \nu^3 \delta_{r,\,r'} c_\epsilon \phi_{r,\,\nu}(x;\ \epsilon)$，其中 c_ϵ 由（4.42）给出。

˜下一步是化简 Y_3 的表达式。利用 C.36 中 b_r 的定义、n 以及 5.1，我们可以写成

$$\rho_r(x;\epsilon) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\kappa \mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}rnx - |n|\epsilon)} \tilde{b}_{r,n} \quad (r = \pm).$$

因此，

$$\overset{\times}{\times}(2\kappa)^2 \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}(n+m)x - |n+m|\epsilon)} \tilde{b}_{r,n}\tilde{b}_{r,m} - \rho_r(x;\epsilon)^2 \overset{\times}{\times} = E, \tag{C.37}$$

其中 E 是以下表达式的简写：

$$\begin{aligned} E &:= (2\kappa)^2 \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}(n+m)rx} \left(\mathrm{e}^{-2\kappa|n+m|\epsilon} - \mathrm{e}^{-2\kappa(|n|+|m|)\epsilon}\right) \overset{\times}{\times} \tilde{b}_{r,n}\tilde{b}_{r,m} \overset{\times}{\times} \\ &= -2(2\kappa)^2 \sum_{n,m=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\kappa\mathrm{i}(n-m)rx} \left(\mathrm{e}^{-2\kappa(n+m)\epsilon} - \mathrm{e}^{-2\kappa|n-m|\epsilon}\right) \overset{\times}{\times} b_{r,-n} b_{r,m} \overset{\times}{\times}. \end{aligned}$$

利用（C.13）和（C.37），并加上和减去 $\mathrm{i}r\delta_{r,\,r'} \overset{\times}{\times} \rho_r'(x;\ \epsilon)\phi_{r,\,\nu}(x;\ \epsilon) \overset{\times}{\times}$，我们可以写成

$$\begin{aligned} Y_3 &= \mathrm{i}r\nu^2 \delta_{r,r'} \overset{\times}{\times} \rho_r'(x;\epsilon)\phi_{r,\nu}(x;\epsilon) \overset{\times}{\times} + \delta_{r,r'}\nu \overset{\times}{\times} \left((2\kappa)^2 \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}(n+m)x - 2\kappa|n+m|\epsilon} \tilde{b}_{r,n}\tilde{b}_{r,m}\right) \phi_{r,\nu}(x;\epsilon) \overset{\times}{\times} \\ &= \mathrm{i}r(\nu^2-1)\delta_{r,r'} \overset{\times}{\times} \rho_r'(x;\epsilon)\phi_{r,\nu}(x;\epsilon) \overset{\times}{\times} + \mathrm{i}r\delta_{r,r'} \overset{\times}{\times} \rho_r'(x;\epsilon)\phi_{r,\nu}(x;\epsilon) \overset{\times}{\times} \\ &\quad + \delta_{r,r'}\nu \overset{\times}{\times} \rho_r(x;\epsilon)^2 \phi_{r,\nu}(x;\epsilon) \overset{\times}{\times} + \delta_{r,r'}\nu \overset{\times}{\times} E\phi_{r,\nu}(x;\epsilon) \overset{\times}{\times} \\ &= \mathrm{i}r(\nu^2-1)\delta_{r,r'} \overset{\times}{\times} \rho_r'(x;\epsilon)\phi_{r,\nu}(x;\epsilon) \overset{\times}{\times} - \frac{1}{\nu}\delta_{r,r'}(\phi_{r,\nu})''(x;\epsilon) + \delta_{r,r'}\nu \overset{\times}{\times} E\phi_{r,\nu}(x;\epsilon) \overset{\times}{\times}. \end{aligned}$$

为了证明（6.14），只需证明 Y_2 与上面的项 $\delta_{r,\,r'}\nu \overset{\times}{\times} E\phi_{r,\,\nu}(x;\ \epsilon) \overset{\times}{\times}$ 合并后给出含有 $\mathcal{R}_{r,\,\nu}$ 的项，该项出现在（6.14）中；更准确地说，只需证明

$$2\nu \overset{\times}{\times} \mathcal{R}_{r,\nu}(x;\epsilon)\phi_{r,\nu}(x;\epsilon) \overset{\times}{\times} = \nu \overset{\times}{\times} E\phi_{r,\nu}(x;\epsilon) \overset{\times}{\times} + Y_2.$$

但只要满足以下条件，这个恒等式就成立：

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{r,\nu}(x;\epsilon) &= \frac{1}{2}E - 4\kappa^2\nu \sum_{n,m=1}^{\infty} s_n^2 \left(\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}mrx} b_{r,m} - \mathrm{e}^{-2\kappa\mathrm{i}mrx} b_{r,-m}\right) \left(\mathrm{e}^{-2\kappa|n-m|\epsilon} - \mathrm{e}^{-2\kappa(n+m)\epsilon}\right) \mathrm{e}^{-2\kappa n\epsilon} \\ &= (2\kappa)^2 \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\nu s_n^2 \left(\mathrm{e}^{2\kappa\mathrm{i}mrx} b_{r,m} - \mathrm{e}^{-2\kappa\mathrm{i}mrx} b_{r,-m}\right) \mathrm{e}^{-2\kappa n\epsilon} - \mathrm{e}^{-2\kappa\mathrm{i}(n-m)rx} \overset{\times}{\times} b_{r,-n} b_{r,m} \overset{\times}{\times}\right) \\ &\quad \times \left(\mathrm{e}^{-2\kappa(n+m)\epsilon} - \mathrm{e}^{-2\kappa|n-m|\epsilon}\right), \end{aligned}$$

这与 $\mathcal{R}_{r,\nu}(x;\epsilon)$ 的表达式（6.7）一致。至此，引理的证明完成。

C.3 引理的证明 6.5

我们首先证明以下结论：

对于所有形式为 Φ (*3.20*) 的半双线性型，我们有

$$\mathcal{C}\Phi + \Phi\mathcal{C} = 2 \overset{\times}{\times} \Phi\mathcal{C} \overset{\times}{\times} - \mathrm{i} \overset{\times}{\times} J''(\alpha,\beta)\Phi \overset{\times}{\times}, \tag{C.38}$$

其中

$$J''(\alpha):=-(2\kappa)^2\sum_{r=\pm}\sum_{n\in\mathbb{Z}}n^2\alpha_{r,n}b_{r,-n}. \tag{C.39}$$

证明如下。设 Φ 具有形式 (3.20)。由 (3.22),

$$\Phi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{r=\pm}\alpha_{r,0}Q_r/2}R_+^{\mu_+}R_-^{\mu_-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{r=\pm}\alpha_{r,0}Q_r/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}J^+(\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}J^-(\alpha)}, \tag{C.40}$$

其中 $J^{\pm}(\alpha)$ 在 (3.23) 中定义。现在假设 $r\in\{\pm\}$ 和 $n>0$。由 (3.22) 和 (3.36)，我们得到 $e^{ta_{r,\pm n}}\Phi=e^{\mathrm{i}t[a_{r,\pm n},J^{\pm}(\alpha)]}\Phi e^{ta_{r,\pm n}}$，因此

$$a_{r,\pm n}\Phi=\partial_t e^{ta_{r,\pm n}}\Phi|_{t=0}=\partial_t e^{\mathrm{i}t[a_{r,\pm n},J^{\pm}(\alpha)]}\Phi e^{ta_{r,\pm n}}|_{t=0}=\Phi a_{r,\pm n}+\mathrm{i}[a_{r,\pm n},J^{\pm}(\alpha)]\Phi. \tag{C.41}$$

利用这些对易子

$$[a_{r,\pm n},J^{\pm}(\alpha)]=\left[a_{r,\pm n},\sum_{r'=\pm}\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_{r',\pm m}c_m-\alpha_{-r',\mp m}s_m)a_{r',\mp m}\right]=\pm n(\alpha_{r,\pm n}c_n-\alpha_{-r,\mp n}s_n),$$

我们得到

$$[a_{r,\pm n},\Phi]=\pm\mathrm{i}n(\alpha_{r,\pm n}c_n-\alpha_{-r,\mp n}s_n)\Phi. \tag{C.42}$$

回顾正规序的定义以及 $\mathcal{C}$ 的定义 (4.38)，我们有

$$^{\times}_{\times}\mathcal{C}\Phi^{\times}_{\times}=(2\kappa)^2\sum_{r=\pm}\sum_{n=1}^{\infty}na_{r,-n}\Phi a_{r,n}, \tag{C.43}$$

结合 (4.38) 和 (C.42) 可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\Phi+\Phi\mathcal{C}-2\,^{\times}_{\times}\mathcal{C}\Phi^{\times}_{\times}&=(2\kappa)^2\sum_{r=\pm}\sum_{n=1}^{\infty}n\Big(a_{r,-n}a_{r,n}\Phi+\Phi a_{r,-n}a_{r,n}-2a_{r,-n}\Phi a_{r,n}\Big)\\
&=(2\kappa)^2\sum_{r=\pm}\sum_{n=1}^{\infty}n\Big(a_{r,-n}[a_{r,n},\Phi]+[\Phi,a_{r,-n}]a_{r,n}\Big)\\
&=(2\kappa)^2\sum_{r=\pm}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}n^2\Big(a_{r,-n}(\alpha_{r,n}c_n-\alpha_{-r,-n}s_n)\Phi+(\alpha_{r,-n}c_n-\alpha_{-r,n}s_n)\Phi a_{r,n}\Big)\\
&=(2\kappa)^2\sum_{r=\pm}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{i}n^2\,^{\times}_{\times}\Big(-\alpha_{r,n}s_na_{-r,n}+\alpha_{r,n}c_na_{r,-n}\Big)\Phi^{\times}_{\times}\\
&=(2\kappa)^2\sum_{r=\pm}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{i}n^2\,^{\times}_{\times}\alpha_{r,n}b_{r,-n}\Phi^{\times}_{\times},
\end{aligned}$$

这等价于（C.38）。

现在令 $\Phi:=\,^{\times}_{\times}\phi^N_{\boldsymbol{r}},\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x};\epsilon)^{\times}_{\times}$。如（3.20）所示，我们可以写成

$$\Phi=\,^{\times}_{\times}R_+^{\mu_+}R_-^{\mu_-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}J}{}^{\times}_{\times}$$

其中

$$\mu_{\pm}=\sum_{j=1}^{N}\delta_{\pm,r_j}m_j\nu/\nu_0$$

and

$$J = -\sum_{j=1}^{N} m_j\nu(2r_j\kappa Q_{r_j}x_j + K_{r_j}(x_j;\epsilon))$$
$$= -\sum_{j=1}^{N} m_j\nu 2r_j\kappa Q_{r_j}x_j - \sum_{j=1}^{N} m_j\nu \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}} \frac{1}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}nr_jx_j-|n|\epsilon)}b_{r_j,n}.$$

在这种情形下，由于

$$\rho_r'(x;\epsilon) = (2\kappa)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}} \mathrm{i}rn\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}rnx-|n|\epsilon)}b_{r,n},$$

我们有

$$J'' = -\,\mathrm{i}(2\kappa)^2 \sum_{j=1}^{N} m_j\nu \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}} n\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}nr_jx_j-|n|\epsilon)}b_{r_j,n} = -\sum_{j=1}^{N} m_j\nu r_j\rho_{r_j}'(x_j;\epsilon), \tag{C.44}$$

因此 (C.38) 可写为

$$\mathcal{C}\Phi + \Phi\mathcal{C} = 2\,{}^{\times}_{\times}\Phi\mathcal{C}^{\times}_{\times} + \mathrm{i}\sum_{j=1}^{N} m_j\nu r_j\,{}^{\times}_{\times}\rho_{r_j}'(x_j;\epsilon)\Phi^{\times}_{\times}. \tag{C.45}$$

由 (4.11)，我们有

$$\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}} = B\Phi, \tag{C.46}$$

其中我们采用简写记号

$$\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}} \equiv \phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x};\epsilon), \qquad B \equiv B^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x};\epsilon) := \prod_{1\le j<k\le N} \theta_{r_j,r_k}(x_j-x_k;\epsilon_j+\epsilon_k)^{m_jm_k\nu^2}.$$

因此，利用 (C.45)，可得

$$[\mathcal{C},\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}] = -2\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}\mathcal{C} + \mathcal{C}\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}} + \phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}\mathcal{C}$$
$$= -2\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}\mathcal{C} + B\big(\mathcal{C}\Phi + \Phi\mathcal{C}\big)$$
$$= -2\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}\mathcal{C} + 2\,{}^{\times}_{\times}B\Phi\mathcal{C}^{\times}_{\times} + \mathrm{i}\sum_{j=1}^{N} m_j\nu r_j\,{}^{\times}_{\times}\rho_{r_j}'(x_j;\epsilon)B\Phi^{\times}_{\times}.$$

因此，再次利用 (C.46)，

$$[\mathcal{C},\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}] = -2\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}\mathcal{C} + 2\,{}^{\times}_{\times}\mathcal{C}\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}{}^{\times}_{\times}$$
$$+\,\mathrm{i}\sum_{j=1}^{N} m_j\nu r_j\left[(\rho_{r_j}^+)'(x_j;\epsilon)\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}} + \phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\rho_{r_j}^-)'(x_j;\epsilon)\right].$$

右乘 Ω 后，只有第二行保留下来。因此，

$$(1-\nu^2)[\mathcal{C},\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}]\Omega = (1-\nu^2)\mathrm{i}\sum_{j=1}^{N} m_j\nu r_j\left[(\rho_{r_j}^+)'(x_j;\epsilon)\phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}} + \phi^N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}(\rho_{r_j}^-)'(x_j;\epsilon)\right]\Omega. \tag{C.47}$$

对（C.14）关于 x 微分得到

$$r[(\rho_r^{\mp})'(x;\epsilon),K_{r'}^{\pm}(x';\epsilon')]=\begin{cases}\pm C''(\pm r(x-x');\epsilon+\epsilon') & r=r'\\ \pm\tilde{C}''(\pm(x-x');\epsilon+\epsilon') & r=-r'.\end{cases}\tag{C.48}$$

由（4.31）和（4.32），

$$C(rx;\epsilon)=-\mathrm{i}\kappa rx-\log\tilde{\theta}_1(\kappa rx,q;\kappa\epsilon),\qquad \tilde{C}(x;\epsilon)=-\log\tilde{\theta}_4(\kappa x,q;\kappa\epsilon),$$

因此，由（4.5）和定义 4.3,

$$C''(rx;\epsilon)=-\partial_x^2\log\theta_{r,r}(x;\epsilon)=\wp_{r,r}(x;\epsilon),\qquad \tilde{C}''(x;\epsilon)=-\partial_x^2\log\theta_{r,-r}(x;\epsilon)=\wp_{r,-r}(x;\epsilon).$$

因此，（C.48）可写为

$$r[(\rho_r^{\mp})'(x;\epsilon),K_{r'}^{\pm}(x';\epsilon')]=\pm\wp_{r,r'}(\pm(x-x');\epsilon+\epsilon').\tag{C.49}$$

根据（4.1），可得

$$r[(\rho_r^{\mp})'(x;\epsilon),\phi_{r',\nu'}(x';\epsilon')]=\mp\mathrm{i}\nu'\wp_{r,r'}(\pm(x-x');\epsilon+\epsilon')\phi_{r',\nu'}(x';\epsilon')\tag{C.50}$$

由此计算得

$$\begin{aligned}&r_j\Big[(\rho_{r_j}^{+})'(x_j;\epsilon)\phi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}^N+\phi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}^N(\rho_{r_j}^{-})'(x_j;\epsilon)\Big]\\ &=r_j\phi_{r_1,m_1\nu}(x_1;\epsilon)\cdots\overset{\times}{\times}\rho_{r_j}'(x_j;\epsilon)\phi_{r_j,m_j\nu}(x_j;\epsilon)\overset{\times}{\times}\cdots\phi_{r_N,m_N\nu}(x_N;\epsilon)\\ &\quad+\mathrm{i}\Big(\sum_{k=1}^{j-1}m_k\nu\wp_{r_j,r_k}(x_k-x_j;2\epsilon)+\sum_{k=j+1}^{N}m_k\nu\wp_{r_j,r_k}(x_j-x_k;2\epsilon)\Big)\phi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}^N.\end{aligned}$$

将上述表达式代入（C.47），并利用恒等式

$$(1-\nu^2)m_j=-(m_j^2\nu^2-1),\qquad j=1,\dots,N,$$

我们得到

$$\begin{aligned}&(1-\nu^2)[\mathcal{C},\phi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}^N]\Omega\\ &=-\nu\sum_{j=1}^{N}\mathrm{i}r_j(m_j^2\nu^2-1)\phi_{r_1,m_1\nu}(x_1;\epsilon)\cdots\overset{\times}{\times}\rho_{r_j}'(x_j;\epsilon)\phi_{r_j,m_j\nu}(x_j;\epsilon)\overset{\times}{\times}\cdots\phi_{r_N,m_N\nu}(x_N;\epsilon)\Omega\\ &\quad+(1-\nu^2)\mathrm{i}\sum_{j=1}^{N}m_j\nu\mathrm{i}\Big(\sum_{k=1}^{j-1}m_k\nu\wp_{r_j,r_k}(x_k-x_j;2\epsilon)+\sum_{k=j+1}^{N}m_k\nu\wp_{r_j,r_k}(x_j-x_k;2\epsilon)\Big)\phi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}^N\Omega\\ &=-2\mathcal{X}\Omega-2(1-\nu^2)\nu^2\sum_{1\le j<k\le N}m_jm_k\wp_{r_j,r_k}(x_j-x_k;2\epsilon)\phi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}}^N\Omega.\end{aligned}\tag{C.51}$$

由于$\wp_{r,\ r'}(x;\ \epsilon)$ 是 x 的偶函数，方程（6.17）随即得到。证明完毕。

C.4 引理 6.6 的证明

由（3.31）可知 $\langle\Omega\ [\mathcal{H}_{3,\nu},\Phi_{\mu'}\ (\alpha)\ ]\Omega\rangle=0$除非 $\mu_+'=\mu_-'=0$。因此，以下我们将假设 $\Phi=\Phi_0\ (\alpha)\ =\overset{\times}{\times}\mathrm{e}^{\mathrm{i}J(\alpha)}\overset{\times}{\times}$。由于 $\mathcal{C}\Omega=0$，我们有

$$\mathcal{H}_{3,\nu}\Omega=\frac{\nu}{2}\sum_{r=\pm}W_{3,r}\Omega.$$

Let

$$W_{3,r}^{\pm} \coloneqq \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{6\pi}\int_{-\ell}^{\ell} \rho_r^{\pm}(x;\epsilon)^3\,\mathrm{d}x.$$

根据（5.5）及正规序的定义，对于 $r=\pm$，我们得到

$$\begin{aligned} W_{3,r}\Omega &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{6\pi}\int_{-\ell}^{\ell} {}^{\times}_{\times}(2\kappa Q_r + \rho_r^+(x;\epsilon)+\rho_r^-(x;\epsilon))^3{}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x\,\Omega \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{6\pi}\int_{-\ell}^{\ell} {}^{\times}_{\times}\rho_r^+(x;\epsilon)^3{}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x\,\Omega = W_{3,r}^+\Omega. \end{aligned}$$

因此，由于 $(W_{3,r}^+)^\dagger = W_{3,r}^-$，

$$\langle\Omega,[\mathcal{H}_{3,\nu},\Phi]\Omega\rangle = \langle\Omega,\mathcal{H}_{3,\nu}\Phi-\Phi\mathcal{H}_{3,\nu}\Omega\rangle = \frac{\nu}{2}\sum_{r=\pm}\langle\Omega,(W_{3,r}^-\Phi-\Phi W_{3,r}^+)\Omega\rangle,$$

所以，只需证明 $\sum_{r=\pm}\langle\Omega,(W_{3,r}^-\Phi-\Phi W_{3,r}^+)\Omega\rangle = 0$。

经过直接但冗长的计算，可以证明

$$W_{3,r}^{\pm} = (2\kappa)^2\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big(-c_nc_ms_{n+m}a_{r,\mp n}a_{r,\mp m}a_{-r,\mp(n+m)} + s_ns_mc_{n+m}a_{-r,\mp n}a_{-r,\mp m}a_{r,\mp(n+m)}\Big). \tag{C.52}$$

由（C.42），对于 $n>0$，有

$$[a_{r,-n},\Phi] = -\mathrm{i}n(\alpha_{r,-n}c_n-\alpha_{-r,n}s_n)\Phi \tag{C.53}$$

因此，

$$a_{r,n}\Phi\Omega = \mathrm{i}n(\alpha_{r,n}c_n-\alpha_{-r,-n}s_n)\Phi\Omega = \mathrm{i}n\beta_{r,n}\Phi\Omega, \tag{C.54}$$

其中

$$\beta(\alpha)_{r,n} \coloneqq c_n\alpha_{r,n}-s_n\alpha_{-r,-n}\quad (n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}). \tag{C.55}$$

结合 (C.52)，得到（其中 $\Phi=\Phi_0(\alpha)$）

$$\begin{aligned} \langle\Omega,W_{3,r}^-\Phi_0(\alpha)\Omega\rangle &= (2\kappa)^2\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big\langle\Omega,\Big(-c_nc_ms_{n+m}a_{r,n}a_{r,m}a_{-r,(n+m)} \\ &\quad + s_{n_1}s_nc_{n+m}a_{-r,n}a_{-r,m}a_{r,(n+m)}\Big)\Phi_0(\alpha)\Omega\Big\rangle \\ &= (2\kappa)^2\sum_{n,m=1}^{\infty}\mathrm{i}^3nm(n+m)\Big(-c_nc_ms_{n+m}\beta(\alpha)_{r,n}\beta(\alpha)_{r,m}\beta(\alpha)_{-r,(n+m)} \\ &\quad + s_ns_mc_{n+m}\beta(\alpha)_{-r,n}\beta(\alpha)_{-r,m}\beta(\alpha)_{r,(n+m)}\Big)\langle\Omega,\Phi_0(\alpha)\Omega\rangle. \end{aligned} \tag{C.56}$$

我们利用对称性，根据 $\langle\Omega\ \Phi_0(\alpha)^{W_{3,r}^+}\Omega\rangle$，结合 (C.56) 计算。由 (3.26)，

$$\Phi_0(\alpha)^\dagger = \Phi_0(-\alpha^*) \tag{C.57}$$

因此

$$\langle\Omega,\Phi_0(\alpha)W_{3,r}^+\Omega\rangle = \overline{\langle\Omega,W_{3,r}^-\Phi_0(\alpha)^\dagger\Omega\rangle} = \overline{\langle\Omega,W_{3,r}^-\Phi_0(-\alpha^*)\Omega\rangle}. \tag{C.58}$$

因此，将 $\alpha \to -\alpha^*$ 代入（C.56）可得

$$\begin{aligned}\langle \Omega, W^-_{3,r}\Phi_0(-\alpha^*)\Omega\rangle =&(2\kappa)^2 \sum_{n,m=1}^{\infty} \mathrm{i}^3 nm(n+m)\Big(- c_n c_m s_{n+m}\beta(-\alpha^*)_{r,n}\beta(-\alpha^*)_{r,m}\beta(-\alpha^*)_{-r,(n+m)}\\ &+ s_n s_m c_{n+m}\beta(-\alpha^*)_{-r,n}\beta(-\alpha^*)_{-r,m}\beta(-\alpha^*)_{r,(n+m)}\Big)\langle \Omega, \Phi_0(-\alpha^*)\Omega\rangle.\end{aligned}$$

取复共轭，并利用

$$\overline{\beta(-\alpha^*)_{r,n}} = -c_n\alpha_{r,-n} + s_n\alpha_{-r,n} = -\beta(\alpha)_{r,-n},$$

由 (C.55) 和 (3.27) 可得，我们得到

$$\begin{aligned}&\langle \Omega, \Phi_0(\alpha)W^+_{3,r}\Omega\rangle = \overline{\langle \Omega, W^-_{3,r}\Phi_0(-\alpha^*)\Omega\rangle}\\ &= (2\kappa)^2 \sum_{n,m=1}^{\infty} \mathrm{i}^3 nm(n+m)\Big(- c_n c_m s_{n+m}\beta(\alpha)_{r,-n}\beta(\alpha)_{r,-m}\beta(\alpha)_{-r,-(n+m)}\\ &\quad + s_n s_m c_{n+m}\beta(\alpha)_{-r,-n}\beta(\alpha)_{-r,-m}\beta(\alpha)_{r,-(n+m)}\Big)\langle \Omega, \Phi_0(-\alpha^*)\Omega\rangle. \qquad \text{(C.59)}\end{aligned}$$

注意，根据 ($\langle \Omega\ \Phi_0(\alpha)\Omega\rangle = 1 = \langle \Omega\ \Phi_0(-\alpha^*)\Omega\rangle$ ，因此，结合 (C.56) 和 (C.59) 得到

$$\begin{aligned}&\langle \Omega, W^-_{3,r}\Phi_0(\alpha)\Omega\rangle - \langle \Omega, \Phi_0(\alpha)W^+_{3,r}\Omega\rangle\\ &= (2\kappa)^2 \sum_{n,m=1}^{\infty} \mathrm{i}^3 nm(n+m)\\ &\quad\times\Big(- c_n c_m s_{n+m}\Big(\beta(\alpha)_{r,n}\beta(\alpha)_{r,m}\beta(\alpha)_{-r,(n+m)} - \beta(\alpha)_{r,-n}\beta(\alpha)_{r,-m}\beta(\alpha)_{-r,-(n+m)}\Big)\\ &\quad + s_n s_m c_{n+m}\Big(\beta(\alpha)_{-r,n}\beta(\alpha)_{-r,m}\beta(\alpha)_{r,(n+m)} - \beta(\alpha)_{-r,-n}\beta(\alpha)_{-r,-m}\beta(\alpha)_{r,-(n+m)}\Big)\Big).\end{aligned}$$

对 $r = \pm$ 求和，然后在某些项中令 $r \to -r$ ，得到

$$\begin{aligned}&\sum_{r=\pm}\Big(\langle \Omega, W^-_{3,r}\Phi_0(\alpha)\Omega\rangle - \langle \Omega, \Phi_0(\alpha)W^+_{3,r}\Omega\rangle\Big)\\ &= (2\kappa)^2 \sum_{n,m=1}^{\infty} \mathrm{i}^3 nm(n+m)\Big(- c_n c_m s_{n+m} + s_n s_m c_{n+m}\Big)\\ &\quad\times\Big(\beta(\alpha)_{r,n}\beta(\alpha)_{r,m}\beta(\alpha)_{-r,(n+m)} - \beta(\alpha)_{r,-n}\beta(\alpha)_{r,-m}\beta(\alpha)_{-r,-(n+m)}\Big) = 0,\end{aligned}$$

其中最后一步用到了恒等式

$$c_n c_m s_{n+m} = s_n s_m c_{n+m}$$

至此，引理得证。

该模型的 D 费米子表示

我们将第7 节中的讨论具体化：$\mathcal{H}_{3,\ \nu}$ 定义4.4 中的内容可以解释为费米子量子场论中的哈密顿量。

首先回顾如何依照（7.1）中定义的正则反对易关系，以及 H_0 （7.2）中的费米子哈密顿量所形式化定义的量子场论，使其在数学上变得严谨，具体做法遵循[23]。相关的量子场代数 $\mathcal{A}_{\mathrm{F}}$是一个带星运算的 $*$-代数 † 由费米子场算符 $\psi_{r,n}^{\dagger}$ 和 $\psi_{r,n}$ 生成：$=(\psi_{r,n}^{\dagger})^{\dagger}$ $(r=\pm,\, n\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2})$ 满足正则反对易关系

$$\{\psi_{r,n},\psi_{r',m}^{\dagger}\}=\delta_{r,r'}\delta_{n,m},\quad \{\psi_{r,n},\psi_{r',m}\}=0 \tag{D.1}$$

对所有 $r,r'=\pm$ 和 $n,m\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ 均成立。该代数 $\mathcal{A}_{\mathrm{F}}$ 在费米子 Fock 空间 $\mathcal{F}_{\mathrm{F}}$ 上有一个自然表示，该表示完全由以下条件确定：(i) 对于 $A\in\mathcal{F}_{\mathrm{F}}$, $A^{\dagger}$ 是希尔伯特空间伴随；(ii) 满足以下最高权条件，

$$\psi_{\pm,n}\tilde{\Omega}=\psi_{\pm,-n-1}^{\dagger}\tilde{\Omega}=0\quad (n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}), \tag{D.2}$$

˜ ˜对于某个 Ω ∈ $\mathcal{F}_{\mathrm{F}}$，(iii) 希尔伯特空间内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 由条件 $\langle\Omega,\Omega\rangle=1$确定。利用众所周知的论证，可由此构造费米子 Fock 空间 $\mathcal{F}_{\mathrm{F}}$；参见 [23,第 II.A 节]。

ˆ ˆ 注 D.1. 请注意， L, R_+, R_-, Ω, $J_r(2\pi rn/L)$ 和 $\psi_r(2\pi rn/L)$ 在 [23] 中分别对应于此处的 2ℓ, R_+,R_-^{-1}, ˜Ω, $b_{r,n}$ 和$\psi_{r,n}$ （其中一些对应关系可通过比较[23] 中的式 (2.20)、(2.21c) 和 (2.38) 与我们的式 (3.18) 和 (3.19) 得出，其他依据见下方脚注）。

费米子 $\psi_r(x)$ 由反对易关系 (7.1) 刻画，可以表示为 $\epsilon\to 0^+$ 两个不同正则化费米子的极限，分别为 $\psi_r(x;\ \epsilon)$ 和 $\tilde{\psi}_r(x;\ \epsilon)$，二者在不同方面都很有用。我们先从后者开始（前者将在下文给出），

$$\tilde{\psi}_r(x;\epsilon):=\frac{1}{\sqrt{2\ell}}\sum_{n\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}}\psi_{r,n}\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}rnx-|n|\epsilon)}\quad (r=\pm,\ x\in[-\ell,\ell]) \tag{D.3}$$

以及 $\tilde{\psi}_r^{\dagger}(x;\ \epsilon)$: $=\tilde{\psi}_r(x;\ \epsilon)^{\dagger}$ $(\epsilon>0)$。这些正则化费米子类似于 (5.1) 中的正则化玻色子。特别地，对于所有 r、$r'\in\{\pm\}$、x、$x'\in[-\ell,\ell]$、ϵ、$\epsilon'>0$，它们满足反对易关系

$$\{\tilde{\psi}_r(x;\epsilon),\tilde{\psi}_{r'}^{\dagger}(x';\epsilon')\}=\delta_{r,r'}\delta_{\mathrm{F}}(x-x';\epsilon+\epsilon'),\quad \{\tilde{\psi}_r(x;\epsilon),\tilde{\psi}_{r'}(x';\epsilon')\}=0, \tag{D.4}$$

其中，正则化的反周期狄拉克 δ $\delta_{\mathrm{F}}(x;\epsilon)$ 由下式给出

$$\delta_{\mathrm{F}}(x;\epsilon):=\frac{1}{2\ell}\sum_{n\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}nx-|n|\epsilon)}\quad (x\in\mathbb{R},\epsilon>0);$$

这可以用与引理 5.2 类似的方法证明。使用加性正规序，[14]

$$:A:=A-\langle\Omega,A\Omega\rangle, \tag{D.5}$$

通过直接计算可以证明

$$W_{k,r}^{\mathrm{F}}:=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\ell}^{\ell}:\tilde{\psi}_r^{\dagger}(x;\epsilon)(-r\mathrm{i}\partial_x)^{k-1}\tilde{\psi}_r(x;\epsilon):\mathrm{d}x\quad (r=\pm,\ k=1,2,3) \tag{D.6}$$

[14]注意，我们是相对于 Ω 而非 ˜Ω 进行正规排序；可以证明，这种差异对于加性正规序影响很小。

等于

$$W^{\mathrm{F}}_{k,r} = \sum_{n\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} (2\kappa n)^{k-1} :\psi^\dagger_{r,n}\psi_{r,n}: \quad (r=\pm,\ k=1,2,3). \tag{D.7}$$

(D.7) 中的表示清楚地表明，$W^{\mathrm{F}}_{k,\,r}$ 对于 $k=1$,2,3 是定义良好的自伴算子，作用于$\mathcal{F}_{\mathrm{F}}$。对于 $k=2$, 这尤其意味着

$$\mathcal{H}^{\mathrm{F}}_2 \coloneqq \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{r=\pm}\int_{-\ell}^{\ell} :\tilde{\psi}^\dagger_r(x;\epsilon) r(-\mathrm{i}\partial_x)\tilde{\psi}_r(x;\epsilon): \,\mathrm{d}x = \sum_{r=\pm}\sum_{n\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} 2\kappa n :\psi^\dagger_{r,n}\psi_{r,n}: \tag{D.8}$$

是一个有下界的自伴算子，并且 $\tilde{\Omega}$ 是 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}}_2$的基态；详见 [23, 引理 2。3]关于更多细节。我们强调一个重要细节：正如备注 3.5中所解释的，我们有两个$\tilde{}$真空态 Ω 和 Ω，其中第一个由 (3.3) 表征，第二个由 (3.19) 表征。

有一系列众所周知的数学事实，统称为 玻色子-费米子对应。粗略地说，它指出，上述费米子量子场论可以与第 4 节定义的玻色子量子场论建立双射。特别地，费米子 Fock 空间 $\mathcal{F}_{\mathrm{F}}$ 与我们构造所依据的玻色子 Fock 空间 $\mathcal{F}$ 相同，而满足 (D.1)–(D.2) 中关系的费米子可由定义 4.1 中的任意子算子在特殊情形 $\nu=-1$, $\nu_0=1$ 下得到，如下所示：

$$\psi_{r,n} \coloneqq \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{1}{\sqrt{2\ell}}\mathrm{e}^{-2\kappa\mathrm{i}nrx}\frac{1}{\sqrt{2\ell}}\,{}^{\times}_{\times} R_r^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\kappa b_{r,0}rx+K_r(x;\epsilon/2))}\,{}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x \quad (r=\pm, n\in\mathbb{Z}+\tfrac{1}{2}) \tag{D.9}$$

精确表述见 [23]中的命题 2.12 和 3.7。[15]

由于

$$\psi_{r,n} \coloneqq \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{1}{\sqrt{2\ell}}\mathrm{e}^{-2\kappa\mathrm{i}nrx}\tilde{\psi}_r(x;\epsilon)\,\mathrm{d}x \tag{D.10}$$

根据（D.3），

$$\psi_r(x;\epsilon) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2\ell}}\,{}^{\times}_{\times} R_r^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\kappa b_{r,0}rx+K_r(x;\epsilon/2))}\,{}^{\times}_{\times} \tag{D.11}$$

是费米子的一种正则化 ψ_r（x）。这种正则化有助于找到定义 4.4 中算子的费米子表示。事实上，正如本附录末尾所示，定义 Q_r、 $W_{2,\,r}$，以及 $W_{3,\,r}$ 中的玻色子算符 4.4 可以用（$W^{\mathrm{F}}_{k,\,r}$ 中的费米子算子 D.6）表示如下：

$$Q_r = G^2\nu_0 W^{\mathrm{F}}_{1,r} \quad (r=\pm), \tag{D.12}$$

$$W_{2,r} = G^2\Big(W^{\mathrm{F}}_{2,r} - \kappa(1/\nu_0-1)(\nu_0+1)Q_rW^{\mathrm{F}}_{1,r}\Big) \quad (r=\pm), \tag{D.13}$$

$$W_{3,r} = G^2\bigg(W^{\mathrm{F}}_{3,r} - 4\kappa(1/\nu_0-1)Q_rW^{\mathrm{F}}_{2,r} + (2\kappa)^2\frac{(1/\nu_0-1)^2(2+\nu_0)}{3}Q_r^2W^{\mathrm{F}}_{1,r} + c_0W^{\mathrm{F}}_{1,r}\bigg), \tag{D.14}$$

[15]注意，按照我们对任意子的记号和定义（4.1）， [23, 公式（3.2）] 可写为

$$\psi_r(x;\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\ell}}\,{}^{\times}_{\times} R_r^{-1}\exp\Big(2\mathrm{i}r\kappa\hat{J}_r(0)x + \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\hat{J}_r(2\kappa rn)\mathrm{e}^{2\kappa(\mathrm{i}rnx-\epsilon|n|/2)}\Big)\,{}^{\times}_{\times} = \frac{1}{\sqrt{2\ell}}\phi_{r,-1}(x;\epsilon/2)$$

p已给出 $\nu_0=1$, $Q_r = \hat{}J_r(0)$ 和 $b_{r,\,n} = J_r(2\kappa rn)$，对于 $n\in\mathbb{Z}_{\neq 0}$，正如备注 D.1 中已经指出的那样 .

以及算子 $\mathcal{C}$ 在（4.38）中可表示为

$$\mathcal{C} = -\lim_{\epsilon\to 0^+} G^4 \int_{-\ell}^{\ell} \fint_{-\ell}^{\ell} \sum_{r=\pm} {}^{\times}_{\times} J_r(x;\epsilon)\wp_1(x'-x)J_r(x';\epsilon){}^{\times}_{\times}\, \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x$$
$$-\lim_{\epsilon\to 0^+} G^4 \int_{-\ell}^{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \sum_{r=\pm} {}^{\times}_{\times} J_{-r}(x;\epsilon)\wp_1(x'-x+\mathrm{i}\delta)J_r(x';\epsilon){}^{\times}_{\times}\, \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x, \quad \text{(D.15)}$$

其中，正则化费米子密度 $J_r(x;\epsilon)$ 定义为

$$J_r(x;\epsilon) =: \tilde{\psi}_r^\dagger(x;\epsilon)\tilde{\psi}_r(x;\epsilon): \quad (r=\pm). \tag{D.16}$$

在推导恒等式（D.12）–（D.15）之前，我们先说明它们如何导出关系式（7.3）和（7.6）。由（4.34）、（D.12）和（D.13），

$$\mathcal{H}_2 = G^2 \sum_{r=\pm}\Big(W^{\mathrm{F}}_{2,r} - \kappa(1/\nu_0-1)(\nu_0+1)Q_r W^{\mathrm{F}}_{1,r}\Big) = G^2\mathcal{H}_2^{\mathrm{F}} - \kappa(1/\nu_0^2-1)\sum_{r=\pm} Q_r^2,$$

这就是（7.3）。为得到（7.6），我们将表达式（D.14）和（D.15）代入$W_{3,r}$和$\mathcal{C}$在定义（4.35）中的表达式$\mathcal{H}_{3,\nu}$，然后利用（D.6）进行化简。于是得到

$$\mathcal{H}_{3,\nu} = \frac{\nu}{2}G^2 \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\ell}^{\ell}\sum_{r=\pm} :\psi_r^\dagger(x;\epsilon)\Big(-\partial_x^2 + 2\tilde{\kappa}Q_r r\mathrm{i}\partial_x + \frac{2+\nu_0}{3}(\tilde{\kappa}Q_r)^2 + c_0\Big)\psi_r(x;\epsilon):\,\mathrm{d}x$$
$$+\frac{1}{2}(\nu^2-1)G^4\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\ell}^{\ell}\fint_{-\ell}^{\ell}\sum_{r=\pm}{}^{\times}_{\times}\tilde{J}_r(x;\epsilon)\wp_1(x'-x)\tilde{J}_r(x';\epsilon){}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'$$
$$+\frac{1}{2}(\nu^2-1)G^4\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\ell}^{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sum_{r=\pm}{}^{\times}_{\times}\tilde{J}_r(x;\epsilon)\wp_1(x'-x+\mathrm{i}\delta)\tilde{J}_{-r}(x';\epsilon){}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x', \quad \text{(D.17)}$$

其中 $\tilde{\kappa}=2\kappa(1/\nu_0-1)$。回顾7.5）中$\mathcal{H}_{3,\nu}^{\mathrm{F}}$的定义，关系式（7.6）便可得出。

注释D.2。有必要评论一下结果（D.12）–（D.17）的数学地位。为使本附录其余部分简洁，我们省略了使推导在数学上严谨所需的数学细节。因此，这些结果目前属于猜想。不过，我们相信它们可以得到证明。

（D.12）–（D.15）的推导。由于根据（4.9），对于 $\nu_0=1$，$\psi_r(x;\epsilon)=\phi_{r,-1}(x;\epsilon/2)/\sqrt{2\ell}$ 和 $\psi_r^\dagger(x;\epsilon)=\phi_{r,1}(x;\epsilon/2)/\sqrt{2\ell}$，我们可以对 $(\nu,\nu')=(-1,1)$ 使用命题 4.2(a)，计算 $x, x-a\in[-\ell,\ell]$ 和 $\epsilon>0$，

$$\psi_r^\dagger(x;\epsilon)\psi_r(x-a;\epsilon) = \frac{1}{\tilde{\theta}_1(\kappa r a,q;\kappa\epsilon)}\,{}^{\times}_{\times}\psi_r^\dagger(x;\epsilon)\psi_r(x-a;\epsilon){}^{\times}_{\times} \quad (r=\pm)$$

其中 $\tilde{\theta}_1(x,q;\epsilon)$ 在 (4.6) 中。由于 $\langle\Omega\,{}^{\times}_{\times}\psi_r^\dagger(x;\epsilon)\psi_r(x-a;\epsilon){}^{\times}_{\times}\Omega\rangle = 1/2\ell$ 由 (3.31)，这与 (D.11)–(D.5) 可推出

$$:\psi_r^\dagger(x;\epsilon)\psi_r(x-a;\epsilon): = \frac{{}^{\times}_{\times}\psi_r^\dagger(x;\epsilon)\psi_r(x-a;\epsilon){}^{\times}_{\times} - 1/2\ell}{\tilde{\theta}_1(\kappa r a,q;\kappa\epsilon)}$$
$$= \frac{{}^{\times}_{\times}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-2\kappa b_{r,0}ra + K_r(x-a;\epsilon/2) - K_r(x;\epsilon/2))}{}^{\times}_{\times} - I}{2\ell\tilde{\theta}_1(\kappa r a,q;\kappa\epsilon)}.$$

思路是将此恒等式两边按 a 展开为幂级数，并令 $k=0$ = 1、2 时 a^k的系数相等。然而，为了得到正确结果，必须先取 $\epsilon\to 0^+$ 的极限，然后再按 a展开为幂级数。因此，下面我们计算

$$:\psi_r^\dagger(x)\psi_r(x-a):=\frac{{}^{\times}_{\times}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-2\kappa b_{r,0}ra+K_r(x-a)-K_r(x))}{}^{\times}_{\times}-I}{2\ell\tilde{\theta}_1(\kappa ra,q)} \tag{D.18}$$

其中，缺失的自变量 ϵ 表示我们令 $\epsilon=0$。由于 $\epsilon=0$，我们不声称以下计算在数学上是严谨的。

展开（D.18）中的左端，得到

$$\begin{aligned}:\psi_r^\dagger(x)\psi_r(x-a):=&:\psi_r^\dagger(x)\psi_r(x):-a:\psi_r^\dagger(x)\partial_x\psi_r(x):\\&+\frac{a^2}{2}:\psi_r^\dagger(x)\partial_x^2\psi_r(x):+O(a^3).\end{aligned} \tag{D.19}$$

接下来，展开（D.18）右端的分母；利用（4.6）和恒等式

$$\sum_{m=1}^{\infty}q^{2m}/(1-q^{2m})^2=\sum_{n=1}^{\infty}nq^{2n}/(1-q^{2n})\quad\text{for}\quad 0\le q<1,$$

经过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tilde{\theta}_1(\kappa ra,q)}&=\frac{1}{(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa ra}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa ra})\prod_{m=1}^{\infty}\big(1-q^{2m}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\kappa ra}\big)\big(1-q^{2m}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\kappa ra}\big)}\\&=\frac{1}{G^2}\frac{\mathrm{i}}{2\kappa ra}\big(1+\tfrac{1}{2}c_0a^2+O(a^4)\big)\end{aligned} \tag{D.20}$$

其中，（ c_0 1.1）中有 G ，而（7.4）中有。为展开（D.18）右端的分子，我们进行计算，并回忆（5.1）中的 $\rho_r(x)=2\kappa Q_r+rK_r'(x)$,

$$-2\kappa Q_rra+K_r(x-a)-K_r(x)=-ra\rho_r(x)+r\frac{a^2}{2}\rho_r'(x)-r\frac{a^3}{6}\rho_r''(x)+O(a^4).$$

利用 $b_{r,\ 0}=Q_r/\nu_0=Q_r+(1/\nu_0-1)Q_r$ 并引入记号

$$\check{\rho}_r(x):=\rho_r(x)+2\kappa(1/\nu_0-1)Q_r, \tag{D.21}$$

由此得到

$$\begin{aligned}{}^{\times}_{\times}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-2\kappa b_{r,0}ra+K_r(x-a)-K_r(x))}{}^{\times}_{\times}&=I-\mathrm{i}ra\check{\rho}_r(x)-\frac{a^2}{2}{}^{\times}_{\times}(\check{\rho}_r(x)^2-\mathrm{i}r\check{\rho}_r'(x)){}^{\times}_{\times}\\&\quad+\mathrm{i}r\frac{a^3}{6}{}^{\times}_{\times}(\check{\rho}_r(x)^3-3\mathrm{i}r\check{\rho}_r(x)\check{\rho}_r'(x)-\check{\rho}_r''(x)){}^{\times}_{\times}+O(a^4).\end{aligned}$$

将其与（D.20）结合，我们得到（D.18）右侧的如下展开式:

$$\begin{aligned}\frac{{}^{\times}_{\times}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-2\kappa b_{r,0}ra+K_r(x-a)-K_r(x))}{}^{\times}_{\times}-I}{2\ell\tilde{\theta}_1(\kappa ra,q)}&=\frac{1}{2\pi G^2}{}^{\times}_{\times}\Big(\check{\rho}_r(x)-\frac{\mathrm{i}ra}{2}(\check{\rho}_r(x)^2-\mathrm{i}r\check{\rho}_r'(x))\\&\quad-\frac{a^2}{6}(\check{\rho}_r(x)^3-3\mathrm{i}r\check{\rho}_r(x)\check{\rho}_r'(x)-\check{\rho}_r''(x)-3c_0\check{\rho}_r(x))\Big){}^{\times}_{\times}+O(a^3).\end{aligned}$$

令 a^k 此处与（D.19）中关于 $k=0$，1，2 的系数相等，可得恒等式

$$:\psi_r^\dagger(x)\psi_r(x):=\frac{1}{2\pi G^2}\check{\rho}_r(x)\quad(r=\pm), \tag{D.22}$$

$$:\psi_r^\dagger(x)(-r\mathrm{i}\partial_x)\psi_r(x):=\frac{1}{4\pi G^2}\,{}^{\times}_{\times}\check{\rho}_r(x)^2-\mathrm{i}r\check{\rho}_r'(x){}^{\times}_{\times}\quad(r=\pm),\tag{D.23}$$

$$:\psi_r^\dagger(x)(-\partial_x^2)\psi_r(x):=\frac{1}{6\pi G^2}\,{}^{\times}_{\times}\check{\rho}_r(x)^3-3\mathrm{i}r\check{\rho}_r(x)\check{\rho}_r'(x)-\check{\rho}_r''(x)-3c_0\check{\rho}_r(x){}^{\times}_{\times}\quad(r=\pm).\tag{D.24}$$

根据（6.11）和（D.6），我们回顾可知

$$W_{k,r}=\frac{1}{2\pi k}\int_{-\ell}^{\ell}{}^{\times}_{\times}\rho_r(x)^k{}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x,\quad W^{\mathrm{F}}_{k,r}=\int_{-\ell}^{\ell}:\psi_r^\dagger(x)(-r\mathrm{i}\partial_x)^{k-1}\psi_r(x):\mathrm{d}x\quad(k=1,2,3).\tag{D.25}$$

特别地，$W_{1,\ r}=Q_r$。因此，对（D.22）两边积分，得到

$$\begin{aligned}W^{\mathrm{F}}_{1,r}=\frac{1}{2\pi G^2}\int_{-\ell}^{\ell}\check{\rho}_r(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi G^2}\int_{-\ell}^{\ell}(\rho_r(x)+2\kappa(1/\nu_0-1)Q_r)\,\mathrm{d}x\\=\frac{1}{G^2}\left(W_{1,r}+(1/\nu_0-1)Q_r\right)=\frac{1}{G^2\nu_0}Q_r\end{aligned}\tag{D.26}$$

利用 $4\kappa\ell=2\pi$，得到（D.12）。类似地，对（D.23）积分并略去全导数项，得到

$$\begin{aligned}W^{\mathrm{F}}_{2,r}=\frac{1}{4\pi G^2}\int_{-\ell}^{\ell}{}^{\times}_{\times}\check{\rho}_r(x)^2{}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4\pi G^2}\int_{-\ell}^{\ell}{}^{\times}_{\times}\rho_r(x)^2+4\kappa(1/\nu_0-1)Q_r\rho_r(x)\\+(2\kappa(1/\nu_0-1)Q_r)^2{}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{G^2}W_{2,r}+2\kappa(1/\nu_0-1)Q_r\frac{1}{G^2}W_{1,r}\\+\frac{1}{G^2}\kappa(1/\nu_0-1)^2Q_r^2=\frac{1}{G^2}W_{2,r}+\frac{1}{G^2}\kappa(1/\nu_0^2-1)Q_r^2\end{aligned}\tag{D.27}$$

由于 $2\ell(2\kappa)^2=4\pi\kappa$，得到（D.13）。最后，对（D.24）积分，

$$\begin{aligned}W^{\mathrm{F}}_{3,r}=\frac{1}{6\pi G^2}\int_{-\ell}^{\ell}\left({}^{\times}_{\times}\check{\rho}_r(x)^3{}^{\times}_{\times}-3c_0\check{\rho}_r(x)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6\pi G^2}\int_{-\ell}^{\ell}{}^{\times}_{\times}\rho_r(x)^3+6\kappa(1/\nu_0-1)Q_r\rho_r(x)^2\\+3(2\kappa(1/\nu_0-1)Q_r)^2\rho_r(x)+(2\kappa(1/\nu_0-1)Q_r)^3{}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x-c_0W^{\mathrm{F}}_{1,r}\\=\frac{1}{G^2}W_{3,r}+4\kappa(1/\nu_0-1)Q_r\frac{1}{G^2}W_{2,r}+(2\kappa)^2\nu_0(1/\nu_0-1)^2Q_r^2W^{\mathrm{F}}_{1,r}\\+\frac{1}{3G^2}(2\kappa)^2(1/\nu_0-1)^3Q_r^3-c_0W^{\mathrm{F}}_{1,r},\end{aligned}\tag{D.28}$$

再次利用 $4\kappa\ell=2\pi$；代入（D.12）–（D.13）和（D.26），通过直接计算得到（D.14）。为论证（D.15），注意到（D.21）和（D.22）表明

$$\rho_r(x;\epsilon)=2\pi G^2J_r(x;\epsilon)-2\kappa(1/\nu_0-1)Q_r+O(\epsilon)\tag{D.29}$$

其中 $J_r(x;\ \epsilon)$ 由（D.16）给出。将其代入（5.6），得到

$$\mathcal{C}=-\lim_{\epsilon\to0^+}G^4\pi\int_{-\ell}^{\ell}\sum_{r=\pm}{}^{\times}_{\times}J_r(x;\epsilon)(TJ_{r,x})(x;\epsilon)+J_{-r}(x;\epsilon)(\tilde{T}J_{r,x})(x;\epsilon){}^{\times}_{\times}\,\mathrm{d}x\tag{D.30}$$

（右侧与 Q_r 成比例的项在（D.29）中消失，因为

$$\int_{-\ell}^{\ell}(TJ_{r,x})(x;\epsilon)\,\mathrm{d}x=0$$

~ ~根据引理 A.1，类似地，对于 T）。代入 1.3）中的定义 T， T，我们得到

$$\mathcal{C} = -\lim_{\epsilon\to 0^+} G^4 \int_{-\ell}^{\ell} \fint_{-\ell}^{\ell} \sum_{r=\pm} {}^{\times}_{\times} J_r(x;\epsilon)\zeta_1(x'-x)\partial_{x'} J_r(x';\epsilon) {}^{\times}_{\times} \,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x$$
$$-\lim_{\epsilon\to 0^+} G^4 \int_{-\ell}^{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \sum_{r=\pm} {}^{\times}_{\times} J_{-r}(x;\epsilon)\zeta_1(x'-x+\mathrm{i}\delta)\partial_{x'} J_r(x';\epsilon) {}^{\times}_{\times} \,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x.$$

通过分部积分，并利用被积函数的 2ℓ-周期性以及 $\partial_z\zeta_1(z) = -\wp_1(z) = -\wp_1(-z)$，我们得到 D.15。

□

参考文献

[1] A.G. Abanov 和 P.B. Wiegmann. 量子流体动力学、量子 Benjamin-Ono 方程与 Calogero 模型. 《物理评论快报》, 95(7):076402, 2005.[2] M. Stone 和 D. Gutman. Sutherland 模型的量子流体动力学. 《物理学杂志 A：数学与理论》, 41(2):025209, 2007.[3] M. Stone、I. Anduaga 和 L. Xing. Calogero–Sutherland 模型的经典流体动力学. 《物理学杂志 A：数学与理论》, 41(27):275401, 2008.[4] A. G. Abanov、E. Bettelheim 和 P. Wiegmann. Calogero–Sutherland 模型的可积流体动力学：双向 Benjamin–Ono 方程. 《物理学杂志 A：数学与理论》, 42(13):135201, 2009.[5] T.B. Benjamin. 深水流体中的永久波形内波. 《流体力学杂志》, 29:559, 1967.[6] H. Ono. 分层流体中的代数孤立波. 《日本物理学会杂志》, 39:1082, 1975.[7] M.A. Olshanetsky 和 A.M. Perelomov. 与李代数相关的量子可积系统. 《物理学报告》, 94(6):313–404, 1983.[8] R.I. Joseph. 有限水深流体中的孤立波. 《物理学杂志 A：数学与通用》, 10(12):L225, 1977.[9] T. Kubota、D.R.S. Ko 和 L.D. Dobbs. 有限水深分层流体中的弱非线性长内重力波. 《水下技术学报》, 12(4):157–165, 1978.[10] Y. Kodama、J. Satsuma 和 M.J. Ablowitz. 非线性中间长波方程：分析与求解方法. 《物理评论快报》, 46:687, 1981.[11] B.K. Berntson、E. Langmann 和 J. Lenells. 非手征中长波方程及窄量子霍尔系统中的边缘间效应. 《物理评论 B》, 102(15):155308, 2020.[12] E. Langmann. 任意子与椭圆 Calogero–Sutherland 模型. 《数学物理通讯》, 54(4):279–289, 2000.[13] E. Langmann. 椭圆 Calogero-Sutherland 模型的二次量子化. 《数学物理通讯》, 247(2):321–351, 2004.

[14] F. Atai 和 E. Langmann. 变形 Calogero–Sutherland 模型与分数量子霍尔效应. 《数学物理学杂志》, 58(1):011902, 2017.[15] B.K. Berntson、E. Langmann 和 J. Lenells. 关于非手征中长波方程. Nonlinearity, 35(8):4549, 2022.[16] B.K. Berntson、E. Langmann 和 J. Lenells. 关于非手征中长波方程：II. 周期情形. Nonlinearity, 35(8):4517, 2022.[17] A.N. Sergeev 和 A.P. Veselov. 变形量子 Calogero–Moser 问题与李超代数. 《数学物理通讯》, 245(2):249–278, 2004.[18] S. Coleman. 作为有质量 Thirring 模型的量子 sine-Gordon 方程. 《物理评论 D》, 11(8):2088, 1975.[19] S. Mandelstam. 量子化 sine-Gordon 方程的孤子算符. 《物理评论 D》, 11(10):3026, 1975.[20] R. Bauerschmidt 和 C. Webb. 自由费米子点处的 Coleman 对应. arXiv 预印本：2010.07096 (math-ph), 2020.[21] A.L. Carey 和 E. Langmann. 环群、任意子与 Calogero–Sutherland 模型 . 《数学物理通讯》 , 201(1):1–34, 1999.[22] D.C. Mattis 和 E.H. Lieb. 多费米子系统及其相关玻色场的精确解. 《数学物理学杂志》, 6(2):304–312, 1965.[23] E. Langmann 和 P. Moosavi. 通过玻色化构造费米子-声子模型. 《数学物理学杂志》, 56(9):091902, 2015.[24] H. Grosse 和 E. Langmann. 准自由二次量子化的超版本。I. 带电粒子. 《数学物理学杂志》, 33(3):1032–1046, 1992.[25] E. Langmann. 椭圆型 Calogero–Sutherland 系统的源恒等式与核函数. 《数学物理通讯》, 94:63–75, 2010.[26] E. Langmann. （量子）椭圆 Calogero–Sutherland 模型的显式解. Ann. Henri Poincar ´e, 15(4):755–791, 2014.[27]A.N. Sergeev 和 A.P. Veselov. 广义判别式、变形 Calogero–Moser–Sutherland 算子与超 Jack 多项式. Adv. Math., 192(2):341–375, 2005.[28] F. Atai、M. Halln¨as 和 E. Langmann. 超 Jack 多项式的正交性及变形 Calogero–Moser–Sutherland 算子的希尔伯特空间解释. Bull. London Math. Soc., 51(2):353–370, 2019.[29] S.N.M. Ruijsenaars. 相对论 Calogero-Moser 系统的完全可积性与椭圆函数恒等式. 《数学物理通讯》, 110(2):191–213, 1987.[30] S.N.M. Ruijsenaars. Sine-Gordon 孤子与相对论 Calogero–Moser 粒子. 收录于《量子场论中精确可解二维模型的可积结构》, 第 273–292 页. Springer, 2001.[31] NIST 数学函数数字图书馆. http://dlmf.nist.gov/, 2020-03-15 发布的 1.0.26 版. F.W.J. Olver、A.B. Olde Daalhuis、D.W. Lozier、B.I. Schneider、R.F. Boisvert、C.W. Clark、B.R. Miller、B.V. Saunders、H.S. Cohl 和 M.A. McClain 编.

[32] D.F. Lawden。《椭圆函数及其应用》，第 80 卷。Springer Science & Business Media，2013 年。[33] M. Halln¨as、E. Langmann、M. Noumi 和 H. Rosengren。《高阶变形椭圆 Ruijsenaars 算子》。《数学物理通讯》，392(2)：659–689，2022 年。[34] S.N.M. Ruijsenaars。《Calogero-Moser 型系统》。载于《粒子与场》，第 251–352 页。Springer，1999 年。[35] L.A. Khodarinova。《变形椭圆 Calogero–Moser 问题的量子可积性》。《数学物理学杂志》，46(3)：033506，2005 年。[36] H.-Y. Chen、T. Kimura 和 N. Lee。《来自规范折纸的量子椭圆 Calogero–Moser 系统》。《高能物理学杂志》，2020(2)：1–41，2020 年。