arXiv:2302.11667v1 [cs.CC] 22 Feb 2023

完美切割 Barnette 图很难

Édouard Bonnet ！ˇ

里昂大学、法国国家科学研究中心、里昂高等师范学院、克洛德·贝尔纳里昂第一大学、LIP UMR5668、法国**DibyayanChakraborty** ！

里昂大学、法国国家科学研究中心、里昂高等师范学院、克洛德·贝尔纳里昂第一大学、LIP UMR5668、法国

JulienDuron ！

里昂大学、法国国家科学研究中心、里昂高等师范学院、克洛德·贝尔纳里昂第一大学、LIP UMR5668、法国

摘要

一个完美匹配割是既为完美匹配又为割集的边集；等价地说，它是在每个环上都包含偶数条边的完美匹配。相应的算法问题“完美匹配割”已知在次三次二分图中是 NP 完全的 [Le 和 Telle，TCS ’22]，但其在平面图和三次图中的复杂度此前尚未解决。我们通过证明“完美匹配割”在 3-连通三次二部平面图（即*Barnette* 图）中是 NP 完全的，一举解决了这两个问题。在我们开展研究之前，在输入仅为无向图的问题中，只有距离-2 四着色被证明在 Barnette 图中是 NP 完全的。值得注意的是，只有在 Barnette 猜想被推翻的情况下，哈密顿回路才可能加入这个独特的行列。

2012 ACM 学科分类计算理论 → 计算复杂性与密码学 →问题、归约与完备性

关键词与短语完美匹配、割集、完美匹配集、平面图、Barnette 图、NP 完全性

资助 本研究得到 ANR 项目 TWIN-WIDTH（ANR-21-CE48-0014）和 Digraphs（ANR-19-CE48-0013）的支持。

致谢 我们非常感谢 Carl Feghali 向我们介绍（完美）匹配割这一主题，并提出了促成本论文诞生的开放问题。我们也感谢他和 Kristóf Huszár 在项目早期进行的有益讨论。

1 引言

判定一个输入图是否存在完美匹配，也就是其边的一个子集，使得每个顶点恰好与其中一条边相接，这是一项众所周知的易解任务。相关文献浩如烟海，其起点或许可追溯至 1947 年，当时 Tutte 通过行列式给出了刻画 [41], 多项式时间算法的判定完美匹配（或返回实际解）的方法，以及其优化推广——最大匹配。

本文关注生成不相交边集——完美匹配——的另一种包含方式，而不是将其作为子图。由于将这样的边集作为导出子图包含在图中是一个平凡性质[1]（只有图本身是若干互不相连的边的并时才成立），有意义的另一种包含方式便是将其作为半诱导子图。具体来说，我们要寻找顶点集的一个二分划分，或一个割，使得完美匹配的边在相应的割集中是“诱导”的（即从二分划分一侧通向另一侧的边），但不对二分划分各侧内部是否存在边作任何要求。

[1] 然而请注意，最大匹配的诱导变体是一个有趣的问题，但它恰好是 NP 完全的 [39]。

2 完美切割 Barnette 图很难

事实上，Heggernes 和 Telle 首次提出了这个问题，并将其称为完美匹配割（简称 PMC）问题[2]；他们证明该问题是 NP 完全的 [17]。正如“完美匹配割”这一名称所示，我们确实是在寻找一个同时也是割集的完美匹配。Le 和 Telle 进一步证明，PMC 在围长任意大的次三次二分图中仍然是 NP 完全的；而在弦图的超类以及不含某种特定细分爪图作为导出子图的图中，该问题则可在多项式时间内求解 [27]。此外，已有研究深入考察了禁止单个导出子图或有限个子图时 PMC 的复杂度 [13, 30]。

我们考察 Le 和 Telle 的困难性构造，并思考还有哪些性质能够使 PMC 易于处理（除弦性，以及禁止有限列表中的子图或导出子图之外）。首先介绍一种针对二分图的更简单归约。我们简要概述他们从单调非全等 3-SAT 出发的归约（暂且不考虑其正确性）：给定一个不含否定的 3-CNF 公式，目标是找到一个真值赋值，使每个子句中至少有一个变量取真、至少有一个变量取假。每个变量由一条边表示，每个 3-文字子句则由一个（三维）立方体表示，并在立方体的三个两两不相邻的顶点上设置三个锚点。变量构件的一个端点与各子句构件中对应于该变量的锚点相连。请注意，这一构造会在每个子句构件中产生三个度为 4 的顶点，而变量构件中可能会出现度数很大的顶点。随后，Le 和 Telle 通过对立方体进行适当细分、调整锚点，并将变量构件替换为环，将最大度数降至至多 3。

值得注意的是，对子句构件进行边细分会产生度为 2 的顶点，而要为这些顶点“补上”第三个邻居并不容易（在同时保持构造为二部图时更是如此）。事实上，在我们开展这项工作之前，三次图上的 PMC 复杂度尚未得到解决。我们注意到，在三次图上，该问题等价于将顶点集划分为两个集合，使每个集合诱导出的子图都是若干个互不相交的（独立）环的并。与之密切相关的匹配割问题只要求找到一个同时也是割集的匹配；尽管该问题在一般情况下是 NP 完全的 [5], ，但在次三图上可在多项式时间内求解 [35, 2]。研究者还针对平面图的子类 [37, 2], 、禁止某些（诱导）子图 [13, 31, 30, 12], 、有界直径图 [31, 26], 以及最小度较大的图 [4]，进一步研究了匹配割的复杂度。此外，人们也从参数化复杂性、精确指数算法 [25, 22], 和枚举 [15]等角度研究了匹配割。

此前，PMC 在平面图上是否可解也仍是一个悬而未决的问题。值得注意的是，Bouquet 和 Picouleau 证明了一个相关问题——非连通完美匹配：寻找一个包含某个割集的完美匹配——在最大度数为4的平面图、围长为5的平面图以及 5正则二分图上都是 NP 完全的 [3]。他们顺带将这个相关问题称为完美匹配割，但后续文献 [13, 27] 使用“非连通完美匹配”这一名称，以避免混淆。我们将指出，PMC 等价于询问是否存在一个完美匹配，使其与输入图的每个环都包含偶数条边。由于偶数之和仍为偶数，实际上只需完美匹配与圈基中的每个元素都包含偶数条边即可。平面图有一个规范的圈基：有界面。这便引出了

[2] 作者研究了 $(k,\ \sigma,\ \rho)$-划分问题的框架，其中 k 是正整数，而$\sigma,\ \rho$ 是非负整数集合；问题是寻找一个划分为 k 个部分的顶点划分，使得每个部分中的每个顶点在本部分中有 σ 个邻点，在其他部分中有 ρ 个邻点；因此，PMC 即 $(2,\ \mathbb{N},\ \{1\})$-划分问题。

对平面图上的 PMC 的一个简洁改写：是否存在一个完美匹配，使其沿每个面都包含偶数条边?

尽管已知匹配割在平面图上是 NP 完全的 [37, 2], ，但 PMC 的情况本可以因以下“理由”而有所不同。非全等 3-SAT 看起来是归约到 PMC 的合适起点，而它在平面实例上是易解的 [34]。在平面图中，完美匹配比任意匹配简单，因为只有完美匹配 [42]能够被高效计数 [40, 21]。最后还要指出，最大割可在平面图上通过多项式时间算法求解 [16]。

事实上，我们同时确定了 PMC 在三次图和平面图上的复杂度，从而证明针对三次图和平面图的重述在算法上都无济于事，具体结论如下，且更强。

▶ **定理 1**。 完美匹配割在 *3*-连通三次二部平 r *graphs.*

已知在三次二部平面图上属于 NP 完全的问题并不多。Karp 列表中的 21 个 NP 完全问题里，定义在普通无向图上的七个问题中， [20], 只有哈密顿路径已知在此类图上仍为 NP 完全，而其他六个问题都有多项式时间算法。若仅考虑输入为纯无向图的问题，[3] 除哈密顿路径/环 [36, 1],外，最小独立支配集也已被证明在三次二部平面图上是 NP 完全的 [29], ，此外还有 P_3-打包问题 [24] （因此也包括一个等价问题，即以互不相交的支配集和 2-支配集来表述的问题 [33]），以及距离-2 四着色 [10]。据我们所知，最小支配集仅在次三以下二部平面图上已知是 NP 完全的 [14, 23]。

值得注意的是，针对哈密顿路径、哈密顿回路、最小独立支配集和 P_3-装箱问题的归约，最终都得到非 3-连通的三次二部平面图。众所周知，要将哈密顿回路的 NP 困难性推广到 3-连通情形，就必须证明 Barnette 猜想不成立[4] （而这确实足以达到目的 [11]）。请注意，三次图中的哈密顿性等价于存在一个 非边割的完美匹配（也就是说，移除该匹配不会使图不连通）。我们想知道，3-连通三次二部平面图是否本身具有某种更简单的性质，超越哈密顿性（假设 Barnette 猜想成立）。

我们将 3-连通三次二部平面图称为*Barnette* 图。在我们的工作之前，距离-2 四着色似乎是唯一一个已证明在 Barnette 图上为 NP 完全的普通 图问题 [10]。鉴于距离-2 四着色与其说是 Barnette 图上的问题，不如说是 Barnette 图的平方图上的问题，因此可以认为，完美匹配割是首个被证明在 Barnette 图上为 NP 完全的自然问题。

可证明紧的亚指数时间算法。 请注意，我们的归约结合已有结果和一种已知方法，在指数时间假设[5] （或 ETH） [18],下，对平面图上的完美匹配割问题给出了精细复杂度刻画。

[3] 在涉及边定向、顶点或边权重，或顶点或边的指定子集的问题中，列表要长得多，还包括最小权边着色 [7], 列表边着色和预着色扩展 [32]、 k-树中问题 [8], 等。[4] 该定理准确地指出，每个多面体图（即 3-连通平面）三次二分图都存在哈密顿回路。[5] 假设存在一个 $\lambda > 0$ ，使得没有算法能在时间 $\lambda^n n^{O(1)}$内解决 n-变量 3-SAT

4 完美切割 Barnette 图很难

在算法方面，对于含有 n个顶点的平面图，PMC 存在一个运行时间为 $2^{O(\sqrt{n})}$的算法；这是由一个运行时间为 $2^{O(w)}n^{O(1)}$的算法推得的，该算法适用于给定宽度为 w的树分解的 n 顶点图，同时也利用了这样一个事实：平面图总存在宽度为 O（$\sqrt{n}$）的树分解，且可在多项式时间内计算得到 [28]。运行时间为 $2^{O(w)}n^{O(1)}$的算法可以直接获得，也可以由 Pilipczuk 的一项结果推得 [38]: 任何可用存在计数模态逻辑（ECML）表达的问题，都有一个关于树宽的单指数固定参数算法。ECML 允许对顶点集和边集进行存在量化，随后要求每个顶点都满足一个计数模态公式。计数模态公式通过 $\Diamond^S\varphi$扩展无量词布尔公式，其语义是：当前顶点 v 拥有数量属于非负整数的最终周期集合 S 的邻点满足 φ 。因此，可以用 ECML 表达完美匹配割问题，如下所示：

$$\exists X \subseteq V(G), \forall v \in V(G),\ G, X, v \models X \to \Diamond^{\{1\}}(\neg X)\ \wedge\ \neg X \to \Diamond^{\{1\}} X,$$

其指出，存在一个集合 X ，使得 X 中的每个顶点在 X外恰好有一个邻居，反之亦然。

在复杂度方面，稀疏化引理 [19], 从有界出现次数 3-SAT 到有界出现次数单调非全等 3-SAT 以及单调非全等 3-SAT-E 的众所周知的线性归约4 [6], ，再加上我们的二次归约，意味着在 n-顶点平面图中求解 PMC 需要 $2^{\Omega(\sqrt{n})}$ 时间。我们的归约（正如我们将看到的）确实产生了二次规模膨胀，因为它为每个变量和子句创建了 O(1) 个顶点，并为变量-子句关联图的（非平面）图示中的每个 $O(n^2)$ 个交叉创建了 O(1) 个顶点。

证明概要。 我们将 NP 完全问题单调非全等 3-SAT（其中每个变量恰好出现 4 次）归约到 PMC。注意，将满足赋值中每个变量的值翻转，会得到另一个满足赋值。因此，我们可以将单调非全等 3-SAT 的一个解简单地视为变量集合的二分划分。

如前所述，限制在平面实例上的非全等 3-SAT（即变量-子句关联图为平面图）属于 P。因此，除了变量构件和子句构件之外，我们还必须设计交叉构件。自然地，我们的构件是顶点度为 3 的二分图，但有一些特殊的锚点除外；这些锚点是度为 2 的顶点，其中一条关联边延伸到构件之外。

变量构件的设计确保完美匹配割与其相交的方式唯一。构件内部没有发生“二元选择”，这或许看起来有些奇怪。该构件的作用仅仅是为变量落在哪一侧二分划分提供基准，而“真值赋值”则发生在子句构件中。（事实上，Le 和 Telle 的首次归约也是如此 [27], ：其中变量构件是一条单边，而该边必须属于任何一个解。）

我们的变量构件由 36 个顶点组成，其中包括 8 个锚点；见图1。（稍后我们会解释为什么有 8 个锚点，而不是仅有 4 个，即每次变量出现对应一个锚点。）请注意，在所有图中，我们采用以下约定：

- 黑色边不能（或不再能）属于完美匹配割，红色边属于每一个完美匹配割；每条蓝色边
- e 都满足：其构件内至少有一个完美匹配割包含 e，且至少有一个不包含 e；棕色边则
- 是解中确实选取的蓝色边。

-

回顾一下，PMC 要求找到一个完美匹配，使得每个环中都包含偶数条边。因此，我们要寻找一个完美匹配 M，使得 v 和 w 之间的每条路径（或游走）所包含的 M 的边数，其奇偶性只取决于 v和 w。若该奇偶性为偶数，则 v 和 w 位于同一侧；若为奇数，则 v 和 w 位于相对两侧。每个变量构件的 8 个锚点都被迫位于同一侧。这就是变量所在的一侧。

子句构件的核心是一个由蓝色边构成的细分立方体；见图2。细分立方体中有三个顶点（图中的u_1、u_8、u_{14}）被强制与相应的三个变量处于同一侧。子句构件中有三种可用的完美匹配割，每一种都将u_1、u_8、$u_{14}\}$ 中的一个顶点与另外两个顶点分隔开（即置于相反两侧）。注意，这正是非全等3子句的语义。实际上，我们需要两个细分立方体副本：一方面是为了提高某些细分顶点的度，另一方面是出于与在变量构件中复制锚点顶点相同的原因。（我们将在介绍交叉构件时解释后一个原因。）提高所有细分顶点的度会使构件更加复杂，并产生两个奇面。幸运的是，这两个奇面有一个公共的邻接偶面。因此，我们可以将子构件 D_j 嵌入该偶面，从而“修正”两个奇面的奇偶性。最终，我们总共需要112个顶点，其中包括6个锚点。

现在我们来描述交叉构件。基本上，我们希望用一个含 4 个顶点的环替代两条边的每个交点。这样确实能够传播黑色边（即不可能属于任何解的边）。问题在于，经过这样的交叉构件会使一侧翻转。由于我们无法保证变量“导线”通向其所连接的每个子句构件时所经过的交点数量具有相同的奇偶性，因此我们复制这些导线。在之前的交点处，现在有两条平行导线与另外两条平行导线交叉，从而形成四个交点。该构件仅由四个含 4 个顶点的环组成；见图3。在图7中可以检查两侧确实得到了保持。这解释了为什么每个变量构件中有 8 个锚点（而不是 4 个），以及每个子句构件中有 6 个锚点（而不是 3 个）。

2 预备知识

对于图 G，我们用 $V(G)$ 表示其顶点集合，用 $E(G)$ 表示其边集合。若 $U \subseteq V(G)$，则由 U 诱导的子图 G 记为 $G[U]$，它是通过从 G 中移除不属于 U 的顶点而得到的图。 $E_G(U)$（或者在 G 明确时记为 $E(U)$）是 $E(G[U])$ 的简写。对于 $M \subset E(G)$， $G - M$ 是从 G 中移除 M 中的边（同时保留其端点）所得到的生成子图。 G 的一个连通分量是满足 $G[U]$ 连通的极大集合 $U \subseteq V(G)$。如果图 G 的每个顶点都恰好有三个邻点，则该图是三次 图。若一个图不包含奇环，则称其为二部 图。我们可以用 k-环作为 k 个顶点的环的简写。

给定两个不相交集合 $X, Y \subseteq V(G)$，我们用 $E(X, Y)$ 表示 X和 Y之间的边集。集合 $M \subseteq E(G)$ 是图 G 的一个割集[6]，当且仅当存在一个适当的二分划分 $X \uplus Y = V(G)$，称为割，使得 $M = E(X, Y)$。注意，一个割完全确定一个割集；对于连通图，一个割集也完全确定一个割。在讨论连通图时，我们可以称割集对应的割。对于 $X \subseteq V(G)$， X 的出边集为$E(X, V(G) \setminus X)$。对于连通图 G的割集 M，以及 $u, v \in V(G)$，如果 u 和 v 位于同一部分，我们就称 u和 v 位于 M 的同一侧（相应地，位于相对两侧）

[6] 我们避免使用“边割”这一术语，因为对某些作者而言，边割更一般地指删除后会使连通分量数量增加的边的子集。

（相应地，位于 M对应的割的不同部分）。

若干 G 的匹配（分别为完美匹配）是一个集合 $M \subset E(G)$，其中 G 的每个顶点都与 M 中至多一条（分别为恰好一条）边关联。完美匹配割 是同时也是割集的完美匹配。对于 $M \subseteq E(G)$ 和 $U \subseteq V(G)$，如果 $M \cap E(U)$ 是一个完美匹配割，则称 M 是 $G[U]$ 的完美匹配割。

如果一个图可以嵌入平面，也就是说，可以绘制成边（简单曲线）只在端点（顶点）处相交的形式，那么它就是平面 图。平面嵌入图 是带有此类嵌入的平面图。给定一个平面嵌入图 G，G 的一个面是移除 G 的嵌入后平面上的一个连通分量。平面嵌入图 G 的面圈 是 G 中界定 G 的一个面的环。若两个平面嵌入图 G 和 H 的平移 满足 G 的嵌入是 H 的嵌入的平移，则称它们是平移的。

3 定理 1 的证明

在给出我们的归约之前，我们先介绍几个之后会用到的有用引理和观察结果。

3.1 预备引理

▶ **引理2**。设 G 是一个图，且 $M \subseteq E(G)$。那么，对于 G的每个环 C，M 是一个割集，当且仅当 $|E(C) \cap M|$ 是偶数。

证明。假设 M 是一个割集，且令 (A, B) 为 M的一个割。每个闭游走（尤其是每个环）都包含偶数条 M中的边，因为 M 中的边沿着游走从 A 到 B，再从 B 到 A。

现在假设 G 的每个环与 M共有偶数条边。我们构造一个割 (A, B)。对于 G的每个连通分量 H，我们任取一个顶点$v \in V(H)$，并进行如下操作。对于每个顶点 $w \in V(H)$，若存在一条从 v 到 w 的路径，且该路径经过 M中的偶数条边，则将 w 放入 A；若存在一条从 v 到w 的路径，且该路径经过 M中的奇数条边，则将其放入 B。有 $A \cup B = V(G)$。根据我们关于 G的环的假设，$A \cap B = \emptyset$。因此，(A, B) 确实是一个割。根据构造，(A, B) 的割集是 M。◀

▶ **引理 3.** 设 G 是一个平面嵌入图，且 $M \subseteq E(G)$。那么，M 是一个割集，当且仅当对于 G的任意面圈 C，$|E(C) \cap M|$ 为偶数。

证明。正向推论直接来自引理2。反向推论则基于一个已知事实：有界面构成一个圈基；例如参见 [9]。

若 H 是 G的一个子图，令 $\tilde{H}$ 为 $\mathbb{F}_2^{E(G)}$ 的向量，其中对应于 H的边的位置上取值为 1。因此，对于 G的任意环 C，有 $C = \Sigma_{1 \leqslant i \leqslant k} F_i$，其中 G的面圈为 F_i。并且，$|M \cap E(C)|$ 与 $\Sigma_{1 \leqslant i \leqslant k} |M \cap E(F_i)|$具有相同的奇偶性，后者是偶数之和。◀

▶**引理 4.** 设 M 是三次图 G 的一个完美匹配割。设 C 是 G 的一个诱导4顶点环。那么，以下情况恰有一种成立：

(a) $E(C) \cap M = \emptyset$ 以及 $V(C)$ M的四条出边均属于 M。***(b)*** $|E(C) \cap M| = 2$，$E(C) \cap M$ 的两条边不相交，并且 $V(C)$ M的出边均不属于 M。

证明。 M在 $E(C)$ 内的边数由引理 3 可知为偶数。因此 $|E(C)\cap M| \in \{0,\ 2\}$，因为 $E(C)$ 的四条边无法构成匹配。

假设 $E(C) \cap M = \emptyset$。由于 M是一个完美匹配，对于每个 $v \in V(C)$，M 中都有一条边与 v 关联，且不属于 $E(C)$。由于 G 是三次图，$V(C)$的每条出边都属于M。

反之，假设 $|E(C) \cap M| = 2$。由于 M是一个匹配，$E(C) \cap M$的两条边不共享端点。这意味着 C 的四个顶点都与这两条边相接。因此，$V(C)$的出边都不可能属于 M。◀

▶**推论 5。** 设 M 是三次图 G的一个完美匹配。设 C_1, C_2 是 G 中两个顶点不相交的诱导4顶点环，且 $V(C_1)$ 与 $V(C_2)$之间有一条边。那么，当且仅当 $E(C_2) \cap M \neq \emptyset$时，$E(C_1) \cap M \neq \emptyset$。

证明。 假设 $E(C_1) \cap M \neq \emptyset$。根据 C_1 上的引理 4，$V(C_1)$ 没有出边属于 M。因此，$V(C_2)$ 有一条出边不属于 M。根据 C_2 上的引理 4，可得 $E(C_2) \cap M \neq \emptyset$。对称地可得逆命题。◀

▶**引理 6。** 设 M 是三次图 G的一个完美匹配割。若一个6-环在 M中有三条出边，则六条出边都属于 M。

证明。设 C是我们的 6-环。注意，由于 M是一个完美匹配割，$|E(C) \cap M|$是偶数。这意味着 $|E(C) \cap M|$ 只能是 0 或 2。若 $|E(C) \cap M| = 2$，C的四个顶点会与 $E(C) \cap M$相接，这就排除了 $V(C)$ 的三条出边属于 M 的可能。因此 $E(C) \cap M = \emptyset$，而且由于 G 是三次的，$V(C)$ 的每条出边都属于 M。◀

▶**引理 7。** 设 M 是三次二部图 G的一个完美匹配割。假设 C 是 G的一个6-环 $v_1v_2 \dots v_6$，且 v_2v_3、v_3v_4、v_5v_6和 v_6v_1 都属于某些诱导四圈。那么 $M \cap E(C) = \emptyset$。

证明。 将引理 4 应用于包含 v_2v_3 的 4-圈以及包含 v_6v_1 的 4-圈，可得 $v_1v_2 \in M \Leftrightarrow v_3v_4 \in M \Leftrightarrow v_5v_6 \in M$。因此，这三条边都不能属于$M$，因为 C在 M中会包含奇数条边。对称地，v_2v_3、v_4v_5和 v_6v_1中的任何一条边都不能属于 M。因此，C中没有边属于 M。◀

▶ **观察8.** 设 G 是一个图，且 M 是 G 的一个完美匹配割。设 u、v 是 G 的两个顶点。那么对于 u 和 v 之间的任意路径 P，$|E(P) \cap M|$ 为偶数，当且仅当 u和 v 位于 M 的同一侧。注意，这意味着对于从 u 到 v 的任意路径 P、Q，$|E(P) \cap M|$ 和 $|E(Q) \cap M|$ 具有相同的奇偶性。

3.2 归约

我们将通过从 NP 完全问题单调非全等 3SAT-E4 [6] 进行归约来证明定理 1。在单调非全等 3SAT-E4 中，输入是一个 3-CNF 公式，其中每个变量恰好出现四次，每个子句恰好包含三个不同的文字，且没有子句包含否定文字。这里，我们称变量上的真值赋值满足 子句 C，当且仅当 C 中至少有一个文字为真，且 C 中至少有一个文字为假。目标是判断是否存在一个满足所有子句的真值赋值。我们可以放心地假设（而且我们也将如此假设），变量-子句关联图 inc(I) 中的“变量”顶点没有割点。事实上，如果原先不存在这类割点，那么从单调非全等 3-SAT 到其四次出现变体的归约不会产生这类割点。现在，如果单调非全等 3-SAT 实例 J 中存在一个“变量”割点 v，就可以将 J 拆分为 J_1，其中包含一个连通分量 4 [6]

inc(J) – $\{v\}$ 以及 v；另一个由 inc(J) \ X 构成。可以看出， J 为正，当且仅当 J_1 和 J_2 都为正。由于 inc(J_1) 与 inc(J_2) 的顶点数之和比 inc(J) 多一个，因此这种方法构成了一个多项式时间图灵归约，将问题归约到不含“变量”割点的子实例。

令 I为一个单调非全等 3SAT-E4 实例，其变量为 x_1、x_2、……、x_n，子句为 $m = 4n/3$ 子句 C_1、C_2、……、C_m。我们将在多项式时间内构造一个等价的 PMC实例 $G(I)$，且该实例是 Barnette 图。

我们的归约由三个步骤组成。首先，我们通过引入变量构件和子句构件来构造一个三次图 $H(I)$。然后，我们在平面上绘制 $H(I)$，即将 $H(I)$ 的顶点映射为平面上的一组点，并将 $H(I)$ 的边映射为平面上的一组简单曲线。我们将此图示称为$\mathcal{R}$。注意，该图示可能不是平面的，即两条简单曲线（或相应的边）可能在一个不是其端点的点处相交。最后，我们通过引入交叉构件来消除交叉点。（回顾一下，如果 Not-All-Equal 3-SAT 实例的变量-子句关联图是平面的，则其可满足性可以在多项式时间内测试 [34]；因此，我们确实需要交叉构件。）所得图 $G(I)$ 是 Barnette 图，我们将证明 $G(I)$ 具有完美匹配，当且仅当 I 是单调非全等 3SAT-E4 的正实例。下面描述上述步骤。

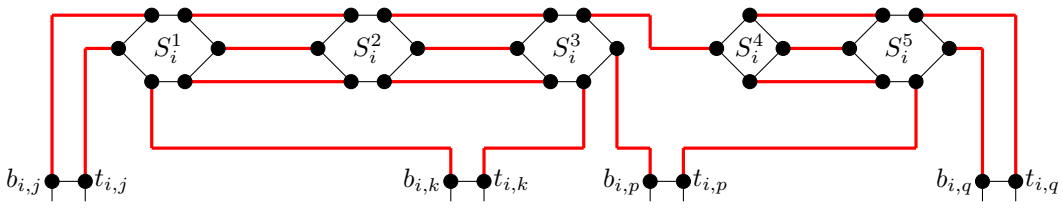


图1 变量构件 $\mathcal{X}_i$ 对应于变量 x_i，该变量出现在子句C_j，C_k，C_p，C_q 中，且满足 $j < k < p < q$。

1. 对于每个变量 x_i，令 $\mathcal{X}_i$ 表示图1所示图的一个新副本。注意，变量 x_i 恰好出现在四个子句中，分别为 C_j，C_k，C_p，C_q，且满足 $j < k < p < q$。变量构件 $\mathcal{X}_i$ 包含图中所示的特殊顶点$t_{i,\ j}$, $b_{i,\ j}$, $t_{i,\ k}$, $b_{i,\ k}$, $t_{i,\ p}$, $b_{i,\ p}$, $t_{i,\ q}$, $b_{i,\ q}$。回顾一下，红色边是在任何完美匹配割中都被强制选取的边，而黑色边不可能属于任何解。证明的一个关键部分是论证图中边的颜色。

对于每个子句 $C_j = (x_a,\ x_b,\ x_c)$，其中 $a < b < c$，令 $\mathcal{C}j$ 表示图2所示图的一个新副本。子句构件 $\mathcal{C}j$ 包含图中所示的特殊顶点$t'_{a,\ j}$, $b'_{a,\ j}$, $t'_{b,\ j}$, $b'_{b,\ j}$,$t'_{c,\ j}$, $b'_{c,\ j}$。然后，对于出现在子句 C_j 中的每个变量 x_i，引入两条新边 $E_{ij} = \{t_{i,j}t'_{i,j}, b_{i,j}b'_{i,j}\}$。令 $H(I)$ 表示如下定义的图。

$$V(H(I)) = \bigcup_{i=1}^{n} V(\mathcal{X}_i) \cup \bigcup_{j=1}^{m} V(\mathcal{C}_j)$$

$$E(H(I)) = \bigcup_{i=1}^{n} E(\mathcal{X}_i) \cup \bigcup_{j=1}^{m} E(\mathcal{C}_j) \cup \bigcup_{x_i \in C_j} E_{ij}.$$

我们将变量 var(e) = i 分配给每条边 $e \in E_{i,\ j}$。注意，对于变量构件$\mathcal{X}_i$，$V(\mathcal{X}_i)$ 恰好有八条出边。

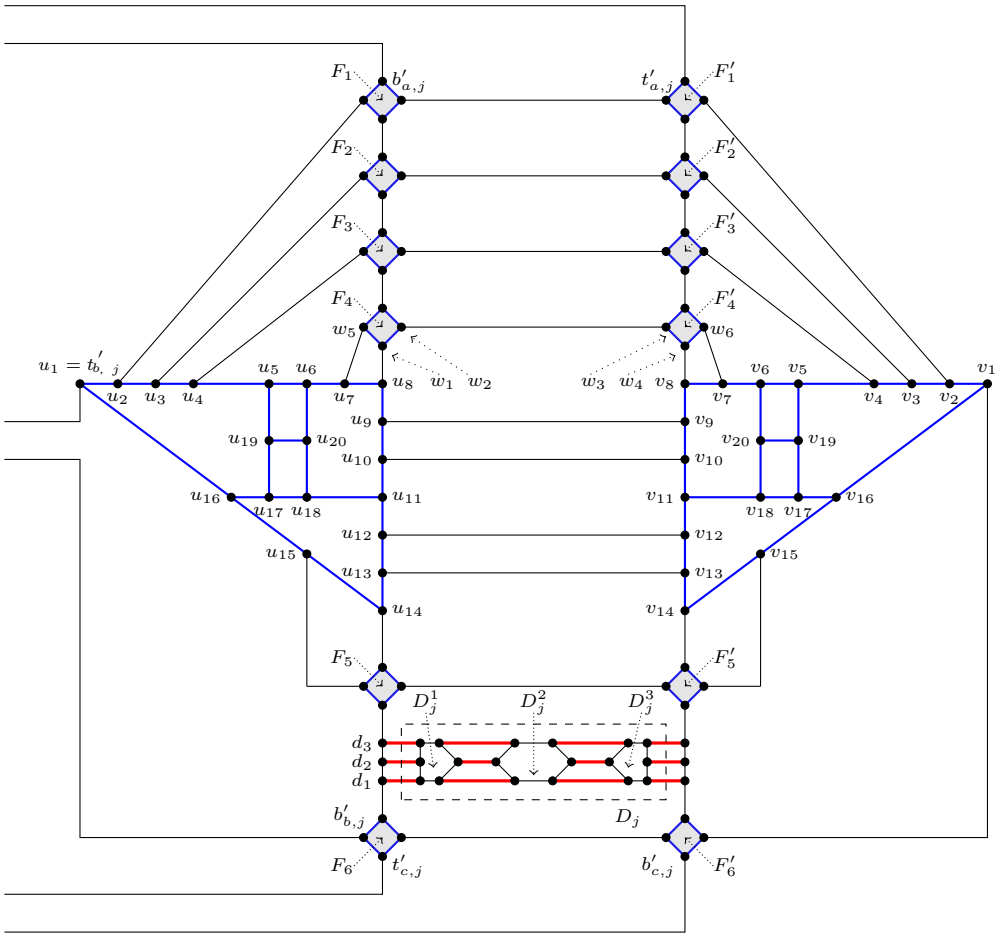


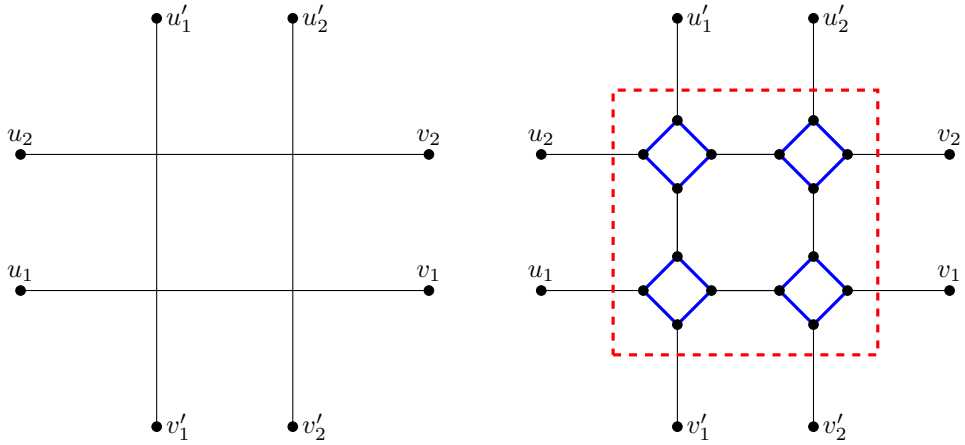
图2 子句构件 $C_j = (x_a,\ x_b,\ x_c)$，其中包含 $a < b < c$。在任意完美匹配割中，都会选中一条红色边。在某个完美匹配割中，会选中一条蓝色边。在任何完美匹配割中，都不会选中黑色边。

2. 接下来，我们按照以下步骤在平面上绘制 $\mathcal{R}$ of $H(I)$ 。

a. 对于每个变量 x_i，我们将 X_i 作为图1中的变量构件的一个平移副本嵌入到 $[0,1] \times [2i, 2i+1]$ 中。b. 对于每个子句 C_j，我们将 C_j 作为图2中的子句构件的一个平移副本嵌入到$[2,3] \times [2j, 2j+1]$中。c. 同一变量构件或同一子句构件中与顶点关联的两条边不会在 R 中相交。对于满足 $x_i \in C_j$、$x_{i'} \in C_{j'}$ 的两个变量 x_i、$x_{i'}$ 和两个子句 C_j、$C_{j'}$，以下两种情况恰有一种成立：i. 对于每一对边 $(e,\ e') \in E_{ij} \times E_{i'j'}$、$e$ 和 e' 在 R 中恰好相交一次。当此条件满足时，我们称 $(E_{ij},\ E_{i'j'})$ 为一个交叉四元组。此外，我们确保 $e \in E_{ij}$ 的两个交点之间的子线段内部不会被 $E_{i'j'}$ 的任何边穿过；ii. 不存在一对边 $(e,\ e') \in E_{ij} \times E_{i'j'}$，使得 e 和 e' 在 R 中相交；

3. 对于每个交叉四元组$(E_{ij}、\ E_{i'j'})$ 将图 3a 中所示的四个交叉点替换为图 3b 中所示的交叉构件。

10 完美切割 Barnette 图很难



(a) 交叉四元组。 **(b)** 步骤 3(b) 的替换。

图3 用交叉构件替换交叉。

令 $G(I)$ 表示所得图。我们需要以下定义。

▶**定义 9**。 $G(I)$ 中任何两端点不同时属于同一个构件（变量、子句或交叉）的边称为连接边。连接边的任一端点称为连接顶点。对于与交叉构件相邻的连接边 e， $var(e)$ 是其原本连接到的变量构件的索引。对于每条连接边 uv，我们将变量 $var(uv)$ 关联到 u 和 v，记作 $var(u)$、$var(v)$。

现在我们将区分 $G(I)$ 的一些 4-圈。

▶**定义 10**。 C 的（诱导）*4*-圈 G（I）如果属于某个交叉构件，则称为交叉*4*-圈。

▶ **定义 11**。 C 的（诱导）*4*-圈 G（I）如果 C 它是某个 C 的某个 F_i 或 F'_i，则称为特殊*4*-圈。$_j$.

某个子句构件$\mathcal{C}j$ 的特殊 4-圈在图2中以高亮显示。在下一节中，我们将证明 G（I）确实是一个 3-连通三次二部平面图。

3.3 G（I）是 Barnette 图

我们将证明所构造的图是 Barnette 图。

▶**引理 12**。 G（I）是 *3*-连通的。

证明。 注意，对于任意两个相邻的构件 $\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$，从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$有两条互不相交的连接边。我们考虑在移除两个顶点 $G(I)$ 之后的 u， v。

首先假设 u 和 v 并非都是连接顶点。因此，两个构件$\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$在 $G(I)$ 中相邻，当且仅当它们在 $G(I)$ 中相邻 $-\{u,\ v\}$。特别地，每对构件在 $G(I)$ 中都由 $-\{u,\ v\}$连接。

那么， $G(I)-\{u,\ v\}$ 只有在同一个构件内部存在两个在 $G(I)-\{u,\ v\}$中不连通的顶点时，才可能不连通。特别地，移除 u， v 会使该构件不连通，这迫使 u 和 v 都必须在其中被选中。事实上，每个构件都是 2-连通的。我们将逐一讨论三种构件。

- 如果它是变量构件 X_i，那么 X_i 会分裂成两个连通分量，每个分量都包含一个连接顶点。令 a （分别为 b）是第一个（分别为第二个）分量中的一个连接顶点。由于在 inc(I) 中没有“变量”顶点是割点，因此在 inc(I) $-\{x_i\}$ 中存在一条从“子句$C_{a'}$”到“子句 $C_{b'}$”的路径 P，其中 $C_{a'}$ 和 $C_{b'}$ 分别是对应于 a和 b 的子句（即，按照图1中的记号， a'和b' 分别是 a和b 的第二个下标）。因此， a 和 b 在 $G(I) - \{u, v\}$ 中连通。如果它是子句
- 构件 Cj，它会分裂成两个连通分量，其中一个包含连接顶点 $t'_{i,j}$ ，另一个包含 $b'_{i,j}$。因此，我们只需沿着从 $t'_{i,j}$ 到 $t_{i,j}$，再到 $b_{i,j}$ ，最后回到 $b'_{i,j}$ 的路径，就能连接子句构件的两部分。如果它是交叉构件 X，那么这次分裂会将 X 分成两个连通分量，但请注意，存在一个与这两个分量都相邻的构件 Y。因此，由于 Y 是连通的，它们的并所诱导的子图也
- 连通，进而 $G(I) - \{u, v\}$ 也是连通的。

现在处理 u 和 v 均为连接顶点的情形。注意，移除其中至多两个连接顶点后，每个构件仍保持连通。因此，每个构件在 $G(I) - \{u, v\}$ 中都是连通的。根据第一段，唯一值得关注的情形是 u 和 v 分别是同一对构件之间两条不同连接边的端点。此时，移除 u, v 的效果是移除这两个构件之间的连接。

然而，inc(I) 不可能含有桥，否则其中将有一个作为割点的“变量”顶点。进而可以看出，这意味着部件邻接图是无桥的。◀

▶**引理 13**。 图 $G(I)$ 是 *Barnette* 图。

证明。 根据交叉构件的平面嵌入， $G(I)$ 是平面图。可以验证， $G(I)$ 是三次图：在每个构件（变量、子句、交叉）中，所有顶点的度均为 3，只有度为 2 的顶点例外，而这些顶点恰好是那些有一条关联边离开构件的顶点。根据引理 12， $G(I)$ 是 3-连通的。

因此，我们将证明 $G(I)$的二分性。回顾一下，我们的构造有三个主要组成部分：变量构件、子句构件和交叉构件。对于某个构件 H，注意到 H 的所有出边都位于 H的外部面上。沿顺时针方向，将 H的出边按环形顺序排列为 e_1、……、 e_p。任取两条相邻的出边 e_i, e_{i+1}。令 $a_i(H)$和 $a_{i+1}(H)$分别表示 H中同时与 e_i 和 e_{i+1}关联的顶点。根据我们的构造可以看出，沿着 H的外部面按顺时针方向，从 a_i到 a_{i+1}的路径（记作 $P(H, a_i, a_{i+1})$）始终包含偶数个顶点。

我们称路径 $P(H, a_i, a_{i+1})$为 H的一条暴露路径 。（注意，某个构件可能有多条暴露路径。）设 F 是 $G(I)$的一个有界面。如果 F 是变量、子句或交叉构件的有限面，那么由于 H 是二部图，$|V(F)|$ 为偶数。否则，F是若干暴露路径的并，而根据前面的论证， $|V(F)|$ 为偶数。◀

3.4 变量构件和交叉构件的性质

▶**引理 14.** 设 M 是 $G(I)$的一个完美匹配割。那么，对于任意变量构件 X_i，$M \cap V(X_i)$ ，它都是图*1*中红色边构成的匹配。特别地， M 不包含任何与变量构件关联的连接边。

证明。 考虑变量构件 $\mathcal{X}_i$。对 6-环 S_i^2 应用引理 7（该环满足在某些 4-环中含有四条特定边的要求），可得所有

$V(S_i^2)$ 的出边都属于 M。因此，我们可以对 6-环 S_i^1和 S_i^3应用引理 6，并得出这些环的所有出边都属于 M。

现在，4-圈 S_i^4有一条出边属于 M，因此根据引理 4，它们全都属于其中。最后，我们可以对 6-环 S_i^5应用引理 6，得出图1中的所有红色边确实都应属于 M。特别是，由于 $\mathcal{X}_i$ 的所有顶点都与红色边相接，连接变量构件的连接边不可能属于 M。◄

现在我们证明交叉 4-圈的一条性质。

►**引理 15**。 设 M 是 $G(I)$ 的一个完美匹配割，且 F 是一个交叉 *4*-圈。那么$|E(F)| = 2$。

证明。 称 *4* 个顶点圈路径 为一个序列 C_1，……，C_k，其中各顶点互不相交的 4-圈满足 C_i 与 C_{i+1}相邻。考察构造的步骤 3，可以看到，对于每个交叉 4-圈 C，都存在一条 4 顶点圈路径，它从 C 出发，终止于一个与变量构件相邻的交叉 4-圈。

根据引理 14，与变量构件关联的边都不属于 M。因此，任何与变量构件相邻的交叉 4-圈都包含一条属于 M的边。反复应用推论 5可得， C 包含一条属于 M的边；最后，对 C应用引理 4即可得出结论。◄

►**推论 16**。 对于 $G(I)$的任意完美匹配 M， M 不包含任何连接边。

证明。 根据引理 14 和 15，我们知道，与交叉构件或变量构件关联的任何连接边都不属于 M。◄

3.5 子句构件的性质

注意， D_j 是变量构件*Cj*的一个导出子图。

►**引理17**。 $G(I)$ 的任何完美匹配割都包含图*2*中以红色绘出的 D_j 的边。

证明。 请注意，变量构件的相同证明已经包含了所有论证。◄

我们证明子句构件的特殊 4-圈的一个性质。

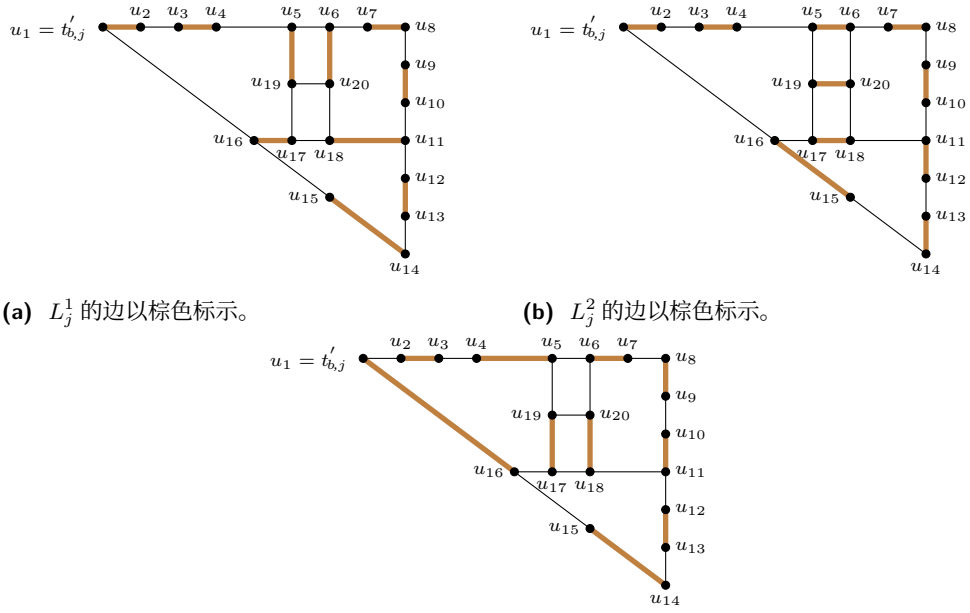
►**引理18**。 设 M 是 $G(I)$ 的一个完美匹配割，且 F 是 *Cj*的一个特殊 *4*-圈。那么 $|E(F) \cap M| = 2$，并且 $V(F)$ 的出边均不属于 M。

证明。 根据推论 16，我们知道连接边不属于 M；根据引理17， F_5 （见图2）有一条关联边不包含于 M中。因此，每个特殊 4-圈都通过一条路径与某个 4-圈相连，而该 4-圈与一条不属于 M的边关联。应用引理 4 和推论 5 可知，j 的每个特殊 4-圈都包含 M中的一条边。◄

►**引理18**。 设 M 是 $G(I)$ 的一个完美匹配割，且 *Cj* 是一个子句构件。设$U_j = \{u_1, \ldots, u_{20}\}$，以及 $V_j = \{v_1, \ldots, v_{20}\}$。那么， U_j 或 V_j 的任何出边都不属于 M。

证明。 根据引理18和推论 16，尚待检查的边只有u_9v_9、 $u_{10}v_{10}$、 $u_{12}v_{12}$和 $u_{13}v_{13}$。

假设 M 包含 u_9v_9。由于无法使用 u_8u_9，根据 $u_7u_8w_1w_5$上的引理 4， $w_1w_2 \notin M$。对称地， $w_3w_4 \notin M$。由于根据引理 18 u_8w_1， v_8w_4和 w_2w_3不属于 M，因此 u_9v_9将是 u_9， u_8，w_1， w_2， w_3， w_4， v_8， v_9 中唯一属于 M的边，这与引理2矛盾。对称的论证可排除 $u_{13}v_{13} \in M$。因此，我们得出结论：将引理 4 应用于 4-圈 $u_9v_9v_{10}u_{10}$ 和 $u_{12}v_{12}v_{13}u_{13}$。◄



(a) L_j^1 的边以棕色标示。

(b) L_j^2 的边以棕色标示。

(c) L_j^3 的边为棕色。

图4 子句构件内三种类型的完美匹配割。

从现在起，我们假设对于一个子句构件，两个集合 $U_j = \{u_1, \ldots, u_{20}\}$ 和 $V_j = \{v_1, \ldots, v_{20}\}$ 均已定义。现在我们将证明，对于每个子句构件 C_j 和完美匹配割 M，集合 $M \cap E(U_j \cup V_j)$ 只能有三种类型。在证明相应引理之前，我们先介绍以下记号。令 H 表示由子句构件 C_j 中 $U_j \cup V_j$ 的顶点所诱导的 $G(I)$ 子图。H 的顶点按图2所示命名。我们定义以下集合：

$$L_j^1 = \{u_1u_2, u_3u_4, u_5u_{19}, u_6u_{20}, u_7u_8, u_9u_{10}, u_{16}u_{17}, u_{18}u_{11}, u_{12}u_{13}, u_{15}u_{14}\},$$

$$L_j^2 = \{u_1u_2, u_3u_4, u_5u_6, u_7u_8, u_{19}u_{20}, u_9u_{10}, u_{16}u_{15}, u_{17}u_{18}, u_{11}u_{12}, u_{14}u_{13}\},$$

$$L_j^3 = \{u_2u_3, u_4u_5, u_6u_7, u_8u_9, u_1u_{16}, u_{19}u_{17}, u_{20}u_{18}, u_{10}u_{11}, u_{12}u_{13}, u_{15}u_{14}\}.$$

对于 $i \in \{1, 2, 3\}$，令 R_j^i 表示边的集合 $\{v_kv_l\colon u_ku_l \in L_j^i\}$。

▶ **定义20**。我们称 $G(I)$ 的完美匹配割 M 在 C_j 中属于类型 i，其中 $i \in \{1, 2, 3\}$，当且仅当 $M \cap E(U_j \cup V_j) = L_j^i \cup R_j^i$。

▶**引理 21**。设 M 是 $G(I)$ 的一个完美匹配割，且 C_j 是一个子句构件。那么，恰好存在一个整数 $i \in \{1, 2, 3\}$，使得 M 在 C_j 中属于类型 i。

证明。令 H 表示由子句构件 C_j 的 $U_j \cup V_j$ 的顶点在 $G(I)$ 中诱导的子图。令 $F = \{u_9v_9, u_{10}v_{10}, u_{12}v_{12}, u_{13}v_{13}\}$。考虑由 u_{17}、u_{18}、u_{19}、u_{20} 诱导的 4-圈 C。考虑 $M \cap E(C) = \emptyset$ 的情况。在此情况下，对 C 应用引理 4，我们知道 $\{u_{19}u_5, u_{20}u_6, u_{17}u_{16}, u_{18}u_{11}\} \subset M$；见图4a。由于 U_j 的出边均不在 M 中，根据引理19，现在很容易验证 $L_j^1 \subset M$。在 $M \cap E(C) = \{u_{19}u_{20}, u_{17}u_{18}\}$ 的情况下，对由 u_5、u_6、u_{19}、u_{20} 诱导的 4-圈应用引理 4，我们推断出 $u_5u_6 \in M$，再次很容易验证 $L_j^2 \subset M$；见图4b。在最后一种情况下，$M \cap E(C) = \{u_{19}u_{17}, u_{18}u_{20}\}$。我们再次对由 4-圈

14 完美切割 Barnette 图很困难

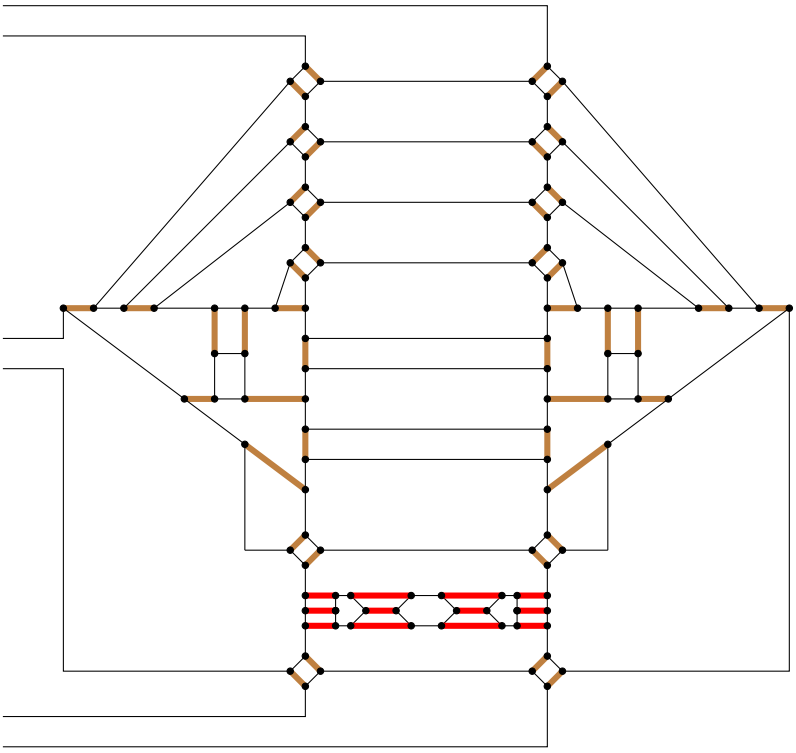


图 5 棕色边和红色边构成了子句构件与完美匹配割的唯一交集 M，使得 $M \cap U_j = L_j^1$。

由 u_5、u_6、u_{19}、u_{20} 诱导，并据此推断出这次 $u_5u_6 \notin M$。由于 U_j 的出边均不在 M 中，现在很容易验证 $L_j^3 \subset M$；见图 4c。

注意，在 L_j^1、$u_9u_{10} \in M$ 和 $u_{12}u_{13} \in M$ 中，而对于 L_j^2，我们有 $u_9u_{10} \in M$ 和 $u_{12}u_{13} \notin M$；对于 L_j^2，我们有 $u_9u_{10} \notin M$ 和 $u_{12}u_{13} \in M$。因此，$M \cap U_j$ 由 u_9u_{10} 和 $u_{12}u_{13}$ 包含于 M 这一事实确定。根据对称性，考虑边 v_9v_{10} 和 $v_{12}v_{13}$ 时，$V_j \cap M$ 也同样如此。

此时，将引理 4 应用于两个 4-圈 u_9，u_{10}，v_{10}，v_9 和 v_{17}，v_{18}，v_{19}，v_{20}。我们有，$u_9u_{10} \in M$ 当且仅当 $v_9v_{10} \in M$，且 $u_{12}u_{13} \in M$ 当且仅当 $v_{12}v_{13} \in M$。因此，L_j^i 传播至 $L_j^i \cup R_j^i$。◀

根据引理 21，可直接得到以下结论。

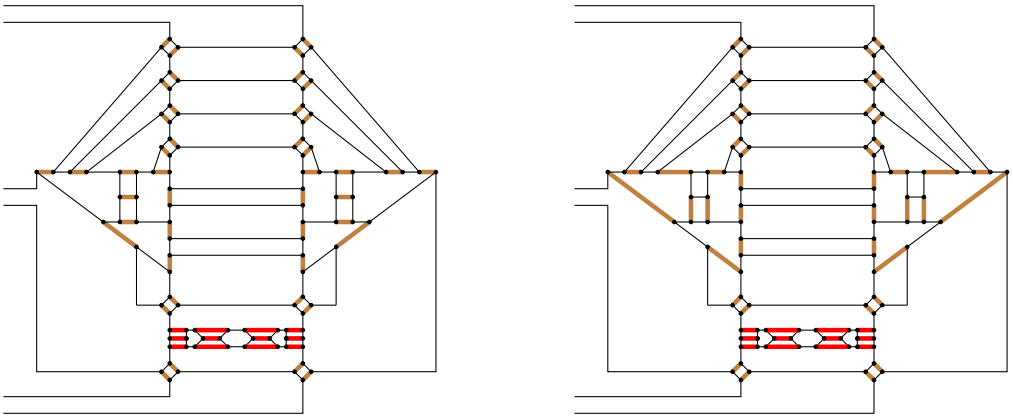
▶ **引理 22. </style}设 是(**I) 的一个完美匹配割，且(A, B) 是 M的割。子句构件 C_j 的顶点 u_1、u_8、u_{14} 不能全部位于 M的同一侧。更准确地说：

1. L_j^1将 u_1 放在 M的一侧，而 u_8、u_{14} 放在另一侧；
2. L_j^2将 u_{14} 放在 M的一侧，而 u_1、u_8 放在另一侧；
3. L_j^3将 u_8 放在 M的一侧，而 u_1、u_{14} 放在另一侧。

注意，对于子句构件$\mathcal{C}_j$，若 M 在$\mathcal{C}_j$中属于类型 1（分别对应类型 2、类型 3），则 $M \cap E(\mathcal{C}_j)$ 中的边分别如图 5（图 6a、图 6b）所示。

3.6 变量构件与子句构件之间的关系

▶**引理 23.** 设 M 是 $G(I)$的一个完美匹配割。那么，对于变量 x_i 和子句C_j，$x_i \in C_j$，$t_{i,j}$，$t'_{i,j}$，$b_{i,j}$，$b'_{i,j}$ 位于 M的同一侧。



(a) 由 L_j^2 确定的边（棕色和红色）。 **(b)** 由 L_j^3 确定的边（棕色和红色）。

图6 与图 5 相同，分别对应 L_j^2（左）和 L_j^3（右）。

证明。 设 z 是变量构件 $\mathcal{X}_i$中环 S_i^2的任意一个顶点；参见图1。注意，存在一条路径 P（分别为 P'），连接 z 与 $t_{i,j}$（分别为 $b_{i,j}$），使得 $|M \cap E(P)|$（分别为 $|M \cap E(P')|$）为偶数。因此，根据观察8，$t_{i,j}$ 和 $b_{i,j}$ 位于 M的同一侧。

我们对 $G(I)$ 的构造确保存在一个偶非负整数 k（其中$k = 0$，若 $t_{i,j}$ 和 $t'_{i,j}$ 相邻），使得以下所有条件均成立：

- 存在 k 个交叉 4-圈 $F_1, F_2, \ldots, F_k$，以及一条路径 P，连接 $t_{i,j}$和 $t'_{i,j}$，其中

$$V(P) \setminus \{t_{i,j}, t'_{i,j}\} \subset \bigcup_{l \in k} V(F_l)$$

- 对每个 $1 \leqslant l \leqslant k$, $E(P) \cap E(F_l)$ 都是一条长度为 2 条边的子路径。

现在，根据引理 15，我们知道对于任意 $1 \leqslant l \leqslant k$, $|M \cap E(F_l)| = 2$。上述论证进一步意味着 $|M \cap E(F_l) \cap E(P)| = 1$。这意味着 $|E(P) \cap M| = k$，而它是偶数。因此，根据观察8，我们有 $t_{i,\ j}$ 和 $t'_{i,\ j}$ 位于 M 的同一侧。

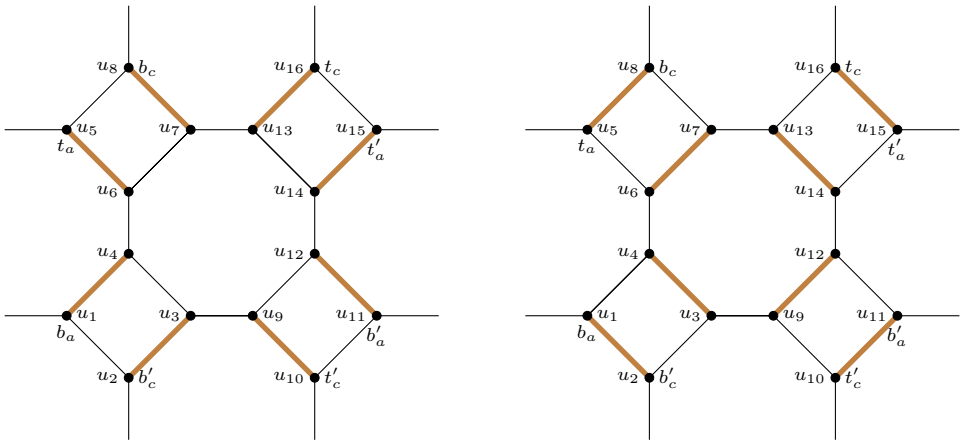
用类似的推理可以得出，$b'_{i,\ j}$ 与 $b_{i,\ j}$ 位于同一侧。因此，$t_{i,\ j}$，$t'_{i,\ j}$，$b_{i,\ j}$，$b'_{i,\ j}$ 都位于同一侧。◀

▶**引理 24。** 设 M 是 $G(I)$ 的一个完美匹配割。那么，对于任意对应于子句 $C_j = (x_a, x_b, x_c)$ 且满足 $a < b < c$ 的子句构件 C_j，以下结论成立：

(a) $t'_{c,\ j}$ 和 u_{14} 位于 M 的同一侧，而 ***(b)*** $b'_{a,\ j}$ 和 u_8 位于 M 的同一侧。

证明。首先证明（a）。利用图2可知，存在一条路径 P，连接$t'_{c,\ j}$和 u_{14}，使得 P可写为$t'_{c,\ j}$ z_1 z_2 d_1 d_2 d_3 z_3 z_4 z_5 u_{14}，其中$\{z_1, z_2\} \subset V(F_6)$，且$\{z_3, z_4, z_5\} \subset V(F_5)$。注意，$F_5$ 和 F_6 是特殊 4-圈。根据引理18，我们有 $|M \cap E(F_5)| = 2$，且 $|M \cap E(F_6)| = 2$。这意味着恰好存在一条边$e \in \{t'_{c,j} z_1, z_1 z_2\}$，使得 $e \in M$。类似地，恰好存在一条边 $e' \in \{z_3 z_4, z_4 z_5\}$，使得 $e' \in M$。此外，由引理17可知，$\{z_2 d_1, d_1 d_2, d_2 d_3, d_3 z_3\}$均不属于 M。因此，$M \cap E(P) = \{e, e'\}$，且 $|M \cap E(P)|$为偶数。现在利用观察8，可得$t'_{c,\ j}$ 和 u_{14} 位于 M的同一侧。

16 切割 Barnette 图的完美匹配割是困难的



(a) P_j^1 的边以棕色绘制。 **(b)** P_j^2 的边以棕色绘制。

图 7 P_j^1 和 P_j^2 是 M 在交叉构件上的唯一可能限制。

现在证明（b）。利用图2可知，存在一条路径 P'，连接b'_a、$_j$ 和 u_8，使得 P' 可写为b'_c、$_j$ z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 z_9 z_{10} z_{11} u_8，其中$\{z_1, z_2\} \subset V$（F_1），$\{z_3, z_4, z_5\} \subset V$（$F_2$），$\{z_6, z_7, z_8\} \subset V$（$F_3$），且 $\{z_9, z_{10}, z_{11}\} \subset V$（$F_4$）。现在仿照（$a$）对特殊 4- 圈 F_1、F_2、F_3、F_4进行论证，可得 $|M \cap E(P)|$ 为偶数。根据观察8，可得b'_a、$_j$ 和 u_8 位于 M的同一侧。◀

对于图7中所示的任意交叉构件 X_j，我们考虑图7a中的两个完美匹配割 P_j^1 和图7b中的 P_j^2 在 X_j上的情形。

▶**引理 25**。设 X_j 是 $G(I)$的一个交叉构件。对于任意 $M \in \{P_j^1, P_j^2\}$，M 是 X_j的一个完美匹配割。顶点 t_a、b_a、t'_a、b'_a 始终位于 M的同一侧，而 t_c、b_c、t'_c、b'_c始终位于 M的同一侧。此外，如果 $M = P_j^1$、t_a 和 t_c 位于 M 的同一侧（在 X_j中），否则它们不在同一侧。

证明。关于 X_j 的记号，请参见 M 根据引理 3 是 X_j的一个完美匹配割。令 C 为 X_j的外部面圈。根据观察8，对 C 中以 t_a 或 t_c为起点的子路径应用观察8即可得出结论。◀

3.7 存在完美匹配割意味着可满足性

本节中，我们证明如果 $G(I)$存在完美匹配割，那么 I 存在一个满足赋值。令 M为 M的一个完美匹配割，并令(A, B)为 M的割。正如我们已经观察到的，I 的一个潜在解可以看作变量的划分（$\mathcal{V}_A$,$\mathcal{V}_B$）。当且仅当 $V(S_i^2) \subset A$时，我们将 x_i 置于$\mathcal{V}_A$ 中；我们将证明$\mathcal{P} = (\mathcal{V}_A, \mathcal{V}_B)$满足单调非全等 3SAT-E4 实例 I。

反设存在一个子句 C_j，使得 C_j 的所有变量 x_a, x_b, x_c都位于$\mathcal{P}$的同一侧。因此，$\cup_{i\in\{a,b,c\}} V(S_i^2)$中的所有顶点都位于 M的同一侧。不失一般性，假设这一侧为 A。令 z_i 为 S_i^2中的任意一个顶点。

现在固定一个整数 $i \in \{a, b, c\}$。利用图1可知，存在一条路径 P，连接 z_i 和$t_{i,j}$，使得 $|M \cap E(P)|$ 为偶数。因此，根据观察8，我们推断 $t_{i,j}$ 属于 A。现在，根据引理 23，我们有 $\{t_{i,j}, t'_{i,j}, b_{i,j}, b'_{i,j}\} \subset A$。以上讨论意味着

$$\bigcup_{i\in\{a,b,c\}} \{t_{i,j}, t'_{i,j}, b_{i,j}, b'_{i,j}\} \subset A.$$

现在应用引理 24，可知$\{u_1, u_8, u_{14}\}$ 中的三个顶点都属于 A。但这与引理 22矛盾。因此我们得到如下结论。

▶**引理 26.** 如果 $G(I)$ 有一个完美匹配割，那么 I 是一个正实例。

3.8 可满足性蕴含完美匹配割的存在

在本节中，我们将证明，对于给定的单调非全相等 3SAT-E4 实例 I和满足 I 的划分 $\mathcal{P} = (\mathcal{V}_A, \mathcal{V}_B)$，可以如下构造其完美匹配割 $M_\mathcal{P}$ of$G(I)$：

- 对于每个变量构件 $\mathcal{X}_i$， $M_\mathcal{P} \cap V(\mathcal{X}_i)$ 是引理 14 所规定的匹配；对于每个与两条边 e, f
- 相接的交叉构件 X_j，如果 var(e) 和 var(f) 位于 $\mathcal{P}$ 的同一侧，则选择 P_j^1，否则选择 P_j^2；对于涉及变量 a, b, c 的每个子句构件 $\mathcal{C}j$，如果 b与 a 和 c 不在 $\mathcal{P}$ 的同一侧，
- 则选择图 5 中的匹配；如果 c 与 a 和 b 不在 $\mathcal{P}$ 的同一侧，则选择图 6a 中的匹配；最后一种情况下则选择图6b中的匹配。

由于 $M_\mathcal{P}$ 是在每个构件上的完美匹配，并且每个顶点都属于某个构件，因此$M_\mathcal{P}$ 是 $G(I)$的完美匹配。根据构造， $M_\mathcal{P}$ 不包含连接边。回想一下，任何不同时以同一构件内的顶点为两个端点的边都是连接边；我们将连接顶点定义为与连接边 e关联的顶点 v，并且var(v) = var(e)。

▶ **引理 27。 </style}对于连接顶点和之间的任意路径，当且仅当var(**u) </style和var(v) *</style*位于*P*的同一侧时， $|Q \cap M_\mathcal{P}|$为偶数。

证明。 由于 $M_\mathcal{P}$ 不包含任何连接边， $|Q \cap M_\mathcal{P}|$ 由 Q在构件内部的部分定义。令 $Q_1, \ldots, Q_k$ 为 Q 的生成顶点不交子路径，使得对于任意i， Q_i 都位于某个构件内部，并且 Q_i 的最后一个顶点与 Q_{i+1} 的第一个顶点之间有一条连接边，对每个 $1 \leqslant i < k$均如此。我们对 k进行归纳证明该性质。

如果 $k = 1$，整个 Q 都位于一个构件内，那么根据引理 14、引理 22 和引理 25，该性质分别对变量构件、子句构件和交叉构件成立。

假设该性质对 $i \leqslant k-1$ 成立，令 u' 为 Q_{k-1} 的最后一个顶点，并令 v' 为 Q_k的第一个顶点。根据归纳法，var(u) 和 var(u') 位于$\mathcal{P}$ 的同一侧，当且仅当$|\bigcup_{1\leqslant i\leqslant k-1} E(Q_i) \cap M_\mathcal{P}|$ 为偶数；var(v') 和 var(v) 位于$\mathcal{P}$的同一侧，当且仅当 $|E(Q_k) \cap M_\mathcal{P}|$ 为偶数。由于 var(u') =var(v')，我们知道 var(u') 与 var(v') 位于$\mathcal{P}$的同一侧，而且 $u'v' \notin M_\mathcal{P}$。因此，var($u$) 和 var($v$) 位于$\mathcal{P}$ 的同一侧，当且仅当 $|\bigcup_{1\leqslant i\leqslant k} E(Q_i) \cap M_\mathcal{P}|$与 $|E(Q_k) \cap M_\mathcal{P}|$具有相同的奇偶性；于是 $|\bigcup_{1\leqslant i\leqslant k} E(Q_i) \cap M_\mathcal{P}|$为偶数，当且仅当 var($u$) 和 var($v$) 位于$\mathcal{P}$的同一侧。◀

▶**引理 28。** $M_\mathcal{P}$ 是 G（I）的完美匹配割。

证明。我们已经知道 $M_\mathcal{P}$ 是一个完美匹配。此外，根据引理 3， $M_\mathcal{P}$ 是一个割集。事实上，设 C 是 G（I）中的任意一个环。如果 C 包含在某个构件中，那么由于 $M_\mathcal{P}$ 在构件中限制后是一个割集， $|C \cap M_\mathcal{P}|$ 是偶数。否则， C 包含一条连接边 uv，因此我们可以将 C 看作边 uv 与一条从 v 到 u的路径 Q 的连接。我们知道 $uv \notin M_\mathcal{P}$，且 var(u) =var(v)。根据引理 27， $|E(C) \cap M_\mathcal{P}| = |E(Q) \cap M_\mathcal{P}|$是偶数。◀

最终，我们根据引理 13、26 和 28 得到了定理 1。

参考文献

1 Takanori Akiyama、Takao Nishizeki 和 Nobuji Saito。二分图的哈密顿圈问题的 NP 完全性。Journal of Information Processing，3(2):73–76，1980。 2 Paul S. Bonsma。平面图及其他图类的匹配割问题的复杂度。J. Graph Theory，62(2):109–126，2009。 3 Valentin Bouquet 和 Christophe Picouleau。完美匹配割问题的复杂度。arXiv 预印本 arXiv:2011.03318，2020。 4 Chi-Yeh Chen、Sun-Yuan Hsieh、Hoàng-Oanh Le、Van Bang Le 和 Sheng-Lung Peng。最小度较大的图中的匹配割。Algorithmica，83(5):1238–1255，2021。 5 Vasek Chvátal。识别可分解图。J. Graph Theory，8(1):51–53，1984。 6 Andreas Darmann 和 Janosch Döcker。关于非全等 3-SAT 的一个简单困难变体。Theoretical Computer Science，815:147–152，2020。 7 Dominique De Werra、Marc Demange、Bruno Escoffier、Jérôme Monnot 和 V Th Paschos。平面图、二部图和分裂图上的加权着色：复杂度与近似。Discrete Applied Mathematics，157(4):819–832，2009。 8 Nicolas Derhy 和 Christophe Picouleau。寻找诱导树。Discret. Appl. Math.，157(17):3552–3557，2009。 9 Reinhard Diestel。《图论》，第4版，Graduate Texts in Mathematics 第173卷。Springer，2012。 10 Tomás Feder、Pavol Hell 和 Carlos S. Subi。Barnette 图的距离二着色。Eur. J. Comb.，91:103210，2021。 11 Tomás Feder 和 Carlos S. Subi。关于 Barnette 猜想。Electron. Colloquium Comput. Complex.，TR06-015，2006。 12 Carl Feghali。关于 Pt-free 图中的匹配割的一则注记。信息处理快报，179:106294，2023。 13 Carl Feghali、Felicia Lucke、Daniël Paulusma 和 Bernard Ries。（完美）匹配割与非连通完美匹配的新难度结果。CoRR，abs/2212.12317，2022。 14 Michael R. Garey 和 David S. Johnson。《计算机与难解性：NP完全性理论指南》。W. H. Freeman，1979。 15 Petr A. Golovach、Christian Komusiewicz、Dieter Kratsch 和 Van Bang Le。改进的参数化枚举核概念及其在匹配割枚举中的应用。J. Comput. Syst. Sci.，123:76–102，2022。 16 F. Hadlock。在多项式时间内求平面图的最大割。SIAM计算机杂志，4(3):221–225，1975。 17 Pinar Heggernes 和 Jan Arne Telle。将图划分为广义支配集。Nord. J. Comput.，5(2):128–142，1998。 18 Russell Impagliazzo 和 Ramamohan Paturi。关于 k-SAT 的复杂度。J. Comput. Syst. Sci.，62(2):367–375，2001。 19 Russell Impagliazzo、Ramamohan Paturi 和 Francis Zane。哪些问题具有强指数复杂度？J. Comput. Syst. Sci.，63(4):512–530，2001。 20 Richard M. Karp。组合问题之间的可约性。载于 Raymond E. Miller 和 James W. Thatcher（编），《计算机计算复杂性研讨会论文集》，1972年3月20日至22日在美国纽约约克敦高地 IBM Thomas J. Watson研究中心举行；IBM研究研讨会系列，第85–103页。Plenum Press，纽约，1972。 21 Pieter Kasteleyn。图论与晶体物理学。《图论与理论物理学》，第43–110页，1967。 22 Christian Komusiewicz、Dieter Kratsch 和 Van Bang Le。匹配割：核化、单指数时间固定参数可解以及精确指数算法。Discret. Appl. Math.，283:44–58，2020。 23 Dmitry V. Korobitsin。关于图的单生成类中支配数判定的复杂度。1992。

24 Adrian Kosowski、Michal Malafiejski 和 Pawel Zylinski。分布式环境中具有冗余的并行处理子系统。载于 Roman Wyrzykowski、Jack J. Dongarra、Norbert Meyer 和 Jerzy Wasniewski 编，《并行处理与应用数学》，第六届国际会议 PPAM 2005，波兹南，波兰，2005年9月11日至14日，修订精选论文，第3911卷《计算机科学讲义》，第1002–1009页。Springer，2005。25 Dieter Kratsch 和 Van Bang Le。求解匹配割问题的算法。《理论计算机科学》，609：328–335，2016。26 Hoàng-Oanh Le 和 Van Bang Le。固定直径（二部）图中匹配割的复杂性二分。《理论计算机科学》，770：69–78，2019。27 Van Bang Le 和 Jan Arne Telle。重新审视完美匹配割问题。《理论计算机科学》，931：117–130，2022。28 Richard J. Lipton 和 Robert Endre Tarjan。平面分隔定理的应用。《SIAM计算机杂志》，9(3)：615–627，1980。29 Ya. A. Loverov 和 Yury L. Orlovich。三次平面二分图类中独立支配集问题的 NP 完全性。《应用与工业数学杂志》，14：353–368，2020。30 Felicia Lucke、Daniël Paulusma 和 Bernard Ries。寻找 H-自由图中的匹配割。载于 Sang Won Bae 和 Heejin Park 编，《第33届国际算法与计算研讨会，ISAAC 2022》，2022年12月19日至21日，韩国首尔，第248卷 LIPIcs，第22:1–22:16页。Schloss Dagstuhl - Leibniz信息学中心，2022。31 Felicia Lucke、Daniël Paulusma 和 Bernard Ries。关于有界半径图和 H-自由图中匹配割的复杂度。《理论计算机科学》，936：33–42，2022。32 Dániel Marx。平面图的边上的列表着色和预着色扩展的 NP 完全性。《J. Graph Theory》，49(4)：313–324，2005。33 Mateusz Miotk、Jerzy Topp 和 Paweł Żyliński。图中的不相交支配集和 2-支配集。《离散优化》，35：100553，2020。34 Bernard M. E. Moret。平面NAE3SAT 属于 P。《SIGACT News》，19(2)：51–54，1988。35 Augustine M. Moshi。图中的匹配割集。《J. Graph Theory》，13(5)：527–536，1989。36 Andrea Munaro。关于次三次无三角形图的线图。《Discret. Math.》，340(6)：1210–1226，2017。37 Maurizio Patrignani 和 Maurizio Pizzonia。匹配割问题的复杂度。载于 Andreas Brandstädt 和 Van Bang Le 编，《计算机科学中的图论概念》，第27届国际研讨会 WG 2001，德国博尔滕哈根，2001年6月14日至16日，论文集，第2204卷《计算机科学讲义》，第284–295页。Springer，2001。38 Michal Pilipczuk。可在单指数时间内求解的树宽参数化问题：一种逻辑方法。载于 Filip Murlak 和 Piotr Sankowski 编，《数学基础与计算机科学 2011——第36届国际研讨会 MFCS 2011》，波兰华沙，2011年8月22日至26日，论文集，第6907卷《计算机科学讲义》，第520–531页。Springer，2011。39 Larry J. Stockmeyer 和 Vijay V. Vazirani。最大匹配问题若干推广的 NP 完全性。《信息处理快报》，15(1)：14–19，1982。40 Harold N. V. Temperley 和 Michael E. Fisher。统计力学中的二聚体问题——一项精确结果。《哲学杂志》，6(68)：1061–1063，1961。41 William T. Tutte。线性图的因子分解。《伦敦数学会杂志》，1(2)：107–111，1947。42 Salil P. Vadhan。稀疏图、正则图和平面图中计数的复杂度。《SIAM计算机杂志》，31(2)：398–427，2001。