arXiv:2302.11790v1 [math.AG] 23 Feb 2023

低维对数典范奇点的基本群

FERNANDO FIGUEROA 和 JOAQU´IN MORAGA

Abstract. 本文研究低维对数典范奇点的基本群，即维数至多为 4 的对数典范奇点。在 2 维情形下，我们证明 lc 奇点的基本群是一个长度至多为 2 的可解群的有限扩张。在 3 维情形下，我们证明每个曲面群都可以作为某个 3 维对数典范奇点的基本群。与此相反，我们证明，对于 $r \geq 2$ 自由群 F_r，它不可能是 3 维 lc 奇点的基本群。在 4 维情形下，我们证明，任何光滑嵌入于 $\mathbb{R}^4$ 中的三维流形的基本群，都是某个 lc 奇点的基本群。特别地，每个自由群都是某个 4 维对数典范奇点的基本群。为证明这些存在性结果，我们引入并研究一种特殊的多面体复形：光滑多面体复形。我们证明，维数为 n 的光滑多面体复形的基本群，可以作为维数为 $n+1$的对数典范奇点的基本群。给定一个光滑嵌入于 $\mathbb{R}^4$中的三维流形 M，我们证明存在一个与 M同伦的 3 维光滑多面体复形。为此，我们从一个与M 同伦的复形出发，并进行组合修改，以模拟代数几何中的奇点消解。

Contents

1. 引言2. 预备知识 3. 二维中的基本群 4. 光滑多面体复形 5. 三维对数典范奇点 6. 四维对数典范奇点 7. 例子与问题 附录 A. 对数典范曲面奇点的基本群 参考文献

1
6
8
23
31
36
42
44
46

1. Introduction

奇点的研究在代数几何中具有基础性意义。追溯至代数几何奠基时期的一种方法，是研究奇点的局部拓扑结构。在复数域上，已知代数奇点的充分小去心邻域的拓扑会稳定下来（参见例如 [21, 6]）。因此，我们可以讨论奇点（X； x）的局部基本群$\pi_1^{\text{loc}}(X; x)$。严格来说，这通常被称为奇点的基本群。这个基本群有助于我们理解奇点的几何信息。例如，在 [28], Mumford 证明了，正规曲面奇点的光滑性可以由其局部基本群的平凡性刻画。在 [21], Milnor 证明了，对于三维簇，这一结论并不成立

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：14E30，14F35；次要分类号：90C57，14M25，20F34。
Key words and phrases. 基本群，对数典范奇点，环面簇，多面体复形。

超曲面奇点。此外，在 [12], 格罗滕迪克证明，维数至少为 3 的局部完全交奇点的局部基本群是平凡的。

请注意，代数奇点的局部基本群是有限表示群。事实上，代数奇点具有 CW复形的结构。另一方面，Koll´ar 和 Kapovich 证明，任意有限表示群都可以作为某个正规孤立三维奇点 [14]的基本群出现。由于 Mumford 的工作 [28]，这一结论对曲面奇点并不成立。Koll´ar 和 Kapovich 还在 [19] 中描述了有理奇点的基本群，并在 [17]中描述了 Cohen-Macaulay奇点的基本群。这些奇点的基本群与 $\mathbb{Q}$-超完美群密切相关。有理奇点和 Cohen-Macaulay奇点这两类奇点，五十多年来一直是代数几何的中心课题。

自 20 世纪 90 年代初起，随着双有理几何和极小模型纲领的发展，极小模型纲领中的奇点受到了广泛关注。极小模型纲领中的奇点由一个称为极小对数不一致度的不变量定义。当该不变量为正时，我们称这个奇点为对数终端奇点（也称 Kawamata 对数终端奇点，或简称 klt 奇点）。如果该不变量非负，则称这个奇点为对数典范奇点。对数终端奇点是 Fano 簇的局部类比，而对数典范奇点是 Calabi–Yau簇的局部类比。本文研究维数至多为 4 的对数典范奇点的局部基本群。

1.1. 对数终端奇点。在转向本文的主题之前，我们先回顾一下关于 klt 奇点基本群的已知结果。下述定理刻画了 klt 奇点的基本群（见 [24, 定理 7]）。

定理 1. 设 $n \geq 2$ 和 r 为两个正整数。存在一个正整数 $c(n)$，它仅取决于n ，并满足以下条件。设 $(X; x)$ 是一个正则度为 r 的 n 维 klt 奇点。那么，存在一个短正合列

$$1 \to A \to \pi_1^{\mathrm{loc}}(X; x) \to N \to 1,$$

其中 A 是一个有限 阿贝尔群，其秩至多为 $r+1$ ，而 N 是一个阶至多为 $c(n)$ 的有限群 .

整数 r，包含于 $\{0, \dots, n-1\}$，衡量了 $(X; x)$ 的消解的组合复杂度（见定义 2.9）。这一结论得益于许多数学家的工作 [36, 35, 2, 22, 23, 3]。简而言之，上述定理表明，对数终端奇点的基本群表现得如同 orbifold 奇点的基本群。

对数典范奇点在某种意义上是对数终端奇点的极限情形。因此，朴素地看，人们会预期 lc 奇点的基本群与 klt 奇点的基本群表现相似。然而，我们对对数典范奇点的基本群仍知之甚少。下面，我们总结维数至多为 4 的 lc 奇点相关结果。

1.2. 二维对数典范奇点。 在维数为 2 的情形下，我们可以运用 Mumford 发展的技巧来理解局部基本群。这些技巧依赖于对正规曲面奇点的消解。Alexeev 的工作刻画了这些消解 [1]。与 klt 奇点不同，从维数 2 开始，lc 奇点的基本群可以是无限群。参见例7.1。

在维数为二的情形下，我们研究对（X， B； x），并研究（X； x）的一个覆盖，该覆盖可能沿 B分歧。这引出了区域基本群的概念，记作 π_1^{reg}（X， B； x）（见定义2.8）。基本群确实依赖于边界。例如，我们有

$$\pi_1\left(\mathbb{A}^2, \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2; (0,0)\right) \simeq \mathbb{Z}_2^2,$$

其中， L_1 和 L_2 是经过 (0, 0) 的两条横截直线。我们的第一个结果给出了对数典范曲面奇点的区域基本群的生成元和关系数目的一个上界。

定理 2. 设 $(X, B; x)$ 是一个对数典范曲面奇点。那么，$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B; x)$ 存在一个至多含 4 个生成元和至多 7 个关系的表示。此外，若 $\pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B; x)$ 存在一个含 4 个生成元和 7 个关系的最小表示，则 X 在 x 处是环面的，并且 B 有 4 个分支，其系数为 $1\ 2$，且这些分支经过奇点 $x \in X$。

前一个结果给出了生成元和关系数量的上界。然而，即使只有两个生成元，群也可能相当复杂。事实上，每个有限单群的秩都至多为 2。下面的结果给出了关于曲面 lc 奇点基本群的一个结构定理。

定理 3. 设 $(X, B; x)$ 是一个对数典范曲面奇点。那么，我们有一个短正合列

$$1 \to N \to \pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B; x) \to G \to 1$$

其中 N 是长度至多为 2 的可解群，而 G 是阶数至多为 6 的有限群。

长度至多为 2 的可解群在某种程度上类似于秩至多为 2 的有限阿贝尔群。因此，对数典范曲面奇点的区域基本群仍然表现得像 klt 对应对象。在表1中，我们描述了对数典范曲面奇点的区域基本群可能具有的同构类。对于每个同构类，我们详细说明了 $(X; x)$ 的极小解消，以及在极小解消上导出该群的 B 的严格变换。

1.3. 对数卡拉比–丘曲面。 作为一项附带成果，我们研究了对数卡拉比–丘曲面的区域基本群。在这种情况下，我们没有得到结构定理，但可以对交换化的自由生成元数量给出上界。这是朝着为对数卡拉比–丘曲面的区域基本群建立定理3 的对应版本迈出的第一步。

定理 4. 设 (X, B) 是一个维数为 2 的射影对数卡拉比–丘对。那么，我们有：

$$\mathrm{rank}(\pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B)^{\mathrm{ab}}_{\mathbb{Q}}) \leq 4.$$

由例 7.4可知，前一定理中所有可能的秩都可以出现。关于对数卡拉比–丘对的区域基本群的一些猜想性陈述，请读者参见例 7.1 。借助定理 4证明中的一些思路，我们将证明以下关于 ´开 Calabi–Yau 曲面的 étale 万有覆盖和万有覆盖 [1]的定理。以下陈述与 Zhang 的工作有关（例如，参见 [33, 命题 4。1]）。

定理 5. 设 X 是一个开 Calabi–Yau 曲面。那么，以下陈述之一成立：

(i) X 的万有覆盖是 $\mathbb{C}^2$ 中 $\Lambda\mathcal{S}$ 的补集，其中 Λ是一个秩 4 的格， $\mathcal{S}$ 是一个闭点有限集；或者

(ii) X 的 étale 万有覆盖是 K3 曲面 X 的光滑轨迹上有限多个点的补集，且 $K_X \sim 0$。

在前述陈述中， ´etale 万有覆盖是与基本群的逆有限完备化相对应的覆盖。对于开卡拉比-丘三维簇的 ´etale 万有覆盖，目前尚不清楚应当期待什么。

[1]开 Calabi–Yau 曲面是射影 klt 曲面的光滑轨迹 X ，且 $K_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$。

1.4. 三维对数典范奇点。 在三维中，对数典范奇点的基本群可能复杂得多。在 [20], Koll´ar 证明，对于一个曲面群 G，存在一个三维孤立对数典范奇点（X_G； x），其局部基本群是 G 的有限循环扩张。特别是，局部基本群 $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X_G;\ x)$ 不是可解群。沿着这一方向，我们证明曲面群确实是三维孤立对数典范奇点的局部基本群。

定理 6. 设 S 为连通无边界二维流形。那么，存在一个孤立三维对数典范奇点（$X; x$），使得 $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X; x) \simeq \pi_1(S)$。

在例 7.3中，我们证明，许多秩至多为 3 的有限阿贝尔群都可以作为三维 lc 奇点的基本群。作为一个否定结果，我们将证明，至少有 3 个生成元的自由群不是孤立 lc 三维奇点的基本群。

定理 7. 不存在 孤立三维对数典范奇点（$X; x$）满足 $\pi^{\mathrm{loc}}(X; x) \simeq F_r$，其中 $r \geq 2$。

特别地，并非每个有限表示群都是一个维数为 3 的孤立 lc 奇点的基本群。前述结论与连通无边界二维流形的基本群不是自由群这一事实密切相关。为了证明前述结论，我们将考虑自然的满同态 $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X; x) \to \pi_1(\mathcal{D}(X; x))$，并证明核中的大多数元素都是挠元。因此，若 $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X; x)$是自由群，那么它将迫使流形 $\mathcal{D}(X; x)$的基本群为自由群，而该流形的维数至多为 2。这只有在 S^1 和一个点的情况下才可能发生。第一种情况下，我们使用 Magnus-Karras-Solitar定理推得 $\mathbb{Z}$ 必定是秩至少为 2 的单关系群，从而导出矛盾。第二种情况下，我们再次使用 Magnus-Karras-Solitar定理，得出存在一个基本群为单关系群的光滑卡拉比–丘曲面。这同样会导出矛盾。因此，没有任何孤立三维 lc 奇点具有生成元至少为 3 个的自由基本群。

定理6 和定理7 给出了关于 lc 三维奇点基本群的新例子和约束。不过，这些结果并未完整描述 3 维情形下的基本群，而我们在 2 维情形下已有这样的完整描述。对于余正则性为 0 的三维 lc 奇点（见定义 2.9），我们预期其基本群是曲面群的有限循环扩张。不过，这类扩张是否都可能出现尚不清楚（见问题 7.5）。

1.5. 四维对数典范奇点。在 4 维情形下，我们将证明，嵌入 $\mathbb{R}^4$ 中的三维流形的每个基本群，都会作为某个孤立对数典范奇点的基本群出现。特别地，每个自由群都会作为某个孤立四维对数典范奇点的基本群出现

定理 8. 设 M 是一个无边界的连通三维流形，并光滑地嵌入于 $\mathbb{R}^4$ 中。存在一个四维孤立对数典范奇点 $(X; x)$，使得 $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X; x) \simeq \pi_1(M)$。特别地，每个自由群都会作为某个孤立四维对数典范奇点的基本群出现。

上一条定理的最后一部分可通过考察三维流形 $M_r := \#^r(S^2 \times S^1)$ 来证明，该流形可光滑嵌入于 $\mathbb{R}^4$。上一条定理的证明采用了 Koll´在 [20]中发展出的策略。在本文中，作者从一个 $n+1$维对数典范奇点（X； x）出发，构造了一个 n维的简单正交 Calabi–Yau 簇 T（可能具有许多不可约分支）。然后，他们证明局部基本群 $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X;\ x)$ 将自然地满射到 $\pi_1(T)$。因此，为了证明定理 8，我们首先需要证明以下陈述。

定理 9. 设 M 是一个无边界的连通三维流形，并且光滑嵌入于 $\mathbb{R}^4$ 中。存在一个三维简单正交 Calabi–Yau 簇 T，使得 $\pi_1(T) \simeq \pi_1(M)$。

为了构造前述卡拉比-丘簇，我们将采用源自托里克几何的思想。事实上，我们的简单正交 Calabi–Yau 簇满足：每个不可约分支 T_i 都是一个射影托里克簇。在下面的小节中，我们将更详细地说明这一构造的思路。

1.6. 光滑多面体复形。 借助托里克几何，可以将一个凸多胞体与一个射影托里克簇相关联。因此，为了构造一个卡拉比-丘簇 T，使其每个不可约分支都是环面的，我们需要考虑元素为凸多面体、态射为线性同构的复形。在第 4 节中，我们将卡拉比-丘簇 T 与一个满足某些温和条件的多面体复形 $\mathcal{P}$ 相关联。若要使卡拉比-丘簇 T 成为 snc，则复形中的每个多面体都必须是光滑的，且维数为 n；此外，复形中每个多面体的神经都必须是单纯形。简言之，复形 v 的每个顶点 $\mathcal{P}$ 都必须恰好包含在 $n+1$ 个极大多面体中。沿着这一思路，我们证明以下定理。

定理 10. 设 $\mathcal{P}$ 是一个维数为 n 的光滑多面体复形。存在一个 $(n+1)$ 维对数典范奇点 $(X; x)$，使得 $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X; x) \simeq \pi_1(\mathcal{P})$。此外，对于 $n \leq 4$，奇点 $(X; x)$ 是孤立的。

前一定理为我们提供了一种构造具有指定基本群的 lc 奇点的方法。然而，光滑多面体复形这一类别并不容易处理。最直接的做法是考虑一个光滑流形 M 及其三角剖分 $\mathcal{T}$，再考虑该三角剖分的庞加莱对偶。这可以作为光滑多面体复形的初步粗略近似。然而，庞加莱对偶的元素在组合意义上是凸多胞体，因此未必是真正的凸多胞体。为解决这一问题，我们将从 $\mathbb{R}^4$ 的 Freudenthal 分解出发，并证明其庞加莱对偶确实由凸多胞体构成（见命题 6.3）。于是，同样的结论也适用于 Freudenthal 复形的子复形。另一个尚待解决的困难是：庞加莱对偶即使是凸多胞体，也未必光滑。为解决这一问题，我们借鉴奇点消解的策略，定义多面体复形沿某个层的爆破。这一构造以一个顶维多面体替换该层，用以表示复形在该层处的切方向（见定义 4.10）。然而，爆破并非总是良定义的（见注记 4.12）。因此，要应用这一策略，我们需要逐个情形进行分析。在 3 维情形下，我们可以证明以下定理。

定理 11. 设 M 是一个可光滑嵌入到 $\mathbb{R}^4$ 中的三维流形。存在一个与 M 同伦的三维光滑多面体复形 $\mathcal{P}_M$。此外，我们可以选择使 $\mathcal{P}_M$ 中的每个三维多面体都是以下之一：

- 四边形棱柱，
- 关联多面体，
- 对六边形棱柱进行部分顶点截断后，再进行部分棱截断所得的多面体，或
- 对置换多面体进行部分顶点截断后，再进行部分棱截断所得的多面体。

在前一个定理中，对多面体 P 的一个面 F 进行截断，意指用 $P \cap H^+$ 替换 P，其中 H^+ 是一个半空间，它与 F 仅相交于边界，并包含 P 中所有不属于 F 的顶点。对多面体 P 的一部分边进行截断所得的多面体，称为 P 的部分棱截断。类似地，对多面体 P 的一部分顶点进行截断所得的多面体，称为 P 的部分顶点截断。

根据[4, 定理 1]，，任意闭可定向三维流形都可以简单分解为 5 种多面体。这一多面体族比我们在定理11中的构造所需的多面体族更小。由于我们对多面体复形施加了非常严格的条件，这一点是可以预料的。在

在后续工作中，我们将致力于理解多面体复形的消解过程，并描述用光滑多面体复形逼近光滑流形所需的多面体。

本文结构安排如下。在第2节，我们介绍极小模型纲领中的奇点及局部基本群的预备知识。在第3节，我们研究复维数 2 的 lc 奇点和对数Calabi–Yau对的基本群。在第4节，我们说明如何从光滑多面体复形构造简单正规交叉卡拉比–丘簇，以及如何从简单正规交叉卡拉比–丘簇构造 lc 奇点。在这两种情况下，构造都保持基本群不变。在第5节，我们证明每个曲面群都可作为 lc 三维奇点的基本群出现。此外，我们证明 F_r（其中 $r \geq 2$）不是孤立 lc 三维奇点的基本群。在第6节，我们证明每个自由群都可作为对数典范四维奇点的基本群出现。最后，在第7节，我们给出一些例子，并提出若干有待进一步研究的问题。

致谢。作者感谢 Burt Totaro、June Huh、J´anos Koll´ar、Mirko Mauri 和 De-Qi Zhang 提供了许多有益的意见。本文的部分工作是在 FF 访问华盛顿大学期间完成的。作者感谢华盛顿大学，也感谢 Gaku Liu 在多面体复形方面给予的支持、热情接待和见解。

2. Preliminaries

我们在复数域 $\mathbb{C}$ 上工作。给定由方程 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = c$ 定义的超平面 H in $\mathbb{Q}^n$，我们用 $H^+ := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i \geq c\}$ 和 $H^- := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq c\}$ 表示两个半空间。群 G 的秩记作 rank(G)，是 G 的生成元的最少个数。设 G 是一个群，$g_1, \ldots, g_k \in G$ 是其中的元素。我们用 $\langle g_1, \ldots, g_k \rangle_n$ 表示由 $g_1, \ldots, g_k$ 正规生成的正规子群，也就是由 G 中 $g_1, \ldots, g_k$ 的所有共轭元生成的子群。我们称该群由元素 $g_1, \ldots, g_k$ 正规生成。设 X 是一个代数簇，E 是一个有效除子。若 supp(D) = supp(E) 成立，则称代数簇 X 上的除子 D 完全支撑于 E。

2.1. 对数典范 奇点。本小节中，我们回顾对数典范奇点的定义 .

定义 2.1. 设 X 是一个正规拟射影簇，B 是 X 上的有效 $\mathbb{Q}$ 除子。若 $K_X + B$ 是 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃除子，则称一对 (X, B) 为一对。若 X 光滑且 B 是简单正规交叉，则称一对 (X, B) 为对数光滑。

定义 2.2. 给定一个射影双有理态射 $f\colon Y \to X$，其中 Y 正规，以及一对 (X, B)，我们可以通过以下公式定义 B_Y 关于 B 的对数拉回

$$K_Y + B_Y = f^*(K_X + B) \quad \text{and} \quad f_*(B_Y) = B.$$

对于素除子 $E \subset Y$，(X, B) 在 E 处的对数不一致定义为：

$$a_E(X, B) = 1 - \operatorname{coeff}_E(B_Y).$$

称一对 (X, B) 为：

(1) 对数典范，简称 lc，若对于每个射影双有理态射 $f\colon Y \to X$ 以及每个素除子 $E \subset Y$，都有 $a_E(X, B) \geq 0$。(2) 对数终端，也称 Kawamta 对数终端，简称 klt，若对于每个射影双有理态射 $f\colon Y \to X$ 以及每个素除子 $E \subset Y$，都有 $a_E(X, B) > 0$

定义 2.3. 对于一个 lc 对 (X, B)，若存在双有理态射 $f\colon Y \to X$ 以及一个除子 $E \subset Y$，使得 $f(E) = Z$且 $a_E(X, B) = 0$，则称不可约代数簇 $Z \subset X$ 为对数典范中心（简称 lc 中心）。在上述情形下，除子赋值 E 称为对数典范位。

对于任意一对 (X, B)，都存在一个最大开子集 $X^{snc} \subset X$，使得对 $(X^{snc}, B|_{X^{snc}})$ 对数光滑。这个轨迹称为简单正规交轨迹或 snc 轨迹。

若所有 lc 中心都与 X^{snc} 相交，且由 $\lfloor B \rfloor$ 的层给出，则称对数典范对 (X, B) 为除子对数终端，简称 dlt。

定义 2.4. 设 (X, B) 是一个对数对。设 $g\colon Y \to X$ 是一个射影双有理态射。设 $B_Y = E + g_*^{-1}B$，其中 E 是 g 的约化例外除子。若 (Y, B_Y) 是 dlt 且 $K_Y + B_Y$ 相对于 g nef，则称 g 是 (X, B) 的一个 dlt 修改。在这种情况下，我们也称 (Y, B_Y) 是 (X, B) 的一个 dlt 修改。

下述 定理称为 dlt 修改的存在性。其证明见 [19, 定理 3.1].

引理 2.5. 设 (X, B) 是一个对数典范对。则 (X, B) 存在一个 $\mathbb{Q}$-阶乘 dlt 修改 (Y, B_Y)。

2.2. 局部与区域基本群。本小节中，我们回顾局部基本群和区域基本群的定义。

记号 2.6. 本文中讨论的所有代数簇和解析空间都是道路连通的。设 X 是一个代数簇，E_1、.....、E_r 是 X 上的素除子。对于每个 E_i，我们选取一个圆 $\ell_i \simeq S^1$，它是由 E_i 在 X 上的法丛所诱导的圆丛的一般纤维。我们选取一个基点 $x_0 \in X$ 和一条路径 $r\colon [0,1] \to X$，满足 $r(0) = x_0$，且对于每个 i，都有 $r(t_i) \in \ell_i$。我们用 r_i 表示 r 在 $[0, t_i]$ 上的限制。所谓绕除子回路 E_i，是指起点为 x_0 的环路 $r_i^{-1}\ell_i r_i$。这些在 $\pi_1(X; x_0)$ 中诱导出元素。

定义 2.7. 设 $B = \sum_{i=1}^{k} b_i B_i$ 是一个边界除子，B_i 是其素分支，b_i 是相应的系数。我们记

$$B = B_s + B''.$$

其中 $B_s = \sum(1 - \frac{1}{m_i})B_i$，且 $m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得 B 中 B_i 的系数 b_i 满足 $1 - \frac{1}{m_i} \leq b_i < 1 - \frac{1}{m_i+1}$。除子 B_s 称为 X 的标准逼近；任何满足 $B = B_s$ 的 B 都称为具有标准系数。

对于正规奇点 $x \in X$，我们可以将 $(X; x)$ 嵌入光滑环境空间 $\mathbb{A}^n$ 中。$x \in X$ 的链环是 x 在 $\mathbb{A}^n$ 中的一个小欧几里得球与 X 的交集去掉 x 后所得的补集。记作 Link(x)。$x \in X$ 的局部基本群定义如下：

$$\pi_1^{\mathrm{loc}}(X; x) := \pi_1(\mathrm{Link}(x)).$$

前述定义与光滑环境空间的选取无关。若 $(X, B; x)$ 是一个对偶奇点，则我们只需令 $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X, B; x) := \pi_1^{\mathrm{loc}}(X; x)$。

定义 2.8. 设 (X, B) 是一个对数对，且 $x \in X$ 是一个闭点。对于经过 x 的 B_s 的每个素分支 B_i，我们用 n_i 表示满足下式的正整数

$$\mathrm{coeff}_{B_i}(B_s) = 1 - \frac{1}{n_i}.$$

我们用 γ_i 表示法圆丛中的一条环路

$$B_i \setminus \bigcup_{j \neq i} B_j \subset X \setminus \mathrm{supp}(B_s).$$

为简便起见icity，这个环路称为绕着 B_i 的环路。对于任意开子集 U，我们定义群

$$\pi_1(U^{\mathrm{sm}}, B|_U) := \pi_1(Y \setminus \mathrm{supp}(B_s))/\langle \gamma_i^{n_i} \rangle_n.$$

这里， U^{sm} 表示 U 的光滑轨迹，下标 n 表示由这类元素生成的最小正规子群。(X, B)在 x 处的区域基本群定义为$\pi_1(U^{\mathrm{sm}}, B|_U)$的逆极限，其中 U遍历 X中 x的所有解析邻域。

2.3. 余正则性。 在本小节中，我们回顾余正则性的定义。余正则性是一个不变量，用于衡量对偶复形的维数与环境簇的维数之间的差异。它与对数典范阈值 [8] 和补理论 [9, 7]有关。关于余正则性的综述，参见 [25] 。

定义 2.9. 设 $(X; x)$ 是一个对数典范奇点。$(X; x)$ 的正则度定义为

$$\mathrm{reg}(X;\ x) = \max\{\dim \mathcal{D}(Y, B_Y) \mid (X, B;\ x) \text{ 是对数典范的，且 } (Y, B_Y) \text{ 是 } (X, B;\ x) \text{ 的 dlt 修改}\}.$$

在 $(X; x)$ 是严格对数典范且 $\{x\}$ 为一个对数典范中心的情形下，在前述定义中，我们被迫取 $B = 0$，并令 (Y, B_Y) 为 $(X;\ x)$ 的 dlt 修改。

设 $(X;\ x)$ 是一个对数典范奇点。$(X; x)$ 的余正则性定义为

$$\dim X - \mathrm{reg}(X; x) - 1.$$

特别地，余正则性为 0 意味着我们可以在 $\mathcal{D}(B_Y)$ 中找到一个 0 维层，使得 (Y, B_Y) 是 (X, B) 的 dlt 修改。

3. Fundamental groups in dimension 2

本节中，我们研究对数典范曲面奇点和卡拉比–丘曲面的基本群。

3.1. 曲面对数典范奇点。本小节中，我们描述对数典范曲面奇点 $(X, B;\ x)$ 的区域基本群。以下定理是本小节的第一个结果。它给出了对数典范曲面奇点的区域基本群的生成元和关系数量的界。本节中，我们将对可能出现的基本群进行完整分类。

主要工具是 dlt 修改的存在性（见引理 2.5）以及 Mumford 对正规曲面奇点基本群的描述 [28]。以下引理由 [28, 第 10]页中的断言推出。

引理 3.1. 设 X 是一个正规曲面。设 $E_1, \ldots, E_n$ 是 X 上的曲线，使得 $E_1 \simeq \mathbb{P}^1$。假设每个 E_i（其中 $i \geq 2$）都与 E_1 在 p_i 相交，从而 (X, E) 对数光滑，其中 $E := E_1 + \cdots + E_n$。定义 U 为 E_1 在 X 中的一个小解析邻域与 E 的支撑的补集的交。则， $\pi_1(U)$ 由绕每个 E_i 的环路 α_i 生成，其关系为

$$\{[\alpha_1\alpha_i]\}_{2\leq i\leq n} \quad \text{and} \quad \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\alpha_1^{E_1^2}.$$

下面的引理将 [28] 的主要结果推广到对数对的情形。其思路是将边界视为余维一轨形奇点。

引理 3.2. 设 $(X, B;\ x)$ 是一个二维对数对的奇点。设 $f\colon (Y, B_Y) \to (X, B)$ 是一个对数解消，其例外轨迹为有理曲线树。那么，区域基本群$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B;\ x)$ 由以下元素生成：

(i) 绕着 Y 中每个素例外因子 E_i 的环路 α_i，以及 (ii) 绕着 $f_*^{-1}(B_s)$ 中每个素除子的环路 γ_i，

满足以下关系：

(1) 相交因子周围的环路彼此交换，

(2) 关系 $\alpha_1\dots\alpha_m\gamma_1\dots\gamma_{m'}\alpha_i^{E_i^2}$，对于每个相交的除子 E_i E_1，…，E_m B_1，…，$B_{m'}$ 在$f_*^{-1}(B_s)$中，以及 (3) 关系 γ_i^m，对于 $f_*^{-1}(B_s)$中系数为 $1-\frac{1}{m}$ 的每个素除子 B_i，

证明。注意到由于奇点是孤立的，(X,B,x) 的局部基本群与区域基本群相同。注意到 $x\in X$ 的一个邻域同构于例外轨迹的一个邻域，并且 B_s 中的系数与 $f_*^{-1}(B_s)$ 中的系数相同。由此得到

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)=\pi_1^{\mathrm{reg}}(U,f_*^{-1}(B_s)|_U)=\pi_1(U\backslash B_s)/\langle\gamma_i^{n_i}\rangle. \tag{3.1}$$

这里，U 是 Y 中去掉例外轨迹后的一个较小解析邻域。为计算（3.1）中最右侧的基本群，我们对 U' 应用塞弗特–范坎彭定理的开覆盖：$=U\backslash B_s$。

对于每个例外除子 E_i，我们定义 U_i 为与 E_i 的一个较小解析邻域相交后的 U'。因此，我们有

$$U'=\bigcup_i U_i.$$

由于例外除子构成一棵树，我们可以对对应用塞弗特–范坎彭定理，从而得到所有 $\pi_1(U_i)$ 的自由积，再对其子群 $\pi_1(U_i\cap U_j)$ 进行粘合取商。由引理 3.1 可知，群 $\pi_1(U_i)$ 由以下元素生成：

- 绕着 E_i的一个环路，以及
- 绕着与 E_i相交的每个素除子（例外的或位于 $f_*^{-1}B_s$中的）的环路，

其关系为

$$\{[\alpha_i\alpha_j]\}_j,\quad \{[\alpha_i\gamma_j]\}_j,\quad \text{and}\quad \alpha_1\dots\alpha_m\gamma_1\dots\gamma_{m'}\alpha_i^{E_i^2}.$$

若 E_i 与 E_j 相交，则 $U_i\cap U_j$ 同伦于 $(\mathbb{D}^*)^2$。因此，其基本群由绕着 E_i 和 E_j 的环路生成，且这些环路彼此可交换。因此，粘合不会在绕着这些除子的环路之间引入任何其他关系。故，$\pi_1(U')$由绕着这些除子的环路生成，其关系为

$$[\alpha_i\alpha_j]_{i,j},\quad [\alpha_i\gamma_j]_{i,j},\quad \text{and}\quad \alpha_1\dots\alpha_m\gamma_1\dots\gamma_{m'}\alpha_i^{E_i^2}.$$

最后，通过对对的区域基本群定义中取商，我们得到第三个关系 $\gamma_i^{m_i}$。□

推论 3.3. 设 $(X,B;\,x)$ 是一个二维对数对的奇点，且 $B_s=0$。设 $f\colon(Y,B_Y)\to(X,B)$ 是一个对数解消，其例外轨迹是由 $m\geq 2$ 条有理曲线组成的链。那么，区域基本群 $\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;\,x)$ 是一个有限循环群。

证明。 将例外除子记为 E_1，……，E_m。根据引理 3.2，我们有

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)\simeq\langle x_1,\dots,x_m\mid x_2x_1^{-r_1},x_1x_3x_2^{-r_2},\dots,x_{m-1}x_m^{-r_m}\rangle,$$

其中 x_i 是绕着 E_i 和 $-r_i=E_i^2$的环路。我们可以写成

$$\frac{b_i}{b_{i-1}}=[r_{i-1},r_{i-2},\dots,r_1]$$

对于 Hirzebruch-Jung 连分数，我们可以归纳地得到 $x_i=x_1^{b_i}$。因此，成立以下一系列同构：

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)\simeq\langle x_1\mid x_1^{b_{m-1}}(x_1^{b_m})^{-r_m}\rangle\simeq\langle x_1\mid x_1^{r_mb_m-b_{m-1}}\rangle\simeq\mathbb{Z}/(r_mb_m-b_{m-1})\mathbb{Z}.$$

这意味着区域基本群是一个有限循环群。 □

引理 3.4。考虑群

$$G := \langle \alpha_1, \dots, \alpha_t, x_1, \dots, x_m \mid \alpha x_2 x_1^{-m_1}, \{x_{i-1} x_{i+1} x_i^{-m_i}\}_{1<i<m}, J\rangle,$$

其中 J 是一个关系集，而 α 是由 α_i生成的某个元素。于是

$$G \simeq \langle \alpha_1, \dots, \alpha_t, x_1 \mid J'\rangle,$$

其中 J' 是 J 中的关系，将 x_i 替换为 $\alpha^{a_i} x_1^{b_i}$（对应于 $1 < i \leq m$）即可得到。

证明. 我们可以写成

$$\frac{b_{i+1}}{b_i} = [m_i, m_{i-1}, \dots, m_1], \text{ and}$$
$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = [m_i, m_{i-1}, \dots, m_2],$$

对于 Hirzebruch-Jung 连分数。通过归纳，我们可以得到 $x_i = \alpha^{a_i} x_1^{b_i}$。因此，我们得到了该群所需的表示。□

在下面的引理中，我们将对对数正则曲面奇点的 dlt 修改的可能例外除子进行分类。我们还将证明一个关于 dlt 修改的奇异轨迹的命题。下面引理的第一部分是专家们熟知的（例如，参见[1]）。

引理 3.5. 设 $(X, B; x)$ 是一个对数典范曲面奇点。设 $\phi\colon (Z, B_Z) \to (X, B)$ 是一个 dlt 修改。设 $E_1, \dots, E_m$ 是例外素除子。定义 E 为 $E_1 + \cdots + E_m$， Δ_i 为 $K_Z + B_Z$ 到 E_i 的伴随公式中的ˆ不同项，并令 B 为 B 的严格变换。那么， E 是以下之一：

(i) 有理曲线链；(ii) 有理曲线环；或 (iii) 椭圆曲线。

此外，以下陈述成立：

(1) 若 E 是有理曲线链，则 (Z, B_Z) 在 $E_2 + \cdots + E_{m-1}$ 的某个邻域内对数光滑；(2) 若 E 是椭圆曲线或有理曲线环，则 $B_Z = E$ 和 (Z, B_Z) 在 E 的某个邻域内对数光滑；(3) 若 $m = 1$ 且 E 是有理曲线，则 $E_1 \cdot \hat{B} + \deg \Delta_1 = 2$；以及 (4) 若 $m \geq 2$ 且 E 是有理曲线链，则

$$E_1 \cdot \hat{B} + \deg \Delta_1 = E_m \cdot \hat{B} + \deg \Delta_m = 1.$$

证明。根据 ϕ 的定义，我们有 $K_Z + B_Z = \phi^*(K_X + B)$，且（$Z$， B_Z）是一个 dlt 对。因此，$K_Z + B_Z \sim_{\mathbb{Q},\, X} 0$。

根据伴随公式，我们得到

$$0 \sim_{\mathbb{Q}} (K_Z + B_Z)|_{E_i} = K_{E_i} + \Delta_i + (B_Z - E_i)|_{E_i}.$$

因此，$\deg K_{E_i} \leq 0$，所以所有例外除子都是有理曲线或椭圆曲线 .

如果 $\deg K_{E_i} = 0$，那么 $\deg (B_Z - E_i)|_{E_i} = 0$，因此在 E 的对偶图中，对应于 E_i 的顶点没有边。由于 E 是 ϕ 在 x 上的纤维， E 是连通的。因此，其对偶图也是连通的。所以，$\hat{E} = E_1$ 是唯一的例外除子。在这种情况下，我们有 $B_Z = E_1 + B$。因此，根据伴随公式，我们得到

$$0 = \deg (K_Z + B_Z)|_{E_1} = \deg \Delta_1 + \deg (B_Z - E_1)|_{E_1}.$$

因此， $E_1 \cdot \hat{B} + \deg\ \Delta_1 = 0$。由此，在 E 的一个邻域内，对 (Z, B_Z) 是对数光滑的，并且$B_Z = E$。

我们只剩下这样一种情形：对每个 E_i，$\deg K_{E_i} = -2$ 。在这种情形下，我们得到 $\deg(B_Z - E_i)|_{E_i} \leq 2$，因此任意 E_i 至多与 E 中另外两个除子相交。由于 E 是连通的，它必定是一条有理曲线链或一个有理曲线环。

若 E 是有理曲线环，则由对 E_k 应用伴随公式可得

$$0 = \deg K_Z + B_Z|_{E_k} = -2 + \deg \Delta_k + 2 + \deg (B_Z - E_k - E_{k-1} - E_{k+1})|_{E_k} \geq 0.$$

因此， E_k 上没有奇点。此外， E_k 仅在 E_{i-1} 和 E_{i+1} 处与 B_Z 相交，且这些交点是横截的。

若我们有一条有理曲线链，则对于任意满足 $k \notin \{1, m\}$ 的 E_k，有

$$0 = \deg K_Z + B_Z|_{E_k} = -2 + \deg \Delta_k + 2 + \deg (B_Z - E_k - E_{k-1} - E_{k+1})|_{E_k} \geq 0.$$

因此， E_k 上没有奇点。此外， E_k 仅在 E_{i-1} 和 E_{i+1} 处与 B_Z 相交，且这些交点是横截的。

若 $m = 1$，则 $B_Z = E_1 + \hat{B}$。对 E_1 应用伴随公式，可得

$$0 = \deg (K_Z + B_Z)|_{E_1} = -2 + \deg \Delta_1 + \deg (B_Z - E_1)|_{E_1}.$$

ˆ因此， $E_1 \cdot B + \deg \Delta_1 = 2$。

若 $m \geq 2$，则有以下等式：

$$0 = \deg (K_Z + B_Z)|_{E_1} = -2 + \deg \Delta_1 + \deg (B_Z - E_1)|_{E_1} = -2 + \deg \Delta_1 + 1 + \deg (B_Z - E_1 - E_2)|_{E_1}.$$

ˆ由此可得 $E_1 \cdot B + \deg \Delta_1 = 1$。对 E_m 也可作类似推导。证明完毕。 □

命题 3.6. 设 $(X, B; x)$ 是一个对数典范曲面奇点。设 $\phi : (Z, B_Z) \to (X, B)$ 是一个 dlt 修改，其例外轨迹 E 是一条椭圆曲线。则以下同构成立

$$\pi_1^{\mathrm{loc}}(X, B; x) \simeq \pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B; x) \simeq \pi_1^{\mathrm{reg}}(Z, B_Z).$$

此外， $\pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B; x)$ 的形式为 $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}^2$。

证明。 由引理 3.5可知， E 是一条光滑椭圆曲线，且 B_Z 不包含其他曲线。因此，$\pi_1^{\mathrm{reg}}(Z, B_Z)$ 是椭圆曲线上一个 S^1-丛的基本群。因此，它符合正合序列

$$1 \to \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z} \to \pi_1^{\mathrm{reg}}(Z, B_Z) \to \pi_1(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z}^2 \to 1.$$

因此，它有一个含 3 个生成元的表示。 □

命题 3.7. 设 $(X, B; x)$ 是一个对数典范曲面奇点。设 $\phi : (Z, B_Z) \to (X, B)$ 是一个 dlt 修改，其例外轨迹 E 是一圈有理曲线。那么，我们有

$$\pi_1^{\mathrm{loc}}(X, B; x) \simeq \pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B; x) \simeq \pi_1^{\mathrm{reg}}(Z, B_Z).$$

此外， $\pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B; x)$ 的形式为 $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$。

证明。 由引理 3.5可知， E 是一条光滑有理曲线链，且 B_Z 不包含其他曲线。因此，由 [29, 引理 2.3]，$\pi_1^{\mathrm{loc}}(X, B; x)$ 的形式为 $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$。特别地，它符合短正合列

$$1 \to \mathbb{Z}^2 \to \pi_1^{\mathrm{loc}}(X, B; x) \to \mathbb{Z} \to 1$$

□

定义 3.8. 引理 3.5 中的微分的系数$1 - \frac{1}{n}$具有以下形式 [18, 34]。这由伴随公式$n_1, n_2, \ldots, n_m$ 得出。对于形如 $1 - \frac{1}{n_i}$的分数构成的无序集合（允许重复），我们记作 ((Δ。对于一个不同项，我们将记作

$$b(\Delta) := ((n_1, \ldots, n_k)),$$

表示相应的非平凡系数集合。我们称 $b(\Delta)$ 为不同项的奇点篮，因为它表示环境空间的余维二奇点。若不同项是平凡的，我们记作 $b(\Delta) = ((\emptyset))$。更一般地，对于任意具有标准系数的除子 D，我们记作：

$$b(D) := ((n_1, \dots, n_k)),$$

对于相应的 非平凡系数集合。在这种情况下，如果系数为 1，我们将写作 $n_i = \infty$。

命题 3.9. 设 $(X, B; x)$ 是一个对数典范曲面奇点。设 $\phi : (Z, B_Z) \to (X, B)$ 是一个 dlt 修改，其例外轨迹 E 是有理曲线链，且 $B_s = 0$。那么，我们有

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B; x) \simeq \pi_1^{\mathrm{loc}}(X, B; x),$$

其表示至多有 3 个生成元和至多 3 个关系。

证明。设 $E = E_1 + \cdots + E_m$ 为有理曲线链。由引理 3.5 (3)，我们可以假设

$$E_1 \cdot \hat{B} + \deg \Delta_1 = 2. \tag{3.2}$$

这里， Δ_1 是对例外除子 E_1使用伴随公式得到的不同项。我们取 (Z, B_Z) 的对数解消 $f : Y \to Z$，其中 E 中每个满足 $\deg \Delta_1 = 1 - \frac{1}{n}$的奇点，其原像都是一条自交数为 $-m_1, \dots, -m_l$ 和 $\frac{n}{q} = [m_1, \dots, m_l]$的有理曲线链。根据 dlt 修改中有理曲线的数量，我们将证明分为两步。

步骤 1：我们证明 $E = E_1$ 是一条单独的有理曲线时，该结论成立。

由于 $E_1 \cdot \hat{B} \geq 0$，我们有 $\deg \Delta_1 \leq 2$。回忆一下，微分的系数具有 $1 - \frac{1}{n}$的形式，其中 n是某个正整数。因此，条件 $\deg \Delta_1 \leq 2$ 意味着

$$b(\Delta_1) \in \left\{ \begin{array}{c} ((2,2,2,2)), ((2,3,6)), ((2,4,4)), ((3,3,3)), ((2,3,5)) \\ ((2,3,4)), ((2,3,3)), ((2,2,n)), ((n_1,n_2)), ((n_2)), ((\emptyset)) \end{array} \right\} \tag{3.3}$$

在上述每种情况下，我们应用引理3.2 于 $\phi \circ f$： $Z \to X$：

情况 1.1：我们有 $b(\Delta_1) = ((2,2,2,2))$。于是，以下同构成立：

$$\begin{aligned} \pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B; x) &\simeq \langle a, b, c, d, x \mid xa^{-2}, xb^{-2}, xc^{-2}, xd^{-2}, abcdx^{-m} \rangle \\ &\simeq \langle a, b, c, d \mid a^2b^{-2}, a^2c^{-2}, a^2d^{-2}, a^{1-2m}bcd \rangle \\ &\simeq \langle a, b, c \mid a^2b^{-2}, a^2c^{-2}, a^2(a^{2m-1}b^{-1}c^{-1})^{-2} \rangle. \end{aligned}$$

因此，在这种情况下，我们至多有 3 个生成元和 3 个关系。

情形 1.2：我们有 $b(\Delta_1) = ((n, n', n''))$。于是，以下同构成立：

$$\begin{aligned} \pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B; x) &\simeq \left\langle a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_{l'} \atop c_1, \dots, c_{l''}, x \middle| \begin{array}{l} xa_{l-1}a_l^{-n}, xb_{l'-1}b_{l'}^{-n'}, xc_{l''-1}c_{l''}^{-n''}, a_lb_{l'}c_{l''}x^{-m} \\ a_2a_1^{-q_1}, \dots, a_la_{l-2}a_{l-1}^{-q_{l-1}}, b_2b_1^{-q_1'}, \dots, b_{l'}b_{l'-2}b_{l'-1}^{-q_{l'-1}'} \\ c_2c_1^{-q_1''}, \dots, c_{l''}c_{l''-2}c_{l''-1}^{-q_{l''-1}''} \end{array} \right\rangle \\ &\simeq \langle a_1, b_1, c_1, x \mid xa_1^{-n}, xb_1^{-n'}, xc_1^{-n''}, a_1^t b_1^{t'} c_1^{t''} x^{-m} \rangle \\ &\simeq \langle a_1, b_1, c_1 \mid a_1^n b_1^{-n'}, a_1^n c_1^{-n''}, a_1^{t-mn} b_1^{t'} c_1^{t''} \rangle. \end{aligned}$$

这里，第二个同构是反复应用引理 3.4的结果。在此情形下，我们有 3 个生成元和 3 个关系。

情形 1.3: 我们有 $b(\Delta_1) = ((n, n'))$, $b(\Delta_1) = ((n))$ 或 $b(\Delta_1) = ((\emptyset))$。$\phi \circ f \colon Z \to X$ 的例外除子是一条有理曲线链。因此，根据推论 3.3，我们有如下同构：

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B; x) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

这就完成了存在唯一例外有理曲线时的证明。

步骤 2：在这一步 中，我们证明当例外除子中至少有 2 条有理曲线时，命题的结论成立。

在这种情况下，B_Y 中唯一的奇点或与非例外除子的交点都发生在两条端曲线上。对于这些曲线中的每一条，我们有 $\deg \Delta_i = 1$，它们要么

- 曲线上没有奇点，
- 曲线上有一个指数为 n 的 orbifold 奇点，或者
- 曲线上有两个指数为 2 的 orbifold 奇点。

如果 $\phi \circ f$ 的例外除子是有理曲线链，由推论 3.3，我们有如下同构：

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B; x) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

根据 B_Y 的奇点情况，还剩下两种情形。

情形 2.1： 恰有一条曲线有两个阶为 2 的轨形奇点。在这种情形下，$\phi \circ f \colon Y \to X$ 的例外除子是由一条有理曲线链和另外两条自交数为 -2 的有理曲线组成，其中这两条曲线与一条端曲线相交。根据引理 3.2，我们有以下同构：

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B; x) \simeq \left\langle a, b, x_1, \dots, x_n, \middle| \begin{matrix} x_1 a^{-2}, x_1 b^{-2}, a b x_2 x_1^{-m_1}, \{x_{i-1} x_{i+1} x_i^{-m_i}\}_{1<i<n} \\ x_{n-1} x_n^{-m_n}, \{[x_i, x_{i+1}]\}_{\{1 \le i < n-1\}} \end{matrix} \right\rangle.$$

根据引理 3.4，该群同构于：

$$\begin{aligned} \pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B; x) &\simeq \langle a, b, x_1 \mid x_1 a^{-2}, x_1 b^{-2}, (ab)^{a_n} x_1^{b_n} ((ab)^{a_{n+1}} x_1^{b_{n+1}})^{-m} \rangle \\ &\simeq \langle a, b \mid a^2 b^{-2}, (ab)^{a_n - m a_{n+1}} a^{2b_n - 2m b_{n+1}} \rangle. \end{aligned}$$

情形 2.2： 两条端曲线都有两个阶为 2 的轨形奇点。在这种情形下，$\phi \circ f \colon Y \to X$ 的例外除子是由一条有理曲线链和另外两条自交数为 -2 的有理曲线组成，这两条曲线分别与不同的端曲线相交。根据引理 3.2，我们有以下同构：

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B; x) \simeq \left\langle a, b, x_1, \dots, x_n, c, d \middle| \begin{matrix} x_1 a^{-2}, x_1 b^{-2}, a b x_2 x_1^{-m_1}, \{x_{i-1} x_{i+1} x_i^{-m_i}\}_{1<i<n} \\ x_{n-1} c d x_n^{-m_n}, x_n c^{-2}, x_n d^{-2}, \{[x_i, x_{i+1}]\}_{\{1 \le i \le n-1\}}. \end{matrix} \right\rangle$$

根据引理 3.4该群同构于：

$$\begin{aligned} \pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B; x) &\simeq \langle a, b, x_1, c, d \mid x_1 a^{-2}, x_1 b^{-2}, (ab)^{a_{n-1}} x_1^{b_{n-1}} ((ab)^{a_n} x_1^{b_n})^{-m_n} cd, (ab)^{a_n} x_1^{b_n} c^{-2}, (ab)^{a_n} x_1^{b_n} d^{-2} \rangle \\ &\simeq \langle a, b, c \mid a^2 b^{-2}, (ab)^{a_n} a^{2b_n} c^{-2}, c^2 ((ab)^{a_{n-1}} a^{2b_{n-1}} c^{-2m_n+1})^{-2} \rangle. \end{aligned}$$

在前述每种情形中，我们都有一个至多包含 4 个生成元和 7 个关系的表示。这就完成了该命题的证明。□

命题 3.10. 设 $(X, B;\ x)$ 是一个对数典范曲面奇点。设 $\phi\colon (Z, B_Z) \to (X, B)$ 是一个 dlt 修改，其例外轨迹 E 是有理曲线链，则 $\pi_1^{\mathrm{reg}}(Z, B_Z) \simeq \pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B;\ x) \simeq \pi_1^{\mathrm{loc}}(X, B;\ x)$ 的表示至多有 4 个生成元和 7 个关系。

证明。我们取一个对数解消 $f\colon\ Y \to Z$，其中 E 中每个具有 $\deg \Delta = 1 - \frac{1}{n}$ 的奇点的原像都是一条自交数为 $-m_1$、……、$-m_l$，以及 $\frac{n}{q} = [m_1, \ldots, m_l]$ 的有理曲线链。我们只需处理 $B_s \neq 0$ 的情形。否则，我们处于命题 3.9 的情形。

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 在此，$B_{Y,s}$ 和 E 表示 Z 中 $B_{Y,s}$ 和 E 的严格变换。B_s 表示 Y 中 B_s 的严格变换。对于 $x, y \in \pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B;\ x)$，我们定义：

$$\delta_{t,x}(y) := \begin{cases} \{xy^{-t}\} & \text{if } y \text{ corresponds to a loop around an exceptional divisor of } f \\ \{y^t, [x, y]\} & \text{if } y \text{ corresponds to a loop around a curve in } \hat{B_{Y,s}}\backslash \hat{E} \\ \{[x, y]\} & \text{if } y \text{ corresponds to a loop around a curve in } \hat{B_{Y,s}}\backslash \hat{E} \text{ and } t = \infty \\ \emptyset & \text{if } y \text{ corresponds to a trivial loop} \end{cases} \tag{3.4}$$

步骤 1：我们证明当 $E = E_1$ 是一条有理曲线时，该命题成立。

根据引理 3.5，我们得到次数的上界

$$\deg(\Delta_1 + \hat{B}_s|_{E_1}) \leq 2.$$

我们将根据 $b(\Delta_1 + \hat{B}_s|_{E_1})$ 分三种情况证明这一步。当 $b(\Delta_1 + \hat{B}_s|_{E_1}) = ((2, 2, 2, 2))$ 时，会产生两种不同的情况，具体取决于我们在 $B_{Y,s}$ 中有多少条非例外曲线。

情况 1.1：假设 $b(\Delta_1 + \hat{B}_s|_{E_1}) = ((2,2,2,2))$，且 $\hat{}$ 中有一条、两条或三条曲线。根据引理 3.2，我们有以下同构：

$$\begin{aligned} \pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B; x) &\simeq \langle a, b, c, d, x \mid xa^{-2}, \delta_{2,x}(b), \delta_{2,x}(c), d^2, [x, d], abcdx^{-m}, \rangle \\ &\simeq \langle a, b, c, d \mid \delta_{2,a^2}(b), \delta_{2,a^2}(c), d^2, [a^2, d], a^{1-2m}bcd \rangle \\ &\simeq \langle a, b, c \mid \delta_{2,a^2}(b), \delta_{2,a^2}(c), (a^{1-2m}bc)^2 \rangle. \end{aligned}$$

每个 $\delta_{t,\ x}(y)$ 至多有 两个关系，因此我们得到一个表示，其中有 3 个生成元和至多 5 个关系。

情形 1.2：我们假设 $b(\Delta_1 + \hat{B}_s|_{E_1}) = ((2,\ 2,\ 2,\ 2))$，并且在 $\hat{}\ B_s$ 中有 4 条曲线。根据引理 3.2，我们得到以下同构：

$$\begin{aligned} \pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B; x) &\simeq \langle a, b, c, d, x \mid a^2, b^2, c^2, d^2, abcdx^{-m}, [x, a], [x, b][x, c][x, d] \rangle \\ &\simeq \langle a, b, c, x \mid a^2, b^2, c^2, (abcx^m)^2, [a, x], [b, x], [c, x] \rangle. \end{aligned}$$

这给出了一个表示，其中有 4 个生成元和 7 个关系。

情形 1.3：我们假设 $b(\Delta_1 + \hat{B}_s|_{E_1})$ 不等于 $((2, 2, 2, 2))$。在这些情形中，$b(\Delta_1 + \hat{B}_s|E_1)$ 具有以下形式之一：$((n_1, n_2, n_3))$、$((n_1, n_2))$、$((n))$、$((\emptyset))$。此处，n_i 只有在它是 B 中的系数时，才能为 ∞。应用引理 3.2，我们得到以下表示：

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)\simeq\left\langle A,B,C,x\middle|\begin{matrix}a_{l_1}b_{l_2}c_{l_3}x^{-m},\delta_{t_1,a_2}(a_1),\delta_{t_2,b_2}(b_1),\delta_{t_3,c_2}(c_1)\\ \{a_{i-1}a_{i+1}a_i^{-m_{1,i}}\}_{\{2\le i\le l_1\}},\{[a_i,a_{i+1}]\}_{\{1\le i\le l_1\}},\{b_{i-1}b_{i+1}b_i^{-m_{2,i}}\}_{\{2\le i\le l_2\}}\\ \{[b_i,b_{i+1}]\}_{\{1\le i\le l_2\}},\{c_{i-1}c_{i+1}c_i^{-m_{3,i}}\}_{\{2\le i\le l_3\}},\{[c_i,c_{i+1}]\}_{\{1\le i\le l_3\}}\end{matrix}\right\rangle.$$

其中 A，B，C是 $\{a_1,\dots,a_{l_1}\}$，$\{b_1,\dots,b_{l_2}\}$，$\{c_1,\dots,c_{l_3}\}$，以及前一个表示中的 $a_{l_1+11}=b_{l_2+1}=c_{l_3+1}=x$。此处，$l_i$ 若 n_i 在 $b(\Delta_1+\hat{}B_s|_{E_1})$ 中不存在，则为 0。对每条链A，B，C应用引理 3.4 后，局部基本群存在如下表示：

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)\simeq\langle a_1,b_1,c_1,x\mid\delta_{n_1,x}(a_1),\delta_{n_2,x}(b_1),\delta_{n_3,x}(c_1),a_1^{t_1}b_1^{t_2}c_1^{t_3}x^{-m}\rangle.$$

由于每个 $\delta_{t,\ x}(y)$至多包含两个关系，因此至多有 4 个生成元和 7 个关系。要使其恰好有 4 个生成元和 7 个关系，唯一的可能方式是此处所有 $\delta_{t,\ x}(y)$ 都是 2 个元素。^^ 因此，a_1，b_1，c_1 必须是绕着 $B_{Y,\ s}\backslash E$ 中的一条曲线的环路。因此，根据引理 3.2 ，我们实际上得到如下同构：

$$\begin{aligned}\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)&\simeq\langle a,b,c,x\mid a^{n_1},b^{n_2},c^{n_3},abcx^{-m},[a,x],[b,x],[c,x]\rangle\\&\simeq\langle a,b,x\mid a^{n_1},b^{n_2},(b^{-1}a^{-1}x^m)^{n_3},[a,x],[b,x]\rangle.\end{aligned}$$

因此，在情形 1.3 中，不存在具有 4 个生成元和 7 个关系的极小表示。这就完成了唯一例外有理曲线位于 dlt 修改中的情形下的证明。

步骤 2：在这一步中，当 dlt 修改的例外除子中至少有 2 条有理曲线时，我们证明该命题。

根据引理 3.5，E 的严格变换中唯一的奇点出现在链的端曲线上。^^^ 此外，引理 3.5 表明，E 与 $B_{Y,\ s}\backslash E$ 的唯一交点出现在链的端曲线上。

情形 2.1：假设 $b(\Delta_m+\hat{}B_s|_{E_n})=((2,\ 2))$ 和 $b(\Delta_1+\hat{}B_s|_{E_1})\in\{((n_1)),\ ((\emptyset))\}$。在此情形下，由引理 3.2，我们得到如下表示：

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)\simeq\left\langle a,b,x_1,\dots,x_n,c_1,\dots,c_l\middle|\begin{matrix}\delta_{2,x_1}(a),\delta_{2,x_1}(b),abx_2x_1^{-m_1},\{x_{i-1}x_{i+1}x_i^{-m_i}\}_{1<i<n},\{[x_i,x_{i+1}]\}_{\{1\le i\le n\}}\\ c_lx_{n-1}x_n^{-m_n},\delta_{m_{1,1},c_2}(c_1),\{c_{i-1}c_{i+1}c_i^{-m_{1,i}}\}_{\{2\le i\le l\}},\{[c_i,c_{i+1}]\}_{\{1\le i\le l\}}\end{matrix}\right\rangle.$$

其中，$c_{l+1}=x_n$ 在前一个表示中。将引理 3.4 应用于链 x_1，.....，x_n 和 c_1，.....，c_l，我们得到一个同构：

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)\simeq\langle a,b,x_1,c_1\mid\delta_{2,x_1}(a),\delta_{2,x_1}(b),c_1^{t'}(ab)^{t_1}x_1^{t_2},\delta_{r,(ab)^{t_3}x_1^{t_4}}(c_1)\rangle.$$

由于每个 $\delta_{t、\ x}(y)$ 至多包含两条关系，因此生成元至多有 4 个，关系至多有 7 条。该群恰有 4 个生成元和 7 条关系的唯一可能情形是，右侧所有 $\delta_{t、\ x}(y)$ 都包含 2 个元素。因此，在这种情形下，a、b、$c_1=c_l$ 是 $\hat{}B_{Y、\ s}\backslash\ \hat{}E$中绕一条曲线的环路。因此，根据引理 3.2，我们有如下同构：

$$\begin{aligned}\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)&\simeq\langle a,b,x_1,c\mid a^2,[a,x_1],b^2,[b,x_1],c^m,[c,(ab^{t_3})x_1^{t_4}],\ c_1(ab)^{t_1}x_1^{t_2}\rangle\\&\simeq\langle a,b,x_1\mid a^2,[a,x_1],b^2,[b,x_1],((ab)^{t_1}x_1^{t_2})^m\rangle.\end{aligned}$$

因此，在情形 2.1 的假设下，不存在恰有 4 个生成元和 7 条关系的极小表示。

情形 2.2：我们假设 $b(\Delta_m + \hat{}B_s|_{E_n}) = b(\Delta_1 + \hat{}B_s|_{E_1}) = ((2,\ 2))$。此处，我们可以应用引理 3.2 得到一个表示：

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x) \simeq \left\langle a,b,x_1,\dots,x_n,c,d \middle| \begin{matrix} \delta_{2,x_1}(a), \delta_{2,x_1}(b), abx_2x_1^{-m_1}, \{x_{i-1}x_{i+1}x_i^{-m_i}\}_{1<i<n} \\ \{[x_i,x_{i+1}]\}_{\{1\le i\le n\}}, cdx_{n-1}x_n^{-m_n}, \delta_{2,x_n}(c), \delta_{2,x_n}(d) \end{matrix} \right\rangle.$$

由引理 3.4 应用于链 $x_1\dots x_n$，我们得到一个同构：

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x) \simeq \left\langle a,b,x_1,c,d \middle| \begin{matrix} (ab)^{a_{n-1}}x_1^{b_{n-1}}((ab)^{a_n}x_1^{b_n})^{-m_n}cd, \delta_{2,x_1}(a) \\ \delta_{2,x_1}(b), \delta_{2,(ab)^{a_n}x_1^{b_n}}(c)\delta_{2,(ab)^{a_n}x_1^{b_n}}(d) \end{matrix} \right\rangle.$$

此情形分为两个不同的情形。

˄情形 2.2.1：在 B_Y、$_s$ 中有一条、两条或三条非例外曲线。于是，由引理 3.2，我们得到以下同构：

$$\begin{aligned} \pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x) &\simeq \left\langle a,b,c,d,x_1 \middle| \begin{matrix} (ab)^{a_{n-1}}x_1^{b_{n-1}}((ab)^{a_n}x_1^{b_n})^{-m_n}cd, x_1a^{-2} \\ \delta_{2,x_1}(b), \delta_{2,(ab)^{a_n}x_1^{b_n}}(c), d^2, [(ab)^{a_n}x_1^{b_n}, d] \end{matrix} \right\rangle \\ &\simeq \langle a,b,c,d \mid (ab)^{a_{n-1}}a^{2b_{n-1}}((ab)^{a_n}a^{2b_n})^{-m_n}cd, \delta_{2,a^2}(b), \delta_{2,(ab)^{a_n}a^{2b_n}}(c), d^2, [(ab)^{a_n}a^{2b_n}, d]\rangle, \\ &\simeq \langle a,b,c, \mid \delta_{2,a^2}(b), \delta_{2,(ab)^{a_n}a^{2b_n}}(c), ((ab)^{a_{n-1}}a^{2b_{n-1}}((ab)^{a_n}a^{2b_n})^{-m_n}c)^2\rangle. \end{aligned}$$

由于每个 $\delta_{t,\ x}(y)$ 至多包含两个关系，因此我们得到一个有 3 个生成元和至多 5 个关系的表示。

˄情形 2.2.2：严格变换中有四条非例外曲线$B_{Y,\ s}$。因此，根据引理 3.2，有如下同构。

$$\begin{aligned} \pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x) &\simeq \left\langle a,b,c,d,x_1 \middle| \begin{matrix} (ab)^{a_{n-1}}x_1^{b_{n-1}}((ab)^{a_n}x_1^{b_n})^{-m_n}cd, a^2, b^2, c^2, d^2 \\ [a,x_1],[b,x_1],[c,(ab)^{a_n}x_1^{b_n}],[d,(ab)^{a_n}x_1^{b_n}] \end{matrix} \right\rangle \\ &\simeq \langle a,b,c,x_1 \mid a^2, b^2, [a,x_1], [b,x_1], c^2, ((ab)^{m_na_n-a_{n-1}}x_1^{m_nb_n-b_{n-1}}c)^2, [c,(ab)^{a_n}x_1^{b_n}]\rangle. \end{aligned}$$

因此，我们得到一个有 4 个生成元和 7 个关系的极小表示。

情形 2.3：我们假设每个 $b(\Delta_1 + \hat{}B_s|_{E_1})$ 和 $b(\Delta_m + \hat{}B_s|_{E_m})$ 都具有 $((n_i))$ 或 $((\emptyset))$ 的形式。根据引理 3.2，我们得到如下表示：

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x) \simeq \left\langle \begin{matrix} a_1\dots a_{l_1}, \\ x_1,\dots,x_n, \\ c_1,\dots,c_{l_2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \delta_{m_{1,1},a_2}(a_1), \{a_{i-1}a_{i+1}a_i^{-m_{1,i}}\}_{\{2\le i\le l_1\}}, \{[a_i,a_{i+1}]\}_{\{1\le i\le l_1\}} \\ a_{l_1}x_2x_1^{-m_1}, \{x_{i-1}x_{i+1}x_i^{-m_i}\}_{1<i<n}, \{[x_i,x_{i+1}]\}_{\{1\le i\le n\}}, c_{l_2}x_{n-1}x_n^{-m_n} \\ \delta_{m_{2,1},c_2}(c_1), \{c_{i-1}c_{i+1}c_i^{-m_{2,i}}\}_{\{2\le i\le l_2\}}, \{[c_i,c_{i+1}]\}_{\{1\le i\le l_2\}} \end{matrix} \right\rangle.$$

通过将引理 3.4 应用于这些链（$a_1\dots a_{l_1}$）、（x_1，……，x_n）和（c_1，……，c_{l_2}），我们得到一个同构：

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)\simeq\langle a_1,x_1,c_1\mid \delta_{n_1,x_1}(a_1),c_1^{t'}(a_1)^{t_1}x_1^{t_2},\delta_{n_2,a_1^{t_3}x_1^{t_4}}(c_1)\rangle.$$

由于每个 $\delta_{t,\ x}(y)$ 至多有两个关系，因此我们至多有 3 个生成元和 5 个关系。

在前述每种情形中，我们都有一个至多含 4 个生成元和至多 7 个关系的表示。这就完成了该命题的证明。□

定理 2 的证明。 首先，我们证明关于生成元和关系数量上界的陈述。我们取一个 dlt 修改 $\phi:(Z,\ B_Z)\to(X,\ B)$。根据引理 3.5，ϕ 的例外除子是以下之一：

(i) 有理曲线链，(ii) 有理曲线环，或 (iii) 椭圆曲线。

在第一种情形中，根据命题 3.9 和命题 3.10 $\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,\ B;\ x)$ 有一个至多含 4 个生成元和至多 7 个关系的表示。第二种情形由命题3.7推出该陈述。最后，第三种情形由命题3.6推出该陈述。

现在，我们转而证明定理的第二个结论。假设 $\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;\ x)$ 存在一个具有 4 个生成元和 7 个关系的极小表示。由命题 3.6、命题 3.7和命题 3.9、命题3.10 可知，这种情况只可能出现在以下两种情形中：

- (X,B) 的 dlt 修改 (Y,B_Y) 提取出一条有理曲线，并且 B 有 4 个系数为$_{1\ 2}$的分支，或者
- (X,B) 的 dlt 修改 (Y,B_Y) 提取出一条有理曲线链，B 有 4 个系数为$_{1\ 2}$的分支，且它们的严格变换只与曲线链的第一条和最后一条曲线相交。

我们将 ϕ: $Y\to X$ 记作 dlt 修改。令 E 为 dlt 修改的约化例外除子。那么，我们有

$$\phi^*(K_X+B)=K_Y+E+\hat{B},$$

其中，$\hat{}B$ 是 B 在 Y 上的严格变换。根据构造，代数簇 Y 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的。我们在底空间上运行一个 (K_Y+E)-极小模型纲领。注意，在这两种情形中，曲线链的端点都是 (K_Y+E)-负的$\hat{}$曲线，因为它们与 B 正相交。因此，该极小模型纲领将逐步收缩曲线链的端点。由此，极小模型纲领在 X上终止。我们得出结论： X 在 x处是 $\mathbb{Q}$-阶乘的。因此，局部类群 $\mathrm{Cl}(X_x)$ 是挠元。注意， B 中经过 x的分支系数之和记为 $|B|$ ，其值等于 2。综上，我们得出结论：

$$\dim X+\operatorname{rank}_{\mathbb{Q}}\mathrm{Cl}(X_x)-|B|=0.$$

由 [26, 定理 2], 可得， X 在点 x附近必为形式环面。 . □

现在，我们来证明一个将在定理3的证明中用到的引理。

引理 3.11. 设 $(X,B;\ x)$ 是余正则度为零的对数典范曲面奇点。设 $\phi:(Z,B_Z)\to(X,B)$ 是一个 dlt 修改。存在一个子群 $H<\pi_1^{\mathrm{reg}}(Z,B_Z)$，它是$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;\ x)$ 的阿贝尔正规子群。

*Pro*的。 由引理 3.5可知，例外除子要么是有理曲线环，要么是有理曲线链 s:

若它是有理曲线环，则 $H\cong\mathbb{Z}^2$ 是 $\pi_1^{\mathrm{reg}}(Z,B_Z)$ 的正规子群，由命题 3. 7. 因此，引理得证。

若它是有理曲线链，令 $H<\pi_1^{\mathrm{reg}}(Z,B_Z)$ 为由绕 ϕ 的例外除子的环路生成的子群。于是我们称 $x_1,\dots x_m$ 为绕除子 $E_1\dots,E_m$ 的环路。由引理 3.4和引理 3.2, $H=\langle x_1,x_2\rangle=\langle x_{m-1},x_m\rangle$。 H 是阿贝尔群，因为相邻的 x_i'彼此可交换。现在我们转向

证明 H 是 $\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;\,x)$ 的正规子群。根据命题 3.9 和命题 3.10的证明， γ 中剩余的生成元 $\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;\,x)$ 满足以下条件之一：

- 当 $b(\Delta_1+\hat{}B_s|_{E_1})=((2,2))$ 成立时，它们与 x_1 和 $\gamma x_2\gamma^{-1}=x_1^2x_2^{-1}$ 对易，
- 当 $b(\Delta_m+\hat{}B_s|_{E_m})=((2,2))$ 成立时，它们与 x_m 和 $\gamma x_{m-1}\gamma^{-1}=x_m^2x_{m-1}^{-1}$ 对易，
- 当 $b(\Delta_1+\hat{}B_s|_{E_1})=((n))$ 成立时，它们由 x_1、x_2 生成，或者 $\hat{}$
- 当 $b(\Delta_m+B_s|_{E_m})=((n))$ 成立时，它们由 x_{m-1}、x_m 生成。

我们得出结论： H 是正规子群。 □

定理 3的证明。 我们先考虑（X， B， x）是余正则度一的对数典范奇点的情形。取一个 dlt 修改 ϕ：（Z， B_Z）$\to$（X， B）。由于我们处于余正则度一的情形，根据引理 3.5， ϕ 的例外除子是唯一的一条有理曲线或一条椭圆曲线。

如果例外除子是一条椭圆曲线，那么如命题3.6的证明中所述，我们有：

$$1\to\pi_1(S^1)\simeq\mathbb{Z}\to\pi_1^{\mathrm{reg}}(Z,B_Z)\to\pi_1(\mathbb{T}^2)\simeq\mathbb{Z}^2\to 1.$$

因此， $\pi_1^{\mathrm{reg}}(Z,B_Z)$ 是长度 2 的可解对象。

现在，我们假设 dlt 修改的例外除子是一条有理曲线。首先，假设 $B_s=0$。根据命题3.9的证明，我们有以下同构之一：

- $\pi_{\text{正则度 1}}(X,B;\,x)\simeq\langle a,b,c,d,x\mid xa^{-2},xb^{-2},xc^{-2},xd^{-2},abcdx^{-m}\rangle$.在此情形下，我们可以定义 $N=\langle ab,bc,x\rangle$。于是，我们有

$$1\to N\to\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to 1,$$

且 N 是长度 2 的幂零群，如 $N/\langle x\rangle\simeq\mathbb{Z}^2$。

- $\pi_{\mathrm{reg}\,1}(X,B;\,x)\simeq\langle a_1,b_1,c_1,x\mid xa_1^{-n},xb_1^{-n'},xc_1^{-n''},a_1^tb_1^{t'}c_1^{t''}x^{-m}\rangle$，其中 $b(\Delta)=((n,n',n''))$ 如方程 3.3 所示。我们有 x 位于 $\pi_{\mathrm{reg}\,1}(X,B;\,x)$ 的中心，因此可以定义

$$G':=\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)/\langle x\rangle\simeq\langle a_1,b_1,c_1\mid a^n,b^{n'},c^{n''},abc\rangle.$$

其中 $a=a_1^t,b=b_1^{t'},c=c_1^{t''}$. 现在，我们需要检查四种不同情形。

(1) 如果 $b(\Delta)=((3,3,3))$，那么 G' 有一个阿贝尔正规子群 $N'=\langle ab^{-1},a^{-1}b\rangle$，使得以下正合序列成立

$$1\to N'\to\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)/\langle x\rangle\to\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\to 1.$$

因此，我们可以定义 $N=\langle x,a_1^tb_1^{-t'},a_1^{-t}b_1^{t'}\rangle$，并且有

$$1\to N\to\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)\to\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\to 1.$$

由于 $N/\langle x\rangle\simeq\mathbb{Z}^2$，群 N 是长度 2 的幂零群。

(2) 如果 $b(\Delta)=((2,4,4))$，那么 G' 有一个阿贝尔正规子群 $N'=\langle bc^{-1},b^{-1}c\rangle$，使得以下正合序列成立

$$1\to N'\to\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)/\langle x\rangle\to\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\to 1.$$

因此，我们可以定义 $N=\langle x,b_1^{t'}c_1^{-t''},b_1^{-t'}c_1^{t''}\rangle$，并且有

$$1\to N\to\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)\to\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\to 1.$$

如 $N/\langle x\rangle\simeq\mathbb{Z}^2$，群 N 是长度 2 的幂零群。

(3) 若 $b(\Delta) = ((2,3,6))$，则 G' 有一个阿贝尔正规子群 $N' = \langle bc^4,\ c^4b\rangle$ 使得下列正合序列成立

$$1 \to N' \to \pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)/\langle x\rangle \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to 1.$$

因此，我们可以定义 $N = \langle x、\ b_1^{t'}c_1^{4t''}、\ c_1^{4t''}b_1^{t'}\rangle$，并且有

$$1 \to N \to \pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x) \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to 1.$$

由于 $N/\langle x\rangle \simeq \mathbb{Z}^2$，群 N 是长度 2 的幂零群。

(4) 如果 $b(\Delta) = ((n,n'))、((n))$ 或 $((\emptyset))$，那么我们有 $G' \simeq \langle a,b \mid a^n, b^{n'}, ab\rangle \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. 因此，$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;\ x)$ 是长度 2 的幂零群。

- $\pi_{\mathrm{reg}\,1}(X,B;\ x) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. 这已经是一个阿贝尔群，因此在这种情况下命题显然成立。

现在假设 $B_s \neq 0$。根据命题 3.10 的证明，我们有以下同构之一

- $\pi_{注册\,1}(X,B;\ x) \simeq \langle a,b,c,d,x \mid \delta_{2,\ x}(a)\delta_{2,\ x}(b)\delta_{2,\ x}(c)\delta_{2,\ x}(d)\ abcdx^{-m}\rangle$.

  在此我们可以定义 $N = \langle ab, bc, x\rangle$，并且有

  $$1 \to N \to \pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1.$$

  群 N 是长度 2 的幂零群，因为 $N/\langle x\rangle \simeq \mathbb{Z}^2$。
- $\pi_{\mathrm{reg}\,1}(X,B;\ x) \simeq \langle a_1,b_1,c_1,x \mid \delta_{n_1,x}(a_1)\,\delta_{n_2,x}(b_1)\,\delta_{n_3,x}(c_1)\,a_1^{t_1}b_1^{t_2}c_1^{t_3}x^{-m}\rangle$.

  我们有 x 属于 $\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;\ x)$ 的中心，并且可以定义

  $$G' := \pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)/\langle x\rangle \simeq \langle a,b,c \mid a^n, b^{n'}, c^{n''}, abc\rangle.$$

  其中 $a = a_1^t, b = b_1^{t'}, c = c_1^{t''}$. 因此，当 $B_s = 0$ 时，可以得到子群 N。

现在，我们证明 (X,B,x) 是余正则度为零的对数典范奇点的情形。我们取一个 dlt 修改 $\phi : (Z, B_Z) \to (X,B)$。由于我们处于余正则度为零的情形，根据引理 3.5，例外除子是有理曲线链或有理曲线环。

对于正规子群 H，我们采用引理 3.11 中的记号。如果它是有理曲线环，那么根据命题 3.7，有正合序列 $1 \to H \cong \mathbb{Z}^2 \to \pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;\ x) \to \mathbb{Z} \to 1$，因此 $\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;\ x)$ 是长度 2 的可解群。

若它是有理曲线链。首先，假设 $B_s = 0$。根据命题 3.9的证明，我们有以下同构之一：

- $\pi_{\mathrm{reg}\,1}(X,B;\ x) \simeq \langle a,b \mid a^2b^{-2}, (ab)^{a_n - ma_{n+1}}a^{2b_n - 2mb_{n+1}}\rangle$.

  在此我们可以定义 $N = \langle ab, a^2\rangle = H$，并得到：

  $$1 \to N \to \pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1.$$

  The g群 N 是阿贝尔群。
- $\pi_{\mathrm{reg}\,1}(X,B;\ x) \simeq \langle a,b,c \mid a^2b^{-2}, (ab)^{a_n}a^{2b_n}c^{-2}, c^2((ab)^{a_{n-1}}a^{2b_{n-1}}((ab)^{a_n}a^{2b_n})^{-m_n}c)^{-2}\rangle$.

  在此，我们可以定义 $N = \langle ac, ab, a^2\rangle = \langle ac, H\rangle$ 并得到：

  $$1 \to N \to \pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1.$$

  群 N 是长度 2 的可解群，因为 $N/H \simeq \mathbb{Z}$

现在假设 $B_s \neq 0$。根据命题 3.10的证明，我们有以下同构之一：

- $\pi_{\mathrm{reg}\,1}(X,B;\ x) \simeq \langle a,b,x_1,c_1 \mid \delta_{2,\ x_1}(a)\,\delta_{2,\ x_1}(b)\ c_1^{t'}(ab)^{t_1}x_1^{t_2},\ \delta_{r,\ (ab)^{t_3}x_1^{t_4}}(c_1)$
$\rangle$.我们可以定义 $N=\langle ab,ac,x_1\rangle=\langle ac,H\rangle$，得到：

$$1\to N\to \pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)\to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to 1.$$

群 N 是长度 2 的可解群，因为 $N/H\simeq\mathbb{Z}$

- $\pi_{\mathrm{reg}\,1}(X,B;\ x) \simeq \langle a,b,c, \mid \delta_{2,a^2}(b)\,\delta_{2,(ab)^{a_n}a^{2b_n}}(c),\ ((ab)^{a_{n-1}}a^{2b_{n-1}}((ab)^{a_n}a^{2b_n})^{-m_n}c)^2\rangle$.
我们可以定义 $N=\langle ab,ac,a^2\rangle=\langle ac,H\rangle$，得到：

$$1\to N\to \pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)\to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to 1.$$

群 N 是长度 2 的可解群，因为 $N/H\simeq\mathbb{Z}$

- $\pi_{\mathrm{reg}\,1}(X,B;\ x) \simeq \langle a,b,c,x_1 \mid a^2,b^2,[a,x_1],[b,x_1],c^2,((ab)^{m_na_n-a_{n-1}}x_1^{m_nb_n-b_{n-1}}c)^2,[c,(ab)^{a_n}x_1^{b_n}]\rangle$.我们可以定义 $N=\langle ab$
$,ac,x_1\rangle=\langle ac,H\rangle$ 并且我们得到：

$$1\to N\to \pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B;x)\to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to 1.$$

N 是长度 2 的可解群，如 $N/H\simeq\mathbb{Z}$

- $\pi_{\mathrm{reg}\,1}(X,B;\ x) \simeq \langle a_1,x_1,c_1 \mid \delta_{n_1,\ x_1}(a_1)\ c_1^{t'}(a_1)^{t_1}x_1^{t_2},\ \delta_{n_2,\ a_1^{t_3}x_1^{t_4}}(c_1)$
$\rangle$.这里 $H=\pi_{\mathrm{reg}\,1}(X,B;\ x)$，因此该群是阿贝尔群。

□

3.2. 对数 Calabi–Yau 曲面。在本小节中，我们证明一些关于对数 Calabi–Yau 曲面的基本群的结果。为此，我们将从一些引理开始。第一个引理使我们能够理解曲线压缩下的区域基本群。

引理 3.12。设 (X,B) 是一个二维对数Calabi–Yau对。设 $X\to Y$ 是一个除子压缩。设 B_Y 是 B 到 Y 的推前。则存在一个满同态

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(Y,B_Y)\to\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B).$$

证明。令 $C\ \subset X$ 为例外曲线。如果 Y 上 C 的像是光滑点 y，那么我们有 ve

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(Y,B_Y)\simeq\pi_1^{\mathrm{reg}}(Y\setminus\{y\},B_Y)\simeq\pi_1^{\mathrm{reg}}(X\setminus C,B|_{X\setminus C})\to\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B),$$

其中最后一个同态是满射。另一方面，如果 y 位于光滑轨迹中，那么我们有

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(Y,B_Y)\simeq\pi_1^{\mathrm{reg}}(X\setminus C,B|_{X\setminus C})\to\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B),$$

其中最后一个同态是满射。证明完毕。 □

第二个引理使我们能够理解承认纤维化的对数对的区域基本群。它可以被视为对 [31, 引理 1.5.C]的对的版本。

引理 3.13。设 (X,B) 是一个对数卡拉比–丘曲面。设 $\phi\colon X\to C$ 是到一条曲线的森纤维空间。设 B_s 是 B 的标准逼近。对于每个点 $p\in C$，记 n_p 为满足 $\mathrm{coeff}_{\phi^{-1}(p)}(B_s)=1-n_P^{-1}$ 的正整数。对于每个 $p\in C$，令 m_p 为 p 上方纤维的重数。考虑边界 $B_C=\sum_{p\in C}1-(n_pm_p)^{-1}$。那么，存在一个短正合列

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(F,B|_F)\to\pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B)\to\pi_1^{\mathrm{reg}}(C,B_C)\to 1,$$

其中 F是 ϕ的一般纤维。此外，对 (C,B_C) 属于对数卡拉比–丘型，即存在$\Gamma_C\geq B_C$，使得 (C,Γ_C) 是对数卡拉比–丘。

证明。 由 [31, 引理 1.5.C], 存在一个短正合列

$$\pi_1(F \setminus B_s|_F) \to \pi_1(X \setminus B_s) \to \pi_1(C \setminus B_C) \to 1.$$

这导出一个交换图

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(F \setminus B_s|_F) & \xrightarrow{p_1} & \pi_1(X \setminus B) & \xrightarrow{p_2} & \pi_1(C \setminus B_C) & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_F} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_X} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_C} & & \\ \pi_1^{\mathrm{reg}}(F, B_F) & \xrightarrow{\psi_1} & \pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B) & \xrightarrow{\psi_2} & \pi_1^{\mathrm{reg}}(C, B_C) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

其中顶行正合，竖直箭头均为满射。我们证明 $\pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B)$ 处的正合性； ψ 的满射性证明类似。设 $\beta \in \pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B)$ 是一个映到 $\pi_1^{\mathrm{reg}}(C, B_C)$ 中零元的元素。设 β_0 是到 $\pi_1(X \setminus B)$ 的一个提升。设 β_1 是 β_0 在 $\pi_1(C \setminus B_C)$ 中的像。我们得出 $\beta_1 = \prod_{i=1}^{k} n_i \gamma_{p_i}^{n_i m_i} n_i^{-1}$，其中 γ_{p_i} 是绕点 $p_i \in C$ 的环路。我们用 γ_i 表示绕 $\phi^{-1}(p)$ 的环路。直接计算可得，元素 $\gamma_0 = \prod_{i=1}^{k} n_i' \gamma_i^{n_i} n_i'^{-1}$ 映到 β_1，其中 n_i' 是 n_i 的任意提升。由顶行的正合性，存在 $p_1(F \setminus B_s|_F)$ 中的元素 β_F，使得 $\beta_0 = p_1(\beta_F)\gamma_0$。根据构造， γ_0 属于 ϕ_X 的核。我们得出 $\phi_X(\beta_0) = \phi_X(p_1(\beta_F)) = \psi_1(\phi_F(\beta_F))$。我们得出 $\beta_F' := \phi_F(\beta_F)$ 是 β 到 $\pi_1^{\mathrm{reg}}(F, B_F)$ 的一个提升。至此，正合性的证明完成。

The fact 由典范丛公式可知，(C, B_C) 是一个对数卡拉比-丘类型对。 □

现在，我们来证明一个关于对数卡拉比–丘曲面的基本群之交换化的自由生成元个数的定理。

定理的证明 *4*. 首先，注意到若 (C, B_C) 属于对数卡拉比–丘型，则 $\operatorname{rank}(\pi_1^{\mathrm{reg}}(C, B_C)^{\mathrm{ab}}_{\mathbb{Q}}) \leq 2$。

设 (X, B) 是一个对数卡拉比–丘曲面。我们进行一个 K_X-极小模型纲领，记为 $X \to X'$。令 B' 为 B 在 X' 上的推前。根据引理 3.12，为证明该结论，我们可以用 (X, B) 替换为 (X', B')。因此，我们可以假设以下陈述之一成立：

(i) 代数簇 X 是卡拉比-丘代数簇，且 $B = 0$; (ii) 代数簇 X 存在一个到曲线 $X \to C$的森纤维空间结构；或 (iii) 代数簇 X 是皮卡秩为一的法诺代数簇。

假设 X 是卡拉比-丘。令 $Y \to X$ 为 K_X 的指标一覆盖，于是 Y 具有典范奇点且是卡拉比-丘，并且 $K_Y \sim 0$。只需证明 Y 的情形即可。 Y 的极小解消或者是阿贝尔曲面，或者是 K3 曲面。如果 Y 的极小解消是阿贝尔曲面，那么 Y 本身就是阿贝尔曲面，结论随即成立。我们可以用 Y 替换 X，并假设其极小解消是 K3 曲面。假设

$$\pi_1^{\mathrm{reg}}(X) \to \pi_1^{\mathrm{reg}}(X)^{\mathrm{ab}} \simeq \mathbb{Z} \oplus A,$$

其中 A 是有限生成阿贝尔群。令 $N_k := k\mathbb{Z} \oplus A \leqslant \pi_1^{\mathrm{reg}}(X)$ 为指数为 k 的正规子群。那么，我们有一个短正合列

$$1 \to N_k' \to \pi_1^{\mathrm{reg}}(X) \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \to 1.$$

我们记 $G_k := \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$。令 $Z_k \to X$ 为与 N_k' 相关联的分歧覆盖。那么， Z_k 允许 G_k 的作用。令 Z_k' 为 Z_k 的 G_k-等变极小解消。令 X_k' 为 Z_k' 关于 G_k 的商。我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} Z_k' & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & X. \end{array}$$

我们可以假设 Z'_k 是光滑 K3 曲面。否则， Z 是阿贝尔曲面，结论便可得出。注意到 $X' \to X$ 仅抽取对数不一致至多为 1 的除子。因此，射影双有理态射 $X' \to X$ 是保正则体积形式的。这意味着 X' 带有一个处处不消失的 2-形式。因此，自同构群 G_k 必须辛地作用于光滑 K3 曲面 Z'_k上。这将导致矛盾，因为作用于光滑 K3 曲面上的有限群，其阶有一个上界 [27]。

只需证明 $\pi_1(Z)$ 的情形。令 $Z' \to Z$ 为极小解消。则 Z' 是光滑 Calabi–Yau 簇，且 $\pi_1(Z') \simeq \pi_1(Z)$。因此，该结论可由光滑 Calabi-Yau曲面的分类推出。

假设 X 具有一个森纤维空间 $X \to C$ 到一条曲线。于是，该结论可由引理 3.13和证明的第一行推出。

假设 X 是一个皮卡秩为一的法诺簇。反证，假设

$$\rho\colon \pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B) \to \pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B)^{\mathrm{ab}} \simeq \mathbb{Z}^m \oplus F,$$

其中 F 是一个有限群，且 $m \geq 5$。令 $N_k = (k\mathbb{Z})^m \oplus F \leqslant \pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B)$ 为指数为 k^m 的正规子群。令 $N'_k := \psi^{-1}(N_k)$。那么，我们有一个短正合列

$$1 \to N'_k \to \pi_1^{\mathrm{reg}}(X,B) \to (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^m \to 1.$$

记 $G_k := (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^m$。令 $Y \to X$ 为与 N'_k 相关的分歧覆盖。则 Y 具有 G_k 的作用，并且 (X,B) 到 Y 的对数拉回是一个 G_k-等变对数Calabi–Yau对 (Y,B_Y)。根据假设，我们有

$$\mathrm{rank}(\pi_1^{\mathrm{reg}}(Y,B_Y)^{\mathrm{ab}}_{\mathbb{Q}}) \geq m \geq 5.$$

然后，根据引理 3.12 的情形 (i) 以及上述情形 (ii)，我们得出结论： G_k-等变极小模型纲领 $Y \to Y'$ forK_Y 必定终止于一个皮卡秩为一的法诺曲面。于是我们得到一个Fano型曲面 Y' ，它承认 $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^m$ for k 任意大且 $m \geq 5$的作用。根据 [24, 引理 2.24] ，存在一个 G_k-等变边界 $B_{Y'}$，使得 $(Y',B_{Y'})$ 是对数卡拉比-丘，并且 $N(K_{Y'}+B_{Y'}) \sim 0$，其中 N 与 k无关。这与 [24, 定理 6]矛盾。我们得出结论： $m \leq 2$ 在情形 (iii) 中。证明完毕。□

为结束本小节，我们证明以下关于正规K3曲面的光滑轨迹的万有覆盖的定理。在下面的证明中，$\hat{}\pi(X)$ 表示 $\pi_1(X)$ 的有限群完备化。该定理在本文其余部分中不会被使用，但其本身很有趣。

定理 5 的证明。设 $\overline{X}$ 是一个卡拉比–丘曲面，即具有 klt 奇点的曲面，且 $K_{\overline{X}} \sim_{\mathbb{Q}} 0$。设$X$ 是 $\overline{X}$的光滑轨迹，且 $\{x_1,\dots,x_k\}$ 是 $\overline{X}$的奇点。设 $p\colon \overline{Y} \to \overline{X}$是 $K_{\overline{X}}$的指标一覆盖。那么， $\overline{Y}$ 是一个具有 $K_{\overline{Y}}$且具有典范奇点的卡拉比–丘曲面。由 [10, 定理 1.5.(2)], 可知，存在一个有限覆盖 $q\colon \overline{Z} \to \overline{Y}$，它可能在 $\overline{Y}$的奇点处分歧，并满足以下同构：

$$\hat{\pi}_1(\overline{Z}) \simeq \hat{\pi}_1(\overline{Z}^{\mathrm{reg}}) \simeq \hat{\pi}_1(Z), \tag{3.5}$$

其中 $Z := \overline{Z} \setminus \{q^{-1}(p^{-1}(x_1)) \dots, q^{-1}(p^{-1}(x_k))\}$。注意， $\overline{Z}$根据 $\overline{Y}$ 的极小解消，有两种情形。

- 如果 $\overline{Z}$ 的极小解消是一个阿贝尔曲面，那么 $\overline{Z}$ 本身就是一个阿贝尔曲面。设 $r\colon \mathbb{C}^2 \to \overline{Z}$ 是 $\overline{Z}$的万有覆盖。设 W 是 Z 在 $\mathbb{C}^2$ 下的原像。由同构（3.5），可得 W 是 X的万有覆盖。根据构造，W 是 $\Lambda\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^2$的补集，其中 Λ 是一个秩为 4 的格，而 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{C}^2$中的有限个闭点。这就说明了情形 (i)。
- 如果 $\overline{Z}$ 的极小解消是一个 K3 曲面，那么 $\overline{Z}$ 是单连通的。由此我们得出， $\pi(\overline{Z})$ 是平凡的，因此 $\hat{}\pi_1(Z)$ 也是平凡的。这意味着 Z 是 X 的 ´étale 万有覆盖。在

特别地， X 的 ´étale 万有覆盖是一个具有典范奇点的 K3 曲面上有限多个点的补集。这导出了情形 (ii)。

□

4. Smooth polyhedral complexes

本节研究光滑多面体复形与对数典范奇点之间的关系。本节从一个光滑多面体复形出发，构造一个简单正交 Calabi–Yau 簇，随后再构造一个对数典范奇点。我们将以这样的方式推进，使这些对象的基本群彼此同构。

4.1. 多面体复形。本小节介绍光滑多面体复形和多面体复形的爆破这一概念，并证明几个引理。

记号 4.1. 设 M 是一个有限生成自由阿贝尔群。令 $N := \mathrm{Hom}(M; \mathbb{Z})$ 为 M 的对偶空间。我们将相应的 $\mathbb{Q}$-向量空间记为 $M_{\mathbb{Q}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 和 $N_{\mathbb{Q}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$。我们将相应的 $\mathbb{R}$-向量空间记为 $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 和 $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$。

定义 4.2。 $M_{\mathbb{R}}$ 中的多面体是 $M_{\mathbb{Q}} \subset M_{\mathbb{R}}$中有限个点的凸包。等价地，它是实向量空间 $M_{\mathbb{R}}$ 中的闭凸有界子集，由有理数上的有限个不等式定义。

格多面体是顶点位于格 $M \subset M_{\mathbb{Q}}$中的多面体。设 P 为一个格多面体，且有一个顶点 v。对于 P 中包含 v的每条边 E，令 w_E 为 E中距离 v 最近的格点。若向量 $w_E - v$ 构成格 $\mathbb{Z}^N$的基，则称 P在顶点 v 处是光滑的。若一个格多面体P 在每个顶点处都光滑，则称其为光滑的。对于具有顶点 v的多面体 P， P 中以顶点 v 为顶点的锥，定义为由从 v 出发并经过 P中任意一点的所有射线生成的锥。

定义 4.3。设 P 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个多面体， P' 为 P 在 $\mathbb{R}^{n+1}$中的嵌入，其坐标为x_0、.....、 x_n，其中第一个坐标 x_0 取为零。设 $H_0 := \{(x_0, \ldots..., x_n) \mid x_0 = 0\}$。 P上的棱锥是指任意一个与 P' 和不属于 H_0的点 p 的凸包具有相同胞腔结构的多面体。 P上的双棱锥是指任意一个与 P' 和点 p、 q的凸包具有相同胞腔结构的多面体，其中 p和 q 位于超平面 H_0 的不同侧，并且它们在 H_0 上的投影位于 P'内部。因此， n维单纯形可以定义为一个（$n-1$）维单纯形上的棱锥。

定义 4.4. 给定两个带格的 $\mathbb{Q}$-向量空间 $M_{\mathbb{Q}}$和 $M'_{\mathbb{Q}}$，其格分别为 M和 M'。若仿射$\mathbb{Q}$-线性映射 $f\colon M'_{\mathbb{Q}} \to M_{\mathbb{Q}}$使 f诱导格同构 $M' \to f(M'_{\mathbb{Q}}) \cap M$，则称其为格嵌入。多面体复形是满足以下条件的有限范畴 $\mathcal{P}$：

(1) 其元素是格多面体；(2) 其态射是格嵌入；(3) 其态射是多面体到面的包含，其中将整个多面体也视为一个面。(4) 对每个 $P \in \mathcal{P}$，其面属于 $\mathcal{P}$，且面的包含是 $\mathcal{P}$中的态射；(5) 对每个 P_1、 $P_2 \in \mathcal{P}$，在 $\mathcal{P}$ 中 P_1 与 P_2之间至多存在一个态射 f。

我们将多面体复形 $\mathcal{P}$的粘合记为 $|\mathcal{P}|$。有时我们会写作 $\pi_1(\mathcal{P})$ 来指代 $\pi_1(|\mathcal{P}|)$。

如果每个极大多面体的维数都相同n，我们就称 $\mathcal{P}$ 为一个 n维多面体复形。在这种情况下，数值 n 称为 $\mathcal{P}$的维数。

我们通常会说 $\mathcal{P}$ 中多面体的交与包含，是指粘合 $|\mathcal{P}|$过程中相应胞腔之间发生的交与包含。

定义 4.5. 设 $\mathcal{P}$ 是一个 n 维多面体复形。我们将胞腔 $P \in \mathcal{P}$ 的神经定义为包含 P 的极大多面体所构成的复形。特别地， P 的神经中，对于 $\mathcal{P}$ 中每个包含 P 的极大多面体，都有一个对应的顶点。若神经 P 中的一组顶点所对应的极大多面体在 $\mathcal{P}$ 中包含一个公共的 $(n-k)$ 维面，那么这些顶点就位于同一个k维面上。

我们称一个 k 维多面体 P 在 n 维复形 $\mathcal{P}$ 中组合光滑，若 P 的神经是一个 $(n-k)$ 维单纯形。我们称 $\mathcal{P}$ 为简单多面体复形，若它是 n 维的，且每个多面体 $P \in \mathcal{P}$ 在 $\mathcal{P}$中都是组合光滑的。我们称 $\mathcal{P}$ 为光滑多面体复形，若它是简单的，且其对象是光滑格多面体。若神经与一个多面体 Q组合等价，我们也可以简单地称该神经为 Q。

注 4.6. 因此，多面体复形可能在 0维胞腔处不光滑：这可能是由于该胞腔处组合不光滑，也可能是由于包含该胞腔的任意多面体处不光滑。对于更高维的胞腔，多面体复形若不光滑，则只能是由于该胞腔处组合不光滑，或较低维胞腔处不光滑。

定义 4.7. 设 $\mathcal{P}$ 是一个多面体复形。我们将 $m\mathcal{P}$ 定义为由以下内容定义的多面体复形：

- 对于每个具有格 M 的 $Q \in \mathcal{P}$。由格 $\frac{1}{m}M$ 内 Q 的顶点定义的多面体 mQ 属于 $m\mathcal{P}$，并且
- 对于 $\mathcal{P}$ 中的每个态射 $f\colon Q \to R$，态射 $f\colon mQ \to mR$ 属于 $m\mathcal{P}$。

注 4.8. 多面体复形 $m\mathcal{P}$ 光滑当且仅当 $\mathcal{P}$ 光滑。这是因为我们只是将格生成元从 $\{e_i\}_i$ 改为 $\{\frac{1}{m}e_i\}_i$。

定义 4.9. 设 $\mathcal{P}$ 是一个 n 维多面体复形。设 $v \in \mathcal{P}$ 是该复形中的一个顶点。对于每个包含 p 的多面体 $P_i \in \mathcal{P}$，我们可以考虑由 P_i 以 v 为顶点张成的锥 C_i。由于 $\mathcal{P}$ 中的态射是格包含映射，这些锥构成一个锥复形 $\mathcal{C}(\mathcal{P}, v)$，我们称之为 $\mathcal{P}$ 在 v 处的邻域。我们称顶点 $v \in \mathcal{P}$ 的邻域可嵌入 $\mathbb{Q}^n$，如果对于每个 $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{P}, v)$，都存在一个线性映射 $C_i \to \mathbb{Q}^n$，使得锥复形 $\mathbb{Q}^n$ 中两个锥 C_i'、C_j' 的像互相包含，当且仅当对应的锥在 $|\mathcal{P}|$ 中互相包含。

以下定义的灵感源自代数几何中的爆破概念。

定义 4.10。设 P 是 n 维多面体复形 $\mathcal{P}$ 中的一个多面体。我们将 $\mathcal{P}$ 在 P 处的爆破定义为具有以下对象的多面体复形 $\mathcal{P}'$：

(1) 对于任意与 P 不相交的多面体 Q，多面体 Q 属于 $\mathcal{P}'$。(2) 对于任意与 P 相交但不包含于 P 的多面体 R，在 $\mathcal{P}'$ 中存在多面体 R' 和 R_P，满足以下条件：(a) 设 H_R 是一个超平面 H_R，它将 $P \cap R \subset R$ 与 $R \backslash P \cap R$ 的顶点分隔开。设 H 是由 H_R 确定且不包含 P 的半空间。多面体 R' 是 R 与 H 的交集。(b) R_P 是 R 与超平面 H_R 的交集。(3) 一个多面体 P'，其面对于每个与 P 相交但不包含于 P 的多面体 R，都是多面体 R_P。

此外，态射由以下规则定义：

(1) 对于任意嵌入 $q : Q_1 \to Q_2$，其中 Q_1 与 P 不相交，嵌入 q 属于 $\mathcal{P}'$。(2) 对于任意在相交于 P 但不包含于 P的多面体之间的嵌入 $r\colon R_1 \to R_2$，嵌入 $r\colon R_1 \to R_2$ 在 $R_{1P} \to R_{2P}$ 和 $R_1' \to R_2'$ 上的限制属于 $\mathcal{P}'$。(3) 对于任意与 P 相交但不包含于 P的 R，有态射 $i\colon R_P \to P'$。

注 4.11。爆破的极大多面体因此为:

(1) 对于不与 P 相交的任意极大多面体 Q，多面体 Q (2) 对于与 P 相交的任意极大多面体 R，多面体 R' (3) 多面体 P'，它与 $\mathcal{P}$ 中 P 的神经的对偶多面体组合等价。

注记 4.12。乍看之下，爆破未必总是存在，因为我们要求有理多面体 P' 的存在。

定义 4.13。如果格扇 $\mathbb{Z}^n$ 中每条射线的格生成元都是某个凸多胞体的顶点，则称该格扇为强多胞形扇。

引理 4.14。设 $\mathcal{P}$ 是一个三维多面体复形。设 $v \in \mathcal{P}$ 是一个顶点，使得包含 v 的所有多面体 P_i 在 v 处都是光滑的。假设存在一个嵌入 ϕ: $\mathcal{C}(\mathcal{P}, v) \to \mathbb{Q}^3$，使其成为强多胞形扇。那么，存在在 v 处对 $2\mathcal{P}$ 进行的爆破。

证明。令 $\mathcal{Q} := \phi(\mathcal{C}(\mathcal{P}, v))$ 为以 v 为顶点、由锥组成的嵌入扇，其中 v 位于 $\mathbb{Q}^3$ 中。不失一般性，假设 $\phi(v)$ 是原点。这个子复形给出原点周围的一个三维完备扇，由射线 $r_1, \ldots, r_i$ 生成，其格生成元为 $e_1, \ldots, e_i$。由于所有多面体在 v 处都是光滑的，这些锥也是光滑的。因此，扇中的每个点都可以唯一地写成包含该点的锥的生成元的线性组合。于是，对每个生成元取 $f_j := (e_j, 1) \in \mathbb{Q}^4$，便定义了一个从 $\mathbb{Q}^3$ 到 $\mathbb{Q}^4$ 中凸锥 σ 的分片线性映射。$\mathcal{P}$ 中任何包含 p 的多面体都是以 v 为顶点的某个锥的子集。因此，它们也是 σ 的面。令 H 为超平面 $\{2x_4 = 1\}$。这个超平面将 (0, 0, 0, 0) 与 $\mathcal{Q}$ 中多面体的所有其他顶点分隔开来。我们用 $(\frac{1}{2}\mathbb{Z})^4$ 替换格 $\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{Q}^4$，并在复形的所有多面体中作相应替换。我们进行以下替换:

- 我们将任何包含 v 且位于 $\mathcal{Q}$ 中的多面体替换为它与 H^+的交，并且
- 我们将 v 替换为 H 与 $\mathbb{Q}^4$中锥 σ 的交。

通过进行这些替换得到的多面体复形 $\mathcal{P}'$ 是 $2\mathcal{P}$ 在 v处的爆破。 □

引理 4.15. 设 $\mathcal{P}'$ 是 $\mathcal{P}$ 在 P处的爆破。设 $R \in \mathcal{P}$ 是与 P相交但不包含于 P中的多面体。若 $R \in \mathcal{P}$ 处的神经为 Q，则 $R_P \in \mathcal{P}'$ 处的神经是以 Q 为底的棱锥。

证明。所有包含 R 的最大维多面体 R_i 都必须与 P相交。因此，在 $\mathcal{P}'$ 中，包含 R_P 的最大维多面体是多面体 R_i' 和多面体 P'。只要 R_i 与 R_j 相交，多面体 R_i'与 R_j' 就有非空交集。根据爆破的定义，多面体 P' 与所有多面体 R_i 都有非空交集。因此， R_P 的神经是以 Q 为底、顶点对应于多面体 P' 的棱锥。 □

4.2. 射影环面簇与格同构。本小节中，我们证明一个关于射影环面簇的嵌入与格嵌入的结果。

引理 4.16. 设 P 是 $M_{\mathbb{Q}}$ 中的满维格多面体。设 X_P 是关联射影簇。设 k 是 $M_{\mathbb{Q}}$ 中的一个向量。设 A 是 X_P 上与 P 相关联的丰线丛，且 A' 是 X_P 上与 $P + k$ 相关联的丰线丛。那么，我们有 $A \sim_{\mathbb{Q}} A'$。此外，如果 k 是一个格向量，那么 $A \sim A'$。

*Pro*的。令 t 满足 $tk \in M_{\mathbb{Z}}$。格多面体 P 由以下不等式给出:

$$\{m \mid \langle m, u_F \rangle \geq -a_F\}.$$

这里， F 是 P 的面，且 $u_F \in N$ 是面 F的内向法向量。对于 P的每个面 F，都有一个与之对应的素环面不变除子 D_F，定义在 X_P [5, 定义 2.3。14]上。根据 [5, 命题 4.2。10],可得

$$A = \sum_F a_F D_F,$$

其中求和遍历 F 的所有面。注意到

$$\begin{aligned} P' &= \{m + k \mid \langle m, u_F\rangle \geq -a_F\} = \{m \mid \langle m - k, u_F\rangle \geq -a_F\} \\ &= \{m \mid \langle m, u_F\rangle \geq -a_F + \langle k, u_F\rangle\}. \end{aligned}$$

因此， P 和 P' 具有相同的相关法扇。特别地，它们具有相同的相关射影托里克簇 X_P。根据 [5, 命题 4.2，10], 我们有

$$A' = \sum (a_F - \langle k, u_F\rangle) D_F.$$

我们得到

$$A - A' = \sum \langle k, u_F\rangle D_F = \sum \frac{1}{t}\langle tk, u_F\rangle D_F = \frac{1}{t} div(\chi^k).$$

最后一个等式由 [5, 命题 4.12]得出。我们得到 $A \sim_{\mathbb{Q}} A$ 成立。若 k 是一个格向量，则 $t = 1$ 且 $A - A'$ 在 X_P上是主的。□

引理 4.17。设 P和 P'分别是 $M_{\mathbb{Q}}$和 $M'_{\mathbb{Q}}$中的两个满维格多面体。设 X_P（分别为 $X_{P'}$）是其相关的带有丰线丛 A_P（分别为 $A_{P'}$）的射影托里克簇。设 $H\colon M_{\mathbb{Q}} \to M'_{\mathbb{Q}}$是一个线性格同构，使得 H（P）$= P'$。那么，我们有一个相关的托里克同构 $\phi\colon X_{P'} \to X_P$，使得 ϕ^*（A_P）$= A_{P'}$。

证明。格多面体 P 由以下不等式给出：

$$\{m \mid \langle m, u_F\rangle \geq -a_F\}.$$

于是，格多面体 P' 由以下不等式给出：

$$\{H(m) \mid \langle m, u_F\rangle \geq -a_F\} = \{m \mid \langle m, H^t(u_F)\rangle \geq -a_F\}.$$

这里， F'是 P'的面，且 $u_{F'} = H^t$（u_F）$\in N'$是面的内向法向量 F'。根据[5, 命题 4.2.10], , 我们有

$$A_P = \sum a_F D_F \text{ and } A_{P'} = \sum a_F D_{F'}.$$

格点同构 $H\colon M_{\mathbb{Q}} \to M'_{\mathbb{Q}}$在对偶格上诱导出格点同构 $H^t\colon N'_{\mathbb{Q}} \to N_{\mathbb{Q}}$。根据 [5,定理 3.3.4], , 我们得到射影环面簇的一个相应的等变同构 $\phi\colon X_{P'} \to X_P$。利用[5, 命题 6.2.7], , 我们可以比较

$$\begin{aligned} \phi^*(A_P) = \phi^*\left(\sum_F a_F D_F\right) &= \sum_{F'} \phi_{A_{P'}}(H^t(u_F)) D_{F'} \\ &= \sum_{F'} \phi_{A_{P'}}(u_{F'}) D_{F'} = \sum_{F'} a_{F'} D_{F'} = A_{P'}. \end{aligned}$$

这里， ϕ_D 是与卡蒂埃除子 D 相关联的支撑函数（例如参见[5, 定理 4.2.12]）。引理得证。□

引理 4.18. 设 P 是 $M_{\mathbb{Q}}$中的一个满维格多面体。设 X_P 是相应的射影托里克簇， A_P 是相应的丰线丛。设 F 是 P 的一个面， D_F 是相应的素环面不变除子。设$M_{F,\ \mathbb{Q}}$ 是 $M_{\mathbb{Q}}$ 中包含 F 的最小线性子空间，并令 $M_F := M \cap M_{F,\ \mathbb{Q}}$。设 A_D 是 D 中与$M_{F,\ \mathbb{Q}}$里的格多胞体 F 相关联的丰线丛。那么，我们有 $A_P|_D \sim A_D$。

证明。 令 Σ_P为 P的对偶扇。对于每个锥 $\sigma \in \Sigma_P$，都有一个与之关联的仿射托里克簇 U_σ，它是 X_P的一个开图。 D_P 在此覆盖的每个图上都是主的。设 D_P 的局部数据为$\{(U_\sigma, \chi^{-m_\sigma})\}_{\sigma\in\Sigma_P}$。由 [5, 定理 4.2。8], 可取 m_σ 为与 σ对应的多面体顶点。于是， $\mathcal{O}_{X_P}(D_P)$ 是秩 1 向量丛 $V_P \to X_P$的截面层，其过渡函数为$g_{\sigma\tau} = \chi^{m_\tau - m\sigma}$。

设 D_F的局部数据为 $\{(U_{\sigma'}, \chi^{-m_{\sigma'}})\}_{\sigma'\in\Sigma_F}$，其中每个 $\sigma' \in \Sigma_F$都是与 F中的一个顶点对应的$\sigma \in \Sigma_P$到 $N_{F,\mathbb{Q}}$的投影。同样，由 [5, 定理 4.2。8], 可取 $m_{\sigma'}$ 为 σ'所对应的 F中的顶点，因此它也是 σ所对应的 P中的顶点。因此， $\mathcal{O}_{X_F}(D_F)$ 是秩 1 向量丛 $V_F \to X_F$ 的截面层，其过渡函数为 $g_{\sigma'\tau'} = \chi^{m_{\tau'} - m\sigma'}$，其中 $m_{\tau'}$ 和 m'_σ 对应于 F 的顶点。

因 此，我们有 V_F 是 V_P 到 F的限制，即存在交换图 :

$$\begin{array}{ccc} V_F & \hookrightarrow & V_P \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_F & \xrightarrow{i} & X_P. \end{array}$$

我们得出 $i^*\mathcal{O}_{X_P}(D_P) = \mathcal{O}_{X_F}(D_F)$。 □

命题 4.19. 设 P 是 $M_{\mathbb{Q}}$中的满维格多面体。设 X_P 是相应的射影托里克簇，其诱导极化为 A_P。设 F是 $M'_{\mathbb{Q}}$中的满维格多面体。设 X_F是相应的射影托里克簇，其诱导极化为 A_F。设 $f\colon M'_{\mathbb{Q}} \to M_{\mathbb{Q}}$是一个格嵌入，且 $f(F)$是 P的一个面。那么，存在相应的托里克嵌入 $\phi\colon X_F \to X_P$，使得$\phi^* A_P \sim A_F$。

证明。 格嵌入 f 可以分解为在 $M'_{\mathbb{Q}}$上的平移、一个线性格同构，以及一系列余维一的线性格嵌入。因此，该命题由引理 4.16、引理 4.17和引理 4.18得出。 □

4.3. 从多面体复形到 snc 环面簇。本小节中，我们从光滑多面体复形构造射影简单正规交叉环面卡拉比–丘簇。

命题 4.20. 设 $\mathcal{P}$ 是维数为 n 的光滑多面体复形。那么，存在一个 n 维的简单正规交叉射影环面卡拉比–丘簇 T，满足 $\pi_1(T) \cong \pi_1(|\mathcal{P}|)$

证明。 $\mathcal{P}$ 中的每个多面体 F 都包含于一个仿射空间 $M_{F,\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}^{N_F}$，使得 F 的顶点包含于 $\mathbb{Z}^{N_F}$ 中。将 F 替换为其仿射包后，不妨设 $N_F = \dim F$，即 F 是 $M_{F,\mathbb{Q}}$ 中的一个满维多面体。因此，对于每个多面体 $P \in \mathcal{P}$，都有一个与之对应的射影环面簇 T_P 和一个丰沛卡地尔除子 A_P。设 F 是 P 的一个面，则可得到一个诱导的格嵌入 $i_{F,P}\colon M_{F,\mathbb{Q}} \to M_{P,\mathbb{Q}}$。根据命题 4.19，该格嵌入诱导出一个托里克嵌入$i_{F,P}$: $T_F \hookrightarrow T_P$，满足

$$i^*_{F,P} A_P \sim A_F. \tag{4.1}$$

Fur此外，若 G 是 F 的一个面，且 F 是 P的一个面，则有以下等式 :

$$i_{F,P} \circ i_{G,F} = i_{G,P}. \tag{4.2}$$

设 $P_1,\dots,P_k$ 是 $\mathcal{P}$的 n维面。我们将其对应的射影 n维环面簇记为 $T_1,\dots,T_k$。注意，所有多面体 P_i 都是光滑的，因此每个 T_i 都是光滑射影环面簇。接着，只要多面体 P_i 有公共面，就可以将簇 T_i 粘合起来。为了得到正规交叉概形，我们通过取仿射覆盖来定义粘合，并在仿射局部通过取环的纤维积进行粘合。由于相容条件 (4.2)，这种粘合定义良好。由此得到概形 T。由于 $\mathcal{P}$ 是光滑多面体复形，且不可约分支的粘合是正规交叉的，概形 T 具有 snc 奇点。注意，每个不可约分支 T_i 都带有一个线丛 $L_i \to T_i$。设 $T_{i,j}:=T_i\cap T_j$ 和 $L_{i,j}\to T_{i,j}$ 为诱导的线丛。由 (4.1)，对每个 i 和 j，都有闭嵌入 $L_{i,j}\hookrightarrow L_i$ 以及 $L_{i,j}\hookrightarrow L_j$。根据推论 3.9]，闭嵌入在概形范畴 [32, 中存在推出。因此，通过粘合各个 L_i，可得到概形 L_T。根据推出的泛性质， L_T 具有一个态射 $L_T\to T$，其在每个分支 T_i上限制为 $L_i\to T_i$。特别地， L_T 是简单正规交叉簇 T上的一个线丛。根据中井-莫伊谢松判据，此线丛是丰沛的。因此， T 是一个射影简单正规交叉簇。

我们断言， T是一个 Calabi-Yau簇，即对于 T 的每个分支 T_i，都有 $K_T|_{T_i}\sim 0$。事实上，由于 $\mathcal{P}$是简单的， $\mathcal{P}$中每个维数为 $n-1$ 的面恰好包含在两个极大多面体中。因此，根据伴随公式，对于每个 T_i，都有

$$K_T|_{T_i}\sim K_{T_i}+B_{T_i}\sim 0.$$

Here， B_{T_i} 是 T_i 的约化环面边界。这证明了 T 是一个 Calabi-Yau簇 .

矩映射 $\phi_P\colon T_P\to P$ 粘合在一起，形成映射 $\phi_T\colon T\to|\mathcal{P}|$。我们断言， ϕ_T 诱导一个同构

$$\phi_{T*}\colon \pi_1(T)\to\pi_1(|\mathcal{P}|). \tag{4.3}$$

事实上， ϕ_T 到

$$\bigcup_{\dim F=1} T_F\to|\mathcal{P}|_1$$

诱导基本群之间的同构。这里， $|\mathcal{P}|_1$ 是 $|\mathcal{P}|$ 的 1-骨架。事实上，将 $\bigcup$ 中的每个 $\mathbb{P}^1$ 视为拓扑 S^2 时，两个空间具有相同的图结构维数 $_{F=1}T_F$。此外，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc}\pi_1\left(\bigcup_{\dim F=1}T_F\right) & \xrightarrow{\phi_{T*}} & \pi_1(|\mathcal{P}|_1)\\ \downarrow & & \downarrow\\ \pi_1\left(\bigcup_{\dim F\le 2}T_F\right) & \xrightarrow{\phi_{T*}} & \pi_1(|\mathcal{P}|_2).\end{array}$$

右侧竖直映射的核是 $\pi_1(|\mathcal{P}|_1$中包含所有绕 2-骨架环路的最小正规子群。另一方面，左侧竖直箭头的核是由环面曲面 T_F 维数 $F=2$的环面不变边界生成的最小正规子群。事实上，射影环面曲面的基本群是平凡的[5, 定理 10.4。3]。由此我们得出， ϕ_T 到

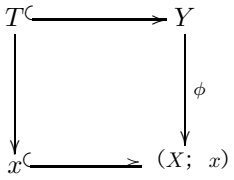
$$\bigcup_{\dim F\le 2} T_F\to|\mathcal{P}|_2$$

诱导基本群之间的同构。注意，粘合维数至少为 3 的胞腔不会改变 CW复形的基本群。类似地，沿环面不变边界粘合维数至少为 3 的托里克流形，不会改变简单正规交叉簇的基本群。因此，同构4.3 成立。由此可得， T 是一个基本群为 $\pi_1(\mathcal{P})$ 的简单正规交叉卡拉比–丘簇。□

4.4. 从 snc 托里克簇到 lc 奇点。在本小节中，我们将从维数为 n 的多面体复形构造维数为 $n+1$ 的对数典范奇点。

为了构造对数典范奇点，我们将使用 Koll´ar [20]，（另见 [14,定理 35]）。该命题使我们能够构造具有指定部分解消的奇点。下述定理由 [20, 定理 8、命题 9 以及 10]证明。

命题4.21. 设 T 是具有简单正规交叉奇点的 n维射影簇，且满足 $n \geq 2$。设 L 是 T上的丰线丛。那么，对于 $m \gg 1$，存在一个正规奇点的芽（X； x），其具有如下部分解消：



满足以下条件：

（1） T 是 Y上的卡蒂埃除子；（2） T 在 Y 中的法丛为 $K_T \otimes L^{-m}$；（3）我们有一个同构 π_1（Y）$\simeq \pi_1$（T）；（4） π_1^{loc}（X； x）到 $\twoheadrightarrow \pi_1$（Y）的核是循环的、中心的，并且由 T的任一不可约分支周围的环路生成；（5）如果 $\dim T \leq 4$，则（$x \in X$）是一个孤立奇点；（6）如果 $K_T \sim 0$，则 K_X 是卡蒂埃除子，且（$x \in X$）是 lc。

注4.22。 在命题 4.21 中，我们只需要 L^m 是很充足的。在此命题的应用中，我们将有两个丰线丛 L_1 和 L_2。根据 [13, 第二章，习题 7.5]，，对于 $k \gg 1$，我们有$L_1 \otimes L_2^k$ 是很充足的。因此，在前一个命题中，我们可以用 L^m 替换 $L_1 \otimes L_2^k$，并得到相同的结论，只需在命题 L^{-m} 中用 $L_1 \otimes L_2^k$ 替换 4.21。（2）。

定义 4.23。设 T是一个 n 维的简单正规交叉代数簇。设 F是一个 $(n-1)$ 维的层。设 Z 是 F中的一个除子，它与 T的所有层横截相交。我们将在 T的每个不可约分支中描述爆破，然后将它们粘合在一起。在此定义中，当我们说对子簇 $V \subset W$进行爆破时，我们指的是由 W中的约化概形 V定义的爆破。设 E是一个不可约分支，我们将分别把 F和 Z 与 E的交称为 F_E 和 Z_E。

我们首先对 E 中的 Z_E 进行爆破，记为 p： $E' \to E$。由于 F_E 中的 Z_E 的余维至多为 1，因此我们可以将 F_E 与其在 E' 中的严格变换视为相同。令 D_E 为 p: $E' \to E$ 的例外除子。然后，我们对 E' 中的 $D_E \cap F_E$ 进行爆破，记为 p'： $E'' \to E'$。类似地，爆破中心在 F 中的余维至多为 1。因此，我们再次可以将 F_E 与其在 E'' 中的严格变换视为相同。于是，我们仍然拥有在 T 中粘合各不可约分支的爆破所需的数据。因此，我们可以粘合不可约分支 E''，得到一个简单正规交叉簇 T''。这称为在 T 中对 Z 进行的迭代爆破。这里，我们也可以将 T'' 中的 Z_F 视为例外除子与 E'' 中的 F_E 的交。我们将 D_1 称为每个不可约分支 E'' 中 D_E 的所有严格变换之并，并将 D_2 称为每个不可约分支 E'' 的 p'： $E'' \to E'$ 的例外除子之并。于是，D_1 和 D_2 是 T'' 上的卡蒂埃除子。

注4.24。 设 T 是一个 n维简单正规交叉卡拉比-丘簇，且所有余维 c 层恰好包含在 $c+1$ 个不可约分支中。那么， T'' 定义4.23中的迭代爆破 4.23 也是卡拉比-丘簇。事实上，我们只需在第一次爆破后验证这一结论；此时，我们的简单正规交叉簇 T' 也是卡拉比-丘簇。可以在每个不可约分支 E_i上验证。令

记 $Z_i := Z \cap E_i$ 和 $F_i := F \cap E_i$。设 $p\colon E_i' \to E_i$ 是 E_i 上 Z_i 的爆破。令 D 为 $p : E' \to E$ 的例外除子。

令 c 为 Z_i 在 E_i 中的余维。那么，$p^*(K_{E_i}) = K_{E_i'} - (c-1)D$。对于包含 Z_i 的任何其他分支 E_j，我们有 $p^*(E_J)|_{E_i'} = E_J|_{E_i'} + D$。根据我们的假设，$F_i'$ 包含于 T' 的 c 个不可约分支中。因此，除 E_i 外，T' 的 $c-1$ 个不可约分支包含 Z_i'。于是，将每个包含 Z_i 的不可约分支所对应的等式相加，我们得到 $K_{T'}|_{E_i'}$ 是平凡的。

引理 4.25。设 T 是一个简单正规交叉簇，并具有一个不可约分支 E。设 F 是包含于 E 中的余维一层。此外，设 Z 是 F 中的一个光滑除子，并且横截地相交于 T 的所有层。设 $T'' \to T$ 是 Z 在 T 中的迭代爆破，如定义 *4.23* 所述。设 D_1 和 D_2 是 T 上方的例外除子，如定义 *4.23* 所述。那么，除子 $-3D_2 - 2D_1$ 和 $-4D_2 - 3D_1$ 在 T 上相对丰沛。

证明。只需检查这些除子在每个不可约分支上的限制都在 T 上丰沛。设 E_i 是 T 的一个不可约分支。记 Z_i 为 $= Z \cap E_i$，并记 F_i 为 $= F \cap E_i$。我们将 F_i'' 称为 F_i 在 E_i'' 中的严格变换。因此，我们有爆破 $p_2 : E_i'' \to E_i'$ 和 $p_1 : E_i' \to E_i$。按照惯例，D_1 和 D_2 与 E_i'' 的交也分别称为 D_1 和 D_2。我们将 Z_i'' 定义为例外除子与 F_i'' 的交。

由于 Z_i 在 E_i 中的余维为 $c \geq 2$，映射 $p_1 : E_i' \to E_i$ 的例外除子在 Z_i' 上方的纤维为 $\mathbb{P}^{c-1}$。进行第二次爆破 $p_2 : E_i'' \to E_i'$ 时，我们在 D_1 位于 Z_i' 上方的纤维中对一个光滑点进行爆破。因此，D_1 在 Z_i'' 上方的纤维是对 $\mathbb{P}^{c-1}$ 在一点处进行爆破所得，而 D_2 在 Z_i'' 上方的纤维为 $\mathbb{P}^{c-1}$。

设 C_1 是 D_1 中的一条曲线，它与 D_2 横截相交于一点；设 C_2 是 D_2 中的一条曲线，它与 D_1 横截相交于一点。

我们首先证明 C_1 和 C_2 生成 $E'' \to E$ 的相对曲线锥。事实上，设 N 是一个在两条曲线上均取正值的相对数值有效除子。必定存在一条曲线 $C_2' \sim C_2$，使得 C_2' 位于 $D_1 \cap D_2$ 中，且在 E 上被压缩。我们知道，C_1 和 C_2' 生成 E' 的相对曲线锥。因此，N 在 D_1 上相对丰沛。此外，N 在 D_2 上相对丰沛，因为它与一条曲线交数为正，且 D_2 的相对皮卡秩为 1。因此，N 与任意例外曲线的交数均为正，故它相对丰沛。由此可知，相对曲线锥不可能有其他生成元。

由于 C_1 和 C_2 生成相对曲线锥，我们只需计算与这两条曲线的交数。我们有 $p_1^*(K_{E'}) = K_{E''} - (c-1)D_2$。因此，$K_{E''} \sim_{E_i'} (c-1)D_2$。由伴随公式可得 $cD_2 \cdot C_2 = (K_{E''} + D_2) \cdot C_2 = K_{D_2} \cdot C_2 = -c$ 的值。因此，$D_2 \cdot C_2 = -1$。同理，我们有 $(p_2 \circ p_1)^*(K_E) = K_{E''} - (c-1)D_1 - (2c-2)D_2$，故 $K_{E''} \sim_E (c-1)D_1 + (2c-2)D_2$。由伴随公式，$(cD_1 + (2c-2)D_2) \cdot D_1 = (K_{E''} + D_1) \cdot C_1 = K_{D_1} \cdot C_1 = -2$，由此得出 $D_1 \cdot C_1 = -2$。这意味着 $-3D_2 - 2D_1$ 和 $-4D_2 - 3D_1$ 在 T 上相对丰沛。□

定理 *10* 的证明。由命题 4.20，我们有一个环面 Calabi-Yau snc 簇 T，其上有一个丰线丛 H。我们将对中心包含于互不相交的不可约分支中的对象进行迭代爆破。设 E 是 T 的一个不可约分支。取 F 中一个余维 1 分层 T，使其包含于 E。设 Z 是 F 的一个光滑除子，并且与所有层横截相交。

按照定义 4.23，对 Z 在 T 中进行迭代爆破。将这些映射记为 $p_1\colon T'' \to T'$ 和 $p_2\colon T' \to T$。设 D_1 为第一次爆破的例外除子，D_2 为 E' 中第二次爆破的例外除子。根据引理 4.25，除子 $p^*(mH) - 3D_2 - 2D_1$ 和 $p^*(mH) - 4D_2 - 3D_1$ 是丰沛的。我们可以对 G （一个与 E 不相交的不可约分支）执行相同的步骤，得到例外除子 G_1 和 G_2。因此，$p^*(mH) - 3G_2 - 2G_1$ 和 $p^*(mH) - 4G_2 - 3G_1$ 是丰沛的。

现在，考虑以下线丛 $L_1 := p^*(mH) - 3D_2 - 2D_1 - 4G_2 - 3G_1$ 和 $L_2 := p^*(mH) - 3D_2 - 2D_1 - 3G_2 - 2G_1$。根据我们的构造，我们有光滑有理曲线 P_1 和 P_2，它们不相交

除 E 和 G之外的任意不可约分支，分别如此。根据注记 4.24，我们有 T'' 是一个简单正规交叉卡拉比-丘簇。对于 $k \gg 1$，线丛 $L_1 \otimes L_2^k$ 是很充足的。因此，如注记 4.22中所述，我们可以使用命题 4.21。于是，存在一个（$n+1$）维奇点（X； x）以及一个部分解消：

$$\begin{array}{ccc} T & \hookrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \phi \\ x & \hookrightarrow & X \end{array}$$

满足以下陈述：

(1) T 是 Y上的卡蒂埃除子，(2) T 在 Y 中的法丛为 $L_1^{-1} \otimes {L_2}^{-k}$，(3) 我们有同构 $\pi_1(Y) \simeq \pi_1(|\mathcal{P}|)$，(4) $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X;x) \twoheadrightarrow \pi_1(Y)$的核是循环的、中心的，并由 T的任一不可约分支周围的环路生成，且(5) 奇点 $(X;x)$是对数典范的。

由于 T 和 Y 沿 P_i光滑，法丛在 P_i 上的限制为透镜空间 S_i，且$|\pi_1(S_i)| = c_1(N) \cap P_i$。绕 T的任一环路的阶都整除 $|\pi_1(S_i)|$。

L_1 在 P_1 上的限制为 $\mathcal{O}(2)$，在 P_2 上的限制为 $\mathcal{O}(1)$。此外， L_2 在P_1 上的限制为 $\mathcal{O}(1)$，在 P_2 上的限制为 $\mathcal{O}(1)$。因此，法丛 $L_1 \otimes L_2^k$ 在这些曲线上的限制分别为 $\mathcal{O}(k)$和 $\mathcal{O}(k+1)$。由此，透镜空间 S_1 和 S_2 的阶互素，因此绕 T的所有环路在$(X;x)$的局部基本群中都是平凡的。因此， $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X;x) \twoheadrightarrow \pi_1(Y)$的核是平凡的，所以我们得到以下同构：

$$\pi_1^{\mathrm{loc}}(X;x) \cong \pi_1(Y) \cong \pi_1(|\mathcal{P}|)$$

□

5. Threefold log canonical singularities

本节研究对数典范三维奇点的基本群。我们给出正面和负面的结果。首先，我们证明曲面群可以作为对数典范三维奇点的基本群出现。然后，我们证明没有任何 F_r with $r \geq 2$ 会作为对数典范三维奇点的基本群出现。

5.1. 3 维中的曲面群。本小节证明曲面群可以作为对数典范三维奇点的基本群出现。

定理的证明 *6.* 设 S 是一个二维流形，且 G_S 是其基本群。设 $\mathcal{T}$ 是 S的一个三角剖分。我们可以将 $\mathcal{T}$视为一个多面体复形，其中每个三角形由以下方式给出：

$$T = \mathrm{conv}\{(0,0),(0,3),(3,0)\} \subset \mathbb{Q}^2.$$

我们可以假设 $\mathcal{T}$的每个顶点至多包含在 7 个三角形中。设 v 是一个度数为 d 且至少为 4 的顶点。设 P_d 是一个光滑格多边形，其边的相对内部没有格点。设$e_1, \ldots, e_d$是它的边。设 $T_1, \ldots, T_d$是包含 v的三角形。

我们将 T_i替换为 T_i'，其中：

（1）如果 $v = (0,0) \in T_i$，则将 T_i替换为 $T_i \cap H_1^+$，其中 $H_1 = \{(x,y) \mid x+y \geq 1\}$。这样做会删除顶点 (0,0)，并添加顶点 (1,0) 和 (0,1)。（2）如果 $v = (0,3) \in T_i$，则将 T_i替换为 $T_i \cap H_2^-$，其中 $H_2 = \{(x,y) \mid y = 2\}$。这样做会删除顶点 (0,3)，并添加顶点 (1,2) 和 (0,2)。

（3）如果 $v=(3,0)\in T_i$，则将 T_i 替换为 $T_i\cap H_3^-$，其中 $H_3=\{(x,y)\mid x=2\}$。这样做会删除顶点 (3,0)，并添加顶点 (2,0) 和 (2,1)。

我们称 f_i 为连接两个新顶点的 T_i' 边。对于每个 $i\in\{1,\dots,d\}$，我们可以考虑一个格点同构，将 e_i 与 f_i 粘合起来。这样，我们就得到了一个二维多面体复形 $\mathcal{T}'$，它与 T 同伦，且不包含 v 的奇点 $\mathcal{T}$，也没有引入其他奇点。由于我们的构造适用于 T 的任意奇点，即使对其他顶点进行同样的操作也不例外。对所有奇异顶点实施这一构造后，得到一个二维光滑多面体复形 $\mathcal{P}_S$，它与 S 同伦。于是，根据定理10，我们得到一个孤立三维对数正则奇点（$X_S;\ x$），其同构 $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X_s;\ x)\simeq G_S$ 成立。□

5.2. 自由群与三维奇点。本小节中，我们将证明，不存在具有 $r\geq 2$ 的自由 F_r，能够作为对数典范三维奇点的基本群。为此，我们将首先证明一些引理。

引理 5.1. 设 (E,B_E) 是一个对数 Calabi–Yau dlt 曲面，且 $\mathcal{D}(E,B_E)\simeq S^1$。存在一列爆破 $E'\to E$，在 B_E 的零维层处进行，并满足以下条件：

- 存在一条位于 E' 光滑轨迹中的有理可动曲线 C，它位于 E' 上，并且
- 曲线 C 在两点处横截地与 $B_{E'}$ 相交，其中 $(E',B_{E'})$ 是 (E,B_E) 的对数拉回。

证明。我们知道，(E,B_E) 与一个对数 Calabi–Yau 环面曲面 (S,B_S) 对数保正则体积形式等价（例如参见 [11,命题 1.3]）。不妨设 S 光滑。通过对 B_E 和 B_S 的层进行爆破，不妨设对于 B_E 的每个分支 P，P 在 S 上的中心都是一个除子，反之亦然。进一步对 B_E 和 B_S 的层进行爆破后，不妨设 S 存在一个到 $\mathbb{P}^1$ 的环面纤维化 p。注意，p 的一般纤维是一条可移动有理曲线，它在两点处横截地与 B_S 相交。令 $C_1,\dots,C_k\in E$ 为 $E\dashrightarrow S$ 的例外曲线。于是，对于每个 C_i，都有 $a_{C_i}(E,B_E)=1$。特别地，可在 B_S 上的一个闭点处进行爆破，从而在 S 上提取 C_i。令 $S'\to S$ 为提取了所有 C_i 的模型。令 $(S',B_{S'})$ 为 (S,B_S) 在 S' 上的对数拉回。令 C' 为 p 的一般纤维在 S' 上的严格变换。注意，C' 是一条可移动有理曲线，在两点处横截地与 $B_{S'}$ 相交。此外，我们有一个态射 $q\colon S'\to E$。注意，q 的例外曲线均不与 C' 相交。否则，$B_{S'}$ 会有两个分支在 S' 上不相交，但它们的像在 E 上相交。这与 $\mathcal{D}(E,B_E)\simeq S^1$ 矛盾。因此，我们推出，C' 在 E 上的像 C_E 是一条有理可动曲线，在两点处横截地与 B_E 相交。□

引理 5.2. 设 $(X;x)$ 是一个孤立 lc 三维奇点。存在一个 $\mathbb{Q}$-阶乘 dlt 修改 $\phi\colon Y\to X$，以及一个完全支撑于 $\mathrm{Ex}(\phi)$ 上的有效除子 E_Y，并满足：对于 E 的一个不可约分支 E_i 上的每条可动曲线 C_i，都有 $-E_Y\cdot C_i>0$。

证明. 令 $\psi\colon X'\to X$ 为通过爆破余维至少为 2 的中心得到的对数解消。于是，存在一个有效除子 $E_{X'}$，其支撑于 $E_0:=\mathrm{Ex}(\psi)$ 上，且 $-E_{X'}$ 在底空间上丰沛。我们在 X 上运行一个 $(K_{X'}+E_0)$-极小模型纲领，最终得到一个 dlt 修改 (Y,E)。令 $X''\to X'$ 为一个消解，存在态射 $p\colon X''\to Y$。因此，存在一个支撑于 $\mathrm{Ex}(X''\to X)$ 上的有效除子 $E_{X''}$，使得 $-E_{X''}$ 在 X 上丰沛。令 E_Y 为 $E_{X''}$ 在 Y 上的推前。于是结论由负性引理得出。事实上，我们可以写成

$$p^*(-E_Y)=-E_{X''}+F,$$

其中 F 是位于 Y 上方的有效除子。设 C_i 是 E_i 上的一条可动曲线。那么，C_i 不包含在 $p(F)$ 中，因为 $p(F)$ 在 Y 中的余维至少为二。设 C_i'' 是 C_i 在 X'' 上的严格变换。由投影公式以及 C_i'' 不包含在支撑中的事实，可得以下等式

of F

$$-E_Y \cdot C_i = p^*(-E_Y) \cdot C_i = (-E_{X''} + F) \cdot C_i \geq -E_{X''} \cdot C_i > 0.$$

这就完成了该引理的证明。 □

定理 7 的证明。注意， F_3 是 F_2 的正规子群，指数为 2。因此，我们可以假设 $r \geq 3$。设（X； x）是一个 3 维孤立对数典范奇点。我们假设对某个 $r \geq 3$， π_1^{loc}（X； x） $\simeq F_r$。设（X'； x'） $\to$（X； x）是 K_X的指标一覆盖。那么（X'； x'）仍是一个孤立对数典范奇点，且 K'_X 是卡蒂埃。注意，我们有一个正合序列

$$1 \to \pi_1^{\mathrm{loc}}(X'; x') \to \pi_1^{\mathrm{loc}}(X; x) \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \to 1,$$

因此， （X'； x'）的局部基本群是一个至少有 3 个生成元的自由群。我们可以用（X'； x'）替换（X； x），从而可以假设 K_X 是卡蒂埃。

如果（X； x）是 klt，那么根据定理 1，其基本群是有限群。因此，我们可以假设（X； x）是对数典范的， K_X 是卡蒂埃，且 $\{x\}$ 是一个对数典范中心。在这种情况下，对偶复形 $\mathcal{D}$（X； x）是一个维数至多为 2 的流形。

设 (Y, E) 是 $(X; x)$ 的一个 $\mathbb{Q}$-阶乘 dlt 修改。令 $E_1, \ldots, E_r$ 为 E 的不可约分支，令 γ_i 为绕除子 E_i 的回路。我们有一列满同态和同构：

$$\pi_1^{\mathrm{loc}}(X; x) \simeq \pi_1(Y \setminus E) \xrightarrow{\psi_1} \pi_1(Y \setminus Y^{\mathrm{sing}}) \xrightarrow{\psi_2} \pi_1(Y) \simeq \pi_1(E) \xrightarrow{\psi_3} \pi_1(\mathcal{D}(E)) \simeq \pi_1(\mathcal{D}(X; x)).$$

ψ_1 的核是包含 γ_i（对应于 $i \in \{1, \ldots, r\}$）的最小正规群。由于 Y 具有孤立 klt 奇点，且 klt 奇点的区域基本群有限 [2, 定理 1]，因此 ψ_2 的核由挠元生成。 ψ_3 的核是包含 $\pi_1(E_i) \to \pi_1(E)$ 的像（对每个不可约分支 E_i 而言）的最小正规群。我们将根据 $(X; x)$ 的余正则函数，分三种不同情形进行讨论。

情形 1：在此情形下，我们假设 $\mathrm{coreg}(X; x) = 2$。

在这种情况下， E 只有一个分支。因此， ψ_1 的核由单个环路 γ_1 正规生成。由此可得，群 $\pi_1(Y \setminus Y^{\mathrm{sing}})$ 是一个单关系群。因此，存在一个同构

$$\pi_1(Y \setminus Y^{\mathrm{sing}}) \simeq \langle x_1, \ldots, x_r \mid s \rangle.$$

根据 Magnus-Karras-Solitar定理 [16, 定理 1]， $\pi_1(Y \setminus Y_{\text{奇点}})$ 的每个挠元都具有如下形式nrn^{-1}，其中 $n \in \pi_1(Y \setminus Y_{\text{奇点}})$，且对于某个整数 k， $r^k = s$。由于 ψ_2 的核是挠群，我们得出， $\pi_1(E)$ 也是一个单关系群。注意，在这种情况下， E 是一个具有典范奇点的卡拉比–丘曲面。因此，它的基本群与某个光滑卡拉比–丘曲面的基本群同构。我们利用这类曲面的分类来证明，它们的基本群不可能是一个至少有 3 个生成元的单关系群。事实上，光滑卡拉比–丘曲面的基本群要么是：

- 平凡的，
- 有限循环群，
- 自由阿贝尔群 $\mathbb{Z}^4$，或
- $\mathbb{Z}^4$ 被有限循环群或有限双循环群扩张。

前两种情形的秩至多为 2，且不是自由群，因此它们不是生成元至少有 3 个的单关系群。由 [30], 可知，单关系群的有限生成阿贝尔子群的秩至多为 2。我们由此得出，第三种和第四种情形不可能是单关系群。这就导致了矛盾。

情形 2：在此情形下，我们假设余正则函数$(X;x) = 1$。

我们证明环路 γ_i 和 γ_j 可交换。我们在 X上运行一个 $(K_Y + E - E_i)$-极小模型纲领。这个极小模型纲领以良好极小模型 $\phi'\colon Y' \to X$终止。设 E_i' 是 E_i 在 Y'上的严格变换。在极小模型 Y' 中，除子 $-E_i'$ 在 X 上数值有效。我们声称， $\phi'^{-1}(x) = E_i'$ 作为集合成立。事实上，如果这个纤维中还有另一个除子 E_j'，那么根据连通性，我们不妨设 $E_i' \cap E_j' \neq \emptyset$。因此， E_j' 中的一条一般充足曲线 [2] 将与 E_i' 正相交，因而将与 $-E_i'$ 负相交。由此可知，在这个极小模型纲领的某一步，我们会得到一个模型 Y''，在该模型上，E_i 的严格变换与 E_j 沿一个余维二子簇相交。我们记 $\phi''\colon Y'' \to X$ 为相应的射影态射。我们分别令 E_i''和 E_j'' 为 E_i 和 E_j 在 Y''上的严格变换。令 γ_i''和 γ_j''为绕着 E_i''和 E_j''的环路。注意，在 Z的泛点处，代数簇 Y'' 具有环面曲面奇点。特别地，区域基本群 $\pi_1^{\mathrm{reg}}(Y'', \eta_Z)$是阿贝尔群。我们可以对环路$\gamma_i''$和 γ_j'' 作同伦移动，使得相应的绕着 E_i''和 E_i''的圆周位于 Z的一个小邻域内。因此，环路 γ_i''和 γ_j''作为 $\pi_1(Y'' \setminus \phi''^{-1}(x))$ 中的环路彼此可交换。存在一个自然同构

$$\pi_1(Y \setminus E) \to \pi_1(Y'' \setminus \phi''^{-1}(x)),$$

该映射将 γ_i （分别将 γ_j）映至 γ_i''（分别映至 γ_j''）。由此可得， γ_i 与 γ_j 可交换。

现在，我们来证明每个 γ_i 都是 $\pi_1(Y \setminus E)$ 中的一个挠元。注意，每个曲面 E_i 都存在一个到椭圆曲线 C 的态射 $E_i \to C$，其一般纤维为有理曲线。令 C_i 为 $E_i \to C$ 的一般纤维。令 $-m_i := C_i \cdot E_i$。于是，在基本群$\pi_1(Y \setminus E)$中有如下形式的关系： $\gamma_i^{m_i} = \gamma_{i-1}\gamma_{i+1}$。事实上，该关系在法丛限制到 C_i 上时成立。具有条目 $M_{i,j} := E_i \cdot C_j$ 的 $r \times r$矩阵 M是可逆的。由此以及环路 γ_i 的可交换性可知，存在$k \gg 0$，使得对每个 $i \in \{1, \dots, r\}$都有 $\gamma_i^k = 1$。我们假设 $\pi_1(Y \setminus E)$ 是自由群。因此，它没有非平凡的挠元。由于 ψ_1 的核由挠元正规生成，我们得出 ψ_1 是一个同构。由于 ψ_2 的核是挠的，我们再次得出 ψ_2 是一个同构。因此，对于某个 $r \geq 3$，有 $\pi_1(E) \simeq F_r$。

最后，我们来分析这种情况下 ψ_3 的核。注意到 $\pi_1(\mathcal{D}(E)) \simeq \mathbb{Z}$。由引理 3.13，我们得出，对于每个 i，都有 $\pi_1(E_i) \simeq \pi_1(C) \simeq \mathbb{Z}^2$。由于 C 可通过同构 $C \to E_i \cap E_{i-1}$ 提升到 E_i，我们得出，每个同态 $\pi_1(E_i) \to \pi_1(E)$ 的像都由 $\pi_1(E)$ 中相同的两个交换环路组成。由上一段可知， $\pi_1(E) \simeq F_r$，因此这两个交换元素的形式为 g^s 和 g^k，其中 $g \in F_r$。特别地，我们得到一个表示 $\mathbb{Z} \simeq \langle x_1, x_2, \dots, x_r \mid s \rangle$，它有单个关系 s 且 $r \geq 3$。这导致矛盾。

情形 3：在这种情况下，我们假设余正则函数$(X;x) = 0$。特别地， $\mathcal{D}(X;x)$ 是一个闭二维流形。

由引理 5.2，我们可以假设存在 E_Y 支撑于 E 的 $-E_Y$，使得它与某个 E_i上可移动的每条曲线都正相交。由引理 5.1，我们可以找到满足以下条件的 dlt 修改（Y'， E'）。对于每个 E_i，其在 E_i 上的严格变换 E_i' 包含一条位于其光滑轨迹中的可移动有理 C_i' 曲线，该曲线与（$E' - E_i'$）$|_{E_i'}$ 横截地相交于两点。此外，dlt 修改（Y'， E'）是通过对（Y， E）的零维层依次进行爆破得到的。我们证明，对于 E' 的每个分支 E_i'，都存在一条可移动光滑有理曲线 C_i'，满足关系 $\gamma_i^{m_i} = \prod_{j \neq i} \gamma^{k_j}$， $_i$ 在 π_1（$Y' \setminus E'$）中成立，其中 $-m_i = E_i' \cdot C_i'$ 和k_j， $_i = E_j' \cdot C_i'$ 对每个 i都成立。若 E_i' 是 E的一个分支 E_i 的严格变换，则这由引理 5.1 得出。事实上，该关系在

[2]如果它是 $(n-1)$ 个一般有效充足除子的交，我们就称 C 是一个 n 维代数簇中的 *general ample curve*。

C_i'上的E 的法丛中成立。另一方面，若 E_i' 在 Y上是例外的，则它首先在一个光滑点的爆破中被提取。经过这样的爆破后， E_i' 的严格变换同构于 $\mathbb{P}^2$，因此只需取该射影空间中的一条一般直线的严格变换。由于 ψ: $Y' \to Y$是通过爆破光滑点得到的，存在一个支撑于 Ex(ψ) 上的有效除子 F'，使得 $-F'$ 在 Y上是丰沛的。对于足够小的 ϵ，我们令 $E_{Y'} = \psi^*(E_Y) + \epsilon F$。于是， $-E_{Y'}$与 E_i'的某个分支上的每条可移动曲线都正相交。我们用（Y'， E'）替换（Y， E），并用 $E_{Y'}$替换 E_Y。

根据上一段，我们有一个 $\mathbb{Q}$-阶乘 dlt 修改 π: $(Y, E) \to X$，并且知道以下条件成立：

(i) 存在一个支撑在 Ex(π) 上的有效除子 E_Y，使得 $-E_Y$ 与 E的某个分支上可移动的每条曲线都正相交；(ii) 围绕分支 E_i 的环路 γ_i 彼此可交换；(iii) 对于 E的每个分支 E_i，在 E_i 上存在一条可移动有理曲线 C_i，使得关系

$$\gamma_i^{m_i} = \prod_{j \neq i} \gamma_j^{k_{j,i}} \tag{5.1}$$

在 $\pi_1(Y \setminus E)$ 中成立，其中 $m_i = E_i \cdot C_i$ 和 $k_{j,\,i} = E_j \cdot C_i$。
第一条和第三条陈述已在上一段中证明。第二条陈述的证明沿用前一种情形。

断言：存在 n 一个非平凡除子 G，其支撑包含于 Ex(π)，且对每个 i 都有 $G \cdot C_i = 0$.

断言的证明。反证法，假设存在这样的除子 G。首先，假设G 有一个正系数，即对某个 E_i，有 coeff$_{E_i}(G) > 0$。考虑正实数

$$\lambda_0 := \max\{\lambda \mid \operatorname{coeff}_{E_i}(-E_Y + \lambda G) \leq 0 \text{ for each } i \in \{1, \ldots, r\}\}.$$

根据构造可知， $-E_Y + \lambda_0 G$ 支撑于 Ex(π) 上，但并未完全支撑于 Ex(π) 上。不失一般性，假设 coeff$_{E_1}$($-E_Y + \lambda_0 G$) $= 0$。回忆一下，对每个$j \geq 2$，都有 $C_1 \cdot E_j \geq 0$。因此，我们有

$$0 \geq (-E_Y + \lambda_0 G) \cdot C_1 = -E_Y \cdot C_1 > 0,$$

其中等号是由事实 $G \cdot C_1 = 0$ 得出的。这导致矛盾。因此我们得出结论： G 没有正系数。

现在，假设 $G \leq 0$ 非平凡。考虑正实数

$$\lambda_0 := \max\{\lambda \mid \operatorname{coeff}_{E_i}(-E_Y - \lambda G) \leq 0 \text{ for each } i \in \{1, \ldots, r\}\}.$$

根据构造可知， $-E_Y - \lambda_0 G$ 并未完全支撑于 Ex(π) 上。不失一般性，假设 coeff$_{E_1}(-E_Y + \lambda_0 G)$ $= 0$。于是，不等式

$$0 \geq (-E_Y - \lambda_0 G) \cdot C_1 = -E_Y \cdot C_1 > 0,$$

停住。这导致矛盾。我们得出结论：支撑包含于 Ex(π) 且与每条曲线 C_i 相交数为零的唯一除子是平凡除子。□

该断言意味着 $r \times r$ 矩阵 M 其元素为$M_{i,\,j} := E_i \cdot C_j$ 是可逆的。矩阵 M的可逆性、关系式（5.1）以及环路 γ_i 在 $\pi_1(Y \setminus E)$ 中可交换这一事实，意味着存在 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $\gamma_i^k = 1$ 对每个 i。

我们得出， ψ_1 的核由扭元正规生成。由于 F_r 无挠元，我们得出 ψ_1 是一个同构。类似地， ψ_2 也是一个同构。最后， E 的每个分支 E_i 都是

单连通的。事实上， E_i 的极小解消是一个光滑有理连通射影曲面。这意味着 ψ_3 也是一个同构。因此，我们有

$$F_r \simeq \pi_1^{\mathrm{loc}}(X;x) \simeq \pi_1(\mathcal{D}(X;x)),$$

其中 $r \geq 3$ 和 $\mathcal{D}(X;x)$ 是一个闭二维流形。这导致矛盾。 □

6. Fourfold log canonical singularities

本节中，我们研究对数典范四维奇点的基本群。为了构造具有有趣基本群的四维 lc 奇点实例，我们需要展示具有有趣基本群的三维光滑多面体复形。为此，我们将考虑 $\mathbb{R}^4$ 的 Freudenthal 分解的子复形。

6.1. Freudenthal 分解。

本小节中，我们介绍 $\mathbb{R}^4$ 的 Freudenthal 分解，并证明其对偶的一个性质。

定义 6.1. 对于一个坐标为 $x_j \in [i_j, i_j+1]$（ $j \in \{1,2,3,4\}$ 取值范围内）的立方体 C， C 的 Freudenthal 分解定义如下。对于 C 的边中的每条路径 P，满足:

- 始于（i_1, i_2, i_3, i_4），
- 止于（$i_1+1, i_2+1, i_3+1, i_4+1$），并且
- 在每个坐标上均为非递减

我们取由路径 P 和立方体 C中的顶点构成的单纯形。通过对每个单位立方体取 Freudenthal 分解而得到的 $\mathbb{R}^4$的分解，称为 $\mathbb{R}^4$ 的 Freudenthal 分解，或称为 $\mathbb{R}^4$的 F-分解。

定义 6.2. 对于 $\mathbb{R}^4$ 的 F-分解中的每个四维单形 Δ ，定义 B_Δ 为其重心。对于 F-分解中的每个单纯形 Δ ，定义其对偶多面体 $\Delta^\vee$ 为由顶点 B_{Δ_i}（对每个 $\Delta \subseteq \Delta_i$）构成的凸包。

引理 6.3. 设 $\mathbb{R}^4$的 F-分解中的一个 k维单纯形为 Δ。其对偶 $\Delta^\vee$ 是一个（$4-k$）维多面体，其顶点恰好是每个 $\Delta \subset \Delta_i$对应的 B_{Δ_i}。此外，这些对偶多面体铺砌 $\mathbb{R}^4$。

证明。对于一个三维或四维的 Δ，其对偶 $\Delta^\vee$ 分别是由两个或一个顶点组成的凸包。在这些情况下，无需证明。

对于一个二维 Δ，我们需要证明点 B_{Δ_i} 都包含在两个不同的超平面中，且不共线。由于 Freudenthal 分解在平移、坐标置换以及关于原点的对称下保持不变，我们只需检查 Δ 为以下三角形之一的情况:

(1) 顶点为 (0, 0, 0, 0)、(1, 0, 0, 0) 和 (1, 1, 0, 0) 的三角形。设 L_1 为连接 (0, 0, 0, 0) 和 (1, 0, 0, 0) 的边。我们枚举包含该三角形的所有可能的四维单形 S，并计算其重心的坐标。(a) 假设 L_1 是定义单纯形 S的路径中的第一条直线。那么，单纯形 S 的顶点坐标为 (0, 0, 0, 0)、(1, 0, 0, 0)、(1, 1, 0, 0)、(1, 1, 1, 0) 和 (1, 1, 1, 1)，其中坐标 x_3 和 x_4可以置换。(b) 假设 L_1 是定义单纯形 S的路径中的第二条直线。那么，单纯形 S 的顶点坐标为 (0, 0, 0, -1)、(0, 0, 0, 0)、(1, 0, 0, 0)、(1, 1, 0, 0) 和 (1, 1, 1, 0)，其中坐标 x_3 和 x_4可以置换。

(c) 假设 L 是定义单纯形 S的路径中的第三条直线。那么，单纯形 S 的顶点坐标为 (0, 0, −1, −1)、(0, 0, 0, −1)、(0, 0, 0, 0)、(1, 0, 0, 0) 和 (1, 1, 0, 0)，其中坐标 x_3 和 x_4可以置换。因此，重心位于超平面 $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 2x_4 = 3\}$ 和$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 8x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4\}$上。这些重心；1 5 (4, 3, 2, 1)、1 5 (4, 3, 1, 2) 和 1 5 (3, 2, 1, −1) 不共线。(2) 顶点为 (0, 0, 0, 0)、(1, 0, 0, 0) 和 (1, 1, 1, 0) 的三角形。包含该三角形的四维单形的重心如下：(a) 假设 L_1 是定义单纯形 S的路径中的第一条直线。那么，单纯形 S 的顶点坐标为 (0, 0, 0, 0)、(1, 0, 0, 0)、(1, 1, 0, 0)、(1, 1, 1, 0) 和 (1, 1, 1, 1)，其中坐标 x_2 和 x_3可以置换。(b) 假设 L_1 是定义单纯形 S的路径中的第二条直线。那么，单纯形 S的顶点坐标为 (0, 0, 0, −1)、(0, 0, 0, 0)、(1, 0, 0, 0)、(1, 1, 0, 0)、(1, 1, 1, 0)，其中坐标 x_2 和 x_3 可以置换。因此，重心位于超平面 $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 + x_3 - x_4 = \frac{4}{5}\}$ 和 $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1 - x_2 - x_3 = \frac{3}{5}\}$上。这些重心；1 5 (4, 3, 2, 1)、1 5 (4, 2, 3, 1) 和 1 5 (3, 2, 1, −1) 不共线。(3) 顶点为 (0, 0, 0, 0)、(1, 0, 0, 0) 和 (1, 1, 1, 1) 的三角形。包含该三角形的单形，其顶点坐标为 (0, 0, 0, 0)、(1, 0, 0, 0)、(1, 1, 0, 0)、(1, 1, 1, 0) 和 (1, 1, 1, 1)，其中坐标 (x_2, x_3, x_4) 可以置换。因此，重心位于超平面$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\}$和 $\{5x_1 = 4\}$中，但不共线，因为它们包含点 1 5 (4, 3, 2, 1)、1 5 (4, 2, 3, 1) 和 1 5 (4, 1, 2, 3)。(4) 顶点为 (0, 0, 0, 0)、(1, 1, 0, 0) 和 (1, 1, 1, 1) 的三角形。包含该三角形的单形，其顶点坐标为 (0, 0, 0, 0)、(1, 0, 0, 0)、(1, 1, 0, 0)、(1, 1, 1, 0) 和 (1, 1, 1, 1)，其中坐标 x_1 与 x_2 以及 x_3 与 x_4 可以互换。因此，重心位于超平面 $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\}$ 和 $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 5x_1 + 5x_2 = 7\}$中，但不共线，因为它们包含点 1 5 (4, 3, 2, 1)、1 5 (3, 4, 2, 1) 和 1 5 (4, 3, 1, 2)。

对于一维单纯形 Δ，我们需要证明点 B_{Δ_i} 位于同一个三维空间中且不共面，也就是说，它们不都落在同一个超平面内。由于 Freudenthal 分解在平移和坐标置换下保持不变，我们只需检查 Δ 是以下直线之一的情形

(1) 直线 L_1。我们描述包含 L_1 的单形 S。(a) 假设 L_1 是定义单形 S 的路径中的第一条直线。那么，该单形的顶点坐标为 (0, 0, 0, 0)、(1, 0, 0, 0)、(1, 1, 0, 0)、(1, 1, 1, 0) 和 (1, 1, 1, 1)，坐标 (x_2, x_3, x_4) 可作置换。(b) 假设 L_1 是定义单形 S 的路径中的第二条直线。那么，该单形的顶点坐标为 (0, 0, 0, −1)、(0, 0, 0, 0)、(1, 0, 0, 0)、(1, 1, 0, 0) 和 (1, 1, 1, 0)，坐标 (x_2, x_3, x_4) 可作置换。(c) 假设 L_1 是定义单形 S 的路径中的第三条直线。那么，该单形的顶点坐标为 (0, 0, −1, −1) 、 (0, 0, 0, −1) 、 (0, 0, 0, 0) 、 (1, 0, 0, 0) 和 (1, 1, 0, 0)，坐标 (x_2, x_3, x_4) 可作置换。(d) 假设 L_1 是定义单形 S 的路径中的最后一条直线。那么，该单形的顶点坐标为 (0, −1, −1, −1)、(0, 0, −1, −1)、(0, 0, 0, −1)、(0, 0, 0, 0) 和 (1, 0, 0, 0)，坐标 (x_2, x_3, x_4) 可作置换。每种情况下，所有重心都只位于超平面 $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2\}$ 上。(2) 连接原点与 (1, 1, 0, 0) 的直线 L_2。现在我们将枚举包含L_2的单形 S。

(a) 假设 L_2 连接定义单形 S 的路径中的第一和第三个顶点。那么，该单形的顶点坐标为 (0, 0, 0, 0)、(1, 0, 0, 0)、(1, 1, 0, 0)、(1, 1, 1, 0) 和 (1, 1, 1, 1)，坐标 x_1 与 x_2、坐标 x_3 与 x_4 可互换。(b) 假设 L_2 连接定义单形 S 的路径中的第二和第四个顶点。那么，该单形的顶点坐标为 $(0, 0, 0, -1)$、(0, 0, 0, 0)、(1, 0, 0, 0)、(1, 1, 0, 0) 和 (1, 1, 1, 0)，坐标 x_1 与 x_2、坐标 x_3 与x_4 可互换。(c) 假设 L_2 连接定义单形 S 的路径中的第三和第五个顶点。那么，该单形的顶点坐标为 $(0, 0, -1, -1)$、$(0, 0, 0, -1)$、(0, 0, 0, 0)、(1, 0, 0, 0) 和 (1, 1, 0, 0)，坐标 x_1 与 x_2、坐标 x_3 与 x_4 可互换。每种情况下，所有重心都位于超平面 $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3\}$ 上

(3) 原点与 (1,1,1,0) 之间的直线 L_3。我们描述包含 L_3 的单形 S。
(a) 假设 L_3 连接路径中的第一个和第四个顶点，该路径定义了单纯形 S。
那么，该单纯形 的顶点坐标为 (0,0,0,0)、(1,0,0,0)、(1,1,0,0)、(1,1, 1, 0), 以及 (1, 1, 1, 1)，坐标 x_1、x_2 和 x_3 可任意置换。
(b) 假设 L_3 连接了定义单纯形 S 的路径中的第二个顶点和第五个顶点。那么，该单纯形 的顶点坐标为 (0, 0, 0, −1)、(0, 0, 0, 0)、(1, 0, 0, 0)、 (1, 1, 0, 0)、 and (1, 1, 1, 0)，其中坐标可进行置换 x_1、x_2 和 x_3。
包含这些单形的重心的唯一超平面是 $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3\}$。
(4) 原点与 (1,1,1,1) 之间的直线 L_4。所有包含 L_4 的单形，其坐标必须为 (0, 0, 0,0)、(1,0,0,0)、(1,1,0,0)、(1,1,1,0) 和 (1,1,1,1)，其中坐标可以任意置换。因此，重心位于超平面 $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\}$ 上，并且这是唯一包含这些重心的超平面。

对于一个点 Δ，我们需要证明这些点 B_{Δ_i} 不位于同一个三维空间中。不失一般性，我们可以假设 Δ 是原点。由 (0, 0, 0, 0) 和 (1, 1, 1, 1) 两点构成对角线的立方体的 Freudenthal 分解中的四维单形，其重心的坐标是 $\{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\}$ 的任意置换。包含这些点的唯一超平面是 $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1+x_2+x_3+x_4 = 2\}$。然而，顶点为 $(-1, -1, -1, -1)$、$(0, -1, -1, -1)$、$(0, 0, -1, -1)$、$(0, 0, 0, -1)$ 和 (0, 0, 0, 0) 的单形的重心不在超平面 $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\}$ 上。因此， $\Delta^\vee$ 是四维的。

□

定义 6.4. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^4$的 F-分解。根据引理 6.3，集合 $\{\Delta^\vee \mid \Delta \in \mathcal{F}\}$ 给出了 $\mathbb{R}^4$的凸多面体分解。此分解称为 的 Freudenthal 对偶分解$\mathbb{R}^4$，或简称为 F-对偶分解。注意，F-分解和 F-对偶分解都可以视为复形。对于 F-分解，我们可以使用格 $\mathbb{Z}^4$；而对于 F–对偶分解，则可以使用格 $(\frac{1}{5}\mathbb{Z})^4$。

6.2. F-分解的子复形。本小节中，我们证明以下关于 F-分解子复形的命题。

定义 6.5. 设 M 是 $\mathbb{R}^4$ 中 Freudenthal 分解的一个子复形。我们按以下方式定义 M 的对偶 $M^\vee$：对于每个顶点 $v \in M$，对偶多面体 $v^\vee$ 位于 $M^\vee$ 中。我们用 $\partial M^\vee$ 表示对偶的边界。

命题 6.6. 设 M 是 $\mathbb{R}^4$ 中 F-对偶分解的一个子复形。设 M_0 是 M 的对偶的边界。那么，存在一个与 M_0 同伦等价的三维光滑多面体复形 M'。

证明。 我们将分几个步骤证明这一结论。首先，我们将研究M_0的多面体分解。接着，我们将对 M_0 进行爆破，以获得一个光滑多面体复形。回顾注 4.11 ，在一般情况下，爆破可能不存在。因此，我们需要仔细分析每个单纯形处的神经，以论证爆破确实存在。

步骤 1：在此 步骤中，我们研究 M_0 中的多面体及其神经。我们证明以下陈述 ：
（i） M_0 中的极大多面体是截角八面体和六边形棱柱。（ii） M_0 的顶点的神经是三维单形或三角棱柱。（iii） M_0 的边的神经是三角形或四边形。

M_0 中的极大多面体是 $\mathbb{R}^4$的对偶 Freudenthal 分解中的三维多面体。因此，它们是截角八面体或六边形棱柱。这证明了（i）。

对偶 Freudenthal 分解中的一个三维多面体属于 M_0 ，当且仅当它是一个不属于 $M^\vee$的四维多面体的面，并且是一个属于 $M^\vee$的四维多面体的面。因此，当一个三维多面体的对偶边有一个顶点属于 M 且另一个顶点不属于 M时，该三维多面体属于 M_0 。对于 M_0中的一个顶点 v ，其在 Freudenthal 分解中的对偶是一个四维单形 Δ。包含 v 的 M_0 的极大多面体，对应于 Δ 中一端顶点属于 M 而另一端顶点不属于 M的边。如果相应的边分别在 Δ中共享一个三维胞腔或二维胞腔，则其中两个极大多面体相交于一个一维或二维胞腔。 v 的神经中的顶点由一条边连接，当且仅当 M_0 中相应的极大多面体共享一个二维胞腔。这等价于要求 Freudenthal 分解中的相应边位于同一个二维胞腔中。由于 Δ 有 5 个顶点，在组合意义下有 3 种可能性：

(1) 单纯形 Δ 包含 M的 0 个或 5 个顶点。于是， M_0 的任何极大多面体都不包含 p。因此，点 v 不在 M_0中。(2) 单纯形 Δ 包含 M的 1 个或 4 个顶点。于是， Δ 中恰有 4 条边，其一个顶点在 M 中，另一个顶点在 M之外。由于 Δ 中的所有这些边都共有一个顶点，因此每一对边都包含在同一个三角形中。因此，在 M_0 中 v 的神经中，所有点都由边相连，故它是一个三维单纯形。(3) 单纯形 Δ 包含 M的 2 个或 3 个点。于是， Δ 中恰有 6 条边，其一个顶点在 M 中，另一个顶点在 M之外。将 Δ的点记为 A、 B、1、2、3。其中， A和 B要么都在 M内，要么都在其外，1、2、3 也同样如此。由点 $\{1, A\}$ 构成的边仅与 $\{1, B\}$、 $\{2, A\}$ 和 $\{3, A\}$共享三角形。对于其余 6 条边中的每一条，我们都可以类似地进行处理。因此，在 M_0 中 v 的神经是一个三角柱。

这就完成了 (ii) 的证明。

对于 M_0 中的一条边 E ，它在 Freudenthal 分解中的对偶是一个三维单纯形 Δ。包含 E 的 M_0 的极大多面体，与 Δ 中那些一端顶点在 M 中、另一端顶点不在 M 中的边相对应。如果对应的边在 Δ 中共享一个二维胞腔，则这两个极大多面体相交于一个二维胞腔。因此，当 Freudenthal 分解中的对应边属于同一个二维胞腔时， E 的神经中的顶点之间有一条边相连。

由于 Δ 有 4 个顶点，组合上有 3 种可能：

(1) 单纯形 Δ 包含 M 的 0 个或 4 个顶点。因此， M_0 中没有任何极大多面体包含 v。所以，顶点 v 不在 M_0 中。(2) 单纯形 Δ 包含 M 的 1 个或 3 个顶点。因此， Δ 中恰有 3 条边，其中一个顶点在 M 中，另一个顶点在 M 外。因此， M_0 中 E 的神经是一个二维单形。

(3) 单纯形 Δ 包含 M 的 2 个顶点。因此， Δ 中恰有 4 条边，其中一个顶点在 M 中，另一个顶点在 M 外。因此， M_0 中 E 的神经是一个四边形。

这就完成了 (iii) 的证明。

步骤 2：在这一步中，我们证明 M_0 的任意非光滑顶点的邻域都可嵌入 $\mathbb{Q}^3$ ，使其成为一个强多胞形扇。

M_0 中的一个顶点 v 对应于 Freudenthal 分解中的一个单纯形 Δ ，它在 M 中有 1、2、3 或 4 个顶点。若它对应于一个非光滑顶点，则它在 M 中必有 2 个或 3 个顶点。不失一般性，我们假设其中两个顶点位于 M 中。经过坐标置换，我们可以假设该单纯形的顶点为 (0,0,0,0)、(1,0,0,0)、(1,1,0,0)、(1,1,1,0) 和 (1,1,1,1)。

v 中的顶点 M_0 的坐标为 $\frac{1}{5}$(4, 3, 2, 1)。¬M_0 中与 v 有边相连的顶点，对应于与 Δ 共用一个三维单纯形的四维单形的重心。因此，它们将是以下其中一种：

$$\frac{1}{5}(3,2,1,-1), \frac{1}{5}(4,3,1,2), \frac{1}{5}(4,2,3,1), \frac{1}{5}(3,4,2,1), \text{ and } \frac{1}{5}(6,4,3,2).$$

因此，将 M_0 中以顶点 v 为端点的边的格生成元平移到原点后，得到：

$$A := \frac{1}{5}(-1,-1,-1,-2), B := \frac{1}{5}(0,0,-1,1), C := \frac{1}{5}(0,-1,1,0), D := \frac{1}{5}(-1,1,0,0), \text{ and } E := \frac{1}{5}(2,1,1,1).$$

由于所有锥都是光滑的，为每个锥定义到同一个 $\mathbb{Z}^4$ 的线性映射，等价于为 $\mathbb{Z}^4$ 中的每个格射线生成元在 $\mathbb{Q}^3$ 中定义一个元素。 Δ 中一个顶点位于 M、另一个顶点不在 M 中的边，对应于 M_0 中的三维多面体。除关于原点的对称外， M 中的两个顶点有 6 种可能。

(1) 顶点为 (0, 0, 0, 0) 和 (1, 0, 0, 0)。因此， M_0 中的锥的生成元为： BDE、BCE、 BCD、 ADE、 ACE 和 ACD。在这种情况下，我们定义映射，将顶点 A、B、 C、 D 和 E 分别映射到 (0, 0, 1)、(0, 0, −1)、(1, 0, 0)、(0, 1, 0) 和 (−1, −1, 0)。(2) 顶点为 (0, 0, 0, 0) 和 (1, 1, 0, 0)。因此， M_0 中的锥的生成元为： CDE、 BCE、 BCD、ADE、 ABE 和 ABD。我们可以定义映射，将顶点 A、 B、 C、 D 和 E 分别映射到 (0, 0, 1)、(1, 0, 0)、(0, 0, −1)、(0, 1, 0) 和 (−1, −1, 0)。(3) 顶点为 (0, 0, 0, 0) 和 (1, 1, 1, 0)。 M_0 中的锥的生成元为： CDE、 BDE、 BCD、ACE、 ABE 和 ABC。我们考虑将顶点 A、 B、 C、 D 和 E 分别映射到 (0, 0, 1)、(1, 0, 0)、(0, 1, 0)、(0, 0, −1) 和 (−1, −1, 0) 的映射。(4) 顶点为 (0, 0, 0, 0) 和 (1, 1, 1, 1)。因此， M_0 中的锥的生成元为： CDE、BDE、 BCE、 ACD、 ABD 和 ABC。我们定义映射，将顶点 A、 B、 C、 D 和 E 分别映射到 (0, 0, 1)、(1, 0, 0)、(0, 1, 0)、(−1, −1, 0) 和 (0, 0, −1)。(5) 顶点为 (1, 0, 0, 0) 和 (1, 1, 0, 0)。 M_0 中的锥的生成元为： CDE、 ACE、 ACD、BDE、 ABE 和 ABD。我们考虑将顶点 A、 B、 C、 D 和 E 分别映射到 (1, 0, 0)、(0, 0, 1)、(0, 0, −1)、(0, 1, 0) 和 (−1, −1, 0) 的态射。(6) 顶点为 (1, 0, 0, 0) 和 (1, 1, 1, 0)。因此， M_0 中的锥的生成元为： DCE、 ADE、ACD、 BCE、 ABE 和 ABC。我们定义映射，将顶点 A、 B、 C、 D 和 E 分别映射到 (1, 0, 0)、(0, 0, 1)、(0, 1, 0)、(0, 0, −1) 和 (−1, −1, 0)。

无论如何，我们都有格映射，将 $\mathcal{P}$ 中以 v 为顶点的每个锥映射到 $\mathbb{Z}^3$ 中的同一个扇。由于顶点 (0, 0, 1)、(0, 0, −1)、(1, 0, 0)、(0, 1, 0) 和 (−1, −1, 0) 构成一个凸双锥体，因此 $\mathbb{Z}^3$ 中的扇是强多面体的。

步骤 3：在此步骤中，我们通过对点进行一系列爆破，生成一个由 M_0 得到的多面体复形 M_1 。

根据引理 4.14 和步骤 2，我们可以在 $2M$的每个非光滑点处进行爆破。引理 4.14 证明中的爆破构造取决于以下选择：嵌入到 $\mathbb{Q}^3$中的一个分段线性函数 $\mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4$，以及 $\mathbb{Q}^4$中的一个超平面 H 。根据第二步，对于 M_0 中具有同构邻域的任意两个顶点，我们都可以选择相同的嵌入、分段线性函数和超平面。这样做会得到一个多面体复形 M_1 ，其中所有非光滑边彼此不相交。

步骤 4：在此步骤中，我们对 M_1 的边进行爆破，以得到一个光滑复形。

为此，我们证明对 M_1 中任意一条神经为四边形的边进行爆破是可行的。

在 M_0 中，边的神经若不是二维单形，则只能是四边形。复形 M_1是通过对 M_0 的顶点进行爆破得到的，并且二维胞腔处的所有神经都是单形。因此，根据引理 4.15， M_1 中的所有新边的神经都是单形。因此，根据步骤 1， M_1中神经不是单形的边，原本都是 M_0 中神经不是单形的边。这些边在两个顶点处的神经都不是单形，因此在这两个顶点处都对 M_0 进行了爆破。

设 L 是这样的一条边，其顶点为 A 和 B。在 M_1 中，这条边包含于四个三维单形中。点 A 和 B 包含于这四个三维单形中，并且分别包含于多面体 P_A 和 P_B 中。多面体 P_A 和 P_B 是在 M_0 中对点 A' 和 B' 进行爆破所得的结果。

根据第二步中爆破的选择，以 A 为顶点的 P_A 处的锥与以 B 为顶点的 P_B 处的锥是同构的。我们取 P_A 中的一个超平面 H_A，将 A 与 P_A 中的其他顶点分隔开。我们用定义 H_A 于 P_A 中的相同方程，在 P_B 中定义一个超平面 H_B。 $H_A \cap P_A$ 与 $H_B \cap P_B$ 的交点在包含 L 的四个三维多面体中的每一个内分别定义出四个点。在这些三维多面体中的每一个内，来自 R_A 的两个点与来自 R_B 的两个点由平行于 L 的直线连接。因此，这四个点定义了一个平行四边形。于是，我们通过用由这些平行四边形定义的超平面进行切割，定义在 L 处的爆破。边 L 被替换为一个四边形棱柱，其面由包含 L 的三维多面体中的平行四边形，以及 H_A和 H_B 中的四边形给出。这是以四边形 $H_A \cap P_A \cong H_B \cap P_B$ 为底的棱柱。

在 M_1 唯一具有非单纯神经的层是彼此不相交的边及这些边上的点。因此，对这些边进行爆破后，根据引理 4.15，所有神经都是单纯的。因此，在对每条上述非光滑边进行爆破后，我们得到 M_2 一个光滑多面体复形。

步骤 5：在这一步中，我们定义 $M' := M_2$ 并完成证明。

根据构造可知， M' 是一个 3 维光滑多面体复形。此外，由于爆破只是同伦等价，我们得出 M' 与 M_0 同伦。证明完毕。□

6.3. 4 维中的自由群。本小节中，我们证明每个自由群都可以作为一个对数典范 4 维奇点的基本群出现。

定理8的证明。根据定理10 ，只需证明存在一个光滑三维多面体复形 $\mathcal{P}_r$ 使得 $\pi_1(\mathcal{P}_r) = \pi_1(M)$。由于 M 在 $\mathbb{R}^4$中是紧且光滑的，因此存在足够大的 N，使得与 M 相交的、边长为 $\frac{1}{N}$ 的格立方体之并构成一个与 M 的管状邻域同伦的集合。等价地，将 M 按 N 倍放大，并取所有与 M_N 相交的单位立方体，便得到 F分解的一个子复形，它与 $\mathbb{R}^4$ 的管状邻域同伦

于 M。将 M'称为 F分解的这个子复形。$\mathbb{R}^4$ 的 F-对偶分解中， M'的对偶复形的边界是两个互不相交的复形，且它们与 M同伦。令 M_0 为其中一个子复形。

根据命题6.6，存在一个光滑三维多面体复形 $\mathcal{P}_r$，使得 $\pi_1(\mathcal{P}_r) = \pi_1(M)$。至此，证明完成。□

定理9的证明。这可由定理8的证明得到。 □

定理11的证明。定理 M_0 8 的证明中的三维流形 同伦于 $\#^r(S^2 \times S^1)$。于是，该陈述可由命题6.6的证明推出。□

7. Examples and questions

本节汇集了一些例子以及供进一步研究的问题。下面的例子表明，lc 奇点的基本群可能是无限群。我们还描述了关于对数典范锥奇点基本群的一种预期。

例 7.1。无论从代数角度还是拓扑角度，构造奇点的最简单方法都是取完备几何对象上的锥。众所周知，相对于极化 $-K_X$，光滑 Fano 簇上的锥会导出孤立千禧年奇点。这些奇点具有有限基本群 [2,定理 1]。类似地，相对于任意极化，光滑 Calabi–Yau 簇上的锥给出一个对数典范奇点。

例如，我们可以考虑一个维数为 n 的阿贝尔簇 A。设 P_A 是 A 上的非常 ample 除子。我们可以考虑仿射锥

$$C(A, P_A) := \operatorname{Spec}\left(\bigoplus_{m\geq 0} H^0(A, \mathcal{O}_A(mP_A))\right).$$

奇点（C（A， P_A）； c）是对数典范的，其中 c 是顶点（参见例如 [18]）。对于该锥的基本群，存在一个正合序列

$$1 \to \mathbb{Z} \to \pi_1^{\mathrm{loc}}(C(A, P_A); c) \to \mathbb{Z}^{2n} \to 1,$$

其中， $\mathbb{Z}$ 由环路 γ_E 生成，该环路绕过对 $c \in C$（A， P_A）爆破所得的例外除子。因此， $\mathbb{Z}$ 在 π_1^{loc}（C（A， P_A）； c）中的像定义了一个中心元。事实上，我们可以看到该元素是中心的，因为 E 在 Y 上的法丛在 E 的某个开子集上是平凡的。这意味着 π_1^{loc}（C（A， P_A； c））是一个幂零阶为 2、具有秩为 $2n+1$ 的幂零基的幂零群。维数为 n 的光滑 Calabi–Yau 簇的基本群是几乎幂零的，其幂零基的长度至多为 $2n$（参见例如 [15, 推论 2]）。因此，对光滑 Calabi–Yau 簇取锥的过程应当导出对数典范奇点，其局部基本群是几乎幂零的，并且幂零基的长度至多为 $2n+1$。就幂零基的长度而言，阿贝尔簇上的锥应当是最糟糕的情形。

我们指出，即使对于维数为 n 的对数卡拉比–丘对，区域基本群也被预期为几乎幂零的，其幂零基的秩至多为 $2n$。总而言之，对数典范锥奇点的局部基本群可能是无限的（不同于对数终端奇点）。然而，这些例子的基本群作为幂零群，仍然在某种程度上受到控制。因此，这些基本群仍然接近阿贝尔群。

下面的例子表明，对数典范奇点的基本群可能是无限群且非幂零。

例 7.2. 设 S 是亏格为 g 的黎曼曲面。在定理 6 中，我们证明存在一个孤立 lc 三维奇点（$X_S; x$） $\simeq \pi_1$（S）。若 $g \geq 2$，则 π_1（$X_S; x$）的中心是平凡的。因此， π_1（$X_S; x$）的中心列以平凡子群终止。这表明，如果奇点的对偶复形维数较高，也就是说正则度为正，那么例 7.1 中的预期并不成立。在这些例子中，（X_S; x）的 dlt 修改（Y_S, E_S）满足： $\mathcal{D}$（E_S）与黎曼曲面 S 同伦。此外，我们有 π_1（E_S） $\simeq \pi_1$（S）。

下面的例子表明，即使相关的对偶复形是一个 2-球面，对数典范三维奇点的基本群也可能很有趣。

例 7.3。令 E 为 $\mathbb{P}^{n+1}$的环面不变边界。那么， E 是一个简单正规交叉 Calabi–Yau 代数簇，即它具有 snc 奇点，并且 $K_E \sim 0$。此外， E 由 $n+1$ 个 $\mathbb{P}^n$ 粘合而成，形成一个 $(n+1)$-单纯形。因此，对偶复形 $\mathcal{D}(E)$ 是一个 n-球面。考虑极化$\mathcal{L}_{E,\ m}$ ，它在每个同构于 $\mathbb{P}^n$的不可约分支 E_i 上限制为线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mH)$。根据小节 4.3和小节 4.4，我们知道存在一个维数为 $(n+1)$ 的对数典范奇点 $(X_{n,\ m};\ x)$，其 dlt 修改为 (Y, E)，且 E 的法丛为 $\mathcal{L}^{\vee}_{E,\ m}$。这一构造取决于某些非常 ample 除子的选取。在此情形下，取 $m > n+1$ 即可。令 $L_i \subset E_i$ 为一条一般直线，于是，对于 $j \neq i$ 和 $E_i \cdot L_i = m-n-1$，有 $E_j \cdot L_i = 1$。令 γ_i 为绕 E_i 的环路。那么，所有环路 γ_i 都彼此交换。此外，我们有如下关系

$$\gamma_i^{m-n-1} = \prod_{j \neq i} \gamma_j.$$

由这些关系可推出， $\pi_1(X_{n,\ m};\ x)$ 是秩至多为 n 的有限阿贝尔群。

例如，我们可以考虑 $n = 3$，并在二维简单正交 Calabi–Yau 簇 E 上选取极化$\mathcal{L}_{E,\ 5}$。于是得到生成元关系

$$\gamma_1^{-2}\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \gamma_1\gamma_2^{-2}\gamma_3\gamma_4, \gamma_1\gamma_2\gamma_3^{-2}\gamma_4, \text{ and } \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4^{-2}.$$

我们得出结论：

$$\pi_1(X_{2,5}; x) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3.$$

这个例子很有趣，因为它与环面奇点密切相关。 n 维环面对的区域基本群是秩至多为 n 的有限阿贝尔群。在这个例子中，我们有一个n 维的、具有球面型对偶复形的孤立对数典范奇点，其基本群是秩为 n 的有限阿贝尔群。

下面的例子表明，定理 4 中的所有可能秩都可以实现。

例 7.4。考虑以下对数 Calabi–Yau 曲面：

- 一个光滑 K3 曲面，
- 对 $(\mathbb{P}^2, L + C)$，其中 L 是一条直线， C 是一条横截圆锥曲线，
- 对 $(\mathbb{P}^2, L_1 + L_2 + L_3)$，其中 L_i's 是横截直线，
- 乘积 $E \times (\mathbb{P}^1, \{0\} + \{\infty\})$，其中 E 是一条椭圆曲线，并且
- 一个阿贝尔曲面。

那么，在前面的例子中， $\pi_1^{\mathrm{reg}}(X, B)$ 的秩分别为 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

我们以几个问题结束本节。在表1中，我们完整描述了对数典范曲面奇点的所有可能区域基本群同构类。定理6 和定理7 给出了 3 维基本群的一些新例子和限制。然而，3 维情形的完整图景仍不清晰。回答下面的问题将有助于加深我们对 3 维基本群的理解。

问题 7.5. 设 G 是一个曲面群的有限循环扩张。是否存在一个 3 维对数典范奇点（X； x），使得 π_1^{loc}（X； x）$\simeq G$?

本文所述的方法可用于构造具有光滑对偶复形的 lc 奇点。这些例子非常有趣。然而，我们目前还缺乏构造奇异对偶复形所需的工具。为此，一个自然的尝试是：研究具有有限群作用的光滑多面体复形，并尝试将多面体商实现为对偶复形。

问题 7.6. 能否对多面体复形进行等变版本的构造，以构造具有奇异对偶复形的 lc 奇点?

不过，这种构造只能得到以几何轨形为对偶复形的情形。若要获得任意轨形，则需要发展略有不同的方法。构造具有奇异对偶复形的四维 lc 奇点实例更为困难。不过，构造具有奇异对偶复形的对数卡拉比–丘四维簇相当容易。这可以通过如下商得到：一个四维环面卡拉比–丘对（T, B_T）允许有限子群 $G <$ 自同构群(T, B_T)作用，其商为 $(T, B_T)/G$。

我们的主定理指出，任意有限呈示基本群都可能成为某个对数典范奇点的局部基本群。我们尚不知道是否存在一个有限呈示群，它不能作为四维对数典范奇点的基本群出现。

问题 7.7. 是否存在一个有限呈示群，使其不是某个四维对数典范奇点的基本群?

我们预期上一个问题的答案是肯定的。不过与此同时，我们也预期每个有限呈示群都能在五维中出现。关于有理对数典范奇点的基本群的问题仍未解决。我们预计这类奇点的行为会更接近 klt 奇点。由此引出以下问题。

问题 7.8. 有理对数典范奇点的基本群是否受到任何限制?

正如我们在本文中多次讨论的，这些基本群与底层对偶复形的基本群密切相关。因此，要为上一个问题构造有趣的例子，就需要考虑五维奇点。事实上，3 维同调球面的基本群受到更多限制。本文引入的工具应能帮助我们处理这些问题。

Appendix A. Fundamental groups of lc surface singularities

下表总结了曲面对数典范奇点可能具有的基本群。这些结论由命题3.6、命题3.7、命题3.9的证明以及命题3.10的证明可得。第一列描述极小解消的例外除子。第二列列出边界除子标准逼近的系数，并描述其严格变换与 E的交。第三列描述区域基本群的同构类。

Table 1. 对数典范曲面奇点的基本群

例外除子（E）	边界（B_s）	π_1^{reg}（X， B； x）

椭圆曲线	$B_s = 0$	$\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}^2$
有理曲线环	$B_s = 0$	$\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$
A 有理曲线相交于被另外 4 条 (-2) 曲线	$B_s = 0$	$\langle a, b, c \mid a^2b^{-2}, a^2c^{-2}, a^2(a^{2m-1}b^{-1}c^{-1})^{-2} \rangle$
A 有理曲线相交于3条有理曲线链	$B_s = 0$	$\langle a, b, c \mid a^A b^{-B}, a^A c^{-C}, a^{A'} b^{B'} c^{C'} \rangle$
有理曲线链	$B_s = 0$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
有理曲线链相交 by 2 其他 (-2) 条曲线位于一端	$B_s = 0$	$\langle a, b \mid a^2b^{-2}, a^A(ab)^B \rangle$
有理曲线链与另外两条相交每个端点处的 (-2) 条曲线	$B_s = 0$	$\left\langle a, b, c \;\middle\vert\; a^2b^{-2}, a^A(ab)^B c^{-2}, c^2\ a^{A'}\ ab\ ^{B'}c^{C'}\quad ()^{-2} \right\rangle$
$E = 0$	$B_s = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$E = 0$	$B_s = \frac{m_1-1}{m_1}B_1$	$\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z}$
A 有理曲线与相交 3 个其他 (-2) 曲线	$B_s = \frac{1}{2}B_1$	$\langle a, b, c \mid a^2b^{-2}, a^2c^{-2}, (a^{1-2m}bc)^2 \rangle$
A 有理曲线被交于 2 个其他 (-2) 曲线	$B_s = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2$	$\langle a, b, c \mid a^2b^{-2}, c^2, [a^2, c], (a^{1-2m}bc)^2 \rangle$
A 有理曲线相交于 1 其他 (-2) 曲线	$B_s = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 + \frac{1}{2}B_3$	$\langle a, b, c \mid b^2, c^2, [a^2, b], [a^2, c], (a^{1-2m}bc)^2 \rangle$
有理曲线	$B_s = \frac{m_1-1}{m_1}B_1 + \frac{m_2-1}{m_2}B_2 + \frac{m_3-1}{m_3}B_3$	$\left\langle a, b, x \;\middle\vert\; a^{m_1}, b^{m_2}, [a, x], [b, x], (b^{-1}a^{-1}x^m)^{m_3} \right\rangle$
有理曲线链	$B_s = \frac{m_1-1}{m_1}B_1$，不相交 E 位于一条端曲线上	$\left\langle a, b, c, x \;\middle\vert\; a^{m_1}, [a, x], xb^{-B}, xc^{-C}, ab^{B'}c^{C'}x^{-m} \right\rangle$
有理曲线链，其中最后一条曲线是 (-2)-曲线	$B_s = \frac{1}{2}B_1$，与 E 相交于倒数第二条曲线	$\langle a, b, x \mid a^2, xb^{-2}, [a, x], (ab)^A x^B \rangle$
有理曲线链，其中每条端曲线都是一条 (-2)-曲线	$B_s = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2$、$B_1$ 相交 E 在第二条曲线上，而 B_2 相交的 E 在第二条至最后一条曲线	$\left\langle a、b、c \;\middle\vert\; b^2, [a^2, b], a^{2A}(ab)^B c^{-2}, a^{2A'}(ab)^{B'}c^{-2C'+1})^2 \right\rangle$
有理曲线链，其中最后一条曲线是 (-2)-曲线	$B_s = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 + \frac{1}{2}B_3$，$B_1$ 与 E 相交于第二个到最后一条曲线，并与 B_2, B_3 相交——与第一条曲线相交。	$\left\langle a, b, c \;\middle\vert\; b^2, [a^2, b], c^2, [a^{2A}(ab)^B, c], (a^{2A'}(ab)^{B'}(a^{2A}(ab)^B)^{-C}c)^2 \right\rangle$

有理曲线	$B_s = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 + \frac{1}{2}B_3 + \frac{1}{2}B_4$	$\left\langle a, b, c, x \;\middle|\; \begin{matrix}[a,x],[b,x],[c,x] \\ a^2\ b^2\ c^2, (abcx^m)^2\end{matrix} \right\rangle$
有理曲线链	$B_s = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 + \frac{1}{2}B_3 + \frac{1}{2}B_4$ B_1 和 B_2 相交于 E 一个端曲线，且 B_3 和 B_4 相交于 E 另一条端曲线上。	$\left\langle \begin{matrix}a, b, \\ c, x\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix}[c, (ab)^A x^B], [b, x], \\ a^2, b^2, c^2, [a, x], \\ ((ab)^{A'} x^{B'} c)^2\end{matrix} \right\rangle$
有理曲线链	$B = \frac{m_1-1}{m_1}B_1$，与 E 相交于一条端曲线	$\langle a, x \mid a^{m_1}, [a, x], (a)^A x^B \rangle$
有理曲线链	$B_s = \frac{m_1-1}{m_1}B_1 + \frac{m_2-1}{m_2}B_2$，每个 B_i 与 E 相交于不同项端曲线	$\langle a、\ x \mid a^{m_1}、\ [a,x]、\ (\ (a)\ ^A x^B)\ ^{m_2} \rangle$
有理曲线链	$B_s = \frac{m_1-1}{m_1}B_1 + \frac{1}{2}B_2 + \frac{1}{2}B_3$ B_1 相交 E in 一个端曲线，并且 B_2 和 B_3 相交于另一个端曲线中的 E	$\langle a、\ b、\ x \mid a^2、\ [a,x]、\ b^2、\ [b,x]、\ (\ (ab)\ ^A x^B)\ ^{m_1} \rangle$

References

[1] V. Alexeev。二维终止。 *Duke Math. J.*，69(3):527–545，1993。doi:10.1215/S0012-7094-93-06922-0。[2] L. Braun。Kawamata 对数终端奇点的局部基本群是有限的。 *Invent. Math.*，2021。doi:10.1007/s00222-021-01062-0。[3] L. Braun、S. Filipazzi、J. Moraga 和 R. Svaldi。局部基本群的 Jordan 性质，2020，arXiv:2006.01253。[4] D. Cooper 和 W. P. Thurston。利用 5 种顶点链接类型对三维流形进行三角剖分。 *Topology*，27(1):23–25，1988。doi:10.1016/0040-9383(88)90004-3。[5] D. A. Cox、J. B. Little 和 H. K. Schenck。 *Toric varieties*，《数学研究生教材》第 124 卷。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2011。doi:10.1090/gsm/124。[6] A. H. Durfee。代数集的邻域。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，276(2):517–530，1983。doi:10.2307/1999065。[7] F. Figueroa、S. Filipazzi、J. Peng 和 J. Moraga。Fano 簇的补集与余正则性，2022，arXiv:2211.09187。[8] F. Figueroa、J. Moraga 和 J. Peng。对数典范阈值与余正则性，2022，arXiv:2204.05408。[9] S. Filipazzi、M. Mauri 和 J. Moraga。余正则度为零的 Calabi–Yau 对的指数，2022，arXiv:2209.02925。[10] D. Greb、S. Kebekus 和 T. Peternell。 ´Kawamata 对数终端空间的 Étale 基本群、平坦层与阿贝尔簇的商。 *Duke Math. J.*，165(10):1965–2004，2016。doi:10.1215/00127094-3450859。[11] M. Gross、P. Hacking 和 B. Siebert。具有有效反典范类的簇上的 Theta 函数，2019，arXiv:1601.07081。[12] A. Grothendieck。

Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux（*SGA* 2）。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹；Masson & Cie 出版社，巴黎，1968 年。由 Mich`ele Raynaud 增补的 Augment´e d'un expos´e，S´eminaire de G´eom´etrie Alg´ebrique du Bois-Marie，1962，《纯数学高级研究》第 2 卷。[13] R. Hartshorne。 *Algebraic geometry*。《数学研究生教材》第 52 卷。施普林格出版社，纽约-海德堡，1977 年。[14] M. Kapovich 和 J. Koll´ 27 4 929 952, ar。2014 10 1090 0894 0347 2014 00807 9 孤立奇点的链接的基本群。 *J. Amer. Math. Soc.*，（）：–。doi: 。/S - - - -。[15] V. Kapovitch 和 B. Wilking。里奇曲率有下界的流形的基本群结构，2011，arXiv:1105.5955。[16] A. Karrass、W. Magnus 和 D. Solitar。具有单一定义关系的群中的有限阶元素。 *Comm. Pure* ，：–。*Appl. Math.* 13 57 66, 1960 10 1002 3160130107 doi: 。/cpa. 。[17] J. Koll´ar。复解析奇点的链接。载于 *Surveys in differential geometry. Geometry and topology*，《纯数学高级研究》第 18 卷，第 157–193 页。国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2013 年。doi:10.4310/SDG.2013.v18.n1.a4。[18] J. Koll´ar。 *Singularities of the minimal model program*，《纯数学高级研究》第 200 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2013 年。doi:10.1017/CBO9781139547895。与 S´andor Kov´acs 合作。

[19] J. Koll´ar 和 S. J. Kov´acs。对数典范奇点是杜布瓦奇点。 *J. Amer. Math. Soc.*，23(3):791–813，2010。doi:10.1090/S0894-0347-10-00663-6。[20] J. Koll´ar。终端奇点和对数典范奇点的新例子，2011，arXiv:1107.2864。[21] J. Milnor。 *Singular points of complex hypersurfaces*。《拓扑学》。数学年刊研究丛书第 61 号。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，1968 年。[22] J. Moraga。具有大循环自同构的 Fano 型曲面，2020，arXiv:2001.03797。[23] J. Moraga。满秩的 Kawamata 对数终端奇点，2021，arXiv:2007.10322。[24] J. Moraga。关于 klt 奇点的环面化，2021，arXiv:2106.15019。[25] J. Moraga。Fano 簇的余正则性，2022，arXiv:2206.10834。[26] J. Moraga 和 R. Svaldi。环面奇点的几何刻画，2021，arXiv:2108.01717。[27] S. Mukai。 $K3$ 曲面的自同构有限群与 Mathieu 群。 *Invent. Math.*，94(1):183–221，1988。doi:10.1007/BF01394352。[28] D. Mumford。代数曲面的正规奇点的拓扑与单连通性判据。

Inst. Hautes Études , *Sci. Publ. Math.* 9 9 5

（）：–22，1961。URL http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1961__9__5_0。[29] W. D. Neumann 和 J. Wahl。商尖点的万有阿贝尔覆盖。 *Math. Ann.*，326(1):75–93，2003。doi:10.1007/s00208-002-0405-6。[30] B. B. Newman。单关系群的一些结果。*Bull. Amer. Math. Soc.*，74:568–571，1968。doi:10.1090/S0002-9904-1968-12012-9。[31] M. V. Nori。Zariski 猜想及相关问题。 *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*，16(2):305–344，1983。URL http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1983_4_16_2_305_0。[32] K. Schwede。概形的粘合与一个没有闭点的概形。载于 *Recent progress in arithmetic and algebraic geometry*，《纯数学高级研究》第 386 卷，第 157–172 页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2005 年。doi:10.1090/conm/386/07222。[33] I. Shimada 和 D.-Q. Zhang。极值椭圆 $K3$ 曲面的分类与开 $K3$ 曲面的基本群。*Nagoya Math. J.*，161:23–54，2001。doi:10.1017/S002776300002211X。[34] V. V. Shokurov。半稳定三维翻转。*Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*，57(2):165–222，1993。doi:10.1070/IM1994v042n02ABEH001541。[35] Z. Tian 和 C. Xu。基本群的有限性。*Compos. Math.*，153(2):257–273，2017。doi:10.1112/S0010437X16007867。[36] C. Xu。代数基本群的有限性。 *Compos. Math.*，150(3):409–414，2014。doi:10.1112/S0010437X13007562。Department of Mathematics、 Princeton University、 Fine Hall、 Washington Road、 Princeton、 NJ 08544-1000USA*Email address*: fzamora@princeton.eduUCLA Mathematics Department、 Box 951555、 Los Angeles、 CA 90095-1555、 USA *Email address*: jmoraga@math

.ucla.edu