arXiv:2302.11807v1 [math.SP] 23 Feb 2023

具有周期矩阵系数的偶数阶微分算子的谱

O.A. Veliev土耳其伊斯坦布尔多古斯大学机械工程系。电子邮箱:
oveliev@dogus.edu.tr

摘要

本文研究具有周期矩阵系数的自伴微分算子 L 的能带函数、布洛赫函数及其谱。我们找到了使算子 L的谱隙数量有限的系数条件。

关键词：能带函数、布洛赫函数、谱。AMS数学主题分类:
34L05，34L20。

本文研究由形式自伴微分表达式生成的微分算子 L在向量值函数空间 $L_2^m(\mathbb{R})$ 中的能带函数、布洛赫函数及其谱

$$(-i)^{2\nu}y^{(2\nu)}(x)+\sum_{k=2}^{2\nu-2}P_k(x)y^{(2\nu-k)}(x), \tag{1}$$

其中，对于每个 $k=2,\ 3,\ ...2\nu-2,\ \ \nu>1$和 $P_k(x)$ 是元素可求和的 $m\times m$矩阵 $p_{k,\ i,\ j}$满足 $p_{k,\ i,\ j}(x+1)=p_{k,\ i,\ j}(x)$，对所有 $i=1,\ 2,\ ...m$和 $j=1,\ 2,\ ...m$均成立

为了解释本文的结果，我们先引入一些记号。众所周知（见 [1, 2, 4]），算子 L 的谱 $\sigma(L)$ 是算子 L_t 的谱 $\sigma(L_t)$ 的并，其中 L_t 由式（1）和拟周期条件在 $L_2^m[0,1]$ 中生成，$t\in(-\pi,\pi]$

$$U_p(y):=y^{(p)}(1)-e^{it}y^{(p)}(0)=0,\ p=0,1,...,(2\nu-1). \tag{2}$$

对于 $t\in(-\pi,\pi]$，算子 L_t 的谱 $\sigma(L_t)$ 由以下特征值组成

$$\lambda_1(t)\le\lambda_2(t)\le\cdots \tag{3}$$

称为 L的布洛赫特征值。与布洛赫特征值 $\lambda_n(t)$ 对应的特征函数 $\Psi_{n,\ t}$ 是 L的布洛赫函数。

在 [10] 中研究了算子 L 的能带函数 $\lambda_n:\ t\to\lambda_n(t)$及布洛赫函数的连续性。在第2节中，我们对这些结果作如下改进。我们只假设方程（1）的系数矩阵元素是可求和函数，而在 [10] 中假设它们是有界函数。在 [10]中，连续布洛赫函数的选取是以非构造性的方式完成的。这里我们以构造性的方式定义连续布洛赫函数。我们证明，对每个$f\in L_2^m[0,1]$，函数 $P_tf(x)$关于 $x\in[0,1]$ 一致收敛到$P_af(x)$，当 $t\to a$时；而在 [10] 中，这种收敛是在 L_2 范数下实现的，其中 P_t 是对应于特征值$\lambda_n(t)$的 L_t 的投影。此外，第2节和 [10] 中使用的方法完全不同。因此，第2节可视为对论文 [10]的延续和补充。

在第3节中，我们考察算子 $L.$ 的谱。由于 $\sigma(L)$是 $t\in(-\pi,\pi]$时$\sigma(L_t)$的并集， L 的谱由以下集合组成

$$I_n=\{\lambda_n(t):t\in(-\pi,\pi]\},\tag{4}$$

对于 $n=1$、2、.....。集合 I_n称为谱的第 n 个谱带。当 $n\to\infty.$时，谱带 I_n趋于无穷大。谱带 I_k与 I_{k+1}之间的区域（ $k=1$、2、.....）称为 $L.$ 的谱隙。在第3节中，我们证明正实轴的大部分被谱的 m 个谱带覆盖，并考察谱隙（见定理 5）。随后，我们找出矩阵的特征值满足的一个条件

$$C=\int_0^1 P_2\left(x\right)dx\tag{5}$$

在该条件下，谱隙的数目有限（见定理 6）。请注意，在 [6],中，我们是在假设矩阵 C 具有三个满足条件（30）的单特征值 μ_{j_1}、 μ_{j_2} 和 μ_{j_3} 的情况下证明定理 6 的。本文中，我们不对这些特征值的重数作任何限制，也证明了定理 6。情形 $\nu=1$ 已在 [9]中研究。定理 5 和定理 6 的证明中与情形 $\nu=1$的证明相似的部分予以省略，并给出了相关文献 [9]。

1 关于带函数和布洛赫函数

本节首先利用以下众所周知的结论（例如参见 [5] 第 3 章），并将其整理为总结，研究 L 的带函数和布洛赫函数关于准动量的连续性。

总结 1 L_t 的特征值是特征行列式的根

$$\Delta(\lambda,t)=\det(Y_j^{(p-1)}(1,\lambda)-e^{it}Y_j^{(p-1)}(0,\lambda))_{j,p=1}^{2\nu}=\tag{6}$$

$$e^{i2\nu mt}+f_1(\lambda)e^{i(2\nu m-1)t}+f_2(\lambda)e^{i(2\nu m-2)t}+...+f_{2\nu m-1}(\lambda)e^{it}+1$$

它是一个以 $f_1(\lambda)$ $f_2(\lambda)$ ... 为整系数的 e^{it} 多项式，其中

$Y_1(x,\lambda)$ $Y_2(x,\lambda)\ldots,Y_{2\nu}(x,\lambda)$ 是矩阵方程的解

$$(-i)^{2\nu}Y^{(2\nu)}+P_2Y^{(2\nu-2)}+P_3Y^{(2\nu-3)}+...+P_{2\nu}Y=\lambda Y,$$

满足 $Y_{(j)\,k}(0,\lambda)=O$对于 $j\neq k-1$， 以及 $Y_{(k-1)\,k}(0,\lambda)=I$。这里， O和 I分别是零矩阵和单位矩阵。 $L_t-\lambda I$ 的格林函数由公式定义

$$G(x,\xi,\lambda,t)=g(x,\xi,\lambda)-\frac{1}{\Delta(\lambda,t)}\sum_{j,p=1}^{2\nu}Y_j(x,\lambda)V_{jp}(x,\lambda)U_p(g),\tag{7}$$

其中， g 不依赖于 t ，而 V_{jp} 是由行列式 $\det(U_p(Y_j))$ 中元素 $U_p(Y_j)$ 的余子式构成的 m阶矩阵的转置 $_{j,\ p=1}^{2\nu}$. 因此，矩阵 $V_{jp}(x,\lambda)$ 和 $U_p(g)$ 的元素要么不依赖于 t，要么分别具有形式 $u^{(p)}(1,\lambda)$ $e^{it}u^{(p)}$ 0 λ h 1 λ $-e^{it}h$ 0 λ u h $(\ ,\ )$ 和 $(\ ,\ \xi,\ )$ $(\ ,\xi,\ )$，其中这些函数不依赖于 $t.$

现在，利用这一总结，我们证明对于每个 n ，由式 (3) 定义的函数 λ_n 在每一点 $a\in(-\pi,\pi]$. 处连续。为此，我们引入以下记号。

记号 1 设 $\Lambda_1(a) < \Lambda_2(a) < \cdots$ 为 L_a 的互异特征值，其重数分别为$k_1, k_2, ...$。对于每个 n，存在 p 使得 $n \le k_1 + k_2 + \cdots + k_p.$。这些记号连同记号 (3) 意味着 $\lambda_{s_{j-1}+1}(a) = \lambda_{s_{j-1}+2}(a) = \cdots = \lambda_{s_j}(a) = \Lambda_j(a)$，其中 $s_0 = 0$, $s_j = k_1 + k_2 + \cdots + k_j$对于 $j = 1, 2, ..., p$，且 $n \le s_p.$。由于 L 是下有界算子，存在 $b \in \mathbb{R}$ 使得 $\lambda_1(t) > b$ 对所有 $t \in (-\pi, \pi]$.

现在，我们准备好证明以下定理。

定理 1 (a) 对于每个满足不等式 $r > 0$

$$r < \tfrac{1}{2} \min_{j=1,2,...p} (\Lambda_{j+1}(a) - \Lambda_j(a)) \tag{8}$$

存在 $\delta > 0$，使得算子 L_t 对于 $t \in (a-\delta, a+\delta)$，在区间 $(\Lambda_j(a) - r, \Lambda_j(a) + r)$ 内有 k_j 个特征值，其中 $j = 1$、2、...、p，且 $a \in (-\pi, \pi]$.

(b) L_t 对于 $t \in (a-\delta, a+\delta)$，位于区间 $(\Lambda_j(a) - r, \Lambda_j(a) + r)$ 内的特征值为$\lambda_{s_{j-1}+1}(t)$ $\lambda_{s_{j-1}+2}(t)$ ..., $\lambda_{s_j}(t)$，其中 s_j 的定义见记号 1。

证明。(a) 根据 (8)，圆 $D_j(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \Lambda_j(a)| = r\}$ 属于算子 L_a. 的预解集。这意味着，对于每个 $\lambda \in D_j(a)$，$\Delta(\lambda, a) \neq 0$。由于 $\Delta(\lambda, a)$ 是紧 $D_j(a)$ 上的连续函数，存在 $c > 0$，使得对所有 $\lambda \in D_j(a)$，$|\Delta(\lambda, a)| > c$。此外，根据 (6)，$\Delta(\lambda, t)$ 是关于 e^{it} 的整系数多项式。因此，存在 $\delta > 0$，使得

$$|\Delta(\lambda, t)| > c/2 \tag{9}$$

对于所有 $t \in (a-\delta, a+\delta)$ 和 $\lambda \in D_j(a)$。这意味着，对于所有 $t \in (a-\delta, a+\delta)$，$D_j(a)$ 属于 L_t 的预解集。另一方面，众所周知，

$$(L_t - \lambda I)^{-1} f(x) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda, t) f(\xi) d\xi, \tag{10}$$

其中，$G(x, \xi, \lambda, t)$ 是在式 (7) 中定义的 L_t 的格林函数。此外，由总结 1 和式 (9) 可容易推出，存在 M 使得

$$|G(x, \xi, \lambda, t) - G(x, \xi, \lambda, a)| \le M |t - a| \tag{11}$$

对于所有 $x \in [0, 1]$、$\xi \in [0, 1]$、$\lambda \in D_j(a)$ 和 $t \in (a-\delta, a+\delta)$。因此，利用式 (10) 和总结 1，可以容易验证，对于 $\lambda \in D_j(a)$，$(L_t - \lambda I)^{-1}$，且投影

$$P_t = \textstyle\int_{D_j(a)} (L_t - \lambda I)^{-1} d\lambda \tag{12}$$

连续地依赖于 $t \in (a-\delta, a+\delta)$。这意味着，对于每个 $t \in (a-\delta, a+\delta)$，算子 L_t 在 $D_j(a)$ 内有 k_j 个特征值，因而在区间 $(\Lambda_j(a) - r, \Lambda_j(a) - r)$ 内也有 k_j 个特征值，因为 L_a 在 $D_j(a)$ 内有 k_j 个特征值（按重数计）。

(b) 由于 L_a 在区间 $[b, \Lambda_1(a) - r]$ 和 $[\Lambda_j(a) + r, \Lambda_{j+1}(a) - r]$（其中 $j = 1, 2, ..., p$）内没有特征值，按照上述方法论证可得，L_t 对于 $t \in (a-\delta, a+\delta)$ 也在这些闭区间内没有特征值。因此，L_t 对于 $t \in (a-\delta, a+\delta)$ 的特征值中，落在 $(\Lambda_j(a) - r, \Lambda_j(a) + r)$ 内的为 $\lambda_{s_{j-1}+1}(t)$ $\lambda_{s_{j-1}+2}(t)$ ..., $\lambda_{s_j}(t)$，其中 $j = 1, 2, ..., p$.

■

现在，利用这些结论，我们证明本节的主要结果。

定理 2 (a) 对每个 n，在 (3) 中定义的函数 λ_n 在 $a \in (-\pi, \pi]$.(b) 处连续。对每个 $f \in L_2^m[0, 1]$，当 $t \to a$ 时，我们有 $\|P_t f - P_a f\|_\infty \to 0$，其中

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| .$$

证明。(a) 任取一个序列 $\{(\lambda_n(t_k)\ t_k):\ k\in\mathbb{N}\}$，满足对所有 $k\in\mathbb{N}$ 都有 $t_k\in(a-\delta,a+\delta)$，且当 $k\to\infty$ 时 $t_k\to a$，其中 δ 在定理 1 中定义。设 (λ,a) 是序列 $\{(\lambda_n(t_k)\ t_k):\ k\in\mathbb{N}\}$. 的任意一个极限点。由于 Δ 关于变量对 (λ,t) 是连续函数，且对所有 k，$\Delta(\lambda_n(t_k)\ t_k)=0$，因此我们有 $\Delta(\lambda,a)=0.$。这意味着，λ 是 L_a 的一个特征值，且位于 $(\Lambda_j(a)-r,\Lambda_j(a)+r)$ 内。因此，根据定理 1(b)，我们有 $\lambda=\lambda_{s_{j-1}+1}(a)=\lambda_{s_{j-1}+2}(a)=...=\lambda_{s_j}(a)$，其中 $n\in[s_{j-1}+1,s_j].$。于是，对于任意收敛到 a 的序列 $\{t_k:\ k\in\mathbb{N}\}$，当 $k\to\infty$ 时，$\lambda_n(t_k)\to\lambda_n(a)$；并且 λ_n 在 a 处连续。

(b) 利用（10）-（12），我们得到以下估计

$$|P_tf(x)-P_af(x)|=\left|\int_{D_j(a)}\int_0^1\left(G(x,\xi,\lambda,t)-G(x,\xi,\lambda,a)\right)f(\xi)d\xi d\lambda\right|\leq$$

$$2\pi rM\left|t-a\right|\int_0^1\left|f(\xi)\right|d\xi$$

对所有 $x\in[0,1].$，该估计证明了（b）。 ■

注意，在 [9]，中，利用 [3] 中的扰动理论证明了 $\nu=1$ 情形下能带函数的连续性。在 [10]，中，我们研究了微分算子T。该算子作用于空间 $L_2^m(\mathbb{R}^d)$，由一个阶数为2ν、具有矩阵系数的形式自伴微分表达式生成，其系数项关于格 Ω 周期，其中$d\geq1$。注意，T 的带函数 $\lambda_1(t)\leq\lambda_2(t)\leq\cdots$ 和布洛赫函数 $\Psi_{1,\ t},\Psi_{2,\ t},...$，是由同一微分表达式及拟周期条件在 $L_2^m(F)$ 中生成的算子 T_t 的特征值和归一化特征函数

$$u(x+\omega)=e^{i\langle t,\omega\rangle}u(x),\ \forall\omega\in\Omega,$$

其中 $t\in F^\star$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的内积，F 和 $F^\star$ 分别是格 Ω 及其对偶格 Γ 的基本域。在 [10], 中已证明，微分算子 T_t 的布洛赫特征值及相应投影关于 $t\in F^*$ 连续。此外，若 $\lambda_n(a)$ 是单特征值，则在 a 的某个邻域内，特征值 $\lambda_n(t)$ 是单特征值，且相应的特征函数 $\Psi_{n,\ t}$ 可以选取为满足

$$\|\Psi_{n,t}-\Psi_{n,a}\|\to0$$

如 $t\to a$。在 [10], 中，布洛赫函数 $\Psi_{n,\ t}$ 的选取使得

$$\arg(\Psi_{n,t},\Psi_{n,a})=0 \tag{13}$$

这并非构造性选择。

现在，我们不采用（13），而是构造性地定义归一化特征函数 $\Psi_{n,\ t}$，使其连续依赖于 $t.$。首先，请注意以下显而易见的结论。若 $\lambda_n(t)$ 是单特征值，则所有与之对应的归一化特征函数构成的集合为 $\left\{e^{i\alpha}\Psi_{n,t}:\ \alpha\in[0,2\pi)\right\}$，其中 $\Psi_{n,\ t}$ 是一个固定的归一化特征函数。若特征值 $\lambda_n(a)$ 是单的，则存在点 $a\in F^\star$ 的一个邻域 $U(a)$，使得对于 $t\in U(a)$，特征值 $\lambda_n(t)$ 也是单的，并且等式

$$\int_D(T_t-\lambda I)^{-1}e^{i\langle a,x\rangle}e_kd\lambda=(e^{i\langle a,x\rangle}e_k,e^{i\alpha}\Psi_{n,t})e^{i\alpha}\Psi_{n,t}=(e^{i\langle a,x\rangle}e_k,\Psi_{n,t})\Psi_{n,t} \tag{14}$$

对于归一化特征函数 $\Psi_{n,\ t}$ 的任意选择，该结论均成立，其中 D 是一条仅包围特征值 $\lambda_n(t)$ 的闭曲线，而 e_1、e_2、...、e_m 是 $\mathbb{C}^m.$ 的标准基。由于对应于特征值 $\lambda_n(t)$ 的子空间上的投影算子随 $t\in U(a)$ 连续变化，且范数是连续函数，由 (14) 可得 $\left|(\Psi_{n,\ t},\ e^{i\langle a,\ x\rangle}e_k)\right|$

对于任意归一化特征函数 $\Psi_{n,\ t}$，它关于 t 在 $U(a)$ 中也连续变化。由此以及不等式

$$\left|\left|(\Psi_{n,t}, e^{i\langle t,x\rangle}e_k)\right| - \left|(\Psi_{n,t}, e^{i\langle a,x\rangle}e_k)\right|\right| \le \left\|e^{i\langle t,x\rangle} - e^{i\langle a,x\rangle}\right\| \tag{15}$$

给出以下显然的陈述。

命题 1 若 $\lambda_n(a)$ 是单特征值，则函数 $\left|(\Psi_{n,\ t}, e^{i\langle t,\ x\rangle}e_k)\right|$ 不依赖于归一化特征函数 $\Psi_{n,\ t}$ 的选取，并且在 a 的某个邻域 $U(a)$ 内连续，其中 $U(a) \subset F^*$，且任何满足以下条件的集合 E：

(a) $\{\gamma + t : t \in E,\ \gamma \in \Gamma\} = \mathbb{R}^d$，以及 (b) 若 $t \in E$，
则对于任意 $\gamma \in \Gamma\setminus\{0\}$，$\gamma + t \notin E$ 可用作 Γ. 的基本域
$F^\star$

由于 $\left\{e^{i\langle\gamma+t,x\rangle}e_k : \gamma \in \Gamma,\ k = 1, 2, ..., m\right\}$ 是 $L_2^m(F)$ 的标准正交基，因此存在 $\gamma \in \Gamma$，$k \in \{1, 2, ..., m\}$ 和 $\varepsilon > 0$，使得

$$\left|(\Psi_{n,a}, e^{i\langle\gamma+a,x\rangle}e_k)\right| > \varepsilon. \tag{16}$$

例如，若 $\left|(\Psi_{n,\ a}, e^{i\langle\gamma+a,\ x\rangle}e_k)\right| = \max_{\beta\in\Gamma}\left|(\Psi_{n,\ a}, e^{i\langle\beta+a,\ x\rangle}e_k)\right|$，则 (16) 成立。注意，若 F^* 是 Γ 的一个基本域，则对于任意 $\gamma \in \Gamma$，$\gamma + F^*$，甚至对于任意 $b \in \mathbb{R}^d$，$b + F^*$ 都是格 Γ. 的一个基本域。因此，不失一般性且为使记号简洁，我们将使用 a 代替 $\gamma + a$，并假设 a 是 F^*. 的内点。因此，由命题 1 和 (16) 可知，存在 a 的一个邻域 $U(a)$，使得

$$\left|(\Psi_{n,t}, e^{i\langle t,x\rangle}e_k)\right| > \varepsilon \tag{17}$$

对于所有 $t \in U(a)$，归一化特征函数 $\Psi_{n,\ t}$ 均可选取为满足

$$\arg(\Psi_{n,t}, e^{i\langle t,x\rangle}e_k) = 0. \tag{18}$$

于是 $(\Psi_{n,\ t}, e^{i(t,x)}e_k) = \left|(\Psi_{n,\ t}, e^{i(t,x)}e_k)\right|$，因此根据命题 1，$(\Psi_{n,\ t}, e^{i\langle t,\ x\rangle}e_k)$ 关于 t 在 a. 的某个邻域内连续。从这一点出发，结合（15）和（17），可得

$$\frac{(\Psi_{n,t}, e^{i\langle a,x\rangle}e_k)}{(\Psi_{n,a}, e^{i\langle a,x\rangle}e_k)} =: \alpha(t) \to 1$$

as $t \to a$. 因此，利用（14）右端的连续性以及（17），我们得到 n

$$\left\|(e^{i\langle a,x\rangle}e_k, \Psi_{n,t})\Psi_{n,t} - (e^{i\langle a,x\rangle}e_k, \Psi_{n,a})\Psi_{n,a}\right\| \to 0$$

并且当 $t \to a$. 时，$\|\alpha\ (t)\ \Psi_{n,\ t} - \Psi_{n,\ a}\| \to 0$。于是，我们有

$$\|\Psi_{n,t} - \Psi_{n,a}\| \le \|(1 - \alpha(t))\Psi_{n,t}\| + \|\alpha(t))\Psi_{n,t} - \Psi_{n,a}\| \to 0 \tag{19}$$

当 $t \to a$. 时。换言之，以下结论得以证明。

命题 2 若 λ_n（a）是一个单特征值，且（17）成立，则满足（18）的归一化特征函数 $\Psi_{n,\ t}$ 关于 t 在 U（a）中连续。

注1 请注意，构造性选择 (18) 也用于 *[7, 8]*。也就是说，在 *[8]*中，对于方程 (1) 右端等于 $-\Delta + q$ 且 $m = 1$（对于 Schr ¨inger 算子）的情形，在球面 $\left\{t \in \mathbb{R}^d : |t| = \rho\right\}$ 的邻域内，其中 ρ 是一个较大的数，I

构造了一个集合 B，使得若 $t \in B$，则存在唯一的特征值 $\lambda_{n(t)}(t)$，它是单重的且接近 $|t|^2$，相应的归一化特征函数 $\Psi_{n,\ t}$ 满足渐近公式

$$\left|(\Psi_{n,t}, e^{i\langle t,x\rangle})\right|^2 = 1 + O(\rho^{-\delta}) > \tfrac{1}{2} \tag{20}$$

对于某个 $\delta > 0$. 此外，归一化特征函数的选取使得式 (18) 成立（见*[8],* 第 55 页）。在 *[8]* 中，作出选择 (18) 是为了将 (20) 写成优美的形式$\Psi_{n,t} = e^{i\langle t,x\rangle} + O(\rho^{-\delta})$。然而，在命题 2 中，我们证明了选择 (18) 保证了 $\Psi_{n,t\cdot}$ 的连续性。请注意，对于薛定谔算子而言，命题 2 也是新的。然而，对于薛定谔算子，命题 1 是显然的，因为它直接由函数 $e^{i\langle t,x\rangle}$、投影算子和范数的连续性推出。命题 1 和 (20) 被用于 *[8]* 证明：对于所有 $t \in U(a)$，有 $n(t) = n(a)$（见 *[8]*中的 (5.11)），其中 $U(a) \subset B$，且命题 1 的条件 (*b*) 成立（见*b*的引理 5.1(*[8]*)），即，对于某个基本域 F^*.，有$U(a) \subset (B \cap F^*)$

现在让我们回到对 L.的研究

定理 3 如果 $\lambda_n(a)$ 是一个单特征值，那么存在 $\beta > 0$，使得特征值$\lambda_n(t)$ 对于 $|t-a| < \beta$ 也都是单特征值，并且满足 (17) 和 (18) 的 $\langle t, x\rangle = tx$ 的归一化特征函数 $\Psi_{n、\,t}$ 趋于 $\Psi_{n、\,a}(x)$，且关于$x \in [0,1]$ 一致，当 $t \to a$ 时。

证明。如果 $\lambda_n(a)$ 是一个单特征值，那么 $\frac{d\Delta}{(\lambda-a)\,d\lambda} \neq 0$ 对于 $\lambda = \lambda_n(a)$。于是根据总结 1 、定理 2(*b*) 和 (14)，存在 $\beta > 0$，使得 $\lambda_n(t)$ 对于$|t-a| < \beta$ 也是一个单特征值，并且

$$\left\|(e^{iax}e_k, \Psi_{n,t})\Psi_{n,t} - (e^{iax}e_k, \Psi_{n,a})\Psi_{n,a}\right\|_\infty \to 0 \tag{21}$$

当 $t \to a.$ 时。此外，由(21)和(17)可知，存在 $\varepsilon > 0$ 和 M，使得$|\Psi_{n、\,t}(x)| \le M$ 对于所有 $|t-a| < \varepsilon$ 和 $x \in [0,1].$ 均成立。因此，将各处的 L_2 范数 $\|\cdot\|$ 替换为范数 $\|\cdot\|_\infty$，并重复(19)的证明，即得定理的证明。 ■

2 关于 L 的谱

本节研究 L 的谱。为此，我们考虑由微分表达式生成的算子 $L_t(\varepsilon, C)$

$$L_t(\varepsilon, C)y = (-i)^{2\nu}y^{(2\nu)} + Cy^{(2\nu-2)} + \varepsilon\left((P_2 - C)y^{(2\nu-2)} + \sum_{l=3}^{2\nu} P_l(x)y^{(2\nu-l)}\right)$$

以及边界条件 (2)，其中 $\varepsilon \in [0,1]$，而 C 定义于 (5)。我们将算子 $L_t(\varepsilon, C)$ 视为由 $L_t(\varepsilon, C) - L_t(C)$ 对 $L_t(C)$ 施加的扰动，其中 $L_t(C)$ 是由表达式生成的算子

$$(-i)^{2\nu}y^{(2\nu)}(x) + Cy^{(2\nu-2)}(x) \tag{22}$$

以及边界条件 (2)。因此，首先让我们分析算子 $L_t(C)$的特征值和特征函数。我们假设 C 是厄米矩阵。那么$L_t(C)$是自伴算子，因为表达式 (22) 和边界条件 (2) 都是自伴的。 C 的互异特征值记为 $\mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_p$。若 μ_j的重数为 m_j，则 $m_1 + m_2 + ... + m_p = m$。设$u_{j,\ 1}$， $u_{j,\ 2}$，...，$u_{j,\ m_j}$为矩阵 C 对应于特征值 μ_j. 的归一化特征向量。函数

$\Phi_{k,\ j,\ s,\ t}(x)=u_{j,\ s}e^{i(2\pi k+t)x}$ （ $s=1$、2、...、 m_j ）是算子 $L_t(C)$对应于特征值的特征函数

$$\mu_{k,j}(t)=(2\pi k+t)^{2\nu}+\mu_j\,(2\pi k+t)^{2\nu-2}\,, \tag{23}$$

因为

$$L_t(C)\Phi_{k,j,s,t}(x)=\mu_{k,j}(t)\Phi_{k,j,s,t}(x). \tag{24}$$

现在我们考察 $L_t(\varepsilon,C)$ 的大特征值。在下文的不等式中，我们用 $c_1, c_2, ...$ 表示不依赖于 $t\in(-\pi,\pi]$ and $\varepsilon\in[0,1]$的正常数。

定理 4 存在一个正常数 N ，使得 $L_t(\varepsilon,C)$ 的特征值中，落在 $(\mu_{N,1}(t)-\varepsilon_N,\infty)$ 内的特征值均落在 ε_k邻域 $U_{\varepsilon_k}(\mu_{k,j}(t)):=(\mu_{k,j}(t)-\varepsilon_k,\mu_{k,j}(t)+\varepsilon_k)$ of$\mu_{k,j}(t)$ 内，其中 $|k|\geq N$and $j=1, 2, ..., p$，且 $\varepsilon_k=c_1\left(|\,k^{-1}\ln|k|\,|+q_k\right)(2\pi k)^{2\nu-2}$ and

$$q_k=\max\left\{\left|\int_{[0,1]}p_{2,s,r}(x)\,e^{-2\pi inx}dx\right|:s,r=1,2,...,m;\ n=\pm2k,\pm(2k+1)\right\}.$$

此外，对于每个 $|k|\geq N$and $j=1, 2,..., p$， $L_t(\varepsilon,C)$ 都存在一个特征值落在 $U_{\varepsilon_k}(\mu_{k,j}(t))$ 内。

证明。设 λ 是 $L_t(\varepsilon,C)$ 的特征值，它位于 $(\mu_{N,\ 1}(t)-\varepsilon_N,\infty)$ 内，且 $\mu_{k,\ j}(t)$ 是 $L_t(C)$ 中最接近 $\lambda.$ 的特征值。我们证明 $\lambda\in U_{\varepsilon_k}(\mu_{k,\ j}(t))$。为此，我们使用公式

$$(\lambda-\mu_{k,j}(t))(\Psi_{k,j,s,t},\Phi)=\varepsilon\left(((P_2-C)\Psi_{k,j,s,t}^{(2\nu-2)},\Phi)+\sum_{l=3}^{2\nu}(P_\nu\Psi_{k,j,s,t}^{2\nu-l},\Phi)\right) \tag{25}$$

该公式可由 $L_t(\varepsilon,C)\Psi=\lambda\Psi$ 两边分别乘以 $\Phi_{k,\ j,\ s,\ t}(x)$ 并利用 (24) 得到，其中 Ψ 是 $L_t(\varepsilon,C)$ 对应于特征值 $\lambda.$ 的归一化特征函数。文献 [6] 证明了存在 c_2 ，使得

$$\left|((P_2-C)\Psi_{k,j,s,t}^{(2\nu-2)},\Phi)+\sum_{l=3}^{2\nu}(P_l\Psi_{k,j,s,t}^{2\nu-l},\Phi)\right|\leq c_2\left(|\,\frac{\ln|k|}{k}\,|+q_k\right)(2\pi k)^{2\nu-2} \tag{26}$$

当 $|k|\geq N$ 时成立（参见文献 [6]中的 (51) 和 (54)）。此外，根据文献 [6], 的引理 4，对于 $L_t(C)$ 的每个特征函数 $\Psi_{k,\ j,\ s,\ t}$ ，若满足 $|k|\geq N$ ，则存在 $L_t(\varepsilon,C)$ 的一个特征函数 Φ ，使得

$$|(\Psi_{k,j,s,t},\Phi)|>c_3 \tag{27}$$

反过来，对于对应于 $L_t(\varepsilon,C)$的特征值、且其位于$(\mu_{N,\ 1}(t)-\varepsilon_N,\infty)$内的每个特征函数 Φ ，都存在满足（27）的$\Psi_{k,\ j,\ s,\ t}$。因此，在（25）中使用（26）和（27），即可得到定理的证明。■

现在，利用定理 4，并重复定理 2.3、推论 2.4 和定理 2.5 的证明，我们得到关于能带和谱隙的下述定理。

定理 5（a） 存在一个正整数 N_1 ，使得若 $s\geq N_1$ ，则区间$[a(s),\ b(s)]$ 包含于每个能带 I_{sm+1}、I_{sm+2}、.....、 I_{sm+m}中，其中

$$a(s)=(s\pi)^{2v}+\mu_p\,(\pi s)^{2\nu-2}+\varepsilon(s),\ b(s)=(s\pi+\pi)^2+\mu_1\,(s\pi+\pi)^{2\nu-2}-\varepsilon(s),$$

I_n 在（4）中定义；若 $s\in\{2k,2k+1\}$ ，则 $\varepsilon(s)=\varepsilon_k$ ；而 ε_k 在定理 4 中定义。

(b) 设 (α,β) 为 L 的谱隙，使得 $\alpha>b(N_1)$。则 (α,β) 包含于区间 $U(s)$ 中：$=(b(s)\ a(s+1))$，其中某个 $s\geq N_1$。此外，谱隙 $(\alpha,\beta)\subset U(s)$ 位于能带 $I_{sm+m}(Q)$ 与 $I_{sm+m+1}(Q)$ 之间，其长度不超过 $2\max\{\varepsilon(s)\ \varepsilon(s+1)\}$.

为了详细研究 $\sigma(L)$，利用渐近公式时，我们需要考察 $L_t(C)$ 的特征值的重数以及 $L(C)$ 的谱的例外点。若对于所有 $(n,i) \neq (k,j)$，$\mu_{k,j}(t) \neq \mu_{n,i}(t)$，则 $\mu_{k,j}(t)$ 的重数为 m_j。$\mu_{k,j}(t)$ 的重数发生变化，即当 $\mu_{k,j}(t) = \mu_{n,i}(t)$ 对某个 $(n,i) \neq (k,j)$ 成立时，$\mu_{k,j}(t)$ 是 $\sigma(L(C))$ 的例外点。为考察 $\sigma(L(C))$ 和 $\sigma(L)$ 的例外点，我们采用记号 $a_k \asymp b_k$，这意味着存在常数 c_4, c_5, c_6，使得对于所有 $|k| > c_6.$，$c_4|a_k| < |b_k| < c_5|a_k|$。由 (23) 可知，若 $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$，则对于 $j \neq i$，$\mu_{k,j}(t) - \mu_{k,i}(t) \asymp k^{2\nu-2}$；并且对于 $n \neq k$，$-k, -(k+1)$，$|\mu_{k,j}(t) - \mu_{n,i}(t)| \geq d_k$，其中 $d_k \asymp k^{2\nu-1}.$。因此，$\mu_{k,j}(t)$ 的大特征值在 $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 时，如果以下等式中至少有一个成立，可能成为 $L(C)$ 的例外布洛赫特征值

$$\mu_{k,j}(t) = \mu_{-k,i}(t),\ \mu_{k,j}(t) = \mu_{-k-1,i}(t). \tag{28}$$

因此，我们需要考察那些使 (28) 中的等式不成立的点 $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$。此外，为了证明 L_t 的特征值中位于 $\varepsilon_k = o(k^{2\nu-2})$ 邻域 $\mu_{k,j}(t)$ 内的特征值（见定理 4），不会与位于 ε_{-k} 及 ε_{-k-1} 邻域 $\mu_{-k,i}(t)$ 和 $\mu_{-k-1,i}(t)$ 内的特征值重合，我们考察那些使

$$|f(t)| > \varepsilon_k + \varepsilon_{-k},\ |g(t)| > \varepsilon_k + \varepsilon_{-k-1}, \tag{29}$$

其中 $f(t) = \mu_{k,j}(t) - \mu_{-k,i}(t)$ $g(t) = \mu_{k,j}(t) - \mu_{-k-1,i}(t)$。利用 (23) 以及 $(a+b)^n$ 的二项式展开，对于 $n = 2\nu$ 和 $n = 2\nu - 2$，我们得到

$$f(t) = (2\pi k)^{2\nu-2}(8\nu k\pi t + \mu_j - \mu_i) + O(k^{2\nu-3}),\ f\left(\frac{\mu_i - \mu_j}{8\nu k\pi}\right) = O(k^{2\nu-3}).$$

另一方面，容易验证 $f'(t) \asymp k^{2\nu-1}.$。因此，存在 $\delta_k = o(k^{-1})$，使得当 t 不属于区间时，(29) 中的第一个不等式成立

$$\left(\frac{\mu_i - \mu_j}{8\nu k\pi} - \delta_k, \frac{\mu_i - \mu_j}{8\nu k\pi} + \delta_k\right).$$

同理可证明，如果 t 不属于该区间

$$\left(\pi + \frac{\mu_i - \mu_j}{4\pi\nu(2k + 2\nu - 1)} - \delta_k, \pi + \frac{\mu_i - \mu_j}{4\pi\nu(2k + 2\nu - 1)} + \delta_k\right),$$

则（29）中的第二个不等式成立。因此，利用（29）和定理 4，并重复 [9] 中推论 2.8 和定理 2.10 的证明，我们得到。

定理 6（a）存在 $N_2 > N_1$ 和 $\gamma_k = o\left(k^{2\nu-2}\right)$，使得定理 5 中定义的、位于 $U(k)$ 中的谱隙（α，β）对于 $k > N_2$ 包含于集合 $S(1,k)$ $S(2,k)$ ..., $S(p,k)$ 的交集内，其中

$$S(j,k) = \bigcup_{i=1,2,\ldots,p} \left((\pi k)^{2\nu} + \frac{\mu_i + \mu_j}{2}(\pi k)^{2\nu-2} - \gamma_k, (\pi k)^{2s} + \frac{\mu_i + \mu_j}{2}(\pi k)^{2\nu-2} + \gamma_k\right).$$

(b) 若存在三元组 (j_1, j_2, j_3) 使得

$$\min_{i_1,i_2,i_3} (diam(\{\mu_{j_1} + \mu_{i_1}, \mu_{j_2} + \mu_{i_2}, \mu_{j_3} + \mu_{i_3}\})) \neq 0, \tag{30}$$

其中，最小值是在满足条件 $i_s \in \{1, 2, ..., p\}$ 的情况下对 $s = 1$、2、3 取的，并且

$$diam(E) = \sup_{x,y \in E} \mid x - y \mid,$$

那么，存在一个数 H，使得 $(H, \infty) \subset \sigma(L)$，且 $\sigma(L)$ 中谱隙的数量有限。

参考文献

[1] Danford N、Schwartz JT。《线性算子（第二部分）：谱理论》，美国纽约：Wiley-Interscience，1988。[2] Gelfand IM. 具有周期系数的方程的特征函数级数展开。《苏联数学文献》1950；73：1117-1120。[3] Kato T.《线性算子的扰动理论》，德国柏林：Springer-Verlag，1980。[4] McGarvey DC. $L_p(-\infty, \infty)$ 中具有周期系数的微分算子，《数学分析与应用杂志》1965；11：564-596。[5]Naimark MA.《线性微分算子》，英国伦敦：George G. Harap&Company，1967。[6] Veliev OA. 关于具有周期矩阵系数的微分算子，《抽象与应用分析》2009；ID 934905：1-21。https://doi.org/10.1155/2009/934905[7]Veliev OA. 多维周期薛定谔算子，瑞士查姆：Springer，2019。[8] Veliev OA. 多维周期薛定谔算子的扰动理论与贝特-索末菲猜想，《当代数学国际期刊》2007；2(2)：19-87。http://dx.doi.org/10.12988/ijcms.2007.07003[9] Veliev OA. 关于具有矩阵势的薛定谔算子的能带，《数学新闻》2023；1-11。https://doi.org/10.1002/mana.202100481。[10] Veliev OA. 关于能带函数和布洛赫函数，《土耳其数学杂志》2023；47 (1)：248-255。https://doi.org/10.55730/1300-0098.3357