arXiv:2302.11819v1 [math-ph] 23 Feb 2023

洛伦兹长度空间的紧致菱形空间

Waldemar Barrera、Luis Montes de Oca、Didier A. Solis

2023年2月24日

摘要

本文为洛伦兹预长度空间引入了出租车乘积和一致乘积。我们还利用这些概念，为因果菱形的空间$\mathcal{D}(\mathbb{R} \times_T X)$赋予洛伦兹长度空间结构，使其因果性质与其作为度量空间（配备相应豪斯多夫距离）的几何性质密切相关。在一般性结果中，我们证明，对于完备长度空间(X, d)，该空间是测地的且整体双曲。

关键词： *Lorentzian length spaces, Causality, Hyperspaces*

MSC 分类 *53C23, 53C22, 51F30, 54F16, 83C99*

1 引言

过去几年，人们对探索洛伦兹几何中成熟概念的综合性替代方案表现出浓厚兴趣。Kunzinger 和 S¨amann 关于洛伦兹长度空间的开创性工作 [33] 为在相对论领域引入此类方法铺平了道路。目前，其他有前景的研究路径也在发展之中，例如洛伦兹度量空间 [41] 或近似洛伦兹长度空间 [42]，仅举几例。这些进展有望为分析物理情景提供实用工具；在这些情景中，人们不再假设标准的正则框架（至少是 C^2），无论这是理论研究的出发点——例如，考虑 $C^{1,1}$[21, 23, 35, 36]，C^1 [22, 32]甚至 C^0 [19, 16, 24, 20, 48] 度量时——还是为了进一步理解近期对黑洞并合和引力波的观测 [18, 37]。

Kunzinger 和 S¨amann 的研究奠基于通过 *Lorentzian pre-length space* 这一概念公理化时空的基本因果性质；该概念可视为对因果空间概念的细化，而因果空间最早由 Kroenheimer 和 Penrose 于数学相对论发展的早期提出 [31]。为了说明在公理基础上构建因果理论的价值，我们列举量子引力的因果集方法（见 [50] 及其中的参考文献），该方法完全不考虑时空度量。其存在

如 [33]，所提出的时间分离函数，使应用范围得以扩展至先验未给定正则时空度量的情形，例如具有类时边界的洛伦兹流形 [2], 、全局双曲时空的因果完备化 [1] ，甚至某些接触结构 [27]。

此外，通过考察一类适当的因果曲线，可以定义曲率界的综合性概念，并以类似于亚历山德罗夫理论和 CAT(k) 度量长度空间这一成熟理论的方式，分析其与测地结构的关系 [12]。在这方面，目前正在洛伦兹长度空间情形下开展若干受该理论启发的研究。例如，托波诺戈夫型三角形比较 [6], ，以及双曲角和指数映射的存在性 [10]。这些结果的应用包括粘合与合并 [9], ，以及一个分裂定理；该定理推广了关于具有非正类时截面曲率的洛伦兹流形的里程碑式结果 [11]。

事实上，曲率界是度量长度空间领域一些最引人瞩目的结果的基础，例如格罗莫夫著名的预紧性定理 [26, 47]。回顾一下，这些结果可以解释为：在格罗莫夫–豪斯多夫收敛下，曲率界具有稳定性。因此，在适当的收敛概念下，探究洛伦兹长度空间理论不同方面的稳定性是很自然的。例如，在 [34] 中，Kunzinger 和 Steinbauer 通过 Sormani 与 Vega 首先引入的零距离 [49]，研究了一类扭曲积时空在格罗莫夫–豪斯多夫收敛下曲率界的行为。与格罗莫夫距离概念密切相关的理论的另一个关键方面在 [39], 中得到了研究，其中 McCann 和 S¨amann 在洛伦兹长度空间的背景下建立了豪斯多夫测度和维数的概念。需要强调的是，在本研究中，因果菱形发挥着基础性作用，正如（紧）度量球在度量长度空间背景下所发挥的作用一样。

本文旨在初步探讨整体双曲洛伦兹预长度空间（X，d，$\ll$，$\leq$，τ）中因果菱形空间的结构，该空间配备由 d诱导的豪斯多夫距离 d_H。回顾一下，由度量空间中紧子集族——或其等距类——所得到的度量空间通常称为 $hyperspaces$ ；对它们的研究是连续统理论 [44, 29] 以及无限维拓扑流形和函数空间 [14, 51]的基石。从拓扑角度看，Curtis 的著名定理指出，紧子集的超空间 $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$与去掉一个点的希尔伯特立方体[17], 同胚；而关于豪斯多夫-格罗莫夫距离 [4, 5]下等距类的超空间 $\mathbb{GH}(\mathbb{R}^n)$，也有类似的刻画。尽管已有这些精确的拓扑描述，超空间的测地线结构在很大程度上仍未得到探索。例如，直到最近，人们才确立了 $\mathbb{GH}(\mathbb{R}^n)$的内蕴性质 [15, 30]。此外，根据著名的格罗莫夫嵌入引理，一个紧致度量空间族可以嵌入到一个配备豪斯多夫距离 [25]的 ℓ^∞ 空间中。因此，探索因果菱形空间相对于豪斯多夫距离的测地线结构，是理解其对应格罗莫夫

豪斯多夫超空间。我们聚焦于洛伦兹出租车空间这一类，精确描述了闵可夫斯基空间的因果菱形空间，并证明其具有全局双曲洛伦兹长度空间的结构，因此满足德阿韦-赛弗特性质。此外，我们还给出了连接任意一对因果相关菱形的极大曲线的显式参数化。

本文的结构如下。第 2 节给出基本定义，并确定本文将使用的记号。第 3 节介绍洛伦兹预长度空间与度量空间的洛伦兹出租车乘积，以及两个洛伦兹预长度空间的洛伦兹一致积，并进一步研究洛伦兹出租车乘积 $\mathbb{R}^1_1 \times_T X$ 的情形。在第 4 节中，我们证明洛伦兹预长度空间的紧子集所成的超空间可以赋予这种结构。最后，作为这一基本结果的应用，我们在第 5 节研究因果菱形$\mathcal{D}(\mathbb{R}^1_1 \times_T X)$ 所成的空间，证明它具有全局双曲洛伦兹长度空间的结构，为一族极大类时曲线给出显式参数化，并将其明确实现为洛伦兹一致积的一个子空间。

2 预备知识

本节将介绍洛伦兹长度空间和豪斯多夫距离的基本概念。

2.1 洛伦兹长度空间

数学相对论有两个根植于洛伦兹几何的基本方面。一方面是因果结构，另一方面是时空的局部闵可夫斯基性质；前者源于向量的因果性质，后者则源于指数映射的性质。任何试图将时空的基本性质公理化的尝试，都必须以不依赖光滑度量张量存在性的方式考虑这些问题。在他们的开创性工作中，Kunzinger 和 S¨amann 通过将因果性编码在洛伦兹预长度空间的定义中，并借助所谓的局部化邻域描述局部结构，提出了因果曲线的洛伦兹长度这一原创概念（详见 [33] ）。

定义 2.1. *A Lorentzian pre-length space is quintuple* $(X, d, \ll, \leq, \tau)$ *where* (X, d) *is a metric space and*

1. $\ll$ *and* $\leq$ *are two relations in* X *that satisfy*
   - $\leq$ *is a pre-order.*
   - $\ll$ *is a transitive relation containing* $\leq$.[1]

[1]在 [31] Kronheimer 和 Penrose 将 *causal space* 定义为三元组 $(X, \ll, \leq)$，它满足性质 (1) 以及因果性公理： $x \leq y$ 和 $y \leq x \Leftarrow x = y$。

2. τ: $(X,\ d)\ \to [0,\infty]$ *is a lower semi-continuous function for which the reverse triangle inequality holds:*

$$\tau(x,z) \geq \tau(x,y) + \tau(y,z), \quad \forall x \leq y \leq z.$$

在此设定下，$\ll$ 和 $\leq$ 分别是 *chronological* 和 *causal* 关系；而 τ 称为 *time separation function.* 关系$\ll$、$\leq$ 使我们能够以标准方式定义按时集和因果集：

$$I^+(x) = \{y \in X \mid x \ll y\}, \qquad J^+(x) = \{y \in X \mid x \leq y\},$$
$$I^-(x) = \{y \in X \mid y \ll x\}, \qquad J^+(x) = \{y \in X \mid y \leq x\}.$$

例 2.2. *The set of real numbers* $X = \mathbb{R}$ *is a Lorentzian pre-length space when we define the chronological and casual relations by* $<$ *and* $\leq$*, respectively. Here* $d\ x\ y\ = |y - x|$ *and* $(,\ )$

$$\tau(x,y) = \begin{cases} y - x & \text{if } x < y, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In what follows, we will denote this Lorentzian pre-length space by $\mathbb{R}^1_1$.

例 2 3 *Any smooth spacetime* $M\ g$ *is a Lorentzian pre-length space when we consider any metric* d *inducing the manifold topology. The* $(,\ )$ *relations* $\ll$ *and* $\leq$ *as well as the time separation function* τ *are the standard ones constructed from the Lorentzian metric* g.

洛伦兹预长度空间具有足够的结构，能够保证因果理论中最基本的结果。根据定义，我们可以直接得到以下引理。

引理 2.4. *Let* $(X,\ d,\ \ll,\ \leq,\ \tau)$ *be a Lorentzian pre-length space, then*

1. *The chronological sets* $I^+(x)$ $I^-(x)$ *are open in* (X, d).
2. *If* $x \leq y \ll z$ *or* $x \ll y \leq z$ *then* $x \ll z$. *(Push-up property).*

关系 $\ll, \leq$ 可用于定义洛伦兹预长度空间中的因果曲线类。若利普希茨连续曲线 $\alpha : I \to (X,\ d)$ 满足：对任意 $t < s$，都有 $\alpha(t) \ll \alpha(s)$ $(\alpha(t) \leq \alpha(s))$，则称其为 *future timelike (causal)*。过去类时曲线和因果曲线的定义类似。若一条曲线是因果曲线，且其任意两点均不类时相关，则称其为 *null*[2]。注意，由于关系 $\ll, \leq$ 并非根据曲线定义，因此可能存在因果相关的点对，却无法用任何因果曲线连接。若洛伦兹预长度空间 $(X,\ d,\ \ll,\ \leq,\ \tau)$ 中任意类时相关（因果相关）点对之间都存在连接它们的类时曲线（因果曲线），则称其为 *causally path connected*。

正规邻域对于描述光滑时空的局部几何至关重要。洛伦兹长度空间中的对应概念是 *localizing neighborhoods*。

[2]注意，如果一个光滑时空 (M, g) 不存在闭因果曲线，那么曲线因果性质的这一概念就与通常的概念一致。

定义 **2 5** *Let* $X\ d \ll \leq \tau$ *be a causally path connected Lorentzian*.. *pre-length space. A neighborhood* $_x$ *around* $x \in X$ *is localizing if there* (,,,) Ω*exists a continuous functions* $\omega_x : \Omega_x \times \Omega_x \to [0, \infty)$ *for which*

1. (Ω $_x$ $d|_{\Omega_x \times\ _x} \ll_{\Omega_x} \leq_{\Omega_x} \omega_x$ *is a Lorentzian pre-length space where*, $\leq_{\Omega_x} \ll_{\Omega_x}$ *denote the relations induced by* $\ll\ \leq$ *in* $_x$[3]. Ω,,,) ,,,Ω*2.* $I^{\pm}(y) \cap \Omega_x \neq \emptyset$, *for all* $y \in \Omega_x$ *.3. All causal curves contained in* Ω_x *have uniformly bounded d-length.4. For all* $p \neq q \in \Omega$ $_x$ *with* $p \leq q$ *there exists a future causal curve* γ_{pq} *contained in* $_x$ *such that* $L_\tau\ \gamma_{pq} = \omega_x\ p\ q$ *and whose* τ*-length is*Ω () *maximal among all future causal curves from* p *to* q *lying in* $_x$. (,) Ω

If in addition, the following holds: if $p \ll q$ *then* γ_{pq} *is timelike and* $L\ \gamma_{pq} > L\ \gamma$ *for each causal curve containing a null segment then we* () () ,正则 *say the neighborhood is* .

粗略地说，洛伦兹长度空间是一个预长度空间，其局部结构由定位邻域提供，并且其时间分离函数可以通过曲线的 τ-长度恢复。更精确地说，我们有如下定义（见 [33] 中的定义3.22和 [2]中的2.27）。

定义2.6。 *A causally path connected Lorentzian pre-length space for which:*

1. *Every point* x *has a localizing neighborhood*Ω_x.
2. *Every point has a neighborhood in which the relation* $\leq$ *is closed*[4].
3. $\tau(x,\ y) = \mathcal{T}(x,\ y)$ *for all* $x,\ y \in X,$ *where*$\mathcal{T}(x,\ y) = \sup\{L_\tau(\gamma)$: γ *is future-directed causal curve from* x *to* $y\}$.[5]*is called a* 洛伦兹长度空间。

注2.7。 *Notice that if there is a* τ*-length realizing causal curve* γ *(that is,* $\tau\ x\ y\ = L_\tau\ \gamma\ )$ *joining any two causally related points then*(,) *condition (3) in Definition 2.6 is satisfied. If this is the case such curves* (), , *are called maximal and we say that* $(X,\ d,$ $\leq,\ \tau)$ *is a geodesic Lorentzian pre-length space*[6].

洛伦兹长度空间的例子包括强因果光滑时空 [33], 具有类时边界的时空 [2], 具有 C^0 度量的因果平直时空 [16, 20] 以及锥结构 [40, 3]。

可以为洛伦兹长度空间建立因果层次，其形式与光滑时空的标准因果层级非常相似 [2]。不过，一些最有意义的层级——如强因果性、非因禁性和整体双曲性——仍可对一般的洛伦兹预长度空间加以定义 [33]。

---

[3]也就是说，$p \ll_{\Omega_x} q$ （$p \leq_{\Omega_x} q$）当且仅当存在一条未来指向的类时（因果）曲线 in Ω_x 从 4 到 此条件称为（ $X\ d \ll \leq \tau$ *locally causally closed.*、、、、）为 我们在 $\mathcal{T}(x,\ y) = 0$ 时定义 $y \notin J^+(x)$。[6]在洛伦兹几何中，此条件也称为阿韦兹-塞弗特性质

定义 2.8. *A Lorentzian pre-length space* $(X, d, \ll, \leq, \tau)$ *is* 非完全因禁
if there is an upper bound C K *for all the d-lengths* ( )
of causal curves contained in a compact set K. *A non-totally impris-*
oning Lorentzian pre-length space is *if all its causal* 整体双曲 ( )
diamonds J^+ p $\cap J^-$ q *are compact.*
( )

正如预期，全局双曲洛伦兹长度空间与其光滑对应物具有一些显著的共同特征。例如，阿韦兹-塞弗特性质以及时间分离 [2, 33]的连续性。

2.2 豪斯多夫距离

设 (X, d) 是一个度量空间。我们将一条（连续）曲线 $\gamma : [a, b] \to (X, d)$ 的 $d-length$ 定义为

$$L_d(\gamma) = \sup_P \{S(P)\}$$

其中，上确界取遍闭区间 $[a, b]$ 的所有分割 P, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$，并且

$$S(P) = \sum_{i=1}^{k} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i))$$

是顶点位于 γ上的折线的长度。

长度空间是一个度量空间，其中度量 d 由长度泛函 L_d诱导。具体而言，度量空间 (X, d) 是长度空间，当且仅当

$$d(p, q) = \inf\{L_d(\gamma) \mid \gamma \text{ is a curve joining } p \text{ and } q\}, \quad \forall p, q \in X.$$

如果曲线 $\gamma : [a, b] \to (X, d)$ 上任意两点之间的距离都由曲线实现——也就是说，若 $L_d(\gamma) = d(p, q)$——则称其为一条 *geodesic segment*。如果 (X, d) 中任意两点都能由一条测地线段连接，则称该空间为 *geodesic.* 。在这种情况下，我们考虑所有按弧长参数化的测地线段。回顾一下，任何完备且局部紧的长度空间都是测地的（例如参见定理

2 5 23 . .）。

[12] 度量空间 (X, d) 的豪斯多夫距离 d_H 定义在 (X, d) 的闭子集集合上，如下:

$$d_H(A, B) = \inf\{r \mid A \subset U_r(B), B \subset U_r(A)\}$$

其中， $B_r(a)$ 表示以 a 为中心、半径为 r 的（开）度量球，而 $U_r(A) = \{x \in X \mid \text{dist}(x, A) < r\} = \cup_{a \in A} B_r(a)$ 表示 A 的半径为 r 的管状邻域，且 $\text{dist}(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$。下面列出一些关于管状邻域和豪斯多夫距离的标准结果，它们有助于进行显式计算。

引理 2.9。 *Let* X *be a locally compact and complete length space. Then for every compact subset* A *of* X *we have:*

1. $\overline{U}_t(A)$ *is compact for every* $t \geq 0$.

2. $\overline{U_t}(\overline{U_s}(A)) = U_{\overline{t+s}}(A)$ *for every* $t, s \geq 0$*.3.* $d_H(A, B) =$下确界$\{r \mid A \subset U_r(B)$ $B \subset U_r(A)\}$*,4.* $d_H(A, B) =$最大值$\{$上确界$\{$距离函数$(a, B) \mid a \in A\}$, 上确界$\{$距离函数$(b, A) \mid b \in B\}$*.5. There exist midpoints, for every* $x, y \in X$ *there is* $z \in X$ *with* $d(x, z) = d(y, z) = d(x, y)/2$.

6. Closed d-balls are compact.

给定一个度量空间 (X, d)，集合

$$\mathcal{H}(X) = \{C \subset X : C \text{ is a compact set of } (X, d)\}$$

通常称为 (X, d) 的 *hyperspace of compact sets*。赋予豪斯多夫距离后，其拓扑结构是连续统理论的主要研究对象之一。这里我们确立了它最重要的几何性质之一，即 $\mathcal{H}(X)$ 确实是测地的。

命题 2.10. *Let* X *be a locally compact and complete length space. For every two compact sets* $A, B \in \mathcal{H}(X)$ *with* $r = d_H(A, B) > 0$*, the path* $\alpha : [0, r] \to \mathcal{H}(X)$ *given by*

$$\alpha(t) = \overline{U}_t(A) \cap \overline{U}_{r-t}(B)$$

is a geodesic segment connecting A *and* B*.*

Proof. 由于 $r = d_H(A, B)$，因此存在一个严格递增序列$\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$，使得

$$A \subset \overline{U}_{r+\frac{1}{n_k}}(B),$$

∞对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。因此 $A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} U_{r+\frac{1}{n_k}}(B) = U_r(B)$。由此，$A \subset U_r(B)$。类似地，$B \subset U_r(A)$。因此

$$\alpha(0) = \overline{U}_0(A) \cap \overline{U}_r(B) = A \cap \overline{U}_r(B) = A$$

且 $\alpha(r) = B$。

现在我们证明，对于任意 $t \in [0, r]$，都有 $\alpha(t) \neq \varnothing$。由于 A、B 是紧的，存在 $a_0 \in A$、$b_0 \in B$，使得 $d_H(A, B) = d(a_0, b_0)$。令c_0为连接 a和 b的线段上的点，满足 $d(a_0, c_0) = t$且 $d(c_0, b_0) = r - t$。因此

$$\operatorname{dist}(c_0, A) \leq d(c_0, a_0) = t \quad \text{and} \quad \operatorname{dist}(c_0, B) \leq d(c_0, b_0) = r - t.$$

因此 $c \in \overline{U_t}(A)$且 $c \in \overline{U_{r-t}}(B)$，故 $c \in \alpha(t)$。

现在我们证明 $d_H(A, \alpha(t)) = t$。考虑 $a \in A$。由于$d_H(A, B) = r$，存在 $b \in B$，使得 $d(a, b) \leq r$。此外，连接 a和 b的线段上存在一点 c，使得 $d(a, c) \leq t$且$d(c, b) \leq r - t$。因此

$$\operatorname{dist}(c, A) \leq d(c, a) \leq t \quad \text{and} \quad \operatorname{dist}(c, B) \leq d(c, b) \leq r - t.$$

因此 $c \in \alpha(t)$。所以

$$\operatorname{dist}(a, \alpha(t)) \leq d(a, c) \leq t$$

并且 sup 距离函数$(\underset{a\in A}{q}, \alpha(t)) \leq r$。现在，令 $x \in \alpha(t)$，于是 $x \in U_t(A)$ 且距离函数$(x, A) \leq t$ 。因此 sup 距离函数$(x, A) \leq t$。由此可得， $d_H(A, \alpha(t)) \leq t$。类似地，我们可以 $x\in\alpha(t)$ 证明 $d_H(\alpha(t)\ B) \leq r - t$。因此

$$r = d_H(A, B) \leq d_H(A, \alpha(t)) + d_H(\alpha(t), B) \leq t + (r - t) = r,$$

以及关系 $d_H(A,\ \alpha(t)) = t$ 和 $d_H(\alpha(t)\ B) = r - t$ 随之成立。沿用前面论证的思路，我们可以证明对所有 $0 \leq s \leq t$，都有

$$d_H(A, \overline{U}_s(A) \cap \overline{U}_{t-s}(\alpha(t))) = s \quad \text{and} \quad d_H(\overline{U}_s(A) \cap \overline{U}_{t-s}(\alpha(t)), \alpha(t)) = t - s.$$

另一方面，根据引理 2.9，我们还有

$$\begin{aligned} \overline{U}_s(A) \cap \overline{U}_{t-s}(\alpha(t)) &= \overline{U}_s(A) \cap \overline{U}_{t-s}(\overline{U}_t(A) \cap \overline{U}_{r-t}(B)) \\ &= \overline{U}_s(A) \cap \overline{U}_{r-s}(B) = \alpha(s). \end{aligned}$$

因此 $d_H(\alpha(s)\ \alpha(t)) = t - s$。 □

3 构造

本节旨在介绍一般性的构造方法，使我们能够从已有的预长度空间构造出新的预长度空间。这些构造有双重目的：首先，提供寻找实例的新方法；其次，为未来的应用建立一个通用框架，尤其是研究洛伦兹预长度空间的度量性质。

3.1 洛伦兹出租车乘积

以下构造将在研究闵可夫斯基空间的因果菱形空间时发挥关键作用。回顾一下，度量空间 (Y, d_Y) 和 (X, d_X) 的出租车乘积是度量空间 $(Y \times X, d_T)$，其中对于所有 $a, p \in Y$, $b, q \in X$

$$d_T((a, b), (p, q)) = d_Y(a, p) + d_X(b, q).$$

定义 3.1 *Let $X\ d$ be a metric space and $Y\ d_L \ll_Y \leq_Y \tau_Y$ a Lorentzian pre-length space. The* （洛伦兹出租车乘积空间）。 (,) (, , , ,) *Lorentzian taxicab product $Y \times_T X := (Y \times X, d_T, \ll_T, \leq_T, \tau_T)$ is given by*

- $(a,\ b) \ll_T (p,\ q)$ *if and only if* $\tau_Y(a,\ p) > d_X(b,\ q)$。
- $(a, b) \leq_T (p, q)$ *if and only if* $\tau_Y(a, p) \geq d_X(b, q)$ *and* $a \leq_Y p$.
- $$\tau_T((a, b), (p, q)) = \begin{cases} \tau_Y(a, p) - d_X(b, q) & \text{if } (a, p) \ll_T (b, q) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

命题 3.2 *Let $X\ d_X$ and $Y\ d_Y \ll_Y \leq_Y \tau_Y$ be a metric space.. and a Lorentzian pre-length space* (,) (,,,,) , *respectively. Then the Lorentzian taxicab product $Y \times_T X$ is a Lorentzian pre-length space.*

Proof. 首先，若 $(a,b) \not\leq_T (p,q)$，则 $\tau_T((a,b),(p,q)) = 0$。关系 $\leq_T$ 显然具有自反性。对于 $(a,b) \leq_T (p,q)$ 和 $(p,q) \leq_T (y,x)$，我们有 $a \leq_Y p \leq_Y y$，因此

$$\tau_Y(a,y) \geq \tau_Y(a,p) + \tau_Y(p,y) \geq d_X(b,q) + d_X(q,x) \geq d_X(b,x),$$

因此，$(a,b) \leq_T (y,x)$，且 $\leq_T$ 是传递关系。类似地，我们可以证明 $\ll_T$ 也是传递的。现在，根据定义可知，$\tau_T((a,b),(p,q)) > 0$ 当且仅当 $(a,b) \ll_T (p,q)$。接下来需要验证，τ_T 关于 d_T 是下半连续函数，并且满足反三角不等式。为证明前者，固定 $(a_0,b_0),(p_0,q_0) \in Y \times X$ 和 $\varepsilon > 0$。由于 τ_Y 在 (a_0,p_0) 处半连续，存在 $\delta_0 > 0$，使得若 $\sqrt{d_Y(a,a_0)^2 + d_Y(p,p_0)^2} < \delta_0$，则 $\tau_Y(a_0,p_0) - \tau_Y(a,p) < \varepsilon/2$.。令 $\delta =$ 为 $\{\delta_0/\sqrt{2}, \varepsilon/4\}$ 的最小值，并取 $(a,b),(p,q) \in Y \times X$，使得

$$\sqrt{d_T((a,b),(a_0,b_0))^2 + d_T((p,q),(p_0,q_0))^2} < \delta.$$

因此 $d_X(b, b_0) \leq d_T((a, b), (a_0, b_0)) < \delta$，类似地 $d_X(q, q_0) < \delta$，$d_Y\ a\ a_0 < \delta$ $d_Y\ p\ p_0 < \delta$ $\sqrt{d_Y\ a\ a_0\ ^2 + d_Y\ p\ p_0\ ^2} <$(,) $\sqrt{2}\delta \leq \delta_0$ $\tau_Y\ a_0\ p_0 - \tau_Y\ a\ p < \varepsilon/2$ 和 (,)。因此 (,) (,)，从而 (,) (,)。另一方面，根据三角不等式可得

$$d_X(a,p) - d_X(a_0,p_0) \leq d_X(b,b_0) + d_X(q_0,q) < 2\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

总之

$$\begin{aligned}(\tau_Y(a_0,p_0) - d_X(b_0,q_0)) \quad - \quad & (\tau_Y(a,p) - d_X(b,q)) = \\ & (\tau_Y(a_0,p_0) - \tau_Y(a,p)) + (d_X(b,q) - d_X(b_0,q_0)) < \varepsilon,\end{aligned}$$

上述不等式直接推出，对于 $(a, b) \leq_T (p, q)$，有

$$\tau_T((a_0,b_0),(p_0,q_0)) - \tau_T((a,b),(p,q)) < \varepsilon.$$

另一方面，对于 $(a, b) \not\leq_T (p, q)$，同样的结论也成立，因为此时 $\tau_Y(a, p) - d_X(b, q) < 0$，或者 $a \not\leq_Y p$,，因此

$$\begin{aligned}\tau_T((a_0,b_0),(p_0,q_0)) \quad - \quad & \tau_T((a,b),(p,q)) \\ \leq \quad & (\tau_Y(a_0,p_0) - d_X(b_0,q_0)) - (\tau_Y(a,p) - d_X(b,q)).\end{aligned}$$

最后，若 $(a_0,b_0) \not\leq_T (p_0,q_0)$，则 $-\tau_T((a,b),(p,q)) < \varepsilon$ 因此，半连续性的证明已完成。

现在我们来处理反三角不等式。设 $(a,b) \leq_T (p,q) \leq_T (y,x)$，则

$$\begin{aligned}\tau_T((a,b),(p,q)) + \tau_T((p,q),(y,x)) \quad &= \quad (\tau_Y(a,p) - d_X(b,q)) + (\tau_Y(p,y) - d_X(q,x)) \\ &= \quad (\tau_Y(a,p) + \tau_Y(p,y)) - (d_X(b,q) + d_X(q,x)) \\ &\leq \quad \tau_Y(a,y) - d_X(b,x) \\ &= \quad \tau_T((a,b),(y,x))\end{aligned}$$

□

现在我们来关注洛伦兹出租车乘积空间 $\mathbb{R}_1^1 \times_T X$，其中 (X, d) 是一个局部紧且完备的测地长度空间。因此我们有

$$\begin{aligned}
(t,x) \ll_T (s,y) &\quad\Leftrightarrow\quad s - t > d(x,y) \\
(t,x) \leq_T (s,y) &\quad\Leftrightarrow\quad s - t \geq_T d(x,y) \\
d_T((t,x),(s,y)) &\quad=\quad |t-s| + d(x,y), \\
\tau_T((t,x),(s,y)) &\quad=\quad \begin{cases} s - t - d(x,y) & \text{if } (t,x) \leq_T (s,y) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}$$

注记 3.3. *Notice that if $(M,\ g)$ is a geodesically complete Riemannian manifold then the causal and chronological relations of the Lorentzian length space $\mathbb{R}_1^1 \times_T M$ and the standard (Lorentzian) product manifold $-\mathbb{R} \times M$ agree , thus their structures as causal sets are identical. In particular, their respective causal diamonds coincide as point sets[7]. However, their manifestly different time separation functions give rise to two very different geodesic structures. Indeed , take for instance $M = \mathbb{R}^n$ with its standard Euclidean metric. Then any pair of chronologically related points in Minkowski space $\mathbb{M}^{n+1} = -\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ can be connected by a unique maximal geodesic namely the straight line segment joining them. On the other hand, in the Lorentzian taxicab product $\mathbb{R}_1^1 \times_T \mathbb{R}^n$ there might be infinitely many maximal geodesic segments joining any pair of chronologically related points. Indeed any curve $\gamma \quad [a,b] \to \mathbb{R}_1^1 \times \mathbb{R}^n$ of the form : $\gamma\ s\ =\ \alpha\ s\ \ \beta\ s$ with $\alpha\ s$ monotone and $|\beta\ s\ |$ strictly monotone is $0\ (\ (0\ (\ ))\ (\ )\ (\ )$, maximal. What is more there are in $\mathbb{R}_1^1 \times \mathbb{R}^n$ causal non-timelike curves which turn out to be maximal [6] (see Figure 3.1).*

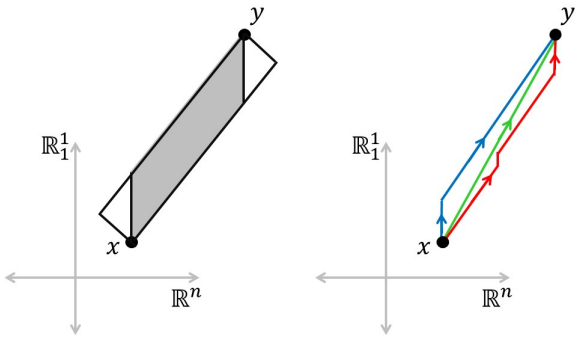

图 1：连接一对类时相关点的无穷多条极大因果曲线

注意，由注记 3.3 可知，$\mathbb{R}_1^1 \times_T \mathbb{R}^n$ 中的因果菱形是紧的。事实上，接下来我们将证明 $\mathbb{R}_1^1 \times_T X$ 是一个测地

[7]回顾一下，时空 $-\mathbb{R} \times M$ 整体双曲，当且仅当 $(M,\ g)$ 完备（见 [45]）

洛伦兹长度空间。此外，若(X, d)是完备的，则 $\mathbb{R}_1^1 \times_T X$ 是整体双曲的。
我们先为连接任意两个因果相关点的极大因果曲线给出显式参数化。

引理 3.4。 *For every two points* (t, x) *and* (s, y) *in* $\mathbb{R}_1^1 \times_T X$ *with* $t\ x \leq_T s\ y$ *let* $L = s - t - d\ x\ y$ *and* $\gamma\ [0, d\ x\ y\ ] \to X$ *be a geodesic,* $)\ (,\ )\ (,\ ):\ (,\ )$ *segment parametrized by arclength.*

1. *If* $L > 0$, *then* $(t, x) \ll_T (s, y)$ *and* $\ell:\ [0, L] \to \mathbb{R}_1^1 \times_T X$ *defined as*

$$\ell(u) = \left(t + \frac{u(s-t)}{L}, \gamma\left(\frac{u \cdot d(x,y)}{L}\right)\right),$$

   is a maximal future-directed timelike curve from (t, x) *to* (s, y)。

2. *If* $L = 0$, *then* $\ell:\ [0, 1] \to \mathbb{R}_1^1 \times_T X$ *defined as*

$$\ell(u) = (t + u(s-t), \gamma\left(u \cdot d(x,y)\right)),$$

   is a maximal future-directed null curve from (t, x) *to* (s, y)。

Proof. 首先，由于 γ 已按弧长参数化，因此对每个$u_1 < u_2$，我们都有

$$d_T(\ell(u_1), \ell(u_2)) = \frac{(u_2 - u_1)(s-t)}{L} + \frac{(u_2 - u_1)d(x,y)}{L} = (u_2 - u_1)\left(\frac{s - t + d(x,y)}{L}\right),$$

因此，ℓ 是一个非常值的利普希茨连续函数。事实上，这意味着 $L_{d_T}(\ell) = s - t + d(x,\ y)$，因此 ℓ 是连接 $(t,\ x)$ 与 $(s,\ y)$ 的测地线段。另一方面，注意到

$$\tau_T(\ell(u_1), \ell(u_2)) = \frac{(u_2 - u_1)(s-t)}{L} - \frac{(u_2 - u_1)d(x,y)}{L} = u_2 - u_1 > 0,$$

因此，$\ell(u_1) \ll_T \ell(u_2)$，且同一不等式意味着 $L_{\tau_T}(\ell) = L$，故 ℓ 是一条未来指向的极大类时曲线。零情形的证明类似。

□

定理

3 5 *The Lorentzian taxicab product space* $\mathbb{R}_1^1 \times_T X$ *is a globally . . hyperbolic Lorentzian length space.*

Proof. 根据命题 3.2 和引理 3.4，空间 $\mathbb{R}_1^1 \times_T X$ 是一个测地的、因果路径连通的洛伦兹预长度空间。

现在令 $(t, x) \in \mathbb{R}_1^1 \times_T X$, $r > 0$，并考虑集合

$$\Omega^r_{(t,x)} = I^+(t - r, x) \cap I^-(t + r, x).$$

现在证明 $\Omega^r\ (_{t,x})$ 是 (t, x) 周围的一个定位邻域。由于 $I^+(t - r, x)$ 和 $I^-(t + r, x)$ 都是开集，因此 $\Omega^r\ (_{t,x})$ 也是开集。若 (s_1, y_1)、$(s_2, y_2) \in \Omega^r\ (_{t,x})$ 满足 $(s_1, y_1) \leq_T (s_2, y_2)$，则引理 3.4 中构造的曲线 ℓ con- 是一条从 (s_1, y_1) 到 (s_2, y_2)、包含于 $\Omega^r\ (_{t,x})$ 中的未来指向极大因果曲线。因此

$$(\Omega_{(t,x)}, d_T|_{\Omega_{(t,x)} \times \Omega_{(t,x)}}, \ll_T |_{\Omega_{(t,x)} \times \Omega_{(t,x)}}, \leq_T |_{\Omega_{(t,x)} \times \Omega_{(t,x)}}, \tau_T|_{\Omega_{(t,x)} \times \Omega_{(t,x)}})$$

是一个满足定义 2.6 中条件 (1) 和 (4) 的洛伦兹预长度空间。此外，设 $(s,y) \in \Omega^r{}_{(t,x)}$，且 z 是 x 和 y 的中点，因此 $d(x,z) = d(y,z) = d(x,y)/2$。注意到

$$t + r - \left(\frac{t+r+s}{2}\right) = \frac{t+r-s}{2} > \frac{d(x,y)}{2} = d(x,z),$$

因此 $\left(\frac{t+r+s}{2}, z\right) \ll_T (t+r, x)$。我们还可以得到

$$\left(\frac{t+r+s}{2}\right) - s = \frac{t+r-s}{2} > \frac{d(x,y)}{2} = d(y,z),$$

于是 $(s,y) \ll_T \left(\frac{t+r+s}{2}, z\right)$，因此 $\left(\frac{t+r+s}{2}, z\right) \in I^+(s,y) \cap \Omega^r{}_{(t,x)} \neq \varnothing$。类似的论证表明 $I^-(s,y) \cap \Omega^r{}_{(t,x)} \neq \varnothing$，因此定义 2.6 中的条件 (3) 也成立。

现在，固定一条未来指向因果曲线 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^1_1 \times_T X$，其像 $\mathrm{Im}(\gamma) \subset \Omega^r{}_{(t,x)}$。曲线 γ 可写为 $\gamma(u) = (\alpha(u), \beta(u))$，其中 $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 且 $\beta\colon [a,b] \to X$。由于 γ 是因果的，因此对每个 $u_1 \leq u_2$，都有 $\alpha(u_1) \leq_T \alpha(u_2)$ 且 $\alpha(u_2) - \alpha(u_1) \geq d(\beta(u_1), \beta(u_2))$。特别地，$(t-r, x) \ll_T \gamma(a) \leq_T \gamma(b) \ll_T (t+r)$ 导致 $t + r - \alpha(b) > 0$ 且 $\alpha(a) + r - t > 0$。取一个分割 $a = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = b$，于是

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} d_T(\gamma(u_i), \gamma(u_{i+1})) &= \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha(u_{i+1}) - \alpha(u_i) + d(\beta(u_i), \beta(u_{i+1}))] \\
&\leq 2\sum_{i=0}^{n-1} [\alpha(u_{i+1}) - \alpha(u_i)] \\
&= 2[\alpha(b) - \alpha(a)] < (t+r) + (r-t) = 2r.
\end{aligned}$$

总之，包含在 $\Omega^r{}_{(t,x)}$ 中的任意因果曲线的长度都满足 $L_{d_T}(\gamma) < 2r$，因此定义 2.6 中的条件 (2) 也成立。故 $\Omega^r{}_{(t,x)}$ 是局部化的。

最后，取两个收敛序列 $(t_n, x_n) \to (t,x)$ 和 $(s_n, y_n) \to (s,y)$，满足对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $(t_n, x_n) \leq_T (s_n, y_n)$。由于 $d_T((t_n, x_n), (t,x)) \geq |t_n - t| + d(x, x_n)$，可立即得到 $t_n \to t$, $x_n \to x$，类似地也有 $s_n \to s$, $y_n \to y$。因此，$s_n - t_n \geq d(x_n, y_n)$ 蕴含 $s - t \geq d(x,y)$ 且 $(t,x) \leq_T (s,y)$，故 $\mathbb{R}^1_1 \times_T X$ 是局部因果闭合的。因此，$\mathbb{R}^1_1 \times_T X$ 是测地洛伦兹长度空间。

现在我们证明 $\mathbb{R}^1_1 \times_T X$ 是整体双曲的。首先，如果 $K \subset \mathbb{R}^1_1 \times_T X$ 是紧的，那么存在一个数 $0 < C < \infty$ 使得

$$0 \leq 2\sup\{s_0 - t_0 : (t_0, x_0), (s_0, y_0) \in K\} < C.$$

设 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^1_1 \times_T X$ 是一条包含于 K 中的未来指向因果曲线，则

$$L_{d_T}(\gamma) \leq 2[\alpha(b) - \alpha(a)] < C.$$

因此，$J^+(t,x) \cap J^-(s,y)$ 是非完全因果禁的。最后，我们证明对于每个 (t_n, x_n)，(s_n, y_n) 都是紧的。设 (t_n, x_n) 是 D 中的一个序列，则 $t \leq u_n \leq s$ 且 $s - t \geq d(x, z_n) + d(y, z_n) \geq d(x, z_n)$，于是序列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 包含在一个紧闭

球内，其中 X。因此，我们可以选取一个子序列 $\{(u_{n_k}, z_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$——运用康托尔对角线论证——使得 ($u_{n_k}\ z_{n_k}\ \to\ u\ z$ $s-u_{n_k}\geq$,) (,)。由于 $k\to\infty$ $u,z\in D$ x d (y,z_{n_k}) 且 $u_{n_k}-t\geq d(,z_{n_k})$，通过取可得 (,)。因此，$D$ 是紧的，证明完毕。□

3.2 洛伦兹一致积

与 L_∞ 范数类似，给定两个度量空间 $(X,\ d_X)$ 和 $(Y,\ d_Y)$，*uniform metric* d_∞：$(X\times Y)\times(X\times Y)\to\mathbb{R}$ 定义为

$$d_\infty((x,y),(a,b))=\max\{d_X(x,a),d_Y(y,b)\}.$$

定义 3.6（洛伦兹一致积空间）。 *Let*$(X,\ d_X,\ \ll_X,\ \leq_X,\ \tau_X)$ *and*$(Y,\ d_Y,\ \ll_Y,\ \leq_Y,\ \tau_Y)$ *be two Lorentzian pre-length spaces. The Lorentzian uniform product space* $X\times_\infty Y=(X\times Y,\ d_\infty,\ \ll_\infty,\ \leq_\infty,\ \tau_\infty)$ *is defined by*

- $(x,y)\ \ll_\infty(a,b)$ *if and only if* $x\ll_X a$ *and* $y\ll_Y b$.
- $(x,y)\ \leq_\infty(a,b)$ *if and only if* $x\leq_X a$ *and* $y\leq_Y b$.
- $$\tau_\infty((x,y),(a,b))=\min\{\tau_X(x,a),\tau_Y(y,b)\}.$$

命题

3 7 *The Lorentzian uniform product* $X\times_\infty Y$ *is a Lorentzian pre-length space.*。

Proof. 不难看出，关系 $\ll_\infty,\leq_\infty$ 满足预长度空间所需的性质，因为 $\ll_X,\leq_X$ 和 $\ll_Y,\leq_Y$ 都满足这些性质。若 $(x,y)\ \not\leq_\infty(y,b)$，则 $x\ \not\leq_X\ a$ 或 $y\ \not\leq_Y\ b$，因此 $\tau_X(x,a)\ =0$ 或 $\tau_Y(y,b)\ =0$，从而得到 $\tau_\infty((x,y),(a,b))\ =0$。事实上，$(x,y)\ \ll_\infty(a,b)$ 当且仅当 $\tau_X(x,a)\ >0$ 且 $\tau_Y(y,b)\ >0$，而这又当且仅当 $\tau_\infty((x,y),(a,b))\ >0$。因此，只需验证 τ_∞ 关于 d_∞的反三角不等式和下半连续性。

我们首先分析 τ_∞ 的下半连续性。令 $\varepsilon>0$，并固定 $((x_0,y_0),(a_0,b_0))\ \in(X\times Y)\times(X\times Y)$。由于 τ_X 关于 d_X 在 (x_0,a_0) 处下半连续，我们可以找到 $\delta_X>0$，使得

$\sqrt{d_X^2(x,x_0)+d_X^2(a,a_0)}<\delta_X$ 意味着 $\tau_X(x_0,a_0)\ -\tau_X(x,a)\ <\varepsilon$。取 $\delta=\min\{\delta_X/\sqrt{2},\delta_Y/\sqrt{2}\}$,⁻并设

$$\sqrt{d_\infty^2((x,y),(x_0,y_0))+d_\infty^2((a,b),(a_0,b_0))}<\delta,$$

这意味着 $d_X(x,x_0)\ <\delta$ 且 $d_X(a,a_0)\ <\delta$。因此

$$\sqrt{d_X^2(x,x_0)+d_X^2(a,a_0)}<\sqrt{2}\delta\leq\delta_X,$$

从而得到 $\tau_X(x_0,a_0)\ -\tau_X(x,a)\ <\varepsilon$。因此

$$\tau_\infty((x_0,y_0),(a_0,b_0))-\tau_X(x,a)\leq\tau_X(x_0,a_0)-\tau_X(x,a)<\varepsilon,$$

因此

$$\tau_\infty((x_0,y_0),(a_0,b_0))-\tau_X(x,a)<\varepsilon.$$

类似的论证使我们能够证明

$$\tau_\infty((x_0,y_0),(a_0,b_0)) - \tau_Y(y,b) < \varepsilon,$$

因此，综上所述

$$\tau_\infty((x_0,y_0),(a_0,b_0)) - \tau_\infty((x,y),(a,b)) < \varepsilon$$

从而证明了 τ_∞ 在 $((x_0,y_0),(a_0,b_0))$ 处的下半连续性 .

最后，若 $(x_1,y_1) \leq_\infty (x_2,y_2) \leq_\infty (x_3,y_3)$，则 $x_1 \leq_X x_2 \leq_X x_3$ 且 $y_1 \leq_Y y_2 \leq_Y y_3$。然后利用 τ_X 和 τ_Y 的反三角不等式，我们得到

$$\begin{aligned} \tau_X(x_1,x_3) &\geq \tau_X(x_1,x_2) + \tau_X(x_2,x_3) \\ &\geq \tau_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + \tau_\infty((x_2,y_2),(x_3,y_3)), \end{aligned}$$

类似地

$$\tau_Y(y_1,y_3) \geq \tau_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + \tau_\infty((x_2,y_2),(x_3,y_3)).$$

因此

$$\tau_\infty((x_1,y_1),(x_3,y_3)) \geq \tau_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + \tau_\infty((x_2,y_2),(x_3,y_3))$$

这就完成了反三角不等式的证明。 □

接下来，我们将证明，在一些温和的假设下，两个洛伦兹长度空间的一致乘积仍是一个洛伦兹长度空间。为此，需要先给出几个引理。首先，我们关注一致乘积的测地线结构。

注 3.8. *Let* $\gamma\colon [a,b] \to X \times_\infty Y$, $\gamma(t) = (\gamma_X(t)\ \gamma_Y(t))$ *be a curve.First, notice that if* $B_r(x)$ *and* $B_r(y)$ *are balls in* (X,d_X) *and* (Y,d_Y) *respectively, then the* d_∞*-ball* $B_r(x,y)$ *agrees with* $B_r(x) \times B_r(y)$. *immediately conclude that if* γ *is locally Lipschitz continuous then so are* ( ) ( ) ( ) . *We*γ_X *and* γ_Y. *Furthermore if* γ *is a future-directed causal curve then for ,, all* $a \leq s < t \leq b$ *we have* $\gamma_X\ s\ \gamma_Y\ s \leq_\infty \gamma_X\ t\ \gamma_Y\ t$ *implying* (( ) ( )) (( ) ( )) $\gamma_X\ s \leq_X \gamma_X\ t$ *and* $\gamma_Y\ s \leq_S \gamma_Y\ t$ ( ) ( ) ( ) ( ) . *If* γ_X *is not constant then* γ_X *is a , future-directed causal curve. Moreover if* γ *is timelike or null then so is* γ_X.

引理 3.9。 *Let* $\gamma_1 : [a_1,b_1] \to X$ *and* $\gamma_2 : [a_2,b_2] \to Y$ *be two future causal curves in* $X\ d_X \ll_X \leq_X \tau_X$ *and* $Y\ d_Y \ll_Y \leq_Y \tau_Y$ *respectively. Let us consider* $\varphi_i \quad [0,1] \to [a_i,b_i]$ *for* $i = 1\ 2$ *given by* $\varphi_i\ t = t\ b_i - a_i + a_i$. *Then* $\gamma \quad [0,1] \to X \times_\infty Y$ *defined as* $\gamma\ t = ( ) ( ) : ( ) (\gamma_1 (\varphi_1(t))\ \gamma_2(\varphi_2(t)))$ *is a causal curve in* $X \times_\infty Y$ *and*

$$L_{\tau_\infty}(\gamma) \leq \min\{L_{\tau_X}(\gamma_1), L_{\tau_Y}(\gamma_2)\}.$$

Moreover, if γ_1 *and* γ_2 *are timelike and maximal, then* γ *is maximal andtimelike*

Proof. 注意，由于 γ_1 和 γ_2 也是未来因果的，因此 γ 是未来因果的；并且 φ_1、φ_2 是连续严格递增函数。为了分析曲线的 τ_∞ 长度，固定两个分割 $a_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b_1$ 和 $s_1 < \cdots < t_m = b_2$ $[a_1, b_1]$ $[a_2, b_2]$ ，分别属于 和 。由此，

我们得到两个分割 $0 = \varphi_1^{-1}($ $=$ $\varphi_1^{-1}\ b_1\ = 1$ $0 = \varphi_2^{-1}\ a_2\ = \varphi_2^{-1}\ s_0\ < \varphi_2^{-1}\ s_1\ < \cdots < \varphi_2^{-1}\ t_m$ $) = \varphi_1^{-1}(t_0) < \varphi_1^{-1}(t_1)$

$< \cdots < \varphi_1^{-1}(t_n)$ ( ) 和 ( ) ( ) ( ) ( ) $=$ $\varphi_2^{-1}\ b_2\ = 1$ $[0, 1]$ ( )，属于 。现在

$$\begin{aligned} L_{\tau_\infty}(\gamma) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \tau_\infty(\gamma(\varphi_1^{-1}(t_{i+1})), \gamma(\varphi_1^{-1}(t_{i+1}))) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \min\left\{\tau_X(\gamma_1(t_i), \gamma_1(t_{i+1})), \tau_Y(\gamma_2(\varphi_1^{-1}(t_i)), \gamma_2(\varphi_1^{-1}(t_{i+1})))\right\} \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \tau_X(\gamma_1(t_i), \gamma_1(t_{i+1})). \end{aligned}$$

于是 $L_{\tau_\infty}\ \gamma\ \leq L_{\tau_X}\ \gamma_1$ $L_{\tau_\infty}\ \gamma\ \leq$ ( ) ( )，类似地可得 $L_{\tau_Y}\ \gamma_2$ ( ) ( )。因此

$$L_{\tau_\infty}(\gamma) \leq \min_{\gamma_1 \quad \gamma_2}\{L_{\tau_X}(\gamma_1), L_{\tau_Y}(\gamma_2)\}.$$

现在假设 $\tau_X\ \gamma_1\ a_1\ \ \gamma_1\ b_1\ \ r_2 = \tau_Y\ \gamma_2\ a_2\ \ \gamma_2\ b_2$ a_i b_i $r_1\ =$ 和 都是类时且极大的，并且 ( ) ( ))、( ) ( ))。那么可以选取 和 ，使得 $r_i = b_i - a_i > 0$ 和 γ_i 按弧长参数化，其中 $i = 1,\ 2$。因此，对于给定的分割 $0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = 1$，我们有

$$\begin{aligned} \tau_\infty(\gamma(u_i), \gamma(u_{i+1})) &= \min\{\tau_X(\gamma_1(\varphi_1(u_i))), \gamma_1(\varphi_1(u_{i+1}))), \tau_X(\gamma_2(\varphi_2(u_i))), \gamma_2(\varphi_2(u_{i+1})))\} \\ &= \min\{\varphi_1(u_{i+1}) - \varphi_1(u_i), \varphi_2(u_{i+1}) - \varphi_2(u_i)\}. \end{aligned}$$

综上

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \tau_\infty(\gamma(u_i), \gamma(u_{i+1})) &= \sum_{i=0}^{n-1} \min\{\varphi_1(u_{i+1}) - \varphi_1(u_i), \varphi_2(u_{i+1}) - \varphi_2(u_i)\} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \min\{(u_{i+1} - u_i)(b_1 - a_1), (u_{i+1} - u_i)(b_2 - a_2)\} \\ &= \min\{r_1, r_2\} \sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1} - u_i = \min\{r_1, r_2\}. \end{aligned}$$

因此 $L_{\tau_\infty}(\gamma) = \tau_\infty(\gamma(0)\ \gamma(1))$，从而 γ 是极大的。 □

引理 **3 10** *Let* $X\ d_X \ll_X \leq_X \tau_X$ *and* $Y\ d_Y \ll_Y \leq_Y \tau_Y$ *be two* (、 、 、 、) (、 、 、 、) *Lorentzian pre-length spaces.*

(i) If($X\ d_X \ll_X \leq_X \tau_X$ *and* $Y\ d_Y \ll_Y \leq_Y \tau_Y$ *are locally causally*, , , *closed then* $X \times_\infty Y$ *is locally causally closed.*
,) (, , ,), *(ii) If*($X\ d_X \ll_X \leq_X \tau_X$ *and* $Y\ d_Y \ll_Y \leq_Y \tau_Y$ *are causally path*, , , ,) (, , ,), *connected then* $X \times_\infty Y$ *is causally path connected.*
(iii) If($X\ d_X \ll_X \leq_X \tau_X$ *and* $Y\ d_Y \ll_Y \leq_Y \tau_Y$ *are regularly local-*, , , ,) *izable then* $X \times_\infty Y$ *is localizable.*
(, , ,),

iv) If there exists timelike maximal curves joining any pair of chronologically related points in both $(X, d_X, \ll_X, \leq_X, \tau_X)$ *and* $(Y, d_Y, \ll_Y, \leq_Y, \tau_Y)$ *then* $X \times_\infty Y$ *is intrinsic.*

Proof. 对于 (i)，注意，包含 $x \in X$、$y \in Y$ 的两个因果闭邻域 U_x、U_y 的乘积 $U_x \times U_y$ 是 $X \times Y$ 中的一个因果闭邻域。还要注意 $U_x \times U_y = U_x \times U_y$。由注 3.8 可得 (ii)。(iv) 是引理 3.9 的直接推论。因此，我们将重点讨论 (iii)。对于每个 $x \in X$ 和 $y \in Y$，选取局部化邻域 Ω_x 和 Ω_y，以及相应的连续映射 $\omega_x : \Omega_x \times \Omega_x \to [0, \infty)$、$\omega_y : \Omega_y \times \Omega_y \to [0, \infty)$。我们将证明 $\Omega_{(x,y)}$ 是一个局部化邻域，并且 $\omega_{(x,y)} : \Omega_{(x,y)} \times \Omega_{(x,y)} \to [0, \infty)$ 定义为

$$\omega_{(x,y)}((p, q), (z, w)) = \min\{\omega_x(p, z), \omega_y(q, w)\},$$

满足 [33] 的定义 3.16 中的条件。设 $\gamma : [a, b] \to X \times_\infty Y$ 是一条包含于 $\Omega_{(x,y)}$ 中的因果曲线，且 $\gamma(t) = (\alpha(t)\ \beta(t))$。由于 γ 不可能是常值的，因此 α 和 β 不会同时为常值。由于 $\mathrm{Im}(\alpha) \subset \Omega_x$ 且 $\mathrm{Im}(\beta) \subset \Omega_y$，因此存在 $C_1, C_2 > 0$，使得 $L_{d_X}(\alpha) \leq C_1$ 且 $L_{d_Y}(\beta) \leq C_2$。此外，对于给定的分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} d_\infty(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) &= \sum_{i=0}^{n-1} \max\{d_X(\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1})), d_Y(\beta(t_i), \beta(t_{i+1}))\} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} d_X(\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1})) + d_Y(\beta(t_i), \beta(t_{i+1})) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} d_X(\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1})) + \sum_{i=0}^{n-1} d_Y(\beta(t_i), \beta(t_{i+1})) \\
&\leq L_{d_X}(\alpha) + L_{d_Y}(\beta) \\
&\leq C_1 + C_2.
\end{aligned}$$

那么 $L_{d_\infty}(\gamma) \leq C_1 + C_2$。此外，显然，$(\Omega_{(x,y)}, d_\infty, \ll_\infty, \leq_\infty, \omega_{(x,y)})$ 是一个洛伦兹预长度空间。现在，如果 $(p, q) \in \Omega_{(x,y)}$，那么

$$\varnothing \neq \left(I_X^+(p) \cap \Omega_x\right) \times \left(I_Y^+(q) \cap \Omega_y\right) \subset I_\infty^+(p, q) \cap \Omega_{(x,y)},$$

因此 $I_\infty^+(p, q) \cap \Omega_{(x,y)} \neq \varnothing$。类似地，$I_\infty^-(p, q) \cap \Omega_{(x,y)} \neq \varnothing$。最后固定 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Omega_{(x,y)}$，则存在两条类时极大曲线 $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \Omega_x$ 和 $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \Omega_y$，满足 $\gamma_1(a_1) = x_1$、$\gamma_1(b_1) = x_2$、$\gamma_2(a_2) = y_1$、$\gamma_2(b_2) = y_2$ 以及

$$L_{\tau_X}(\gamma_1) = \omega_x(x_1, x_2) \leq \tau_X(x_1, x_2),$$

$$L_{\tau_Y}(\gamma_2) = \omega_y(y_1, y_2) \leq \tau_Y(y_1, y_2).$$

总之，如引理 3 9 中所定义的曲线 γ 满足 .

$$\begin{aligned}
L_{\tau_\infty}(\gamma) &= \min\{L_{\tau_X}(\gamma_1), L_{\tau_Y}(\gamma_2)\} \\
&= \min\{\omega_x(x_1, x_2), \omega_y(y_1, y_2)\} \\
&\leq \min\{\tau_X(x_1, x_2), \tau_Y(y_1, y_2)\}.
\end{aligned}$$

□

命题 **3 11** *Let $X\ d_X\ \ll_X\ \leq_X\ \tau_X$ and $Y\ d_Y\ \ll_Y\ \leq_Y\ \tau_Y$ be.. (,,,,) (,,,,) two globally hyperbolic Lorentzian pre-length spaces. Then $X \times_\infty Y$ is a globally hyperbolic Lorentzian pre-length space.*

Proof. 若 $K \subset X \times_\infty Y$ 是紧的，则存在两个紧集 $K_1 \subset X$ 和 $K_2 \subset Y$，使得 $K \subset K_1 \times K_2$。令 $\gamma\colon [a,b] \to K$ 为 $X \times_\infty Y$中的一条因果曲线，则我们可以找到两条因果曲线 $\alpha\colon [a,b] \to K_1$、$\beta\colon [a,b] \to K_2$，使得 $\gamma(t) = (\alpha(t)\ \beta(t))$。由于 X和 Y是整体双曲的，因此存在两个正数 C_1 和 C_2，使得 $L_{d_X}(\alpha) \leq C_1$ 且 $L_{d_Y}(\beta) \leq C_2$。因此，沿用引理 3.10 证明中的类似论证，我们得到

$$L_{d_\infty}(\gamma) \leq C_1 + C_2.$$

因此，$X \times_\infty Y$ 是非完全禁闭的。最后，注意到

$$J^{\pm}_\infty(x_1,y_1) \cap J^{\mp}_\infty(x_2,y_2) = \left(J^{\pm}_X(x_1) \cap J^{\mp}_X(x_2)\right) \times \left(J^{\pm}_Y(y_1) \cap J^{\mp}_Y(y_2)\right),$$

因此，$J^{\pm}_\infty(x_1,\ y_1) \cap J^{\mp}_\infty(x_2,\ y_2)$ 的紧性直接来自 $J^{+}_X(x_1) \cap J^{-}_X(x_2)$ 和 $J^{+}_Y(y_1) \cap J^{-}_Y(y_2)$ 的紧性。 □

由引理 3.10 和命题 3.11，可立即得到以下结果。

推论 **3 12** *Let $X\ d_X\ \ll_X\ \leq_X\ \tau_X$ and $Y\ d_Y\ \ll_Y\ \leq_Y\ \tau_Y$ be.. (,,,,) (,,,,) two globally hyperbolic regularly localizable Lorentzian pre-length spaces. Then $X \times_\infty Y$ is a globally hyperbolic Lorentzian length space.*

4 作为洛伦兹预长度空间的超空间

本节将阐述本文的主要结果：我们为洛伦兹预长度空间 $(X, d, \ll, \leq, \tau)$ 的紧集超空间和因果菱形超空间赋予洛伦兹预长度结构，并配备连续时间分离函数 τ。

在洛伦兹预长度空间的背景下，我们可以定义关系$\ll_H$ 和 $\leq_H$，它们分别自然地继承自 $\ll$ 和 $\leq$的性质，成为类时关系和因果关系。具体而言，我们定义

(i) 对于 $A, B \in \mathcal{H}(X)$，$A \ll_H B$ 当且仅当 $\forall a \in A$ 存在一个 $b_0 \in B$，满足 $a \ll b_0$，且 $\forall b \in B$ 存在一个 $a_0 \in A$，满足 $a_0 \ll b$。(ii) 对于 $A, B \in \mathcal{H}(X)$，$A \leq_H B$ 当且仅当 $\forall a \in A$ 存在一个 $b_0 \in B$，满足 $a \leq b_0$，且 $\forall b \in B$ 存在一个 $a_0 \in A$，满足 $a_0 \leq b$。

此外，对于 $x \in X$ 和 $C \in \mathcal{H}(X)$，我们定义距离函数$^{\pm}_L$： $X \times \mathcal{H}(X) \to [0,\infty]$ 为

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}^{-}_L(x,C) &= \sup\{\tau(x,c) : c \in C\}, \\ \mathrm{dist}^{+}_L(C,x) &= \sup\{\tau(c,x) : c \in C\}, \end{aligned}$$

以及 τ_H： $\mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \to [0,\infty]$ 为[8]

$$\tau_H(A,B) = \sup\{r>0 : A \subset \overline{U}_r^{L,-}(B) \text{ and } B \subset \overline{U}_r^{L,+}(A)\},$$

其中

$$\begin{aligned}\overline{U}_r^{L,-}(C) &= \{x \in X : \mathrm{dist}_L^-(x,C) \geq r\},\\ \overline{U}_r^{L,+}(C) &= \{x \in X : \mathrm{dist}_L^+(C,x) \geq r\}.\end{aligned}$$

定义 4.1. *We say that* $(\mathcal{H}(X)\ d_H,\ \ll_H,\ \leq_H,\ \tau_H)$ *is the*紧子集的洛伦兹超空间 *of* $(X,\ d)$。

注 4 2 *Due to the continuity of* τ *we have that* $\bar{}_L$ *and* ^+_L *.. are both non-negative continuous functions. Moreover for every* $x \in X$ 距离函数 距离函数, *and* $C \in \mathcal{H}(X)$ *there exists* $c_-,\ c_+ \in C$ *such that* 距离函数$_L^-(x,\ C) = \tau(x,\ c_-)$ *and*距离函数$_L^+ = \tau(x,\ c_+)$。

以下引理可被视为关于 τ_H 的著名结果（参见例如引理 2.9）的类比。

引理 4.3. *For every* $A,\ B \in \mathcal{H}(X)\ r_1 > 0,\ r_2 > 0$ *and* $r \geq 0$ *we have:*

1. $\overline{U}_{r_1}^{L,-}\left(\overline{U}_{r_2}^{L,-}(A)\right) \subset \overline{U}_{r_1+r_2}^{L,-}(A)$ *and* $\overline{U}_{r_1}^{L,+}\left(\overline{U}_{r_2}^{L,+}(A)\right) \subset \overline{U}_{r_1+r_2}^{L,+}(A)$.
2. $\tau_H(A,B) = \min\left\{\inf_{a\in A}\mathrm{dist}_L^-(a,B), \inf_{b\in B}\mathrm{dist}_L^+(b,A)\right\}$.
3. $\tau_H(A,B) \geq r$ *if and only if* $\forall a \in A\ \mathrm{dist}_L^-(a,B) \geq r$ *and* $\forall b \in B$ $\mathrm{dist}_L^+(A,b) \geq r$.
4. *If* $A \subset B$ *then* $\overline{U}_r^{L,-}(A) \subset \overline{U}_r^{L,-}(B)$ *and* $\overline{U}_r^{L,+}(A) \subset \overline{U}_r^{L,+}(B)$.

Proof. 为了证明 (1)，考虑 $x \in U_{r_1}^L\left(U_{r_2}^{L,-}(A)\right)$，那么存在 $y \in U^L_{,r_2}{}^-(A)$ 和 $z \in A$ 使得

$$\tau(x,y) = \mathrm{dist}_L^-(x, \overline{U}_{r_2}^L(A)) \geq r_1$$

$$\tau(y,z) = \mathrm{dist}_L(y,A) \geq r_2,$$

因此 $\tau(x,y) > 0$ 且 $\tau(y,z) > 0$，这意味着 $x \ll y \ll z$，从而 $\tau(x,z) \geq \tau(x,y) + \tau(y,z)$。因此

$$\mathrm{dist}_L^-(x,A) \geq \tau(x,z) \geq r_1 + r_2.$$

类似的计算表明，$U^L_{,r_1}{}^+\left(U_{r_2}^{L,+}(A)\right) \subset U^L_{,r_1+r_2}{}^+(A)$。 □

对于第 (2) 点，记

$$R = \min\left\{\inf_{a\in A}\mathrm{dist}_L^-(a,B), \inf_{b\in B}\mathrm{dist}_L^+(A,b)\right\}.$$

[8]在 $\{r$ 的情况下：$A \subset U^L_{,r}{}^-(B)$ 和 $B \subset U^L_{,r}{}^+(A)\} = \varnothing$，则我们令 $\tau_H(A,\ B) = \infty$。

首先我们将证明 $R \geq \tau_H(A,\ B)$。设 $r > 0$ 使得 $A \subset U^{L}_{\cdot,\ r}{}^{-}(B)$ 且 $B \subset U^{L}_{\cdot,\overline{r}}{}^{+}(A)$。则 $\forall a \in A$ 和 $\forall b \in B$，距离函数$d^{-}_{L}(a,\ B) \geq r$，且距离函数$d^{+}_{L}(A,\ b) \geq r$。因此

$$\inf_{a\in A} \mathrm{dist}^{-}_{L}(a,B) \geq r \text{ and } \inf_{b\in B} \mathrm{dist}^{+}_{L}(A,b) \geq r.$$

因此 $R \geq r$ 这便直接推出 $R \geq \tau_H(A,\ B)$。反过来，我们要证明 $\tau_H(A,\ B) \geq R$。若 $R = 0$，则结论成立，因此不妨设 $R > 0$。由于

$$\inf_{a\in A} \mathrm{dist}^{-}_{L}(a,B) \geq R \text{ and } \inf_{b\in B} \mathrm{dist}^{+}_{L}(A,b) \geq R.$$

因此，距离函数$d^{-}_{L}(a,\ B) \geq R$，且距离函数$d^{+}_{L}(A,\ b) \geq R$，$\forall a \in A$且 $\forall b \in B$，这意味着 $A \subset U^{L}_{\cdot,\ \overline{R}}{}^{-}(B)$ 且 $B \subset U^{L}_{\cdot,\ R}{}^{+}(A)$，因此

$$R \in \{r > 0 : A \subset \overline{U}^{L,-}_{r}(B) \text{ and } B \subset \overline{U}^{L,+}_{r}(A)\}.$$

总之，$R \leq \tau_H(A,\ B)$，从而 $R = \tau_H(A,\ B)$。

性质 (3) 直接由性质 (2) 得出。最后，性质 (4) 根据距离函数d^{-}_{L} 和距离函数d^{+}_{L} 的定义得出。 □

引理 4.4. *If* $\tau_H(A,\ B) = 0$ *then* $A \not\ll_H B$.

Proof. 若 $\tau_H(A,\ B) = 0$，则

$$\inf_{a\in A} \mathrm{dist}^{-}_{L}(a,B) = 0 \text{ or } \inf_{b\in B} \mathrm{dist}^{+}_{L}(A,b) = 0.$$

假设 $\inf_{a\in A}$距离函数$d^{-}_{L}(a, B) = 0$。那么存在一个点列$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset A$，使得当 $i \to \infty$时，距离函数$d^{-}_{L}(x_i, B) \to 0$。由于 A 是紧的，因此 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 存在一个收敛子列。不妨设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 本身收敛到一点 $x \in A$。注意

$$\mathrm{dist}^{-}_{L}(x,B) = \lim_{i\to\infty} \mathrm{dist}(x_i,B) = 0,$$

因此，对于所有 $b \in B$，都有 $\tau(x, b) = 0$，这意味着对于所有 $b \in B$，都有 $x \not\ll b$，从而 $A \not\ll_H B$。$\inf_{b\in B}$距离函数$d^{+}_{L}(A, b) = 0$ 的情形可以用类似的方法处理。 □

定理 4 5 *The Lorentzian hyperspace* $\mathcal{H}\ X\ \ d_H \ll_H \leq_H \tau_H$ *is a*.. ((),,,) *Lorentzian pre-length space.*

Proof. 根据注 4.2 和引理 4.3 (2)，我们得到 τ_H 是关于 d_H的连续函数。显然，若 $A \not\leq_H B$，则 $\tau_H(A,\ B) = 0$。现在我们根据定义 2.1，研究洛伦兹预长度空间的其余性质。

事实上，由引理 4.4 可知，若 $A \ll_H B$，则 $\tau_H(A, B) > 0$（否则 A 不可能与 B 类时相关）。另一方面，若 $\tau_H(A, B) = r > 0$，则对所有 $a \in A$ 以及所有 $b \in B$，我们都有距离函数$d^{-}_{L}(a, B) \geq r$，且距离函数$d^{+}_{L}(A, b) \geq r$。总之，对所有 $a \in A$ 和 $b \in B$，都存在两点 $a_0 \in A$ 和 $b_0 \in B$（分别取决于 a 和 b，即 a_0 和 b_0），使得 $\tau(a, b_0) \geq r > 0$ 且 $\tau(a_0, b) \geq r > 0$，从而推出 $A \ll_H B$。因此，$\tau_H(A, B) > 0$ 当且仅当 $A \ll_H B$。

最后，若 $A \leq_H B \leq_H C$，取 $r_1 > 0$ 和 $r_2 > 0$，使得 $A \subset \overline{U}^{L,-}_{r_1}(B)$、$B \subset \overline{U}^{L,+}_{r_1}(A)$，且 $B \subset \overline{U}^{L,-}_{r_2}(C)$、$\overline{C} \subset U^{L,+}_{r_2}(B)$。因此，利用引理 4.3 的第 (1) 点，我们得到

$$A \subset \overline{U}^{L,-}_{r_1}(B) \subset \overline{U}^{L,-}_{r_1}\left(\overline{U}^{L,+}_{r_2}(C)\right) \subset \overline{U}^{L,-}_{r_1+r_2}(C),$$

并且类似地 $C \subset U^{L,+}_{r_1+r_2}(A)$。因此

$$r_1 + r_2 \in \{r > 0 : A \subset \overline{U}^{L,-}_{r_1+r_2}(C) \text{ and } C \subset \overline{U}^{L,+}_{r_1+r_2}(A)\},$$

从而得到 $r_1 + r_2 \leq \tau_H(A, C)$。这一不等式意味着

$$\tau_H(A, B) + \tau_H(B, C) \leq \tau_H(A, C),$$

由于 r_1 和 r_2 的选取是任意的，因此反向三角不等式得以成立。

□

回顾一下，在全局双曲预长度空间中，其因果菱形是紧的，并且其时间分离函数 τ 有限且连续。因此，可以直接应用命题 4.5，为全局双曲洛伦兹预长度空间的因果菱形集合赋予洛伦兹预长度结构。鉴于因果菱形在数学相对论、因果理论和洛伦兹几何的诸多方面发挥着基础作用，以下是我们的主要结果。

推论 4.6 （因果菱形的超空间）。 *Let* $(X, d, \ll, \leq, \tau)$ *be a globally hyperbolic Lorentzian pre-length space and define*

$$D(X) = \{J^+(x) \cap J^-(y) : x \leq y\}.$$

Then $\mathcal{D}\ X = D\ X\ d_H \ll_H \leq_H \tau_H$ *is a Lorentzian pre-length space* $(\ ) : (\ (\ ),,,)$ *called the hyperspace of causal diamonds of* X.

例 4.7. *In [7] the authors show that the hyperspace of closed inter-vals* $(\Sigma(\mathbb{R})\ d_H)$ *is isometric to the taxicab metric space* $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\geq 0}, d_T)$ *where* $d_T((x, t), (y, t)) = |x - y| + |t - s|$, *and the isometry* $f\colon \Sigma(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$ *is given by*

$$f([x - t, x + t]) = (t, x).$$

Further notice that the hyperspaces of causal diamonds $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ *and* $(\Sigma(\mathbb{R}), d_H)$ *agree as point sets. Thus, analog of the isometry* $f\ \Sigma\ \mathbb{R}$ *the question as if there exists a Lorentzian* $: 0$

$\to \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$ *depicted above. We an- plicit description of* $\tau_H($ *swer this question in the affirmative as follows. In order to find a ex-*

$[x - t, x + t], [y - s, y + s])$ *notice that whenever* $[x - t, x + t] \leq_H [y - s, y + s]$, *then* $x \leq y$, $y - x \geq t - s$ *and* $y - x \geq s - t$, *which in turn implies that*

$$\min\{y - x - (t - s), y - x - (s - t)\} = y - x - |t - s|.$$

Now fix $a \in [x - t, x + t]$, *then*

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}^-_L(a, [y - s, y + s]) &= \sup\{\tau_{\mathbb{R}}(a, c) : c \in [y - s, y + s]\} \\ &= \sup\{c - a : c \in [y - s, y + s]\} \\ &= y + s - a. \end{aligned}$$

Therefore

$$\inf_{a\in[x-t,x+t]} \mathrm{dist}_L^-(a,[y-s,y+s]) = y+s-(x+t) = y-x-(t-s),$$

and similarly

$$\inf_{b\in[y-s,y+s]} \mathrm{dist}_L^+([x-t,x+t],b) = y-s-(x-t) = y-x-(s-t),$$

leading to

$$\begin{aligned}\tau_H([x-t,x+t],[y-s,y+s]) &= \min\{y-x-(t-s), y-x-(s-t)\}\\ &= y-x-|t-s|.\end{aligned}$$

In conclusion, the function f is a distance preserving map from the hyperspace of causal diamonds $\mathcal{D}\ \mathbb{R}_1^1\ \ d_H \ll_H \leq_H \tau_H$ to the Lorentzian(( ), , ,)(. . ≥0, , , *taxicab semi-space* $\mathbb{R}_T^{2\ 1}\ \ d_T \ll_T \leq_T \tau_T$ *described in [6].*
,)

5 应用

接下来，我们将进一步研究因果菱形的超空间 $\mathcal{D}(\mathbb{R}_1^1 \times X)$，其中 $(X,\ d)$ 是一个完备测地长度空间。如下列结果所示，在这种情形下，我们实际上得到一个测地且整体双曲的洛伦兹长度空间。我们首先证明该超空间是测地的，并给出连接因果相关的菱形的极大测地线段的显式参数化。下面先介绍几个引理。首先，我们用显式形式描述洛伦兹出租车空间中的关系 $\ll_H, \leq_H$ 。

引理 5.1. *Let us consider the diamonds $D_1 = J^+(t_1,x_1) \cap J^-(t_2,x_2)$ and $D_2 = J^+(a_1,b_1) \cap J^-(a_2,b_2)$ for $(t_1,x_1) \leq (t_2,x_2)$ and $(a_1,b_1) \leq (a_2,b_2)$. Then $D_1 \leq_H D_2$ if and only if $(t_1,x_1) \leq (a_1,b_1)$ and $(t_2,x_2) \leq (a_2,b_2)$.*

Proof. 若 $D_1 \leq_H D_2$，则根据 $(t_2,x_2) \in D_1$ 存在 $(a,b) \in D_2$，使得 $(t_2,x_2) \leq (a,b) \leq_T (a_2,b_2)$，从而 $(t_2,x_2) \leq_T (a_2,b_2)$。类似地，对于 $(a_1,b_1) \in D_2$，存在 $(t,x) \in D_1$，使得 $(t_1,x_1) \leq_T (t,x) \leq (a_1,b_1)$，因此 $(t_1,x_1) \leq_T (a_1,b_1)$。现在假设 $(t_1,x_1) \leq_T (a_1,b_1)$ 且 $(t_2,x_2) \leq_T (a_2,b_2)$，并固定 $(t,x) \in D_1$、$(a,b) \in D_2$。则 $(t,x) \leq_T (t_2,x_2) \leq (a_2,b_2)$ 且 $(t_1,x_1) \leq_T (a_1,b_1) \leq_T (a,b)$，因此 $(t,x) \leq_T (a_2,b_2)$ 且 $(t_1,x_1) \leq_T (a,b)$。于是 $D_1 \leq_H D_2$。 □

命题 5.2. *For every two diamonds $D_1 = J^+(t_1,x_1) \cap J^-(s_1,y_1)$ and $D_2 = J^+(t_2,x_2) \cap J^-(s_2,y_2)$ with $(t_1,x_1) \leq (s_1,y_1)$ and $(t_2,x_2) \leq (s_2,y_2)$ we have*

$$d_H^T(D_1,D_2) = \max\{|t_2-t_1| + d(x_1,x_2), |s_2-s_1| + d(y_1,y_2)\},$$

where d_H^T is the Hausdorff distance induced by d_T in $\mathbb{R}_1^1 \times_T X$.

下一个结果在多种情形下都至关重要。

Proof. 设 $r \geq 0$ 满足 $D_1 \subset U_r^T(D_2) = J^+(t_2 - r, x_2) \cap J^-(s_2 + r, y_2)$ 且 $D_2 \subset U_r^T(D_1) = J^+(t_1 - r, x_1) \cap J^-(s_1 + r, y_1)$，则 $(t_2 - r, x_2) \leq (t_1, x_1) \leq (s_1, y_1) \leq (s_2 + r, y_2)$，因此

$$t_1 - (t_2 - r) \geq d(x_1, x_2), s_2 + r - s_1 \geq d(y_1, y_2).$$

结合最后这两个不等式，我们得到

$$r \geq (t_2 - t_1)d(x_1, x_2) \quad \text{and} \quad r \geq (s_1 - s_2) + d(y_1, y_2).$$

类似地，当 $D_2 \subset U_r^T(D_1) = J^+(t_1 - r, x_1) \cap J^-(s_1 + r, y_1)$ 时，我们得到

$$r \geq (t_1 - t_2) + d(x_1, x_2) \quad \text{and} \quad r \geq (s_2 - s_1) + d(y_1, y_2).$$

因此

$$r \geq |t_1 - t_2| + d(x_1, x_2) \quad \text{and} \quad r \geq |s_1 - s_2| + d(y_1, y_2),$$

由此可得

$$r \geq \max\{|t_2 - t_1| + d(x_1, x_2), |s_2 - s_1| + d(y_1, y_2)\}.$$

根据 d_H^T 的定义，我们得出

$$d_H^T(D_1, D_2) \geq \max\{|t_2 - t_1| + d(x_1, x_2), |s_2 - s_1| + d(y_1, y_2)\}.$$

为了证明不等式 $d_H^T(D_1, D_2) \leq \max\{|t_2 - t_1| + d(x_1, x_2), |s_2 - s_1| + d(y_1, y_2)\}$，只需注意到 $\delta = \max\{|t_2 - t_1| + d(x_1, x_2), |s_2 - s_1| + d(y_1, y_2)\}$ 满足 $D_1 \subset U_\delta^T(D_2)$ 和 $D_2 \subset U_\delta^T(D_1)$。 □

接下来我们证明，$\mathcal{D}(\mathbb{R}_1^1 \times X)$ 是一个测地的洛伦兹预长度空间，并为极大曲线提供显式的 τ参数化。我们采用与引理 2.10 中相同的方法。因此，首先需要证明 d_T 管状邻域，并证明两个因果菱形的交集本身也是因果菱形。以下引理将处理这些问题。

引理 5.3 *Let $t, x \leq_T s, y$ be two points in $\mathbb{R}_1^1 \times_T X$ and $D = J^+(t, x) \cap J^-(s, y)$. Then for every $r \geq 0$ we have*

$$\overline{U}_r^T(D) = J^+(t - r, x) \cap J^-(s + r, y),$$

where $U_r^T = \{(u, z) \in_T D : d_T((u, z), D) \leq r\}$ is the closed $r-$tubular neighborhood with respect to d_T.

距离函数 $d_T((u, z), D)$

Proof. 首先，如果 $(u, z) \in U_r^T(D)$，那么由于 D的紧性，存在 $(u_0, z_0) \in D$，使得

$$u_0 - u + d(z, z_0) \leq |u - u_0| + d(z, z_0) \leq d_T((u, z), (u_0, z_0)) \leq r.$$

我们还有 $s - u_0 \geq d(y, z_0)$ 和 $u_0 - t \geq d(x, z_0)$，因为 $(t, x) \leq_T (u_0, z_0) \leq_T (s, y)$。因此

$$d(x, z) \leq d(x, z_0) + d(z_0, z) \leq (u_0 - t) + (r + u - u_0) = u - (t - r),$$

这意味着 $(t,x) \leq_T (u,z)$。类似地，$(u,z) \leq_T (s,y)$，从而得到结论 $(u,z) \in J^+(t-r,x) \cap J^-(s+r,y)$。反之，设 $(u,z) \in J^+(t-r,x) \cap J^-(s+r,y)$。如果 $(u,z) \in D$，那么 $(u,z) \in U_r^T(D)$；否则 $(t,x) \not\leq_T (u,z)$ 或 $(u,z) \not\leq_T (s,y)$。假设 $(u,z) \not\leq_T (s,y)$，则 $s-u < d(y,z)$。如果 $0 < s-u$，令 $\gamma : [0, d(y,z)] \to X$ 为连接 y 与 z 的测地线段（即 $\gamma(0) = y$ 且 $\gamma(d(y,z)) = z$），并取 $z_0 = \gamma(s-u)$，于是

$$d(y, z_0) = d(\gamma(0), \gamma(s-u)) = s-u,$$

因此 $(u, z_0) \leq_T (s, y)$ 且 $(u, z_0) \in D$。此外，

$$d_T((u,z),(u,z_0)) = d(z,z_0) = d(y,z) - (s-u) \leq r,$$

因为 $(u, z) \leq_T (s+r, y)$。因此 $(u, z) \in U_r^T(D)$。或者，如果 $s-u < 0$，那么

$$d_T((u,z),(s,y)) = u - s + d(z,y) \leq (u-s) + (s+r-u) = r,$$

再次由 $(u, z) \leq_T (s+r, y)$ 可知。因此在这种情况下，我们也有 $(u, z) \in U_r^T(D)$。类似的论证可证明，若 $(t, x) \not\leq_T (u, z)$，则 $(u, z) \in U_r^T(D)$，由此完成证明。 □

引理 5.4 *Let $D_1 = J^+(t_1, x_1) \cap J^-(s_1, y_1)$ and $D_2 = J^+(t_2, x_2) \cap J^-(s_2, y_2)$. If $u \in [0, r]$ then*

$$\overline{U}_u(D_1) \cap \overline{U}_{r-u}(D_2) = J^+(t_2 + u - r, x_2) \cap J^-(s_1 + u, y_1).$$

Proof. 根据引理 5.1，只需证明 $(t_2+u-r, x_2) \leq_T (s_1+u, y_1)$，这等价于 $s_1 - t_2 + r \geq d(x_2, y_1)$。首先，应用命题 5.2，我们可以假设

$$r = d_H(D_1, D_2) = t_2 - t_1 - d(x_1, x_2).$$

但是 $s_1 - t_1 \geq d(x_1, y_1)$，因此

$$s_1 - t_2 + r = s_1 - t_1 + d(x_1, x_2) \geq d(y_1, x_1) + d(x_1, x_2) \geq d(y_1, x_2).$$

□

命题 5.5 *Let $D_1 = J^+(t_1, x_1) \cap J^-(s_1, y_1)$ and $D_2 = J^+(t_2, x_2) \cap J^-(s_2, y_2)$ with $r = d_H(D_1, D_2) > 0$ and $D_1 \leq_H D_2$. Then $\gamma : [0, r] \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^1_1 \times X)$ defined as*

$$\gamma(u) = \overline{U}_u(D_1) \cap \overline{U}_{r-u}(D_2)$$

is a causal curve connecting D_1 with D_2 and $\tau_H(\gamma(u), \gamma(v)) = |u-v|$ for every $u, v \in [0, r]$.

Proof. 证明的第一部分由引理 5.4 立即得出。现在我们来关注第二部分。设 $0 \leq u \leq v \leq r$，则利用引理 4.3

$$\tau_H(\gamma(u), \gamma(v)) = \min\{v-u, v-u\} = v - u.$$

特别要注意，$\tau_H(D_1, D_2) = r$。 □

现在我们来证明主要结果。

定理 5.6. *Let (X,d) be a complete geodesic length space. The hyperspace of causal diamonds $\mathcal{D}\ \mathbb{R}^1_1 \times_T X$ is a geodesic globally hyperbolic () Lorentzian length space.*

Proof. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1_1 \times_T X)$ 中的局部因果闭性可由 $\mathbb{R}^1_1 \times_T X$ 的相应性质和引理 5.1 轻易推出。此外，命题 5.5 保证 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1_1 \times_T X)$ 是因果路径连通且内蕴的。因此，要证明因果菱形超空间是一个洛伦兹长度空间，只需证明 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1_1 \times_T X)$ 是可局部化的。事实上，我们将证明

$$\Omega_D^r = I_H^+(D_r^-) \cap I_H^-(D_r^+)$$

是一个定位邻域，其中 $D = J^+\ t\ x\ \cap J^-\ s\ y\quad r > 0\ \ D_r^- = J^+\ t-r\ x\ \cap J^-\ s-r\ y\qquad D_r^+ = J^+\ t+r\ x\ \cap J^-\ s+r\ y$ (,) (,)，，(,) (,) 且 (,) (,)。首先，令γ： $[a,b] \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^1_1 \times_T X)$ 为一条包含于 Ω_D^r 中的因果曲线，其中

$$\gamma(u) = J^+(\alpha(u), \beta(u)) \cap J^-(\tilde{\alpha}(u), \tilde{\beta}(u))$$

以及 $\alpha\ \tilde{\alpha}\quad [a,b] \to \mathbb{R}\ \ \beta\ \tilde{\beta}\quad [a,b] \to X\qquad\qquad a = u_0 <$, ： , , ： 。 $u_1 < \cdots < u_n = b\qquad\qquad \alpha\ u_{i+1}\ - \alpha\ u_i\ \geq d\ \beta\ u_{i+1}\ \ \beta\ u_i$ 现在，对于一个分割，注意到 ( ) ( ) (( ) ( ))，并且 $\tilde{\alpha}(u_{i+1})\ - \tilde{\alpha}(u_i)\ \geq d(\tilde{\beta}(u_{i+1})\ \tilde{\beta}(u_i))$，根据引理 5.1。然后，应用引理 5.2，我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} d_H^T(\gamma(u_i), \gamma(u_{i+1})) &= \sum_{i=0}^{n-1} \max\{|\alpha(u_{i+1}) - \alpha(u_i)| + d(\beta(u_{i+1}), \beta(u_i)), \\
&\qquad |\tilde{\alpha}(u_{i+1}) - \tilde{\alpha}(u_i)| + d(\tilde{\beta}(u_{i+1}), \tilde{\beta}(u_i))\} \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} 2(\alpha(u_{i+1}) - \alpha(u_i)) + 2(\tilde{\alpha}(u_{i+1}) - \tilde{\alpha}(u_i)) \\
&= 2\left(\alpha(b) - \alpha(a) + \tilde{\alpha}(b) - \tilde{\alpha}(a)\right).
\end{aligned}$$

另一方面，由于 $D_r^+ \leq_H \gamma(a) \leq_H \gamma(b)\ \leq_H D_r^+$，可知

$$\alpha(b) - \alpha(a) + \tilde{\alpha}(b) - \tilde{\alpha}(a) \leq 4r.$$

因此，对于包含于 Ω_D^r 中的每条因果曲线， $L_{d_H^T}(\gamma)\ \leq 8r$。显然，$(\Omega_D^r, d_H^T, \ll_H, \leq_H, \omega_D^r, \tau_H|_{\Omega_D^r})$ 是一个洛伦兹预长度空间。如果 $D_0 = J^+(t_0, x_0) \cap J^-(s_0, y_0)\ \in \Omega_D^r$，我们需要证明 $I_H^+(D_0) \cap \Omega_D^r \neq \varnothing$。为此，注意如果 m_1, $m_2 \in X$ 是 x, x_0 以及 y, y_0 的某些中点，那么 $D' = J^+\left(\frac{t+r+t_0}{2}, m_1\right) \cap J^-\left(\frac{s+r+s_0}{2}, m_2\right)$ 属于 $I_H^+(D_0)\ \cap \Omega_{D^0}^r$ 类似地，我们可以证明，对于每个 $D_0 \in \Omega_D^r$， $I_H^-(D_0)\ \cap \Omega_D^r \neq \varnothing$。

首先，我们需要证明，每个因果菱形 $J_H^+(D_1)\ \cap J_H^-(D_2)$ 关于由 d_H 在 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1_1 \times X)$ 上诱导的拓扑都是紧的，其中 $D_1 = J^+(t_1, x_1)\ \cap J^-(s_1, y_1)$ 且 $D_2 = J^+(t_2, x_2)\ \cap J^-(s_2, y_2)$。设 $\{F_n = J^+(p_n, z_n) \cap J^-(q_n, w_n)\}$ 是包含在 $J_H^+(D_1)\ \cap J_H^-(D_2)$ 中的一列菱形，并且对每个 $n \geq 1$ 都有 $F_n \neq \varnothing$。于是 $D_1 \leq_H F_n \leq D_2$，应用引理 5.1 可得 $(t_1, x_1)\ \leq_T (p_n, z_n)\ \leq (t_2, x_2)$，且 $(s_1, y_1)\ \leq_T (q_n, w_n)\ \leq (s_2, y_2)$。由此可知 $(p_n, z_n)\ \in\ J^+(t_1, x_1)\ \cap$

$J^-(t_2, x_2)$ 且 $(q_n, w_n) \in J^+(s_1, y_1) \cap J^-(s_2, y_2)$。利用 $J^+(t_1, x_1) \cap J^-(t_2, x_2)$ 和 $J^+(s_1, y_1) \cap J^-(s_2, y_2)$ 的紧性，并采用对角化的康托尔过程，我们可以找到两个收敛子列$\{(p_{n_k}, z_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $\{(q_{n_k}, w_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$，它们分别收敛到 (p, z) 和 (q, w)。此外，序列 $\{F_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ $F = J^+ \ p \ z \ \cap$ 收敛 $J^- \ q \ w$ $\leq_T$ $\mathbb{R}^1_1 \times_T X$ 到 (,) (,)。由于对 中的每个菱形而言 都是闭的，因此 $(p, z) \in J^+(t_1, x_1) \cap J^-(t_2, x_2)$，且 $(q, w) \in J^+(s_1, y_1) \cap J^-(s_2, y_2)$。最后这一结论意味着 $F \in J^+_H(D_1) \cap J^-_H($ $D_2)$。 □

我们通过给出 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1_1 \times_T X)$ 的一个优美实现来结束本节；这一实现也揭示了洛伦兹出租车度量与一致乘积之间的密切联系。

定理 5.7。 *Let* f: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1_1 \times_T X) \to X \times_\infty X$ *defined as* $f(D) = ($($t \ x$, $s \ y$ *where* $D = J^+ \ t \ x \ \cap J^- \ s \ y$. *Then* f *is an isometry in*,) (,)) (,) (,) ( ) $f \ D$ *and a* τ*-preserving map.*

Proof. f 是度量等距映射，这可直接由其定义和命题 5.2 得出。此外， f 是 τ 保持的，正如下一个结果所示。

□

命题 5.8。 *Let* $D_1 = J^+(t_1, \ x_1) \cap J^-(s_1, \ y_1)$ *and* $D_2 = J^+(t_2, \ x_2) \cap J^-(s_2, \ y_2)$ *two diamonds with* $(t_1, \ x_1) \leq_T (s_1, \ y_1)$, $(t_2, \ x_2) \leq_T (s_2, \ y_2)$ *and* $D_1 \leq_H D_2$, *then*

$$\tau_H(D_1, D_2) = \min\{t_2 - t_1 - d(x_1, x_2), s_2 - s_1 - d(y_1, y_2)\}.$$

Proof. 设 $(u_1, z_1) \in D_1$，则

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}^-_L((u_1, z_1), D_2) &= \sup\{\tau((u_1, z_1), (u_2, z_2)) : (u_2, z_2) \in D_2\} \\ &= \sup\{\tau((u_1, z_1), (u_2, z_2)) : (u_1, z_1) \leq (u_2, z_2) \in D_2\}. \end{aligned}$$

因此，对于 $(u_1, z_1) \leq (u_2, z_2) \leq (s_2, y_2)$，我们得到

$$\begin{aligned} \tau((u_1, z_1), (u_2, z_2)) &\leq \tau((u_1, z_1), (u_2, z_2)) + \tau((u_2, z_2), (s_2, y_2)) \\ &\leq \tau((u_1, z_1), (s_2, y_2)). \end{aligned}$$

总之，我们必有

$$\mathrm{dist}^-_L((u_1, z_1), D_2) = \tau((u_1, z_1), (s_2, y_2)).$$

由于 $(u_1, z_1) \leq (s_1, y_1) \leq (s_2, y_2)$，我们可以类似地证明

$$\inf_{(u_1,z_1)\in D_1} \mathrm{dist}^-_L((u_1, z_1), D_2) = \tau((s_1, y_1), (s_2, y_2)) = s_2 - s_1 - d(y_1, y_2).$$

此外，通过类似的过程，我们得到

$$\inf_{(u_2,z_2)\in D_2} \mathrm{dist}^+_L(D_1, (u_2, z_2)) = \tau((t_1, x_1), (t_2, x_2)) = t_2 - t_1 - d(x_1, x_2).$$

那么，根据我们对 τ_H 的定义，有

$$\tau_H(D_1, D_2) = \min\{t_2 - t_1 - d(x_1, x_2), s_2 - s_1 - d(y_1, y_2)\}.$$

□

致谢

W. Barrera 感谢 Conacyt 通过 SNI 45382 和 Ciencia de Frontera 21100 项目提供的支持。L. Montes 感谢 Conacyt 通过 Becas Nacionales 项目（783177）提供的支持。D. Solis 得到了 Conacyt SNI 38368 和 UADY-FMAT PTA 2023 的部分支持。

参考文献

[1] L. Ake、S. Burgos 和 D. A. Solis。*Causal completions as Lorentzian pre-length spaces.* 54 9 108 2022 《广义相对论与引力》（）：（），[2] L. Ake、A. Cabrera 和 D. A. Solis。*On the causal hierarchy of Lorentzian length spaces.* 37 21 215013, 22 《经典与量子引力》，（）：（2020），[3] S. Alexander、M. Graf 和 C. S¨smann。*Generalized cones as Lorentzian length spaces: Causality curvature and singularity theorems.* 1909 09575 ，，。arXiv: . . 即将发表于《分析与几何通讯》，[4] S. Antonyan。*The Gromov-Hausdorff hyperspace of a Euclidean space.* 363, 106977 2020 《数学进展》第（）卷。[5] S. Antonyan。*The Gromov-Hausdorff hyperspace of a Euclidean space II.* 393, 108055 2021 ，《数学进展》第（）卷。[6] W. Barrera、L. Montes de Oca 和 D. A. Solis。*Comparison theorems for Lorentzian length spaces with lower timelike curvature bounds.* 54 9 107 2022 《广义相对论与引力》第（）卷：（），[7] W. Barrera、L. Montes de Oca、D. Solis。*On geodesic extendability and the space of compact balls of length spaces* 。《数学月刊》（2021）[8] J. K. Beem、P. E. Ehrlich 和 K. L. Easley。*Global Lorentzian geometry.* 1996 纽约：Marcel Dekker公司（），[9] T. Beran 和 F. Rott。*Gluing constructions for Lorentzian length spaces.* 2201 09695 [ ], 2022 预印本，arXiv: . math.DG ()，[10] T. Beran 和 C. Sam¨ann。*Hyperbolic angles in Lorentzian length spaces and timelike curvature bounds.* 2204 09491 预印本，arXiv: .（2022）[11] T. Beran、A. Ohanyan、F. Rott 和 D. A. Solis。*The splitting theorem for globally hyperbolic Lorentzian length spaces with non-negative timelike curvature* 2209 14724 2022 。arXiv: . ( )

[12] D. Burago、Y. Burago 和 S. Ivanov。*A course in metric geometry* . 数学研究生教程，第33卷，美国数学学会，普罗维登斯（2001）[13] A. Burtscher 和 L. Garc´ıa-Heveling。*Time functions on Lorentzian length spaces.* 2108 02693 [ ], 2021 预印本，arXiv: . gr-qc ()，[14] T. A. Chapman。*Lectures on Hilbert Cube Manifold*。《C. B. M. S. 数学区域会议丛书》，第28卷，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，（1975）。

[15] S. Chowdhury 和 F. M
´ *Explicit geodesics in Gromov-* emoli。《美 *Hausdorff space* 25 48 59, 国数学科学学会电子研究年刊》第 - 卷（2018）。[16] P.T. Chr
´ *On Lorentzian causality with con-* usciel 和 *tinuous metrics* 29 14 145001, 32, 2012 J.D.E. Grant。《经典与量子引力》，( ): 。[17] D. W. Curtis。
Hyperspaces homeomorphic to Hilbert sapce。《美国数学会会刊》75(1), 126-130, （1979）[18] 事件视界望远镜合作组。
First M87 event hori- 《天体物理 *zon telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole.* 学杂志快报》875，1–17（2019）。[19] G. Galloway、E. Ling 和 J. Sbierski。 *Timelike Completeness as an Obstruction to C^0-Extensions.* 359, 《数学物理通讯》，第937-949卷（2018）[20] L. Garc
´ *Causality theory of spacetimes with continuous* 1 *Lorentzian metrics revisited .* a-Heveling。《经典与量子引力》，第38卷，145028（2021）[21] M. Graf,
Volume comparison for C^1, ^{1}-metrics, 《全球分析与几何年刊》第50卷，第209-235页。（2016）[22] M. Graf,
Singularity theorems for C^1 Lorentzian metrics, 《数学物理通讯》第378卷，第1417-1450页（2020）。[23] M. Graf、J. D. E. Grant、M. Kunzinger 和 R. Steinbauer,
The Hawking–Penrose singularity theorem for $C^{1\,1}$ Lorentzian metrics ，，《数学物理通讯》第360卷，第1009-1042页（2018）。[24] J. D. E. Grant、M. Kunzinger 和 C. S
¨ *Inextendibility of* amann。 *spacetimes and Lorentzian length spaces.* 《全球分析与几何年刊》，第55卷，133–147（2019）[25] M. Gromov。
Groups of polynomial growth and expanding maps.《IHES数学出版物》，53，53-78，（1981）。[26] M. Gromov。
Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. 152 ¨ 1999 数学进展丛书。第 . 卷。Birkauser（ ）[27] J. Hedicke。
Lorentzian distance functions in contact geometry.《拓扑分析杂志》，1-21, 10.1142/S179352532250008X（2022）[28] S.W. Hawking 和 G.F.R. Ellis。 *The Large Scale Structure of Space-Time* 1973 。剑桥大学出版社（ ）[29] A. Illanes 和 S. B. Nadler Jr.
Hyperspaces: Fundamentals and recent advances 1999 。CRC出版社，（ ）。[30] A. Ivanov、N. Nikolaeva 和 A. Tuzhilin。 *The Gromov-Hausdorff metric on the space of compact metric spaces is strictly intrinsic*, 《数学札记》100，883-885，（2016）。[31] E. Kronheimer 和 R. Penrose,
On the structure of causal spaces.《剑桥哲学学会数学学报》第63卷（2），481-502（1967）[32] M. Kunzinger、A. Ohanyan、B. Schinnerl 和 R. Steinbauer。
The 《分析与几 *Hawking-Penrose singularity theorem for C^1 Lorentzian metrics.* 何通讯》，第391卷（3），第1143-1179页（2022）。

[33] M. Kunzinger 和 C. S¨amann, *Lorentzian length spaces*, 《全球分析与几何年刊》，第 54 卷，第 3 期，第 399–447 页（2008）。[34] M. Kunzinger 和 R. Steinbauer。 *Null distance and convergence of Lorentzian length spaces.* ´ 23, 4319 4342 《H. Poincare 年刊》，第 - 卷（2022）[35] M. Kunzinger、R. Steinbauer、M. Stojkovic 和 J. A. Vickers *Hawking's singularity theorem for $C^{1\,1}$ metrics* ，。《经典与量子引力》，第 32 卷（7）：075012（2015）。[36] M. Kunzinger、R. Steinbauer 和 J. A. Vickers。 *The Penrose singularity theorem in regularity $C^{1\,1}$.* 32，《经典与量子引力》，第 (15) 卷：155010（2015）。[37] LIGO科学合作组织 Virgo合作组织。*Observation of gravitational waves from a binary black hole merger.* 《物理评论快报》116 061102（2016）。[38] E. Ling。 *Aspects of C^0 causal theory.* 《广义相对论与引力》，第 52 卷，57（2020）[39] R. McCann 和 C. S¨amann。。 *A Lorentzian analog for Hausdorff dimension and measure* 4, 2 367 400 2022 《纯粹与应用分析》，第 卷 ( )。[40] E. Minguzzi。 *Causality theory for closed cone structures with applications.* 31 5 1930001, 139 2019 《数学物理评论》，第 ( ) 卷，（）[41] E. Minguzzi 和 S. Shur。 *Lorentzian metric spaces and their Gromov-Hausdorff convergence.* 2209 14384 2022 arXiv: 。（）。[42] O. M¨uller。 *Functors in Lorentzian geometry: three variations on a theme* 55 2 39 2023 《广义相对论与引力》，第 ( ) 卷（）。[43] O. M¨uller。 *Lorentzian Gromov-Hausdorff theory and finiteness results.* 54 10 117 2022 《广义相对论与引力》，第 ( ) 卷（）。[44] S. B. Nadler Jr. *Hyperspaces of sets*, Marcel-Dekker，(1978) [45] B. O'Neill。 *Semi-Riemannian geometry: with applications to Relativity* 1984 。学术出版社，（）[46] R. Penrose。 *Zero rest-mass fields including gravitation: asymptotic behaviour* ，《伦敦皇家学会会刊》，第 284 卷，第 1397 期，159–203（1965）。[47] P. Petersen。 *Riemannian geometry*。《数学研究生教材》。第 171 卷。第 3 版。施普林格（2016）。[48] J. Sbierski。 *The C 0 -inextendibility of the Schwarzschild spacetime and the spacelike diameter in Lorentzian geometry.* 《微分几何学杂志》，108(2):319–378（2018）[49] C. Sormani 和 C. Vega。 *Null distance on a spacetime*。《经典与量子引力》33(8)，085001（2016）[50] S. Surya。 *The causal set approach to quantum gravity.* 《相对论活评论》，第 22 卷：5（2019）。[51] J. Van Mill。 *Infinite-Dimensional Topology: Prerequisites and Introduction* 43, 1989 。《北荷兰数学丛书》，阿姆斯特丹，（）。

1. Waldemar Barrera. Facultad de Matemáticas. Universi-dad Autónoma de Yuctán, Periférico Norte 13615. Mérida,
México. bvargas@correo.uady.mx 2.
Luis Montes de Oca. Facultad de Matemáticas. Universi-dad Autónoma de Yuctán, Periférico Norte 13615. Mérida,
México.
mauricio.montes@alumnos.uady.mx 3.
Didier A. Solis. Facultad de Matemáticas. UniversidadAutónoma de Yuctán, Periférico Norte 13615. Mérida,
México. didier.solis@correo.uady.mx