arXiv:2302.11853v1 [math.LO] 23 Feb 2023

逻辑博客 2022年

编辑：ANDR´E NIES

Contents

第 1 部分。 **Group** 理论 **y** 及其与逻辑的联系 **gic** 2
1. Gardam 对 Higman/Kaplansky 单位猜想的反驳 22. 关于可计算概形有限群和离散群的一些不可判定性质 103. 局部 Roelcke 预紧群与交半群胚之间的对偶 124. Ferov：利用组合结构的对称性进行计算的范式及其可视化 16

第 2 部分。 Nies：关于可计算的全不连通局部紧群的两场报告 19
5. 引言 196. 根树路径上的可计算性 237. 通过贝尔表示定义可计算的全不连通局部紧群 268. 通过交半群胚定义可计算的全不连通局部紧群 289. 两类可计算表示的等价性 3210. 与全不连通局部紧群相关对象的算法性质 3611. 可计算的全不连通局部紧群类的闭包性质 3912. 可计算表示的唯一性 41参考文献 44

逻辑博客是一个共享平台，用于

- 快速发布与逻辑相关的结果和问题
- 发布结果及其证明，以供进一步研究
- 将研究成果存档，以备日后使用
- 在向期刊投稿前征求反馈
- 促进合作。

每年的博客会在当年结束后 2 至 3 个月发布到 arXiv 上。

逻辑博客 2021 (链接： http://arxiv.org/abs/2202.13643)Logic Blog2020 (链接： http://arxiv.org/abs/2101.09508)逻辑博客 2019 (链接： http://arxiv.org/abs/2003.03361)逻辑博客 2018 (链接： http://arxiv.org/abs/1902.08725)逻辑博客 2017 (链接： http://arxiv.org/abs/1804.05331)逻辑博客 2016 (链接： http://arxiv.org/abs/1703.01573)逻辑博客 2015 (链接： http://arxiv.org/abs/1602.04432)[1]

逻辑博客 2014 (链接： http://arxiv.org/abs/1504.08163)逻辑博客 2013 (链接： http://arxiv.org/abs/1403.5719)逻辑博客 2012 (链接：http://arxiv.org/abs/1302.3686)逻辑博客 2011 (链接：http://arxiv.org/abs/1403.5721)逻辑博客 2010 (链接：http://dx.doi.org/2292/9821)

逻辑博客是如何运作的?

撰写与编辑。源文件存放在共享的 Dropbox 中。请联系 Andr´e（andre@cs.auckland.ac.nz）以获取访问权限。

引用。博客文章可以被引用。引用示例如下：

H. Towsner，遍历收敛的可计算性。见 Andr´e Nies（编者），逻辑博客，2012 年，第 1 部分，第 1 节，网址：http://arxiv.org/abs/1302.3686。逻辑博客上线 arXiv 后，便会在谷歌学术等平台生成引用信息。

第 1 部分：群论及其与逻辑的联系

1. Gardam's refutation of the Higman/Kaplansky unit conjecture

定义 1.1. 含幺环 R 中的元素 u 称为单位，如果存在 $w \in R$ 使得 $uw = wu = 1$。R 中所有单位在环乘法下构成一个群，记作 $R^\times$。

注意，如果 R 没有零因子，那么只需要求 $uw = 1$；这意味着 $u(wu - 1) = 0$，因此 $wu = 1$。

给定一个含幺交换环 R 和一个群 G，回顾一下，群环 $R[G]$ 由形式和 $w = \sum_{g\in S} r_g g$构成，其中 $S \subseteq G$ 是有限集，且 $r_g \in R - \{0\}$，其环运算按通常方式定义。空形式和表示群环中的 0。集合 S 称为 w的支撑，记作 $S = \mathrm{supp}(w)$。环 R 通过 $0_R \mapsto 0, r \mapsto re$（其中 $r \neq 0$）嵌入到 $R[G]$ 中。显然，G 通过 $g \mapsto 1g$嵌入到 $R[G]^\times$ 中。

单位猜想历经了 81 年。

猜想 1.2（Higman（1940 年）/Kaplansky（1970 年））。设 G 是一个无挠群，K 是一个域。那么群环 $K[G]$ 只有平凡单位，即形如 kg 的单位，其中 $k \in K^\times$ 且 $g \in G$。

单位猜想可追溯至 Higman 于 1940 年在牛津大学撰写的博士论文。他指出，该猜想对阿贝尔群成立，并进一步证明它对局部可指示群也成立（这类群的每个非平凡有限生成子群都有一个同构于 $\mathbb{Z}$ 的商群）。

Kaplansky 在 1956年年为一次在Ram's Head Inn 举行的线性代数会议上所列出的问题清单中，猜想位于谢尔特岛（长岛）的该处没有 $K[G]$ 零因子。在修订后的1970年版中，他回顾了这一问题的进展 [14, 问题 6]，，并在之后的讨论中加入了 Higman 的单位猜想，并将其归于一份在 1968年年摩尔达维亚基希讷乌会议后整理的问题清单。

幂等元猜想指出， $K[G]$ 除 0 和 1 外没有其他幂等元。该猜想于1940年代后期针对约化群 C^*-代数提出，但直到后来才见诸印刷。

1.1. 无挠群 G的性质所蕴含的结论。无挠群满足域 K上的单位猜想这一性质，可以放在一个性质层级的背景下理解。在下面的列表中，前四种性质没有提及域。每种性质都蕴含下一种；显然，(4) 也蕴含 (3)。

(1) G是左可序的；(2) G 是弥散的（Bowditch [3]）：如果 $C \subseteq G$ 是一个非空有限集，那么存在 $c \in C$，称为极值元素，使得对于每个 $g \in G - \{1\}$，都有 $gc \notin C$ 或 $g^{-1}c \notin C$。(3) G 具有唯一乘积性质（Kaplansky、Passman）：如果 A、$B \subseteq G$ 是非空有限集，那么存在一个有序对 $\langle a、b\rangle \in A \times B$，它是 $A \times B$ 中产生乘积 ab的唯一有序对。(4) G 具有双唯一乘积性质：如果除上述条件外， A 和 B 不同时为单元素集，那么就存在两个这样的有序对。(5) $K[G]$ 只有平凡单位。(6) $K[G]$ 没有零因子。(7) $K[G]$ 除 0、1 外没有其他幂等元。

这些蕴含关系如下所示：

(1)→(2): let $a = \max A$. If $ga < a$ then $a < g^{-1}a$.

(2)→(3)：设 $C = AB$。设 $c \in C$ 为极值的。若 $c = ab = rs$，其中

$$a, r \in A \text{ and } b, s \in B \text{ and } g = ra^{-1} \neq e,$$

则 $gab = rb \in C$，并且 $g^{-1}ab = as \in C$。

(3)↔(4)：根据 Strojnowski [37]。他还证明，在唯一乘积性质的定义中，可以假设 e 满足 $A = B$。证明表明，如果该性质不成立，那么 A 可以任意大。

(4)→(5)：给定 $K[G]$ 中的两个元素，它们的支撑不全是单元素集合；由这两个唯一乘积可知，其乘积的支撑也不是单元素集合。

(5)→(6)：回顾一下，若环 R 满足：如果 u、$v \in R - \{0\}$，则存在 $r \in R$ 使得 $urv \neq 0$，就称其为素环。每个无零因子的环都是素环，因为此时可以取 $r = 1$。已知 $K[G]$ 是素环（此处只需假设 G 没有非平凡有限正规子群）；参见 Passman [27, 定理 2.10]。

假设 $ab = 0$ 属于 $K[G]$，其中 a、$b \neq 0$，并取 c 使得 $\alpha := bca \neq 0$。那么 $\alpha^2 = 0$。我们有 $(1+\alpha)(1-\alpha) = (1-\alpha)(1+\alpha) = 1$，因此 $1-\alpha$是一个单位。如果它是平凡的，那么 $1-\alpha = kg$，所以 $\alpha = 1 - kg \in K[\langle g\rangle] \cong K[\mathbb{Z}]$ 是环 K上的一元劳朗多项式中的非零平方零元，这与该环是整环矛盾。

(6)→(7) 任何非平凡幂等元 x 都是零因子，因为 $x(x-1) = 0$。

目前已知以下蕴含关系不成立：

(2) $\not\to$（1）由 [31]附录中的一个反例给出。这是某个闭可定向双曲三维流形的基本群。
(6) $\not\to$对于二元素域则是 (5)，因为 $\mathbb{F}_2[P]$ 已知是一个定义域，但具有下文所讨论的非平凡单位。Alan Murray 的研究也使这一结论适用于其他正特征，他为这些特征提供了非平凡单位，arxiv.org/abs/2106.02147。

1.2. 能否用一阶逻辑表达这些性质？我们考虑这样一个问题：上述性质中，哪些可以用群语言中的可计算集 $\{\phi_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ 个一阶语句来表达？对于涉及域 K的性质，我们指的是断言对所有域都成立。

(1) 这一点能否表达仍有待解决。这很可能是某人的一个开放问题。

(2)–(4) 可以表达，分别针对有限集的每一种大小 n，以及有限集有序对的每一种大小，各使用一个句子。要用一阶逻辑表示 G的一个大小为 n的有限子集 C，我们使用变量 x_1、.....、x_n，并将 C视为$\{x_1,\dots,x_n\}$。因此，(2)可由以下句子集合表达：

$$\phi_n = \forall x_1,\dots,x_n \bigvee_{i\le n} \forall y[\bigwedge_k yx_i \neq x_k \vee \bigwedge_k y^{-1}x_i \neq x_k].$$

它们很容易转化为全称语句。

对于 (5)-(7)，注意每个域都可以嵌入某个代数闭域。因此，为了表达 (5)-(7) 中量词遍及所有域的版本，我们不妨假设这些域都是代数闭域。我们还可以固定一个特征 $d \in \mathbb{N} - \{0\}$，因为这样就可以把所有 d 的句子合在一起。

我们来证明 (6)；(5) 和 (7) 的证明类似。对于 r、s、$\ell \in \mathbb{N}^+$ 和 $\ell \le rs$，一个满射

$$T\colon \{1,\dots,r\}\times\{1,\dots,s\} \to \{1,\dots,\ell\}$$

是某个群 G 的部分乘法表的编码。群语言 $\phi_T = \forall x_1$、.....、$x_r \forall y_1$、.....、$y_s \forall z_1$、.....、z_ℓ 中的句子

$$\bigvee_{i<j\le r} x_i = x_j \vee \bigvee_{i<j\le s} y_i = y_j \vee \bigvee_{i\le r\wedge k\le s} z_{T(i,k)} \neq x_i y_k$$

断言该表无法由一列两两不同的元素和一行两两不同的元素实现。

对于每个这样的 T，我们都有一个等式与不等式系统，

$$E_T \equiv \bigvee_i \alpha_i \neq 0 \wedge \bigvee_k \beta_k \neq 0 \wedge \bigwedge_{u\le\ell} [\sum_{T(i,k)=u} \alpha_i\beta_k = 0],$$

其中 α_i、β_k 遍历域 K。

给定有限函数 T，当该系统在特征为 d 的代数闭域中有解时，我们就将 ϕ_T 列入句子列表。这样，整个列表就表示该域满足（6）。由于 ACF_d 在 d 中是一致可判定的（并且随着 T 的参数增大，句子会变长），因此得到的所有句子构成的集合是可计算的。

设 (ϕ_n) 是 (3) 的列表，(ψ_m) 是 (5) 的列表。根据紧致性定理，如果 (5) 蕴含 (3)，那么每个句子 ϕ_n 都由

一个有限列表 $\psi_r, r \leq L(n)$ 蕴含，其中 L 是可计算的。因此，要证明 (5) 不蕴含 (3)，只需找到唯一乘积性质 (3) 的一个实例（由集合 A 的大小给出），使得单位猜想 (5) 的任何实例，无论多大，都不能蕴含它。

1.3. 不具有唯一乘积性质的无挠群。 Rips 和 Segev [32] 运用小消去理论给出了第一个不具有唯一乘积性质的无挠群例子 G 。

将无挠群定义为

$$P = \langle a, b \mid a^{-1}b^2a = b^{-2}, b^{-1}a^2b = a^{-2} \rangle.$$

这个群 P 最初由 Passman 提出，用于研究 Kaplan-Sky 猜想，此后又出现在各种相关研究中。Promislow [30] 证明存在一个包含 14 个元素的子集 A ，使得 P P 通过 A、 A不具有唯一乘积性质。

P 被称为 Passman 四群、Hantzsche-Wendt 群，也因这些论文的作者而被称为 Promislov 群。注意， P 是一个秩为 3 的自由阿贝尔群的扩张，$N = \langle a^2$、 b^2、$(ab)^2 \rangle$ 由克莱因四元群 $P/N = \langle Na$、 $Nb \rangle$扩张而来。因此，P是一个晶体学群；这意味着该群是拓扑群$O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$的离散且余紧子群，其中 n为某个对象。后者是 $\mathbb{R}^n$ 在欧几里得范数下的等距变换群。

令 $x = a^2, y = b^2$。可以将 P写成一个 amalgamated product

$$\langle x, b \mid x^b = x^{-1} \rangle *_U \langle y, a \mid y^a = y^{-1} \rangle$$

其中 $U = \langle x, b^2 \rangle \cong \langle a^2, y \rangle$。这表明 P是无挠的。

事实上，我们可以在三维晶体学群中将该群识别为唯一一个具有有限阿贝尔化的无挠例子。在二维中，唯一的无挠群是自由阿贝尔群和克莱因瓶群，两者都是局部可指示的。因此，所有其他三维无挠空间群都是局部可指示的，因而满足该猜想。

P 的一些更复杂的变体也不具有唯一乘积性质。Carter [6] 为 $k > 0$ 定义了无挠群

$$P_k = \langle a, b \mid a^{-1}b^{2^k}a = b^{-2^k}, b^{-1}a^2b = a^{-2} \rangle.$$

因此 $P = P_1$。将 P_1的情形推广后，每个群 P_k 都是两个克莱因四元群沿着 $\mathbb{Z}^2$的一个副本 amalgamated product，令 $y = b^{2^k}$。根据 Lewin [21]的一个结果，这意味着 P_k 满足零因子猜想。Carter 证明，对于每个 k， P_k 都不具有唯一乘积性质；这些 P_k 两两不同构；并且当$k > 1$时， P_k 不含有 P 作为子群。此外，对于 $k > 1$ ，每个 P_k 都有一个有限指数子群，其形式为 $\mathbb{Z}^2 \times F$，其中 F是秩为 > 1的自由群。

Craig 和 Linnell [7] 猜想，每个一致原 pro-p 群都满足唯一乘积性质。他们还考虑了具有超过 2 个生成元的 P的显然变体，并证明这些变体是无挠的。然而，这类变体嵌入了 P。

1.4. 单位猜想的一个反例。 Gardam [10]发表了一个关于单位猜想的反例，该反例针对 P，其域为 $\mathbb{F}_2$。 $\mathbb{F}_2[P]$ 的每个元素都有唯一的标准形

$$p + qa + rb + sab,$$

其中“系数” p、 q、 r、 s 属于 $\mathbb{F}_2[N]$、 $N = \langle x, y, z\rangle$。

Gardam 的例子由 $\alpha = p + qa + rb + sab$ 给出，其中

$$\begin{aligned} p &= (1+x)(1+y)(1+z^{-1}) \\ q &= x^{-1}y^{-1} + x + y^{-1}z + z \\ r &= 1 + x + y^{-1}z + xyz \\ s &= 1 + (x + x^{-1} + y + y^{-1})z^{-1}. \end{aligned}$$

逆元由 $\beta = p' + q'a + r'b + s'ab$ 给出，其中

$$p' = x^{-1}p^a, q' = x^{-1}a, r' = y^{-1}r, s' = z^{-1}s^a.$$

Murray（arxiv.org/abs/2106.02147，定理 3）给出了反例，表明在任意正特征下， P 都不满足单位猜想。对于特征零的情形，单位猜想是否成立仍然未知。假设存在一个有限集 $S \subseteq P$，使得对无穷多个素数 p， $F_p[P]$ 中存在一个非平凡单位，且该单位及其逆元的支撑都包含在 S中。设 K 是这些域的一个超积，其特征为零。那么 $K[P]$ 中存在一个具有相同支撑 S的非平凡单位。然而，对于 Murray 的例子，支撑的大小取决于特征。

1.5. 转换为布尔可满足性问题。为了解决这个问题，Gardam 将其转化为可满足性问题，并使用 SAT 求解器找到一个满足赋值，由此得到该单位及其逆元。若我们固定一个有限集合 S，使其包含 β 和 α 的支撑，那么对于 S 中的每个词 w，我们只需要一个比特，即它在 $\mathbb{F}_2$ 中的系数。因此，我们使用变量 ℓ_w 和 k_w，分别表示 β 和 α 中相应的系数是 0 还是 1。我们可以用布尔公式写出 α 非平凡，以及 $\beta\alpha = 1$：

- 非平凡性 α 的表达方式是： $w \in S - \{1\}$ 的k_w 的析取为真。
- $\sum_g$ 的奇偶性，$_{g^{-1}\in S}(\ell_{g^{-1}} \wedge k_g)$ 为 1
- 对于每个 $w \in S^2 - \{1\}$，我们都有一个条件，要求 $\sum_h$ 的奇偶性，$_{g\in S \wedge hg=w}(\ell_h \wedge k_g)$ 为 0。

使用标准方法，可以将其化为 3-合取范式。对于给定的例子，取 S 作为 P的凯莱图中半径为 5 的球 P（其中有 147 个元素）。SAT 求解器可以在合理的时间内（数小时到数天）找到答案。参见 2021 年讲座Giles Gardam：求解半可判定问题

定问题

1.6. 单位群不是有限生成的。Gardam 表明，从某种意义上说， $\mathbb{F}_2[P]^\times$ 远大于 T；它不是有限生成的，并且包含非阿贝尔自由子群。

Gardam [10, 引理 1] 给出了一个引理，其中包含可推出某元素为单位的条件；对于所讨论的单位，只需约两页即可验证这些条件。这个更一般的方法可以证明单位群是

非有限生成的。Gardam 利用这一代数条件证明了存在无限多个非平凡单位。不过，其可行的原因在于，群 P 包含自身的许多同构副本。要让这种技巧奏效，这似乎是必要的：单位及其逆元的乘法表（在此情形下）可以确定它们生成的子群在同构意义下的结构。此外，群 P 的外自同构群是有限群 [45]，因此无法通过考察单位群的阿贝尔化，证明由该非平凡单位的群自同构像生成的单位群子群不是有限生成的。要得到这一结果，关键在于 Mirowicz 对无限二面体群的单位群进行计算$\langle a,\ b \mid b^2 = 1,\ a^b = a^{-1}\rangle$（它是通过此表示得到的 P的一个商群）。

1.7. 平凡单位群在 $K[G]$ 中是否是一阶可定义的? 在 M¨unster 讨论 Nies 和 Gardam 期间，人们提出了这样一个问题： T 群是否在 $\mathbb{F}_2[P]$ 的单位群中是一阶可定义的（或者至少在环 $\mathbb{F}_2[P]$ 中是一阶可定义的）。

众所周知，如果 $H < G$ 是群，且 $\alpha \in K[H]$ 是 $K[G]$ 中的一个单位，那么它也是 $K[H]$ 中的一个单位（反之亦然）。下文将使用这一点，恕不特别说明。

如果 T 在 $\mathbb{F}_2[P]^\times$ 中是无参数可定义的，那么 T 将在 $\mathbb{F}_2[P]^\times$ 的自同构下保持不变。下面的事实表明，在关于 G 的一个相当一般的假设下，T 甚至不在非平凡单位的共轭作用下封闭。由于 G 的任何自同构都可扩展为 $K[G]$ 的一个自同构，这表明当存在非平凡单位且满足关于 G 的假设时， T 在 $K[G]$ 中也不是可定义的。

命题 1.3（Gardam）。设 K 是一个域。设 G 是一个无挠群，且没有无限的非阿贝尔有限生成子群 V，使得 $V/Z(V)$具有有限指数（例如，若 G 可解，则满足此条件）。令 $T = K^\times G$ 表示 $K[G]$中的平凡单位群。

那么，群 T在 $K[G]$的单位群中的正规化子就是其自身。

证明。反设 u 是 $K[G]$ 中的一个非平凡单位，且满足 $T^u = T$。令 $S := \mathrm{supp}(u)$。令 $a \in S$；由于 $a^{-1}u$ 也是一个非平凡单位，我们不妨设 $e \in S$。令 $n = |S|!$ 。

断言 1.4。设 $g \in G$。那么 g^n 中心化 T的子群 $V = \langle S\rangle$ 。

根据假设， u 正规化 T，因此有 $h := ugu^{-1} \in T$。通过增广映射（环同态 $K[G] \to K$ ，即将系数相加），可知 $h \in G$。映射 $x \mapsto h^{-1}xg$， $x \in K[G]$固定 u，因而置换其支撑 S。所以映射 $x \mapsto h^{-n}xg^n$ 逐点固定 S 。由于 $e \in S$，$h^n = g^n$。因此，对每个 $w \in V$，都有 $g^{-n}wg^n = w$ ，如所声称。由此可知，有限生成群 $V/Z(V)$ 的指数为 n。如果 V是阿贝尔群，那么群环 $K[V]$ 只有平凡单位，因为 V 可定序。因此 V 是非阿贝尔群，这与关于 G的假设矛盾。

如果 G 可解，那么 $V/Z(V)$ 可解；这意味着它是有限的（通过对其可解长度作简单归纳，并利用 V 是有限生成的这一点）。根据舒尔的一个结果，这意味着 V' 是有限的，因此由于G 无挠，它必定是平凡群。所以， V再次是阿贝尔群。□

注 1.5。 很难举出既无挠、又中心商有限指数的非阿贝尔有限生成群的例子，这表明命题 1.3 适用于许多群。Adjan [1] 给出了第一个例子，其中中心是循环群（而中心商是自由 Burnside 群）。

接下来我们证明，对于任意域 K，平凡单位群 $K^\times P$ 在 $K[P]^\times$ 中是参数可定义的。和之前一样，我们使用 Gardam [10] 中的记号。特别地， a、b 是 P 的生成元，而 $x = a^2$、$y = b^2$、$z = (ab)^2$ 是群 $N \cong \mathbb{Z}^3$ 的生成元，该群在 P 中的指数为 4。我们使用 a、b 作为参数。定义公式是若干方程合取的析取。

命题 1.6（Gardam）。设 $u \in K[P]^\times$。那么 $u \in K^\times P \Leftrightarrow$gy 至少有一个 u、ua、ub、uab 与 a^2、b^2 及 $(ab)^2$ 对易。

证明。 $\Rightarrow$: 回顾一下， P/N 是由 aN 和 bN 生成的克莱因四元群。因此，对每个 $u \in P$， u、ua、ub、uab 中有一个属于 N。
$\Leftarrow$: 不妨设是 u 与 a^2、b^2 和 $(ab)^2$交换。将其写成“标准形”

$$u = p + qa + rb + sab$$

其中 p、q、r、$s \in K[\mathbb{Z}^3]$。利用 $ba^2 = a^{-2}b$，可得

$$\begin{aligned} a^2u &= pa^2 + qa^2a + ra^2b + sa^2ab \\ ua^2 &= pa^2 + qa^2a + ra^{-2}b + sa^{-2}ab. \end{aligned}$$

由于 u 与 a^2交换，所有系数都相等。因此 $r(a^2 - a^{-2}) = 0$，对 s 也类似。这意味着 $r = s = 0$，因为 $K[\mathbb{Z}^3]$ 是一个整环。同样地，由于 u 与 b^2 交换，我们有 $q = 0$。由于 $K[\mathbb{Z}^3]$中的单位是平凡的，这意味着 $u \in K^\times P$。□

1.8. 在 GAP 中验证 Gardam 的反例。 Gardam 在计算机代数系统 GAP 中验证了他的反例，并将其作为 [10] 第一版在 arXiv 上发布时的附带文件一并提供。还存在由 Siddhartha Gadgil 和 Anand Rao Tadi- patri 在证明辅助系统“lean”中形式化的证明。

以下 GAP 交互由 Bettina Eick 于 2022年10月提供。注释由 Andre Nies 添加。

首先，我们在目录中找到群 P。它是一个多循环群；此类群由多循环表示（pcp）给出。

```
gap> gg := List([1..219],x -> SpaceGroupPcpGroup(3,x));; gap> gg :=
Filtered(gg,IsTorsionFree);[ 阶数为 [ 0, 0, 0 ]，阶数为 [ 2, 0, 0, 0 ],阶数为
[ 2, 0, 0, 0 ]，阶数为 [ 2, 0, 0, 0 ],阶数为 [ 2, 2, 0, 0, 0 ],阶数为
[ 2, 2, 0, 0, 0 ],阶数为 [ 2, 2, 0, 0, 0 ],阶数为 [ 2, 2, 0, 0, 0 ],阶数为
[ 3, 0, 0, 0 ],阶数为 [ 3, 2, 0, 0, 0 ] ]gap> gg := Filtered(gg,x ->
IdGroup(x/FittingSubgroup(x))=[4,2]);
```

%code for 克莱因四元群[阶数为 [2, 2, 0, 0, 0],阶数为 [2, 2, 0, 0, 0],阶数为 [2, 2, 0, 0, 0]]gap> List(gg, AbelianInvariants);
[[4, 4], [0, 2, 2], [0, 4]]. %C_4x C_4, gap> P := gg[1]; 阶数为 [2, 2, 0, 0, 0]现在我们构造群环 R. gap> R := GroupRing(GF(2), P);<二元有限域上的含幺代数, 具有 10 个生成元>. % gap> GeneratorsOfRing(R);[(Z(2)^0)*id, (Z(2)^0)*g1*g5, (Z(2)^0)*g1, (Z(2)^0)*g2*g4, (Z(2)^0)*g2, (Z(2)^0)*g3^-1, (Z(2)^0)*id]%
Z(2)^0是环的单位元

gap> P; 具有阶 [2, 2, 0, 0, 0]的多项式一致群
> g := Igs(P); %诱导生成系[g1, g2, g3, g4, g5]gap>
a := g[1]; g1 gap> b := g[2]; g2 gap> a^2; g5^-1 gap
> b^2; g4^-1 gap> (a*b)^2; g3^-1

接下来, 将群元素 a, b, x, y, z 与它们在 R 中的像对应起来, 其中$x = a^2$, $y = b^2, z = (ab)^2, ,$ 因此, P 的正规阿贝尔子群 N 由 x, y, z 自由生成。注意,

(Z(2)^0)
是 $\mathbb{F}_2$ 的乘法单位元的内部记号。

gap> a := a*One(R);
(Z(2)^0)*g1 gap> b :
= b*One(R); (Z(2)^0)
*g2 gap> x := a^2;
(Z(2)^0)*g5^-1 gap>
y := b^2; (Z(2)^0)*g4^-
1 gap> z := (a*b)^2;
(Z(2)^0)*g3^-1

O通过声明这些系数，以这种标准形写出单位 w。gap> p := (One(R)+x)*(One(R)+y)*(One(R)+z^-1); (Z(2)^0)*g3+(Z(2)^0)*g3*g5^-1+(Z(2)^0)*g3*g4^-1+(Z(2)^0)*g3*g4^-1*g5^-1+(Z(2)^0)*id+(Z(2)^0)*g5^-1+(Z(2)^0)*g4^-1+(Z(2)^0)*g4^-1*g5^-1 gap> q := x^-1*y^-1+x+y^-1*z + z; (Z(2)^0)*g4*g5+(Z(2)^0)*g5^-1+(Z(2)^0)*g3^-1*g4+(Z(2)^0)*g3^-1 gap> r := One(R) + x + y^-1*z+x*y*z; (Z(2)^0)*id+(Z(2)^0)*g5^-1+(Z(2)^0)*g3^-1*g4+(Z(2)^0)*g3^-1*g4^-1*g5^-1 gap> s := One(R) + (x+x^-1+y+y^-1)*z^-1; (Z(2)^0)*g3*g4+(Z(2)^0)*g3*g5+(Z(2)^0)*g3*g5^-1+(Z(2)^0)*g3*g4^-1+(Z(2)^0)*id gap> w := p + q*a + r*b + s*a*b; (Z(2)^0)*g1*g2*g3*g4+(Z(2)^0)*g1*g2*g3*g5+(Z(2)^0)*g1*g2*g3*g5^-1+(Z(2)^0)*g1*g2*g3*g4^-1+(Z(2)^0)*g1*g2+(Z(2)^0)*g1*g3+(Z(2)^0)*g1*g3*g4^-1+(Z(2)^0)*g1*g5^-1+(Z(2)^0)*g1*g4^-1*g5+(Z(2)^0)*g2*g3*g4+(Z(2)^0)*g2*g3*g4^-1*g5+(Z(2)^0)*g2*g5+(Z(2)^0)*g2+(Z(2)^0)*g3+(Z(2)^0)*g3*g5^-1+(Z(2)^0)*g3*g4^-1+(Z(2)^0)*g3*g4^-1*g5^-1+(Z(2)^0)*id+(Z(2)^0)*g5^-1+(Z(2)^0)*g4^-1+(Z(2)^0)*g4^-1*g5^-1

v w的逆元表达式如下，它与 w的表达式密切相关。我们只需修改系数。例如，将 p 用 a 共轭，其效果是翻转 y和 z的指数符号。

gap> v := x^-1 * a^-1*p*a + x^-1*q*a + y^-1*r*b+ z^-1*a^-1*s*a*a*b; (Z(2)^0)*g1*g2*g3+(Z(2)^0)*g1*g2*g4+(Z(2)^0)*g1*g2*g5+(Z(2)^0)*g1*g2*g5^-1+(Z(2)^0)*g1*g2*g4^-1+(Z(2)^0)*g1*g3*g5+(Z(2)^0)*g1*g3*g4^-1*g5+(Z(2)^0)*g1+(Z(2)^0)*g1*g4^-1*g5^2+(Z(2)^0)*g2*g3*g4^2+(Z(2)^0)*g2*g3*g5+(Z(2)^0)*g2*g4*g5+(Z(2)^0)*g2*g4+(Z(2)^0)*g4*g5+(Z(2)^0)*g4+(Z(2)^0)*g5+(Z(2)^0)*id+(Z(2)^0)*g3^-1*g4*g5+(Z(2)^0)*g3^-1*g4+(Z(2)^0)*g3^-1*g5+(Z(2)^0)*g3^-1

最后，我们可以试一试了：
gap> w*v; (整
数集(2)^0)*id
这说明 $wv = 1$，因此 GAP 已验证了 Gardam 的结果，推翻了 Higman 提出的、已有 82 年历史的猜想。

2. Some undecidable properties of computable profinite, and discrete groups

我们将说明（并不声称这是原创成果），可计算阿贝尔群的基本性质是不可判定的，无论是在概形有限情形还是在离散情形。对于原有限群，是否为 pro-p 是不可判定的；是否由一个元素拓扑生成也同样不可判定。（事实上，有限群已经能说明这一点。）

对于无限离散群，是否为有限群是不可判定的。

我们先回顾相关定义。以下内容源自 Mal'cev 和 Rabin（独立地）在 20 世纪 60 年代的研究。

定义 2.1. 可计算结构是指这样一种结构：其定义域是可计算集 $D \subseteq \mathbb{N}$，且该结构的函数和关系都是可计算的。

例 2.2. (a) 对每个 $k \geq 1$，群 $GL_k(\mathbb{Q})$ 都有可计算表示。要得到一个可计算副本，首先为有理数 $k \times k$ 矩阵规定一种算法编码，使其对应自然数，然后将定义域 D设为能够编码行列式非零矩阵的可计算数集。由于这种编码是算法性的，定义域和矩阵运算都是可计算的。

(b) 不难验证，如果一个由 n 生成的群 G 的字问题是可判定的，那么它就有一个可计算副本 $\Leftrightarrow$。对于蕴含"$\Leftarrow$"，假设存在某个有效双射 $F_n \leftrightarrow \mathbb{N}$。设 $G = F_n/N$，其中 N 是一个可计算正规子群。记 $\sim_N$ 为 $uw^{-1} \in N$，并注意到 $\sim_N$ 是一个可计算等价关系。令 D 为 $\sim_N$ 类中的最小元所组成的集合；这是一个可计算集。为了证明二元群运算在 D 上是可计算的，给定 r、$s \in D$，令 $f(r,s)$ 为 D 中满足 $rs \sim_N t$ 的元素 t。求逆也类似。

定义 2.3 (Smith [36] 和 la Roche [19])。一个原有限群 G 若 $G = \varprojlim_t (A_t, \psi_t)$ 是由有限群和满同态组成的一个可计算图 $(A_t, \psi_t)_{t\in\mathbb{N}}$，且满同态 $\psi_t\colon A_t \to A_{t-1}$ $(t > 0)$，则称其为可计算的。

令 C_r 表示阶为 r 的循环群。

命题 2.4。对于原有限群，

(i) 是原-p 不可判定；(ii) 由一个元素拓扑生成是不可判定的。

证明。对于每个 n，我们构造一个群 G_n，使得当且仅当 n 不属于停机问题 K 时，该群具有此性质。我们有 $K = \bigcup_t K_t$，其中 K_t 是截至阶段 t 已枚举的元素集合（我们可以假设 $K_1 = \emptyset$）。

固定 n。我们构造有限群图表 $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$，其映射为自然映射$\phi_k\colon A_{t+1} \to A_t$，并令 G_n 为其逆极限。

(i) 固定一个素数 $q \neq p$。令 $A_0 = C_p$。若 $n \notin K_{t+1}$，令 $A_{t+1} = A_t$，并令 ϕ_t 为单位元。若 $n \in K_{t+1} - K_t$，令 $A_t = C_{pq}$，并令 ϕ_t 为自然映射 $C_{pq} \to C_p$。若 $n \in K_t$，令 $A_{t+1} = A_t$，并令 ϕ_t 为单位元。

(ii) 这与前面类似，将 C_{pq} 替换为 $C_p \times C_p$。此外，如果 $n \in K_{t+1} - K_t$，令 ϕ_t 为 C_p 上的加法映射；否则，像之前一样取恒等映射。□

命题 2.5。对于无限离散群，判定其是否为有限群是不可判定的。

证明。我们构造 G_n 的一个可计算表示。为方便起见，将其定义在可计算集 $D \subseteq \mathbb{Z}$ 上（该集合是形如 $[-n, n]$ 的区间，或是整个 $\mathbb{Z}$）。

为了构造 D，在每个阶段 t，我们判定 t 和 $-t$ 是否为元素。对于已判定属于 D 的元素上的可计算运算，也采用类似方法。

如果 $n \notin K_{t+1}$，就声明 $-t$ 和 t 属于 D。根据 $\mathbb{Z}$ 上的加法，声明元素 a、$b \in D$ 的加法结果和逆元为 $|a|$、$|b| \leq t/2$（如果此前尚未声明）。

如果 $n \in K_{t+1}$，则声明 $-t$ 和 t 不属于 D。如果 t 是满足条件的最小者，则还要声明在 D 的其余元素上定义加法，从而在最终的 $D = \{-t+1, \ldots, t-1\}$ 上构造 C_{2t-1} 的一个可计算副本。

□

3. Duality between locally Roelcke precompact groups and meet groupoids

Andr´e 于五月/六月在明斯特大学数学系举办了两场研讨会。研讨会围绕使用可数的“逼近结构”来描述某些不可数的全不连通拓扑群展开。以下笔记是对这两场讲座中第一场内容的润色版。

所有拓扑群都具有可数基，它们之间的所有同构都是拓扑同构。若单位元有一个由开子群组成的邻域基，就称拓扑群 G 是非阿基米德的 。众所周知，[2, 定理 1.5。1] 这一性质等价于同构于 S_∞ 的一个闭子群（ $\mathbb{N}$ 是置换群），也就是定义域为 $\mathbb{N}$ 的某个结构的自同构群。

第一场报告讨论寡形群，第二场讨论局部紧群。在前者中，利用逼近结构推导同构关系的博雷尔复杂度上界。后者则利用逼近结构研究全不连通局部紧群可计算意味着什么。以下将此内容作为扩展版第二部分记录，2其内容基于十月在纽卡斯尔会议上的系列报告。

Kechris 等人已详细讨论了以下情形 [17]。波兰空间 X 的闭子集构成一个标准博雷尔空间，称为 Effros 空间。如果 X 是一个波兰群的底层空间，那么其闭子群在 Effros 空间中构成一个博雷尔集（详情参见例如 [17, 引理 2.5] ）。我们可以通过通常的博雷尔可约性 $\leq_B$，衡量 S_∞ 的闭子群子类上的同构关系的复杂度。以下类别在这一方面已得到（至少在某种程度上）研究。

定义 3.1。称 S_∞ 的闭子群 G 为

(1) 寡形：对每个 n ，只有有限多个 n-轨道；(2) 拟寡形：与一个寡形群同构（但在 $\mathbb{N}$ 上的典范求值作用可能不是寡形的）；(3) Roelcke 预紧（R.p）：对每个开子群 U，存在一个有限子集 α，使得 $G = U\alpha U$；也就是说， U 有有限多个双陪集；(4) 局部紧（t.d.l.c.）：底层拓扑满足通常的定义；等价地，存在一个紧开子群（van Dantzig 定理）；(5) 局部 R.p：存在一个 R.p. 开子群。

有关（局部）Roelcke 预紧群的背景，请参阅 Rosendal [34]以及 Zielinski [44]。事实上，这组概念适用于比 S_∞的闭子群更为一般的情形。拓扑群 G上的 Roelcke 一致结构由基本周围 $\{\langle g, h\rangle$给出： $g \in VhV\}$，其中 V 遍历单位元邻域。波兰群 G 的子集 A 若在 Roelcke 一致结构下全有界，则称其为 Roelcke 预紧的。也就是说，对于每个周围 V ，都存在一个有限集 F ，使得$A \subseteq \bigcup_{x\in F} B_V(x)$。当然，如果 G 具有一个单位元的 Roelcke 预紧邻域，那么它就是局部 R.p. 的。即使对于非阿基米德群，我们对局部 R.p. 的定义

可能也比 Rosendal 和 Zielinski 给出的定义更严格一些。如果在更一般的局部 Roelcke 预紧情形下，存在适用于全不连通局部紧群的 van Dantzig 定理的某个版本，那么二者是等价的。据我所知，迄今尚无人得到这一结果。

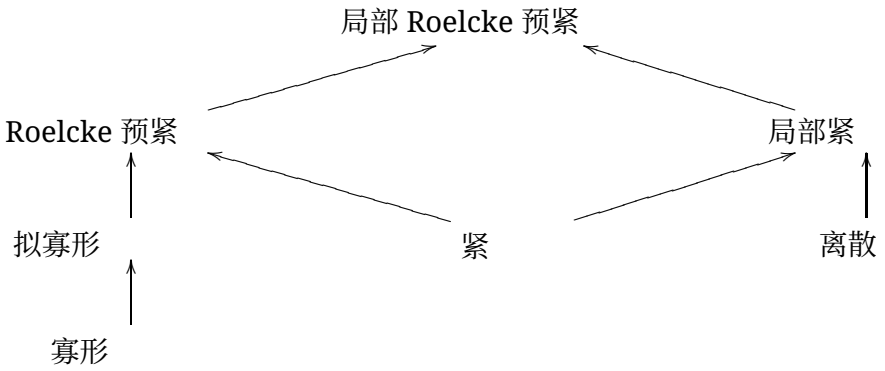


FIGURE 1. S_∞ 的某些闭子群类及其包含关系。

由于所有类别都是博雷尔集，图中的每个包含关系都意味着同构关系之间存在博雷尔可约性。即使对于局部 R.p. 的情形，同构关系的复杂度上界也是图同构 GI。通过对 [17, 定理 31]作适当扩展即可证明这一点。其思路是， G 在一个可数开陪集集合上从左侧忠实作用。对于 [准]寡形 G情形，只需取所有开陪集；一般情形则取 R.p. 开陪集。

对于除 $\mathcal{C}$ [准-]寡形之外的所有类别，这个上界都是紧的；这一点可由 Mekler 构造的概形有限版本（[17], 最后一节）得出。该构造将某些“良好”的可数图编码为指数为 p的可数二步幂零群。对于 [准-]寡形情形，则有一个更紧的上界：同构关系博雷尔可约到一个所有等价类均为可数集的博雷尔等价关系（也就是说，它低于由一个可数群的博雷尔作用所给出的轨道等价关系）。

3.1. 局部 R.p. 群的交半群胚。直观地说，群胚的概念通过允许二元运算为偏运算，推广了群的概念。群胚由一个定义域 $\mathcal{W}$ 构成，在该定义域上定义了一元运算 $(.)^{-1}$ 和一个记作“$\cdot$”的偏二元运算。这些运算满足以下条件：

(a) 结合律 $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$：等式两边要么同时有定义，要么都无定义（因此在乘积中可以省略括号）；(b) $A \cdot A^{-1}$ 和 $A^{-1} \cdot A$ 总是有定义；(c) 如果 $A \cdot B$ 有定义，则 $A \cdot B \cdot B^{-1} = A$ 和 $A^{-1} \cdot A \cdot B = B$。

由 (c) 可知，群胚满足左右消去律。如果 $U \in \mathcal{W}$，则称元素 $U \in \mathcal{W}$ 为幂等元。显然，这意味着 $U = U \cdot U^{-1} = U^{-1} \cdot U$，因此根据消去律有 $U = U^{-1}$。反过来，根据 (c)，任何形如 $A \cdot A^{-1}$ 或 $A^{-1} \cdot A$ 的元素都是幂等元。

注意，如果对于 R.p. 开子群 U、V、W，有 $A = Ua = aV$ 和 $B = Vb = bW$，那么 $AB = Uab = abW$。回顾一下，群胚等价于这样一个范畴：其中每个态射都有逆元。在范畴记号中，我们现在将其写作

$$U \xrightarrow{A} V \xrightarrow{B} W \text{ implies } U \xrightarrow{AB} W.$$

此外，若 C、D 分别是 U、V 的左陪集，且 $C \cap D \neq \emptyset$，那么取 $a \in C \cap D$。我们有 $C \cap D = a(U \cap V)$。这引出了下一个定义。

定义 3.2. 交半群胚是一个群胚 $(\mathcal{W}, \cdot, (.)^{-1})$，同时也是一个交半格 $(\mathcal{W}, \cap, \emptyset)$，其中 $\emptyset$ 是最小元。它满足以下条件：$\emptyset^{-1} = \emptyset = \emptyset \cdot \emptyset$；对于每个 $A \neq \emptyset$，$\emptyset \cdot A$ 和 $A \cdot \emptyset$ 都无定义；对于幂等元 U、V，若 U，则 $U \cap V \neq \emptyset$ $V \neq \emptyset$；并且群胚运算是单调的：记 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$,

(d) $A \subseteq B \Leftrightarrow A^{-1} \subseteq B^{-1}$，以及 (e) 若 $A_i \cdot B_i$ 在 $(i = 0, 1)$ 和 $A_0 \cap A_1 \neq \emptyset \neq B_0 \cap B_1$ 上有定义，则 $(A_0 \cap A_1) \cdot (B_0 \cap B_1)$ $= A_0 \cdot B_0 \cap A_1 \cdot B_1$

$\cdot$ 的单调性由 (e) 得出：若 $A_i \cdot B_i$ 在 $(i = 0, 1)$ 和 $A_0 \subseteq A_1$ 上有定义，则 $B_0 \subseteq B_1$，那么 $A_0 \cdot B_0 \subseteq A_1 \cdot B_1$。

注意，(e) 对群的 R.p. 开陪集成立：设 A_i 是子群 U_i 的右陪集，也是子群 V_i 的左陪集，因此根据假设，B_i 是 V_i 的右陪集。如上所述，$A_0 \cap A_1$ 是$U_0 \cap U_1$ 的右陪集，而 $B_0 \cap B_1$ 是 $V_0 \cap V_1$ 的右陪集，所以左侧有定义。显然，根据单调性，左侧包含于右侧。右侧也是 $U_0 \cap U_1$ 的右陪集，因此二者必相等。

事实 3.3. 若 U和 V是幂等元，则 $S := U \cap V$也如此。

证明. 只需令 $U = A_0 = B_0$ 和 $V = A_1 = B_1$ 属于 (e)。事实上，即使不假设 (e)，这一点也成立。由于取逆运算是序同构，我们有 $S = S^{-1}$。特别地，$S \cdot S$有定义。由于 $S \subseteq U, V$，根据 $\cdot$的单调性，我们有 $S \cdot S \subseteq U \cdot U \cap V \cdot V$，因而 $S \cdot S \subseteq S$。这意味着 $S \cdot S \cdot S^{-1} \subseteq S \cdot S^{-1}$，进而得到 $S \subseteq S \cdot S$。□

给定交半群胚 $\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_1$，双射 h: $\mathcal{W}_0 \to \mathcal{W}_1$ 若保持三种运算，则称为同构。给定交半群胚 $\mathcal{W}$，字母A, B, C表示 $\mathcal{W}$的元素，而字母 U, V, W表示幂等元。

定义 3.4. 设 $G \leq_c S_\infty$ 是局部 Roelcke 预紧的（即存在一个开罗尔克预紧子群）。按如下方式定义交半群胚$\mathcal{W}(G)$。其定义域由 G的所有 R.p. 开陪集以及 $\emptyset$组成。逆元 $A \to A^{-1}$照常定义。对于 $A, B \in \mathcal{W}(G)$，若 A 是某个子群 V的左陪集，且 B 是 V 的右陪集（因此 AB 确实是一个 R.p. 开陪集），则令 $A \cdot B$为通常的乘积。运算 $\cap$是通常的交运算。

注 3.5. 要为图3中较不奇特的类定义一个统一框架，就必须使用“局部 R.p. 群”这一稍显奇特的概念。对于 [近]-寡形群，每个开陪集都是 R.p. 的，因此可以

忽略对 R.p. 的这一限制。对于全不连通局部紧群 G，R.p. 开陪集与开紧陪集相同。因此 $\mathcal{W}(G)$ 就是定义在紧开陪集上的交半群胚。

3.2. 博雷尔对偶。回想一下，图中的所有类 $\mathcal{C}$ 都是博雷尔的。利用 Lusin-Novikov 的一个旧结果，可以确保交半群胚的定义域为 $\mathbb{N}$ 如定理 [17, 3 的证明中所述。1], 然后将 $\mathcal{W}$ 视为一个博雷尔算子，其映射从 $\mathcal{C}$ 到一个定义域为 $\mathbb{N}$的适当结构集。对于除寡形类之外的所有类，以下映射 $\mathcal{G}$ 在同构意义下是 $\mathcal{W}$的逆元。给定一个定义域为 M 的交半群胚 $\mathbb{N}$，令

$$\mathcal{G}(M) = \{p \in S_\infty \colon p \text{ preserves inclusion } \wedge \\ p(A \cdot B) = p(A) \cdot B \text{ whenever } A \cdot B \text{ is defined } \}.$$

因此我们得到对偶

$$\mathcal{W}\text{一个博雷尔群类 } \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}\text{一个定义在 } \mathbb{N} \text{ 上的博雷尔交半群胚类。}$$
$$\mathcal{G}$$

对偶意味着，对于每个 $G \in \mathcal{C}$ 和 $M \in \mathcal{D}$

$$\mathcal{G}(\mathcal{W}(G)) \cong G \text{ and } \mathcal{W}(\mathcal{G}(M)) \cong M.$$

$\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{W} \restriction_{\mathcal{C}}$ 值域的同构闭包，而该值域可以证明是博雷尔的。这就是 $\mathcal{G}$ 的定义域，它同样是一个博雷尔映射。

证明对于每个 $G \in \mathcal{C}$，$\mathcal{G}(\mathcal{W}(G)) \cong G$ 并不难；本质上，[17] 中已经完成了这项工作。证明 $\mathcal{W}$ 的值域的闭包 $\mathcal{D}$ 是博雷尔集，并证明对偶条件 $\mathcal{W}(\mathcal{G}(M)) \cong M$，则要困难得多。给定一个类 $\mathcal{C}$，要判断 M 是否属于 $\mathcal{D}$，我们需要对 M 附加一个博雷尔条件，以确保 $\mathcal{W}(\mathcal{G}(M)) \cong M$。问题在于，$\mathcal{G}(M)$ 中可能存在一个开子群 $\mathcal{U}$，它并未由 M 中的任何元素“命名”。也就是说，对于任何 $U \in M$，$\mathcal{U}$ 都不能写成 $\{p \colon p(U) = U\}$。对于一个幂等元 $U \in M$，令 $L(U) = \{A \in M \colon AU = A\}$ 表示左“陪集”的集合。类似地，定义 $R(U)$，即右陪集。在紧致情形下，例如，我们要求 $L(U)$ 总是有限的；并且，如果 $L(U) = R(U)$（即 U 是“正规”的），且集合 $\mathcal{B} \subseteq L(U)$ 在群胚运算下封闭，那么存在一个幂等元 $W \in M$，使得对于每个 $A \in L(U)$，$A \in \mathcal{B} \leftrightarrow A \subseteq W$ 成立。这是 [8, 第 4] 节中的公理 CC。类似条件似乎可以确定其他类别所需的正确 $\mathcal{D}$；参见 [8, 第 4], 节中针对全不连通局部紧群的公理 CLC，以及针对寡形群的 [26]；请注意，对于局部 R.p. 群，这方面实际上还没有进行过任何详细研究。

3.3. 寡形情形下同构关系的博雷尔复杂度。现在令 $\mathcal{C}$ 为寡形群类。不能像上面那样使用映射 $\mathcal{G}$，因为即使对于寡形群 G，群 $\mathcal{G}(M)$ 也不一定是寡形的，即使 $M = \mathcal{W}(G)$。相反，我们定义一个博雷尔˜映射 $\mathcal{G}$，使其不受这一缺陷影响。为此需要更费一番功夫：只考虑特别好的幂等元 V 在一个集合 $L(V)$ 上的作用；细节见 [26], 。不过，该文讨论的是“粗群”这一情形，即只有三元关系的可数结构，而映射 $\mathcal{G}$ 所得的群，其定义域是这些粗群上的某些滤子组成的集合。（我们推测，如果将那项工作置于较新的交半群胚框架下重新表述，至少可以省去 5 页。） V 定义如下。

引理 3.6. 每个寡形群 G 都有一个开子群 V，使得自然左作用 $G \curvearrowright L(V)$ 是寡形且忠实的。因此，我们得到 G 到作用于 $L(V)$ 上的对称群的一个同胚嵌入。

证明略。令 $n_1, \ldots, n_k$ 表示 1-轨道。令 V 为 $\{n_1, \ldots, n_k\}$ 的逐点稳定子。□

要使交半群胚 M 属于 $\mathcal{D}$，一个条件（公理）要求存在这样的 V。给定 M，可以用博雷尔~方式选取这样的 V。令 $\mathcal{G}(M)$ 表示由对 $L(V)$ 的作用所给出的 S_∞ 的闭子群。

现在我们讨论如何得到 $\cong_{\mathcal{C}}$ 的博雷尔复杂度上界，即 $\mathcal{C}$ 上的同构关系。博雷尔空间 X 上的等价关系 E 称为本质可数的，如果 $E \leq_B F$ 对某个博雷尔等价关系 F 成立，且该关系的所有等价类都是可数的（例如，有限生成群上的同构关系）。

定理3.7 （[26]）。 寡形群之间的同构关系是本质可数的。

证明。根据上述内容， $\cong_{\mathcal{C}}$ 是 $\equiv_B$ 不变博雷尔类$\mathcal{D}$ 上的同构关系，其中包含有限签名的可数结构。我们使用 Hjorth 和 Kechris 的一个结果 [13]：设 σ 是一个有限签名。

设 F 是无穷逻辑$L_{\omega_1,\omega}(\sigma)$的一个可数片段；这意味着 F 包含一阶逻辑，并且对代换、取子公式等操作封闭。设 $\mathcal{D}$ 是一个 $\cong$-不变的博雷尔类，由 σ-结构组成。假设对每个 $M \in \mathcal{D}$，都存在一个元组 $\overline{a}$属于 M，使得 $\mathrm{Th}_F(M, \overline{a})$（该片段中的理论）是 $\aleph_0$-范畴的。

那么（该结果的结论） $\cong_{\mathcal{D}}$ 是本质可数的。

现在令 σ 为交半群胚的签名。根据 Lopez-Escobar 定理，存在一个句子 ϕ 属于$L_{\omega_1,\omega}(\sigma)$，用于描述 $\mathcal{D}$。此外，还有一个公式 $\delta(x)$，用于描述“忠实子群”是什么，即上述的一个 $V \in M$。令 F 为由 ϕ、δ生成的片段。

断言 3.8（[26], 断言 4.5）。$\mathrm{Th}_F(M, \overline{a})$ 是 $\aleph_0$-范畴的。

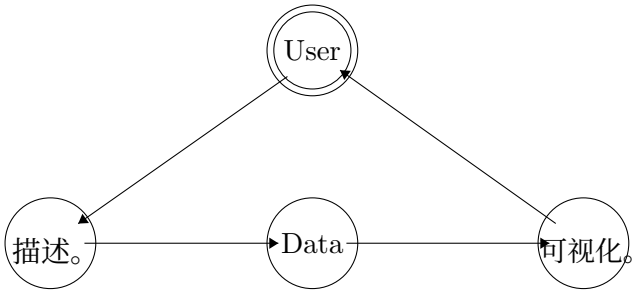
现在，我们可以应用 Hjorth-Kechris 结果，得到 $\cong_{\mathcal{C}}$ 复杂度的上界。□

4. Ferov: A paradigm for computation with symmetries of combinatorial structures, and visualisations thereof

4.1. 候选范式。组合对象的可视化及其对称性的计算是一项艰巨的任务。首先，向数学家描述一个对象的方式，对于在该领域有经验的数学家来说可能很直观，但未必能以任何明显的方式转换为目前可用的计算软件或图形软件。

我们提出一种模块化方法：将一个抽象对象（无论是组合结构还是其自同构群中的一个元素）从三个不同的角度加以考察，并通过一种算法（不一定是统一给出的）实现对象不同表示方式之间的转换。该范式可以用下图概括。

图中工作流程的解读应如下：



(1) 用户提供对象的形式化描述；(2) 根据给定的描述，算法生成一种能够捕捉对象结构的数据结构，其中可能还包含附加信息；(3) 根据给定的数据，算法生成对象的可视化结果。

我们解释如何理解上文使用的术语。

- 形式化描述：任何可以传递给计算机的内容。例如，它可以是一个群的有限表示、描述考克斯特系统的对称矩阵、描述准标记正则树的矩阵等。这些信息还应始终与一个正整数一起给出，该正整数规定了某个可能为无限对象的有限子结构的大小。

- 数据：表示抽象对象的适当数据结构的内容。对于图而言，数据应捕捉该图的关联结构。

- 可视化：任何一种工具，只要输入图的关联结构（还可以包括标签、着色等附加数据），就能生成用户可以直观理解的图形输出。用户应当可以根据个人审美和需求调整输出。

这种模块化方法有两个优点。首先，数据可以存储并重复使用，无须每次用户想稍微修改可视化输出时都重新计算对象的关联结构，从而加快处理速度。其次，这种方法使我们能够直接使用现成的工具，而不必为了自己的用途重新发明轮子。

4.2. 图。在图的可视化中，描述方式取决于我们要处理的图类。例如，对于正则树，描述可以由一对整数 (d, R) 构成，其中 d 表示树的度， R 表示半径，还可以包括一些重要顶点。

表示图最常用的两种数据结构是邻接矩阵和邻接表。邻接矩阵的含义很明确：它是一个方阵，其行和列以图的顶点为索引。位置（i， j）处的元素用于指示矩阵中的第 i 个顶点和第 j 个顶点之间是否有边。邻接矩阵有许多优点，例如可以直接使用代数图论中的方法；但对于大型稀疏

图，也就是边数较少的图而言，在空间利用上效率很低。事实上，如果图有 n 个顶点，那么矩阵的大小为 n^2。对于顶点度具有统一上界的图，例如上界为 d，我们知道图最多有 $\frac{d}{2}n$ 条边。对于较大的 n，这种表示可能会极其低效。因此，我们建议使用邻接表，也就是为每个顶点列出它的邻居。由于我们主要研究度有统一上界的图，因此我们认为邻接表是合适的图数据表示。就可计算性而言，这并没有实质区别，因为这两种方法是等价的；但如果考虑计算的效率或复杂度，这种区别就会变得显著。

表示图的关联结构（包括标签和颜色）的一种相当标准的格式是 DOT 文件。专业的图论软件支持 DOT 文件格式，例如

- GAP——用于计算离散代数的系统；
- nauty 和 Traces ——用于计算图和有向图自同构群的程序；
- NetworkX ——一个 Python 软件包，用于创建、操作和研究复杂网络的结构、动态特性及函数。

显然，这是一个优势，因为上述任一工具的输出都可以作为其他任一工具的输入，从而有可能弥补某些软件包特定功能的不足。例如，可以使用 Python 脚本借助 NetworkX 构建两个图的关联结构。随后可将输出传递给 nauty，以确定这两个图是否同构。

DOT 文件格式也受到大多数可视化工具的支持，例如

- GraphViz- 一个开源的图可视化软件；
- dot2tex - 一个旨在让 Graphviz 生成的图具有更适合 LaTeX 的外观和风格的工具；
- d3-graphviz - 一个用于渲染 DOT 图的 JavaScript 库，并支持图之间的动画过渡，以及在网页浏览器中对交互式图进行操作。

4.3. 树的自同构。在计算正则树的自同构时，用户可能会用局部作用来表示该自同构。一个 d-正则树 $\mathcal{T}_d$ 具有一个使用 d种颜色的合法边着色，即一个函数 $c\colon E\mathcal{T}_d \to \{1,\dots,d\}$，满足当边 e_1、$e_2 \in E\mathcal{T}_d$ 相邻时，$c(e_1) \neq c(e_2)$。显然，每个顶点 $v \in V\mathcal{T}_d$ 随后都会恰好“看到”每种颜色一次，而一个自同构 $\alpha \in Aut(\mathcal{T}_d)$ 会诱导出一个置换 $\sigma(\alpha, v) \in Sym(d)$，其定义为

$$\sigma(\alpha, v)(c(e)) = c(\alpha(e)),$$

其中，$e \in E\mathcal{T}_d$ 遍历与 v相邻的边。若选取一个顶点 $v_0 \in V\mathcal{T}_d$，则每个顶点 w 都可以唯一地对应于一个有限序列 $W \in \{1,\dots,d\}$。容易验证，每个自同构 α 都由一对

$$\left(w, (\sigma_W)_{W\in\{1,\dots,d\}^*}\right),$$

其中 $w = \alpha（v_0）$，且 $\sigma_W = \sigma（\alpha，W）$。

用户提供的自同构 $\alpha \in Aut(\mathcal{T}_d)$ 的描述可以是有序对 $(w,\overline{\sigma})$，其中 $w = \alpha(v_0)$，而 $\overline{\sigma}$ 是从 $V\mathcal{T}_d$ 到 $Sym(d)$的某个函数的编码，也可以附带其他信息，例如表示顶点 v_0周围半径的正整数 R。

因此，数据将由一种合适的数据结构构成，用于存储距顶点 v_0不超过 R 的所有顶点的局部置换。例如，在我们的 Python 实现中，我们使用了 dict 结构。

在这种特定情况下，可视化未必会产生图形输出，也可能是对某个问题的回答，例如以下问题。

(1) 这个自同构会固定某个顶点吗？如果会，请列出所有不动点。(2) 这个自同构会平移一条边吗？如果会，请列出该边的端点。(3) 这个自同构会沿某条轴平移吗？如果会，请计算平移长度，并描述轴上的所有顶点。(4) 给定的两个自同构是否在某个顶点上“相同”？如果是，请列出所有这样的顶点。(5) 给定的两个自同构是否共轭？如果是，请指出一个共轭元素。

第 2 部分。Nies：关于可计算全不连通局部紧群的两场报告

5. Introduction

这些笔记供 Andre 在纽卡斯尔会议“t.d.l.c. 群的可计算方面”上进行两场报告时使用。该会议于 2022年10月举行。它们是以下内容的简短版本：[24]。

第一场报告介绍了全不连通局部紧群的两种可计算表示概念，并证明了它们等价。第一种概念依赖于不可数情形下标准的可计算性概念。第二种概念则将计算限制在由元素近似构成的可数结构上，即紧开陪集的“交半群胚”。基于此，我得到了各种可计算的全不连通局部紧群实例，例如 Aut(T_d) 以及定义在 p 进数域上的一些代数群。第一场报告还概述了所需的可计算性理论概念。

第二场报告表明，给定全不连通局部紧群的一个可计算表示，其模函数以及 Cayley-Abels 图（在紧生成的情形下）都是可计算的。我们讨论尺度函数是否可能不可计算这一悬而未决的问题。我们将给出一个基于交半群胚的判据，用以判断可计算表示是否在可计算同构意义下唯一。我们解释了为什么可计算的全不连通局部紧群这一类，在 Wesolek [39，定理 1.3] 所研究的大多数构造下封闭。

我们感谢 Stephan Tornier 和 George Willis 就全不连通局部紧群进行的有益交谈，并感谢他们提供参考资料。

T这些讲座围绕以下问题展 开。

(a) 如何定义全不连通局部紧群的可计算表示？哪些全不连通局部紧群拥有这样的表示？

(b) 给定一个全不连通局部紧群的可计算表示，有理数值的哈尔测度、模函数或尺度函数等对象是否可计算？(c) 将全不连通局部紧群构造为新的全不连通局部紧群的过程，是否存在算法版本？(d) 全不连通局部紧群的可计算表示何时在可计算同构意义下唯一？

5.1. 全不连通局部紧群的背景。 范丹齐格 [38] 证明了，每个全不连通局部紧群的单位元都有一个由紧开子群构成的邻域基。考虑到问题 (a)，我们讨论全不连通局部紧群的六个著名例子，并在紧开子群并非显而易见时指出该子群。在本文中，我们将反复回到这些例子。

(i) 所有可数离散群都是全不连通局部紧群。(ii) 所有原有限群都是全不连通局部紧群。(iii) $(\mathbb{Q}_p, +)$， p-进数的加法群，其中 p 是素数，是一个既不属于上述两类的全不连通局部紧群例子。 p-进整数的加法群 $\mathbb{Z}_p$ 构成一个紧开子群。(iv) 与 $\mathbb{Q}_p$上的自同构$x \mapsto px$ 对应的半直积 $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Q}_p$，以及 $\mathbb{Z}_p$ 是一个紧开子群。(v) 局部域上的代数群，例如当 $n \geq 2$时的 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$，都是全不连通局部紧群。这里，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$是一个紧开子群。(vi) 给定一个每个顶点的度均有限的连通可数无向图，其自同构群是全不连通局部紧群。任意顶点的稳定子构成一个紧开子群。按照惯例，所有全不连通局部紧群均为无限群。

5.2. 可计算结构：可数情形。为定义可计算表示，我们先回顾一下集合 $\mathbb{N}$ 上可计算函数的定义，并稍作调整以适应我们的目的：我们允许定义域是任意可计算集。

定义 5.1。给定集合 $S \subseteq \mathbb{N}^k$，其中 $k \geq 1$，若存在一台图灵机，对于输入 $n_1, \ldots, n_k$，能够判定输入元组 $(n_1, \ldots, n_k)$ 是否属于 S；若属于，则输出 $f(n_1, \ldots, n_k)$，则称函数 $f\colon S \to \mathbb{N}$ 可计算。

丘奇—图灵论题的一种表述认为，这种意义上的可计算性等同于可由某种算法计算。

模型论意义上的结构由一个非空集合 D（称为定义域）以及定义在其上的关系和函数组成。以下定义最初由 Mal’cev 和 Rabin 于 20 世纪 60 年代分别独立提出。

定义 5.2. 可计算结构是指这样一种结构：其定义域是一个可计算集 $D \subseteq \mathbb{N}$，且该结构的函数和关系都是可计算的。若某个可数结构 S 与一个可计算结构 W 同构，则称该可数结构为可计算可呈现的。在此语境中，我们称W 为 S的一个可计算副本。

5.3. 可计算结构：不可数情形。 在可计算分析领域（详情参见 Pauly [28] 或 Schr¨oder [35]），要为不可数结构定义可计算性，首先要用“名称”表示所有元素。这些名称是足够简单、能够通过预言机图灵机进行计算访问的无限对象。名称通常是某个可计算子树 $[T]$ 上的路径集合 T 的元素，其中 $\mathbb{N}^*$ 是以自然数为条目构成的字符串树。例如，一个实数的标准名称 r 是一条对有理数序列进行编码的路径 $\langle q_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$，满足$|q_n - q_{n+1}| \leq 2^{-n}$ 且 $\lim_n q_n = r$。

通过使用输入带的图灵机，可以定义 $[T]$ 上函数和关系的可计算性。要求不可数结构中的函数和关系在名称上是可计算的。这就定义了与可计算分析相关的空间上的可计算性；例如，可以定义 $\mathbb{R}$ 上的函数是可计算的。由于每个全不连通波兰空间都同胚于某个 $\mathbb{N}^*$ 的子树 T 对应的 $[T]$，因此在我们的设定中，无须区分名称和对象。对于某些不可数结构类，采用特设的方法来定义可计算性往往也行得通：对该类的定义施加算法约束。

Smith [36] 和 la Roche [19] 提出了一个例子，说明如何定义原有限群 G 的可计算性： $G = \lim\!\leftarrow_i (A_i, \psi_i)$，其中 $(A_i, \psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是由有限群和满同态构成的可计算图， ψ_i: $A_i \to A_{i-1}\,(i > 0)$。

现在我们将更详细地讨论开篇提出的问题。

5.4. 全不连通局部紧群的可计算表示。我们的目标是为具有可计算表示的全不连通局部紧群这一类建立一个稳健的定义。我们希望这一类具有良好的算法闭包性质，并且要求我们的定义能够扩展离散群和原有限群的现有定义。我们给出两种类型的可计算表示，最终会证明它们等价：一个全不连通局部紧群具有其中一种类型的可计算表示，当且仅当它具有另一种类型的可计算表示。

可计算贝尔表示。我们要求 G 的定义域是我们所称的 $\mathbb{N}^*$ 的可计算局部紧子树（即由自然数作为元素的字符串构成的树），且其运算在预言机图灵机的意义下是可计算的。贝尔表示似乎是一般全不连通波兰群最简单、最优雅的可计算表示概念。然而，可计算 Baire 表示很难研究，因为其定义域通常不可数。

通过交半群胚构造可计算表示。我们在 G 中的紧开陪集可数集上引入一种代数结构 $\mathcal{W}(G)$，并配以 $\emptyset$。该结构是一个偏序群胚，偏序采用通常的集合包含关系；乘法则是子群的左陪集 U 与 U 的右陪集相乘（结果仍是一个陪集）。两个紧开陪集的交集本身也是这样的陪集，除非交集为空，因此我们得到一个交半格。通过交群胚构造 G 的可计算表示，是指 G 的交群胚的一个可计算副本，且紧开子群上的指标函数，即 $U, V \mapsto |U : U \cap V|$，也是可计算的。

5.5. 哪些全不连通局部紧群 G 具有可计算表示？离散群和原有限群作为全不连通局部紧群具有可计算表示，当且仅当它们在 20 世纪 60 年代和 80 年代确立、并在上文第 5.2 节回顾的既有意义下具有可计算表示。我们给出了许多这两类之外的全不连通局部紧群的可计算表示示例。对于 $(\mathbb{Q}_p, +)$，我们采用交群胚呈现。对于 $\mathrm{Aut}(T_d)$ 和 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$，我们采用贝尔表示。

要判断某个特定的全不连通局部紧群是否具有可计算表示，可能并不容易。尽管如此，我们的主张是，在全不连通局部紧群领域中所研究的所有“自然”群都具有可计算表示。Neretin 群 $\mathcal{N}_d$ 的几乎自同构群 T_d（$d \geq 3$）为检验这一主张提供了有趣的试验场；例如参见[15]。

5.6. 相关可计算对象。回顾一下，对于全不连通局部紧群 G，我们将其交半群胚 $\mathcal{W}(G)$与之关联；这是定义在其紧开陪集上的一种代数结构。如果 G 由可计算 Baire 表示给出，那么我们将构造其交半群胚的一个副本 $\mathcal{W}$ $\mathcal{W}(G)$，且该副本在很强的意义下是可计算的；这实质上包括以下条件：在 G上取值于有理数的某个（因此也包括任意一个）Haar测度，限制到函数 $\mathcal{W} \to \mathbb{R}$上时是可计算的。我们将在推论 9.9 中证明， G在 $\mathcal{W}$ 上的左作用（因而右作用也）是可计算的。由此可得， G 上的模函数是可计算的。如果 G 是紧生成的，那么对于每个 Cayley–Abels 图，都可以确定一个可计算副本，并且任意两个此类副本都是可计算拟等距的（定理 10.2）。直观地说，这意味着 G 的大尺度结构是一个可计算不变量。

在 Gl¨ockner [11] 和 Willis [42, Sec-tion 6]等著作中，有人针对特定的全不连通局部紧群提出，尺度函数是可计算的；另见综述 Willis [43]。在这些特定情形下，如何理解尺度可以计算通常是显而易见的 $s(g)$：给出一个能证明这一点的算法。必须说明算法接受何种输入；由于 g的定义域可能不可数，因此输入必然是对 g 的某种近似。我们的新框架使我们能够精确地界定这样一个问题：对于全不连通局部紧群的某个特定可计算表示，其尺度函数是否可计算；因此，我们也能够给出精确的否定回答。这似乎让人联想到希尔伯特第十问题的答案。该问题询问是否存在一种算法，可以判定一个系数属于 $\mathbb{Z}$ 的多元多项式是否有零点。直到 20 世纪 30 年代引入了可计算函数的精确定义，人们才得以严谨地断言不存在这样的算法；最终的否定答案由 Y. Matyasevich 于 1970年 给出 [22] (另见 [23])。在与 Willis [24, 的合作研究中，我们已证明存在一个全不连通局部紧群的可计算呈现 1] ，使得其尺度函数对于该表示不可计算。还可以进一步追问，是否存在某个可计算表示的 G ，使得对于它的每一种可计算表示，尺度都不可计算。更强的否定结果是，这样的 群可以选为具有唯一可计算呈现（见下文第 5.8 节的讨论）。

5.7. 从全不连通局部紧群构造新全不连通局部紧群的算法版本。 第 11节表明，经过适当的算法化处理后，可计算的全不连通局部紧群类在许多已于全不连通局部紧群理论中研究过的构造下保持封闭。特别是，Wesolek [39, 定理 1。3] 中所述的构造 (1)、(2)、(3) 和 (6)，都可以用算法方式表述，使其仍属于可计算的全不连通局部紧群类；这进一步表明该类具有良好的稳健性。在我们的算法拓扑框架下，这些构造是以下构造的适当版本：

- 转而考虑闭子群，
- 通过连续作用构造群扩张，
- 构造“局部”直积，以及
- 对闭正规子群取商群

(参见 [39, 第 2] 节，了解这些构造的详细说明）。取商群的算法版本（定理 11.5）要求最高；它利用了证明中得出的额外见解，以说明各种形式的可计算表示彼此等价。

5.8. 可计算表示何时唯一？将可计算的贝尔表示视为一种描述，我们关注这样一个问题：这种描述是否唯一，也就是说，任意两个此类描述之间是否存在可计算同构。借用可数结构理论中可追溯至 Mal’cev 的术语，我们将这样的群称为自稳定群。如果一个全不连通局部紧群是自稳定的，那么该群中的计算就可以看作与其具体描述无关。命题12.2 将判断一个全不连通局部紧群是否自稳定的问题约化为交半群胚的可数情形。

6. Computability on paths of rooted trees

6.1. $\mathbb{N}^*$的可计算局部紧子树。

记号 6.1. 令 $\mathbb{N}^*$ 表示以自然数为条目的字符串集合。我们用字母 σ、τ、ρ 等表示 $\mathbb{N}^*$的元素。集合 $\mathbb{N}^*$ 可以看作一棵有向树：空字符串是根，后继关系由在字符串末尾追加一个数给出。我们用 $\sigma \preceq \tau$ 表示 σ 是 τ的初始段，用 $\sigma \prec \tau$ 表示 σ 是真初始片段。我们还可以将长度为 $n+1$ 的有限字符串与具有有限支撑 $\{0, \dots, n\}$的部分函数 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 对应起来。于是我们写作 τ_i，而不是 $\tau(i)$。我们用 $\max(\tau)$表示 $\max\{\tau_i : i \leq n\}$。令 $h: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$为由 $h(w) = \prod_{i<|w|} p_i^{w_i+1}$ 给出的规范编码，其中 p_i 是第 i个素数。

定义 6.2（有限字符串集的强指标）。对于有限集$u \subseteq \mathbb{N}^*$，令 $n_u = \sum_{\eta \in u} 2^{h(\eta)}$；称 n_u 为 u 的强指标。

我们通常将 $\mathbb{N}^*$ 的有限子集与其强指标等同起来。除非另有说明，所谓（有向）树，是指 $\mathbb{N}^*$ 的一个非空子集 T，满足：若 $\sigma \in T$ 且 $\rho \prec \sigma$，则 $\rho \in T$。用 $[T]$ 表示树 T 的路径集。我们的树通常没有叶节点，因此 $[T]$ 是贝尔空间 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 中的闭集，其中赋予通常的积拓扑。注意，$[T]$ 是

紧当且仅当 T 的每一层都是有限的，换言之， T 是有限分支的。对于 $\sigma \in T$，令

$$[\sigma]_T = \{X \in [T] \colon \sigma \prec X\}.$$

也就是说， $[\sigma]_T$ 是 T 上延伸 σ的路径锥。

定义 6.3（可计算局部紧树）。设 T 是 $\mathbb{N}^*$ 的一个没有叶节点的可计算子树，且只有根可以拥有无限多个后继节点。若存在一个可计算函数 H: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得当 $\rho \in T$ 是非空字符串时，对于每个 $i < |\rho|$都有 $\rho(i) \leq H(\rho(0)\ i)$，则称 T 是可计算局部紧的，简称 c.l.c.。

我们注意到，在论文版本中，c.l.c. 树的概念稍微更宽泛：对于某个参数 $k \in \mathbb{N}^+$，只有 T 上长度为 $< k$的字符串可以拥有无限多个后继节点。这一点有所帮助，但仅具有技术上的重要性。

给定这样一棵树 T， $[T]$ 的紧开子集可以通过算法编码为自然数。下文将始终使用以下记号。

定义 6.4（紧开集编码数）。设 T 是一棵 c.l.c. 树。对于一个有限集 $u \subseteq T - \{\emptyset\}$，令

$$\mathcal{K}_u = \bigcup_{\eta \in u} [\eta]_T,$$

（注意，该集合是紧的）。我们将紧开集 $\mathcal{K} \subseteq [T]$ 的编码数定义为有限字符串集 u 的强指标，且满足 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_u$。

这样的编码数并不唯一（除非 $\mathcal{K}$ 是空集）。因此，我们需要区分实际的紧开集及其任意一个编码数。于是，给定输入 $u \in \mathbb{N}$，可以判定 u 是否为编码数。显然， $[T]$ 的每个紧开子集都可表示为某个 u 对应的 $\mathcal{K}_u$ 。

下面的引理表明，对于形如 $\mathcal{K}_u$ 的集合，其基本的集合论关系和运算都是可判定的，这与有限子集 $\mathbb{N}$ 的情形类似。

引理 6.5。设 T 是一棵 c.l.c. 树。给定编码数 u、 w，

（i）可以计算 $\mathcal{K}_u \cup \mathcal{K}_w$ 和 $\mathcal{K}_u \cap \mathcal{K}_w$ 的编码数；（ii）可以判定 $\mathcal{K}_u \subseteq \mathcal{K}_w$。特别地，给定一个编码数 $u \in \mathbb{N}$，可以计算出满足 $\mathcal{K}_{u^*} = \mathcal{K}_u$ 的最小编码数 $u^* \in \mathbb{N}$ 。

证明。（i）并集的情形是平凡的。对于交运算，只需考虑 u 和 w 为单元素集的情形。对于字符串 α、 $\beta \in T$，若 α、 β 不相容，则有 $[\alpha]_T \cap [\beta]_T = \emptyset$；否则有 $[\alpha]_T \cap [\beta]_T = [\gamma]_T$，其中 γ 是 α、 β 的最长公共初始段。

（ii）设 H 是定义 6.3中所述的可计算二元函数。只需考虑 u 是单元素集合的情形。假设 $\alpha \in T - \{\emptyset\}$。判定 $[\alpha]_T \subseteq \mathcal{K}_w$ 的算法如下。设 N 为 w中字符串的最大长度。若对于每个长度为 N 的 $\beta \succeq \alpha\ (k) \leq H(\alpha, k)$，对于每个 $k < N$，都存在 $\gamma \in w$ 使得 $\gamma \preceq \beta$，则回答“是”；否则回答“否”。□

定义 6.6。给定一棵紧致局部闭树 T，令 E_T 表示 $[T]$的紧开子集的最小代码编号集合。根据前述引理， E_T 是可判定的。

6.2. 可计算树的路径集上的可计算函数。本小节的大部分内容既可以视为抽象可计算拓扑中已知结果的特例，也可以由这些结果推导得出。

设 T 是 $\mathbb{N}^*$ 的一个没有叶节点的可计算子树。为了定义一个以可能不可数的定义域$[T]$ 中的元素为参数的函数是否可计算，需要将问题转到 T 上的字符串这一可数定义域，在那里通常的可计算性概念适用。下面的第一个定义（定义 6.7）将在我们证明推论 10.1 时用到：全不连通局部紧群的一个可计算表示上的模函数是可计算的。

定义 6.7。(1) 函数 $\Phi : [T]\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是可计算的，当且仅当存在如下预言机图灵机：给定 $f \in [T]$ 和 $w \in \mathbb{N}$，当预言机带上写有值的列表 $f(0)$ $f(1)$ $f(2)\ldots$ 时，通过足够多次查询“ $f(q)$ 是什么？ ”，它能够确定值 $\Phi(f, w)$。函数 $\Psi : [T] \to \mathbb{N}$ 是可计算的，当且仅当函数 $\Phi(f, n)$ $=\Psi(f)$（忽略数字输入）按上述意义可计算。(2) 函数 Φ: $[T] \to [\mathbb{N}^*]$ 是可计算的，当且仅当函数$\sim$ $\sim\Phi : [T] \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是可计算的，其中该函数由 $\Phi(g, n) = \Phi(g)(n)$ 给出。(3) 类似地，使用带有两条预言机带的图灵机，可以定义 Φ: $[T] \times [S] \to [\mathbb{N}^*]$ 是可计算的。

例 6.8. 设 $T = \mathbb{N}^*$。函数 $\Phi(f, n) = \sum_{i=0}^{n} f(i)$ 是可计算的。将 f 写在预言机带上的预言机图灵机，会依次查询 $f(i)$ 在 $i = 0, \ldots, n$ 处的值并将它们相加。

注意，一般而言，我们的函数只在 $[T]$ 上定义，而不是在整个 $[\mathbb{N}^*]$ 上定义。因此，只有当预言机 f 属于 $[T]$ 时，预言机图灵机才需要返回答案。

备注 6.9. 如果 T 是紧致局部闭的，那么说 $\Psi : [T] \to \mathbb{N}$ 是可计算的，意味着存在一个定义在 T 上的非空字符串的可计算前缀自由集 S ，以及一个可计算函数 ψ: $S \to \mathbb{N}$，使得 $[T] = \bigcup_{\sigma\in S}[\sigma]_T$ 且 $\Psi(f) = \psi(\sigma)$，其中 σ 是 S 中满足 $\sigma \prec f$ 的唯一字符串。正如会议上讨论的那样，这一定义有时间有界版本（假设字符串条目以二进制展开形式书写）。例如，要求 S 和 ψ 属于 P。有了这一点，就可以研究对于全不连通局部紧群的特定呈示，尺度是否是多项式时间可计算的。

以下内容的证明见 [24, 第 6] 节。

引理6.10。设 K 和 S 是没有叶节点的可计算树。进一步设存在一个可计算函数 H ，使得对于每个 $\sigma \in K$ 和 $i < |\sigma|$， $\sigma(i) < H(i)$。设 Φ: $[K] \to [S]$ 可通过预言机图灵机 M计算。

（i）存在如下可计算函数 γ ：在计算$\Phi(f,n)$时， M只需进行不超过 $\gamma(n)$的查询。如果函数 Ψ： $[T]\to\mathbb{N}$ 满足函数 $\Phi(f,n)=\Psi(f)$（忽略数值输入）按上述意义可计算，则 Ψ 是可计算的。（ii）如果 Φ 是一个双射，则 Φ^{-1} 是可计算的；相应的部分可计算函数可从 K、 H、 S和 P_Φ中一致地得到。

直观地说，函数 g 在 (i) 中根据“一致连续性”定义中的“ϵ”计算出“δ”：如果 $\delta=1/n$ ，我们有 $\epsilon=1/g(n)$。

引理 6.11. 设 T,S 是紧致局部闭树。假设函数 Φ: $[T]\to[S]$ 可由部分可计算函数 P_Φ 计算。给定编码数 u,w，可以判定 $\Phi(\mathcal{K}^T_u)\subseteq\mathcal{K}^S_w$。

为了证明例子 7.2 ，我们需要一个判据，用来判断给定一个可计算子树 S 属于紧致局部闭树 T (其中 S 可能有叶节点)，其具有相同路径集的最大剪枝子树是否可计算。

命题 6.12. 设 T 是紧致局部闭树。设 S 是 T 的可计算子树，并假设存在一个一致可计算的稠密序列 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}\widetilde{}$ $\widetilde{}$，属于 $[S]$。那么树 $S=\{\sigma\colon [\sigma]_S\neq\emptyset\}$ 是可判定的。（由此可知， S 是$\widetilde{}$紧致局部闭的。当然， $[S]=[S]$。）

$\widetilde{}$证明。给定一个字符串 $\sigma\in T$，如果 $\sigma=\emptyset$ ，那么 $\sigma\in S$。假设 $\sigma\neq\emptyset$，我们可以计算满足 $\sigma\prec f_t$ 的最小 $t\in\mathbb{N}$，或者对每个长度为 t 且满足 $\rho\succeq\sigma$ 的 $\rho\in T$，判定是否有 $\rho\notin S$；根据假设，后一条件可以判定，因为 $\sim T$ 是紧致局部闭的。显然，$\sigma\in S$ 当且仅当前一个条件成立。□

7. Defining computably t.d.l.c. groups via Baire presentations

每个全不连通波兰空间 X 都同胚于 $[T]$ 某棵树 $T\subseteq\mathbb{N}^*$；参见 [16, I.7。8]。显然 X 当且仅当对每个 $f\in[T]$都存在一个 n 使得上面的树 $f\restriction_n$ 是有限分支的；于是我们可以假设只有根可以有无限多个分支。这提示我们在算法设定中，使用定义域具有如下形式的表示 $[T]$ ，其中 T是一棵可计算局部紧树，并要求 $[T]$ 上的群运算按照定义 6.7可计算。对于定义在$[T]$ 一棵可计算局部紧树 T上的其他类型的代数结构，同样的方法也适用，例如可计算全不连通局部紧环。

定义 7.1. 可计算 Baire 表示是形如 $H=$([T], 乘法, 求逆) 的拓扑群，满足

(1) T 按照 6.3 中的定义是可计算局部紧的；(2) 乘法:
$[T]\times[T]\to[T]$和 求逆 : $[T]\to[T]$是可计算的。

若全不连通局部紧群 G具有这样的群的 $G\cong H$ ，则称其为可计算全不连通局部紧群（通过贝尔表示） H。

例 7.2. 设 p 是一个素数，且 $n\geq 2$。令 $\mathbb{Q}_p$ 表示 p 进数环。(i) 全不连通局部紧环 $\mathbb{Q}_p$ 具有可计算 Baire 表示。(ii) 全不连通局部紧群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$ 具有可计算 Baire 表示。

证明。（i）令 Q 为字符串 $\sigma\in\mathbb{N}^*$ 构成的树，其中除第一个条目外，所有条目都属于 $\{0,\dots,p-1\}$，并且对每个 $r0\not\preceq\sigma$ 都有 $r>0$。我们

将字符串 $r^\frown\sigma \in Q$ 视为表示有理数 $p^{-r}n_\sigma \in \mathbb{Z}[1/p]$，其中$n_\sigma$ 是以 σ 为 p进制展开、按逆序书写的数：

$$n_\sigma = \sum_{i<|\sigma|} p^i\sigma(i).$$

我们允许 σ 以 0 结尾。条件 $r0 \not\simeq \sigma$ 对每个$r > 0$ 都成立，表示 p 不整除 n_σ。

例如，令 $p = 3$；那么

$$(3, 1, 0, 2) \text{ denotes the rational } 3^{-3} \cdot (1 + 2 \cdot 9) = 19/27.$$

对于加法运算，考虑一台预言机图灵机，它有两条预言机带，起始处分别带有数字 $p^{-r}m$ 和 $p^{-s}n$的记号 $r\sigma$ 和 $s\tau$。设 $r \le s$。那么 $p^{-r}m + p^{-s}n = p^{-s}(p^{s-r}m + n)$。显然，该机器可以输出一个表示 $p^{-r}m+p^{-s}n$的字符串。继续上面的例子，如果机器看到分别以 (3, 1, 0, 2) 和 (4, 1, 2, 0, 0) 开头的带，它会在内部将第一个字符串替换为 (4, 0, 1, 0, 2)，然后保留开头的 4，并使用三进展开 (0, 1, 0, 2) 和 (1, 2, 0, 0) 对数字 57 和 10 执行模 3^4 加法，结果为 (4, 1, 0, 1, 2)。（这对应于 $19/27 + 10/81 = 67/81$。）

乘法也可以用类似的论证来处理。允许非正规展开（即以零结尾的字符串，如上例所示）非常重要，这样机器的运算才是单调的。

（ii）现在我们给出 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$ 的一个可计算 Baire 表示 $([T], \mathrm{Mult}, \mathrm{Inv})$。令 T 为 n^2 重“幂” Q 所得的可计算树。更准确地说，$T = \{\sigma\colon \forall i < n^2\, [\sigma^i \in Q]\}$，其中 σ^i 是 σ 在形如 kn^2+i 的位置上的项所构成的字符串，其中 $k, i \in \mathbb{N}$。注意，T 本身并非紧致局部闭，因为直到第 n^2-1 层的节点都是无限分支的。不过，我们可以通过跳过第 1 至 n^2-1 层来假设它是紧致局部闭的。显然，$[T]$ 可以自然地视为矩阵代数 $M_n(\mathbb{Q}_p)$。根据上文验证过的 $\mathbb{Q}_p$ 上环运算的可计算性，矩阵乘积作为函数 $[T] \times [T] \to [T]$ 是可计算的，而函数 $\det : [T] \to [Q]$ 也是可计算的。

基础可计算性理论表明，对于任意两个紧致局部闭树 T 和 R、R的一条可计算路径 f，以及任意可计算函数 $\Phi\colon [T] \to [R]$，都存在 T 的一个可计算子树 S，使得 $[S]$ 等于原像 $\Phi^{-1}(f)$。将此结果应用于函数 $\det : [T] \to [Q]$ 和表示 $1 \in \mathbb{Q}_p$的路径 $f = 01000\ldots$，可得 T 的一个可计算子树 S，使得 $[S]$ 可以与 $SL_n(\mathbb{Q}_p)$等同。注意，S 可能包含死端。接下来我们来处理这个问题：

众所周知，$SL_n(\mathbb{Z}[1/p])$ 在 $SL_n(\mathbb{Q}_p)$ 中稠密。这是代数群强逼近的一个特例（参见 [29, 第 7]章），但也可以用高斯消元以初等方法证明。在 S 上，与 $SL_n(\mathbb{Z}[1/p])$ 中的矩阵相对应的路径，恰好是从某个位置开始恒为 0 的路径。显然，这些路径可以被可计算地枚举（f_i）。因此，根据命题 6.12，我们可以用一个紧致局部闭树 S 替换 S，使得 $\sim[S] = [S]$。

$\tilde{}$为了基于 S构造一个可计算 Baire 表示，请注意，矩阵$\tilde{}$乘法在 $[S]$上可计算，因为它是 $[T]$上矩阵乘法的限制。为了定义矩阵求逆运算 Inv，我们利用以下事实：

行列式为 1 的矩阵的逆矩阵等于其伴随矩阵；后者可以通过计算各子式的行列式得到。□

8. Defining computably t.d.l.c. groups via meet groupoids

本节详细介绍第 5.4 节中所述的全不连通局部紧群的第二类（M 型）可计算呈示。5.4。

8.1. 全不连通局部紧群的交半群胚。直观地说，群胚的概念通过允许二元运算为偏运算，推广了群的概念。群胚由一个定义域 $\mathcal{W}$ 给出，在该定义域上定义了一元运算（.）$^{-1}$ 和一个记作“·”的偏二元运算。这些运算满足以下条件：

（a）结合律，即 $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$，两边要么都定义，要么都未定义（因此可以省略括号）；（b） $A\cdot A^{-1}$ 和 $A^{-1}\cdot A$ 总是有定义；
（c）如果 $A\cdot B$ 有定义，则 $A\cdot B\cdot B^{-1} = A$ 和 $A^{-1}\cdot A\cdot B = B$。

由 (c) 可知，群胚满足左右消去律。若元素 $U\in\mathcal{W}$ 满足 $U\cdot U = U$，则称其为幂等元。显然，这意味着 $U = U\cdot U^{-1} = U^{-1}\cdot U$，因此根据消去律可得 $U = U^{-1}$。反过来，由 (c) 可知，形如 $A\cdot A^{-1}$ 或 $A^{-1}\cdot A$ 的每个元素都是幂等元。

定义 8.1. 交半群胚是一个群胚 $(\mathcal{W},\cdot,(.)^{-1})$，同时也是一个交半格 $(\mathcal{W},\cap,\emptyset)$，其中 $\emptyset$ 是最小元。记 $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B = A$，并令运算 $\cdot$ 优先于 $\cap$，它满足以下条件

(d) $\emptyset^{-1} = \emptyset = \emptyset\cdot\emptyset$，且对于每个 $A\neq\emptyset$，$\emptyset\cdot A$ 和 $A\cdot\emptyset$ 都未定义；
(e) 若 U,V 是幂等元，且 $U,V\neq\emptyset$，则 $U\cap V\neq\emptyset$；(f) $A\subseteq B\Leftrightarrow A^{-1}\subseteq B^{-1}$；(g) 若 $A_i\cdot B_i$ 有定义（$i = 0,1$）和 $A_0\cap A_1\neq\emptyset\neq B_0\cap B_1$，则 $(A_0\cap A_1)\cdot(B_0\cap B_1) = A_0\cdot B_0\cap A_1\cdot B_1$。

由 (g) 可知，群胚运算是单调的：如果 $A_i\cdot B_i$ 在 $(i = 0,1)$ 和 $A_0\subseteq A_1$，$B_0\subseteq B_1$ 上有定义，那么 $A_0\cdot B_0\subseteq A_1\cdot B_1$。此外，如果 U 和 V 是幂等元，那么 $U\cap V$ 也是幂等元（这一点也可以仅根据 (a)-(f) 加以验证）。

对于交半群胚 $\mathcal{W}_0,\mathcal{W}_1$，双射 $h\colon \mathcal{W}_0\to\mathcal{W}_1$ 是同构，当且仅当它保持这三种运算。给定一个交半群胚 $\mathcal{W}$，字母 A、B、C 将表示 $\mathcal{W}$ 中的一般元素，而字母 U、V、W 将表示 $\mathcal{W}$ 中的幂等元。

我们使用交半格的集合论记号，因为对于交半群胚的典型例子，交集符号表示通常的交集。注意，两个陪集的交集要么是空集，要么仍然是一个陪集。

定义 8.2. 设 G 是一个全不连通局部紧群。我们定义交半群胚 $\mathcal{W}(G)$。其定义域由 G 中的紧开陪集（即 G 的紧开子群的陪集）以及空集组成。若 $A = B = \emptyset$，或者 A 是子群 V 的左陪集且 B 是 V 的右陪集，则我们将 $A\cdot B$ 定义为通常的乘积 AB；否则，$A\cdot B$ 无定义。

事实 8.3。 $\mathcal{W}(G)$ 是一个交半群胚，具有群胚运算 $\cdot$ 和 $A \to A^{-1}$，以及通常的交运算 $\cap$。

对于抽象交半群胚 $\mathcal{W}$ 的元素，我们将使用通常的群论术语。若 U 是 $\mathcal{W}$ 的幂等元，我们称 U 为子群；若 $AU = A$，则称 A 为 U 的左陪集；若 $UB = B$，则称 B 为 U 的右陪集。根据这些公理可以验证，若 $U \subseteq V$ 对于子群 U、V 成立，则映射 $A \mapsto A^{-1}$ 在包含于 V 中的 U 的左陪集与右陪集之间诱导出一个双射。

我们注意到 $\mathcal{W}(G)$ 满足 Law- son 定义的归纳群胚公理 [20, 第 109]页。参见 [8, 第 4] 节，了解更多关于交半群胚公理化方法的内容。

注释 8.4。众所周知[12]，群胚可以视为每个态射都有逆元的小范畴。群胚的元素就是范畴的态射。幂等态射对应于范畴的对象。我们有 $A\colon\ U \to V$，其中 $U = A \cdot A^{-1}$ 且 $V = A^{-1} \cdot A$。因此，在 $\mathcal{W}(G)$ 中，$A\colon\ U \to V$意味着 A 既是 U 的右陪集，也是 V 的左陪集。

通过在适当的波兰群的开陪集上赋予代数结构来研究这些群的想法出自 Katrin Tent，并首次发表于 [17]。Nies、Schlicht 和 Tent 在一篇关于寡形群同构问题复杂度的论文中进一步阐述了这一想法 [26]。文中使用了由三元关系“$AB \subseteq C$”给出的逼近结构，其中 A、B、C 是某些开陪集。它们被称为“粗群”。在本文中，我们需要能够明确处理群胚结构与交半格结构的组合（粗群并未提供这种能力）。粗群的代数结构过于“粗糙”，无法分析全不连通局部紧群的算法方面。

交半群胚 $\mathcal{W}(G)$ 或许会成为研究 G 的有用工具，而不仅仅用于算法方面的考量。对于局部紧群 G，群 Aut(G) 在 Braconnier 拓扑下成为一个波兰群；该拓扑由以下形式的单位元邻域子基给出：

$$\mathfrak{A}(K,U) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(G)\colon\ \forall x \in K[\alpha(x) \in Ux \wedge \alpha^{-1}(x) \in Ux]\},$$

其中，K 遍历 G 的紧子集，而 U 遍历 G 的单位元邻域。正如 [5, 附录 A], 中所述，在此拓扑下，Aut(G) 是波兰群（假设 G 有可数基）。对于全不连通局部紧群 G，以下结果表明，Aut(G) 可视为某个可数结构的自同构群。

命题 8.5. 设 G 是一个全不连通局部紧群。带有 Braconnier 拓扑的群 Aut(G) 与 Aut($\mathcal{W}(G)$) 在拓扑意义下同构，同构映射为 Γ；该映射将 $\alpha \in$ Aut(G) 映到它在 $\mathcal{W}(G)$ 上的作用，即 $B \mapsto \alpha(B)$。

证明。显然，Γ 是一个单射群同态。为证明 Γ 连续，考虑 Aut($\mathcal{W}(G)$) 的一个单位元邻域，我们可以假设它具有如下形式：$\{\beta\colon\ \beta(A_i) = A_i, i = 1, \ldots, n\}$，其中 $A_i \in \mathcal{W}(G)$。令 $U = \bigcap_i A_i A_i^{-1}$ 和 $K = \bigcup A_i$。那么，对每个 i，$\alpha \in \mathfrak{A}(K,U)$ 蕴含$\alpha(A_i) = A_i$。

为了证明 Γ 是满射，我们明确描述其逆映射 Δ。回顾一下我们的约定：变量 U 遍历 G 的紧开子群。注意到 $\bigcap_U gU = \bigcap_U Ug = \{g\}$。由于 β 是一个自同构，且 $\beta(gU)$ 是紧的，因此 $L = \bigcap_U \beta(gU)$ 非空。若 $|L| > 1$，则存在

C、$D \in \mathcal{W}(G)$，使得 $C \cap D = \emptyset$，且 $C \cap L \neq \emptyset \neq D \cap L$。由紧致性可知 $\beta^{-1}(C) \cap \{g\} \neq \emptyset \neq \beta^{-1}(D) \cap \{g\}$，这就产生了矛盾。因此

$$\Delta(\beta)(g) = h \Leftrightarrow h \in \bigcap_U \beta(gU)$$

定义了一个映射 $\Delta\colon \mathrm{Aut}(\mathcal{W}(G)) \to G^G$。

断言 8.6。设 $\overline{\beta} = \Delta(\beta)$。我们有 $\overline{\beta} \in \mathrm{Aut}(G)$。

显然 $\Delta(\beta^{-1}) = \overline{\beta}^{-1}$，所以 $\overline{\beta}$ 是 G的一个置换。暂且忽略群元素与包含它们的单元素集之间的差异，我们有

$$\overline{\beta}(g^{-1}) = \bigcap_U \beta(g^{-1}U) = \bigcap_V \beta(Vg^{-1}) = (\bigcap_V \beta(gV))^{-1} = (\overline{\beta}(g))^{-1}.$$

此外，可以验证 β 保持二元群运算，利用这一点：

$$\bigcap_U gU \bigcap_V hV = \bigcap_V ghV = \bigcap_V (gV^{h^{-1}} hV).$$

如果 $g \in V$，那么 $\overline{\beta}(g) \in \beta(V)$，所以 $\overline{\beta}$ 是开集。对 β^{-1}作同样的论证，我们得出 $\overline{\beta}$ 是 G的一个同胚。这就证明了该断言。

断言 8.7. 若 $\beta \in \mathrm{Aut}(\mathcal{W}(G))$ 且 $B \in \mathcal{W}(G)$，则 $\Gamma(\Delta(\beta))(B) = \beta(B)$。

根据 Γ 和 Δ的定义，我们有

$$h \in \Gamma(\Delta(\beta))(B) \Leftrightarrow \exists g \in B[h \in \bigcap_U \beta(gU)].$$

令 $V = B^{-1}B$，我们有 $B = gU$，因此 $\Gamma(\Delta(\beta))(B) \subseteq \beta(B)$。反过来，假设 $h \notin \Gamma(\Delta(\beta))(B)$。那么对每个 $g \in B$，存在 U_g 使得 $h \notin \beta(gU_g)$。由于 B 是紧的，且 $B \subseteq \bigcup_{g\in B} U_g$，存在一个有限集 $S \subseteq G$ 使得 $B \subseteq \bigcup_{g\in S} gU_g$。□

8.2. 可计算全不连通局部紧群的第二种定义。

定义 8.8. 若交半群胚 $\mathcal{W}$ 满足

(a) 其定义域是一个可计算子集 D 属于 $\mathbb{N}$；(b) 群胚运算和交运算按照定义 5.1 的含义是可计算的；特别地，关系 $\{\langle x, y\rangle\colon x, y \in S \wedge x\ y$ 有定义$\}$ 且可计算；(c) 定义域包含于 $D \times D$、将一对子群 $U, V \in \mathcal{W}$ 映射到 $|U\colon U \cap V|$ 的偏函数是可计算的。

这里 $|U\colon U \cap V|$ 抽象地定义为非零幂等元 $U \cap V$ 包含于 U中的左陪集数，或等价地说，右陪集数；我们隐含地要求这个数始终有限。注意，由（b）可知，由 $\mathcal{W}$ 的交半格结构所诱导的偏序是可计算的。此外，（b）意味着，当把「是子群」视为定义域 S中元素的一种性质时，它是可判定的；这在（c）中有所应用。条件（c）对应于定义 H 中所要求的可计算上界6.3。为便于阅读，我们将说 $n \in D$ 表示一个陪集 A，而不说 n 「是」一个陪集。

定义 8.9（通过交半群胚定义可计算的全不连通局部紧群）。设 G 是一个全不连通局部紧群。若 $\mathcal{W}(G)$ 有一个 Haar 可计算副本 $\mathcal{W}$，则称 G 通过交半群胚是可计算的全不连通局部紧群。在此背景下，我们称 $\mathcal{W}$ 是 G 的一个可计算表示（就交半群胚而言）。

注记 8.10。在此设定下，定义 8.8 的条件（c）等价于：每个在某个紧开子群上取有理数值（因而取有理数值）的 G 上的 Haar 测度 μ，在 $\mathcal{W}$ 上都是可计算的；具体而言，将紧开陪集 A 映射到有理数 $\mu(A)$ 的函数是可计算的。以左 Haar 测度为例。首先假设 (c) 成立。给定 A，计算子群 V，使得 $A = A \cdot V$，即 A 是 V 的左陪集。计算 $W = U \cap V$。我们有 $\mu(A) = \mu(V) = \mu(U) \cdot |V : W|/|U : W|$。

反过来，如果 Haar测度在 $\mathcal{W}$上可计算，那么（c）成立，因为 $|U : V| = \mu(U)/\mu(V)$。

对于离散群，可以省略条件（c），如下述证明所示。

例 8.11. 一个离散群 G 可通过交半群胚实现可计算全不连通局部紧$\Leftrightarrow G$，并且按照定义 5.2 的通常意义，具有一个可计算副本。

证明。对于蕴含关系 $\Leftarrow$，我们可以假设 G本身是可计算的；特别地，我们可以假设其定义域是 $\mathbb{N}$的一个可计算子集。G 中的每个紧陪集都是有限的，因此可以用一个有限自然数集的强指标来表示。由于群运算在定义域上可计算，这意味着 G的交半群胚具有一个可计算副本。于是它显然是 Haar 可计算的。

对于蕴含关系 $\Rightarrow$，令 $\mathcal{W}$ 为 $\mathcal{W}(G)$的一个 Haar 可计算副本。由于G是离散的，$\mathcal{W}$ 包含一个最小子群 U。U 的左陪集集合是可计算的，并且在群胚运算和求逆运算下构成一个群。由此得到所需的 G可计算副本。□

我们用 $\mathbb{Q}_p$ 表示 p-进数的加法群。根据半直积的通常定义（[33, 第 27]页），$\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Q}_p$ 是定义在笛卡尔积 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_p$ 上的群，其二元运算为 $\langle z_1, \alpha_1\rangle \cdot \langle z_2, \alpha_2\rangle = \langle z_1 + z_2, p^{z_2}\alpha_1 + \alpha_2\rangle$。这使得 $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Q}_p$ 通过积拓扑成为一个拓扑群。

例 8.12. 对于任意素数 p，加法群 $\mathbb{Q}_p$ 和群 $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Q}_p$ 都可以通过一个交半群胚成为可计算全不连通局部紧群。

证明。我们从加法群 $\mathbb{Q}_p$ 开始。注意到，其开真子群具有如下形式 $U_r := p^r\mathbb{Z}_p$，其中 $r \in \mathbb{Z}$。令 C_{p^∞} 表示 Prüfer 群 $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$，其中 $\mathbb{Z}[1/p] = \{zp^{-k} : z \in \mathbb{Z} \wedge k \in \mathbb{N}\}$。对于每个 r，都有一个规范满同态 $\pi_r : \mathbb{Q}_p \to C_{p^\infty}$，其核为 U_r：如果 $\alpha = \sum_{i=-n}^{\infty} s_i p^i$，其中 $0 \le s_i < p, n \in \mathbb{N}$，则有

$$\pi_r(\alpha) = \mathbb{Z} + \sum_{i=-n}^{r-1} s_i p^{i-r};$$

这里将空求和解释为 0。（非正式地说，$\pi_r(\alpha)$ 是从位置 $r-1$ 开始取出 α 的“尾部”直到最后一个位置，并将其平移，以表示 C_{p^∞}的一个元素。）因此，$\mathbb{Q}_p$ 中的每个紧开陪集都可以唯一地写成 $D_{r,a} = \pi_r^{-1}(a)$ 的形式，其中$r \in \mathbb{Z}$ 和 $a \in C_{p^\infty}$满足相应条件。Haar 可计算副本 $\mathcal{W}$ 的定义域 $S \subseteq \mathbb{N}$ 由自然数构成，这些自然数以规范方式编码这样的有序对 $\langle r, a\rangle$。我们将它们与其所表示的陪集等同起来。

群胚运算是可计算的，因为我们有 $D_r^{-1}{}_{,a} = D_{r,-a}$，并且当 $r = s$时有 $D_{r,a} \cdot D_{s,b} = D_{r,a+b}$，否则未定义。容易验证，$D_{r,a} \subseteq D_{s,b}$ 当且仅当 $r \geq s$ 且 $p^{r-s}a = b$。因此，包含关系是可判定的。我们有 $D_{r,a} \cap D_{s,b} = \emptyset$，除非其中一个集合包含于另一个集合中；因此交运算是可计算的。最后，对于 $r \leq s$，我们有$|U_r : U_s| = p^{s-r}$，这是可计算的。

接下来，令 $G = \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Q}_p$；我们构造 $\mathcal{W}(G)$ 的 Haar 可计算副本 $\mathcal{V}$。我们将扩展上文给出的紧开陪集列表 $(D_{r,\ a})_{r\in\mathbb{Z},\ a\in C_{p^\infty}}$。对于 G 的每个紧开子群，其在 $\mathbb{Z}$ 上的投影是紧开子群，因此是平凡群。所以 G 的紧开子群只能是 U_r 这种形式。令 $g \in G$ 为 $\mathbb{Z}$ 的生成元，使得对每个 $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ 都有 $g^{-1}\alpha g = p\alpha$（其中 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Q}_p$ 被视为规范嵌入 G 中）。G 的每个紧开陪集都唯一地具有形式 $g^z D_{r,\ a}$，其中 $z \in \mathbb{Z}$。严格来说，$\mathcal{W}(G)$ 的可计算副本的定义域由编码这些陪集的三元组 $\langle z、\ r、\ a\rangle$ 的自然数构成；和之前一样，它们将与其表示的陪集等同起来。

要证明群胚运算和交运算是可计算的，注意到对于每个 $r \in \mathbb{Z}, a \in C_{p^\infty}$，都有 $gD_{r,a} = D_{r-1,a}g$，因此对于每个 $z \in \mathbb{Z}$，都有 $g^z D_{r,a} = D_{r-z,a}g^z$。给定两个陪集 $g^v D_{r,a}$ 和 $g^w D_{s,b} = D_{s-w,b}g^w$，当且仅当 $r = s - w$ 时，它们的复合有定义；此时结果为$g^{v+w} D_{s,a+b}$。$g^z D_{r,a}$ 的逆元是 $D_{r,-a}g^{-z} = g^{-z}D_{r-z,-a}$。

要判定包含关系，注意到当且仅当 $z = w$ 时，有 $g^z D_{r,a} \subseteq g^w D_{s,b}$ 和 $D_{r,a} \subseteq D_{s,b}$；否则，它们不相交。利用这一点可以证明交运算是可计算的（这一论证适用于任意可计算交群胚 $\mathcal{V}$）：若 $A_0, A_1 \in \mathcal{V}$, $A_i\colon U_i \to V_i$，且 A_0, A_1不相交，则 $A_0 \cap A_1$ 是唯一满足 $C\colon U_0 \cap U_1 \to V_0 \cap V_1$ 且 $C \subseteq A_0, A_1$ 的 $C \in \mathcal{V}$。由于 $\mathcal{W}$ 满足定义 8.8 中的条件（c），且 $\mathcal{V}$ 除了 W 中已有的子群外没有其他子群，我们得出 $\mathcal{V}$ 是 Haar 可计算的。□

9. 两种可计算表示的等价性

我们证明，一个全不连通局部紧群 G 按照定义 7.1 的意义具有可计算表示，当且仅当 G 按照定义 8.9的意义具有可计算表示。

我们需要一些预备知识。对于长度相同的字符串 $\sigma_0, \sigma_1 \in \mathbb{N}^*$，设 $\sigma_0 \otimes \sigma_1$ 表示该长度的字符串 τ，使得对每个 $k < n$，都有 $\tau(k) = \langle\sigma_0(k)\ \sigma_1(k)\rangle$（其中 $\langle ., .\rangle$ 是一个可计算配对函数，例如康托配对函数）。

引理 9.1。设 G 通过一个可计算的贝尔表示 $([T], \text{乘法}, \text{求逆})$是可计算全不连通局部紧的。回忆定义 E_T中紧开集的最小代码编号集合 *6.6*。(i) 存在一个可计算函数 $I\colon E_T \to E_T$，使得对每个 $u \in E_T$，都有 $\mathcal{K}_{I(u)} = (\mathcal{K}_u)^{-1}$。(ii) 对于 u，v，$w \in E_T$可以判定 $\mathcal{K}_u\mathcal{K}_v \subseteq \mathcal{K}_w$。

证明。(i) 根据引理 6.11，可以判定 $\mathcal{K}_u \subseteq (\mathcal{K}_w)^{-1}$是否成立。等式 $\mathcal{K}_u = (\mathcal{K}_w)^{-1}$ 等价于 $\mathcal{K}_u \subseteq (\mathcal{K}_w)^{-1} \wedge \mathcal{K}_w \subseteq (\mathcal{K}_u)^{-1}$。因此，取 $I(u$为满足该等式的最小指标 v。

~(ii) 令 T为形如 $\sigma_0 \otimes \sigma_1$ 的字符串的初始段树，其中~ ~ σ_0，$\sigma_1 \in T$长度相同。那么 T是紧致局部闭树，$[T]$ 与 $[T] \times [T]$自然同胚，并且 乘法 可以视为一个可计算函数~$[T] \to [T]$。现在应用引理 6.11。□

我们还需要一个可计算表示，来表示基于 $\mathbb{N}^*$ 的某个子树的 $\mathbb{N}$ 置换拓扑群。定义一个没有叶节点的可计算树如下：

$$\begin{aligned} \text{树}(S(\omega)) = \{\sigma \otimes \tau\colon\ & \sigma, \tau \in \mathbb{N}^* \wedge \\ & \sigma,\tau\text{是 1-1} \wedge \sigma(\tau(k)) = k \wedge \tau(\sigma(i)) = i \text{（若有定义）}\}。 \end{aligned}$$

字符串 $\sigma \otimes \tau \in$ 树$(S(\omega))$ 可导出一个在 $\mathbb{N}$ 上的有限单射 $\alpha_{\sigma\otimes\tau}$，定义如下：

$$\alpha_{\sigma\otimes\tau}(r) = s \text{ iff } \sigma(r) = s \vee \tau(s) = r. \tag{9.1}$$

树$(S(\omega))$ 的路径可以看作 $\mathbb{N}$ 的置换及其逆置换：

$$[Tree(S(\omega))] = \{f \otimes f^{-1}\colon\ f \text{ is permutation of } \mathbb{N}\}.$$

Tree$(S(\omega))$ 上的群运算是可计算的：我们有

$$\begin{aligned} (f_0 \otimes f_1)^{-1} &= f_1 \otimes f_0 \\ (f_0 \otimes f_1) \cdot (g_0 \otimes g_1) &= (f_0 \circ g_0) \otimes (g_1 \circ f_1). \end{aligned}$$

~对于 $S(\omega)$ 的闭子群 G，我们记作

$$Tree(\widetilde{G}) = \{\sigma \in Tree(S(\omega))\colon\ [\sigma]_{Tree(S(\omega))} \cap \widetilde{G} \neq \emptyset\}.$$

~注意，这是 Tree$(S(\omega))$ 的一个没有叶节点的子树。我们称 G 是~可计算的，当且仅当 Tree(G) 是可计算的。

定理 9.2。
一个群 G 通过贝尔表示（定义 *7.1*）是可计算全不连通局部紧的 $\Leftrightarrow$ G 通过交半群胚是可计算全不连通局部紧的 *(*定义 *8.9)* 。
由一种类型的 G 的表示，可以统一地得到另一种类型的 G 的表示。

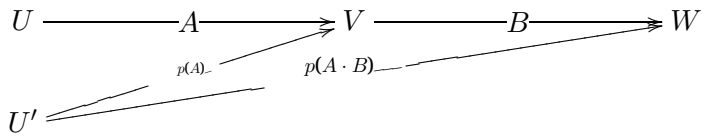
证明。 $\Leftarrow$: （这是较难的蕴含——如果不想读，可以跳到第 35 页。）

我们首先定义一个算子，对于 Haar 可计算交群胚，它与上述将 G 发送到 $\mathcal{W}$ 的可计算副本 G 的运算互为对偶。

~定义 9.3。给定定义域为 $\mathbb{N}$ 的交半群胚 $\mathcal{W}$，令 $G = \mathcal{G}_{\text{comp}}(\mathcal{W})$ 为 $S(\omega)$ 的闭子群，其中包含保持 $\mathcal{W}$ 的交运算且满足：只要 $A \cdot B$ 有定义，便有 $p(A) \cdot B = p(A \cdot B)$ 的所有元素 p 。

回顾一下，$S(\omega)$ 的元素实际上并不是置换，而是 Tree$(S(\omega))$ 上的路径，用于编码由一个置换及其逆元组成的有序对。~不过，如果 $p \in$ Tree(G)，并且 $A \in \mathcal{W}$ 记作 i，我们将有启发性地把 $p(A)$ 写作 $\mathcal{W}$ 的元素，该元素由 $p(i)$ 所编码的自然数对的第一个分量表示。我们注意到，对于每个子群

$U \in \mathcal{W}(G)$，集合 $B = p(U)$ 满足 $B \cdot U = p(U) \cdot U = p\,U \cdot U = B$，因此是 U 的一个左陪集。下图以范畴术语将上述定义中的条件表示为一个交换图。



现在假设 $\mathcal{W}$ 如定义 8.9 所述。回顾一下约定：所有全不连通局部紧群都是无限的。因此，$\mathcal{W}$ 的定义域等于 $\mathbb{N}$，并且存在交半群胚同构 $\mathcal{W} \to \mathcal{W}(G)$；下文中我们将利用这一点~来将 $\mathcal{W}$ 与 $\mathcal{W}(G)$视为相同。定义群同态 Φ: $G \to G$，令 $\Phi(g)$为 $S(\omega)$ 中对应于 g的左作用的元素，即$A \mapsto gA$，其中 $A \in \mathcal{W}(G)$。注意，Φ 是单射，因为紧开子群构成 1 的邻域基：如果 $g \neq 1$，那么对于某个紧开子群 U，有 $g \notin U$，因此 $\Phi(g)(U) \neq U$。

~命题 9.4。 Φ: $G \cong G_*$。

~为证明 Φ 是满射，取 $p \in G_*$。由于

$$\{p(U) \colon U \in \mathcal{W}(G) \text{ is a subgroup}\}$$

是 $\mathcal{W}(G)$ 上包含一个紧集的滤子，因此其交集中存在一个元素 g。于是 $\Phi(g) = p$: 回想一下，对于每个子群 $U \in \mathcal{W}(G)$，集合 $B = p(U)$ 是 U 的左陪集，因此等于 gU。所以，若 A是 U的右陪集，则 $p(A) = p(U \cdot A) = B \cdot A = gA$。

为证明 Φ在 1 处连续（从而处处连续），注意到 G 中单位元的邻域有一个由开集组成的~基:

$$\{p \in \widetilde{G} \colon \forall i \leq n\, [p(A_i) = A_i]\},$$

其中 A_1、.....、$A_n \in \mathcal{W}(G)$。给定这样一个集合，假设 A_i 是U_i的右陪集，并令 $U = \bigcap U_i$。若 $g \in U$，则对每个 i都有 $gA_i = A_i$。

豪斯多夫群的开映射定理指出，每个从 σ-紧群（例如具有可数拓扑基的全不连通局部紧群）到贝尔群的连续满同态都是开映射。因此 Φ 是开的。这就验证了该断言。

利用 $\mathcal{W}$ 是 Haar 可计算的这一假设，我们现在证明~树(G) 如定义 6.3所述是紧致局部闭的。下面的命题将用于~证明 树(G) 是可计算的。

命题 9.5. 在 $\mathbb{N}$ 上的有限单射 α 可以扩展为某个 $p \in \widetilde{G}$ $\Leftrightarrow B \cdot A^{-1}$ 在 $\alpha(A) = B$ 时有定义，并且

$$\bigcap\{B \cdot A^{-1} \colon \alpha(A) = B\} \neq \emptyset.$$

从右向左，设 g 是交集中的一个元素。那么对于每个 $A \in \mathrm{dom}(\alpha)$，都有 $gA = B \cdot A^{-1} \cdot A = B = \alpha(A)$。

从左向右，假设 α 是根据命题 9.4，存在~$g \in G$使得 $p = \Phi(g)$。于是 $gA = p(A) = B$ 对每个 A，B 使得 $\alpha(A) = B$。这样的 A，B 是同一个子群的右陪集。因此 $B \cdot A^{-1}$ 有定义，并且显然 g 属于交集。这就证明了该命题。

作者（9.1），

$$S = \{\sigma \otimes \tau \colon \alpha_{\sigma\otimes\tau} \text{ can be extended to some } p \in \widetilde{G}\}$$

~是 Tree($S(\omega)$) 的一个无叶节点可计算子树，并且 $G = [S]$。因此~S =Tree(G)。

~断言9.7 下面将验证 S =树(G) 是按6.3中定义的紧致局部闭树。下面的引理是关键。直观地说，它指出，给定~某个子群 $U \in \mathcal{W}$，如果规定 $p \in G$ 在 $L \in \mathcal{W}$ 处 U取一个值，那么就可以针对任意 $F \in \mathcal{W}$ 计算出 p在 F处所有可能值组成的有限集。

引理 9.6（有效有限子轨道）。设 $U \in \mathcal{W}$ 是一个子群，L 是 U 的一个左陪集。令 $F \in \mathcal{W}$。可以一致地根据 U、L 和 F，计算有限集 $\mathcal{L} = \{p(F)$ 的一个强指标：$p \in [S] \wedge p(U) = L\}$。

为说明这一点，首先计算 $V = F^{-1} \cdot F$，从而 F 是子群 V的一个右陪集。接下来计算 $k = |U \colon U \cap V|$，即 $U \cap V$在 U中的左陪集数。注意，

$$\mathcal{L}_0 = \{p(U \cap V) \colon p \in [S] \wedge p(U) = L\}$$

这是包含于 L中的 $U \cap V$ 的左陪集集合。显然，该集合的大小为 k。通过搜索 $\mathcal{W}$，直到其所有元素都出现为止，可以为该集合计算一个强指标。接下来，为满足以下条件的 V 的左陪集集合 $\mathcal{L}_1$ 计算一个强指标：对于某个 $C \in \mathcal{L}_0$，有 $C \subseteq D$（这里利用了给定 C 时可以计算 D这一点）。最后，输出集合 $\{D \cdot F$ 的一个强指标：$D \in \mathcal{L}_1\}$，它等于 $\mathcal{L}$。这就证明了该引理。

我们假设 0 表示 $\mathcal{W}$中的一个子群 U。这不会影响定理的一致性陈述：否则，我们可以搜索 $\mathcal{W}$，找出使 n 成为子群的最小 n，然后使用 $\mathcal{W}$的新副本（G），其中交换 0 和 n。

断言 9.7。存在一个可计算二元函数 H，使得如果 $\rho \in S$，那么对每个 $i < |\rho|$，都有 $\rho(i) \leq H(\rho(0)\ i)$。

令 F 为由 k 表示的陪集。令 $\rho(0) = \langle a_0, a_1\rangle$，并令 L_r 为由 a_r，$r = 0, 1$ 表示的陪集。将引理 9.6 应用于 U、L_r、F，便可计算出 $H(\sigma, i)$，它是满足以下条件的最大一对 $\langle b_0, b_1\rangle$：b_r 表示 $\{p(F)$ 中的一个元素：对于 $r = 0, 1$，$p \in [S] \wedge p(U) = L_r\}$。

⇒：我们按照定义 $\mathcal{W}$ 构造交半群胚 $\mathcal{W}(G)$，如定义 8.9 所示。根据引理 9.1，可以判定 $u \in E_T$ 是否为子群的编码数（定义 6.4）。此外，还可以判定 $B = \mathcal{K}_v$ 是否为子群 $U = \mathcal{K}_u$ 的左陪集：当且仅当满足 $BU \subseteq B$ 和 $BB^{-1} \subseteq U$ 时成立，而根据引理 9.1，后两个条件均可判定。同样，也可以判定 B 是否为 U 的右陪集。

由此可得，集合 $\{u \in E_T$：$\mathcal{K}_u$ 是一个陪集$\}$，它可以通过对一个可计算二元关系进行存在量化而得到（换言之，V是递归可枚举的）。因此，根据可计算性理论的一个基本事实，存在一个可计算的一一函数 θ，其定义在 $\mathbb{N} - \{0\}$的一个初始段上

使得 θ 的值域等于这个集合。记 $A_n = \mathcal{K}_{\theta(n)}$ 为 $n > 0$，并记$A_0 = \emptyset$。

的定义域 $\mathcal{W}$ 是整个 $\mathbb{N}$。根据引理6.5 上的交运算 $\mathcal{W}$ 是可计算的，也就是说，存在一个可计算二元函数 c 定义在 $\mathbb{N}$ 上，使得 $A_{c(n,k)} = A_n \cap A_k$。接下来，给定 n， $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ 可以判定A_n 是否是与 A_k 所在左陪集具有相同子群的右陪集。在这种情况下，可以计算出数 r 使得 $A_r = A_n \cdot A_k$：利用A_r 是唯一的陪集 C 使得

(a) $A_n A_k \subseteq C$，且

(b) C 是与 A_k 所在右陪集具有相同子群的右陪集。

对于子群 U、V，可以计算出 $|U : U \cap V|$，方法是在 $\mathcal{W}$ 中不断寻找 $U \cap V$ 包含于 U 中的更多互不相同的左陪集，直到它们的并集达到 U。后一条件是可判定的。□

定义 9.8。给定一个可计算 Baire 表示 G，我们用 $\mathcal{W}_{\text{comp}}(G)$ 表示上文证明中得到的、定义域为 $\mathbb{N}$ 的 $\mathcal{W}(G)$ 的可计算副本。

推论 9.9。在此背景下，左作用和右作用 $[T] \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，分别由 $(g, A) \mapsto gA$ 和 $(g, A) \mapsto Ag$ 给出，都是可计算的。

证明。对于左作用，我们使用一台预言机图灵机，其预言机是 $[T]$ 上的一条路径 g，输入是一个 $A \in \mathcal{W}$。如果 A 是子群 V 的左陪集，它就输出 V 的左陪集 B，并且能够找到一个字符串 $\sigma \prec g$，使得 $[\sigma]_T A \subseteq B$。

对于右作用，利用 $Ag = (g^{-1}A^{-1})^{-1}$，以及取逆运算在 G 和 $\mathcal{W}_{\text{comp}}(G)$ 中都是可计算的。□

回想一下引言中的内容，Aut(T_d) 是无向树 T_d 的自同构群，其中每个顶点的度为 d。

例 9.10. 设 $d \geq 3$。全不连通局部紧群 $G = \text{Aut}(T_d)$ 有一个可计算的贝尔表示。

证明。通过将 T_d 的顶点有效编码为自然数，我们可以将 G 本身视为 $S(\omega$ 的一个闭子群。定义在 α 上的有限单射 T_d 当且仅当保持距离时，才能扩展为 T_d 的自同构；这是一个可判定条件。每个 $\eta \in Tree(S(\omega))$ 都对应于一个通过（9.1）定义在 T_d 上的单射。因此，我们可以判定 $[\eta]_{Tree(G)} = [\eta]_{Tree(S(\omega))} \cap G \neq \emptyset$。显然，对于 $[\eta]_{Tree(G)}$ 中的每个 此类非空字符串 η，它都是紧的。

要证明 Tree(G) 是紧致局部闭的，注意，若 $\sigma \in$ Tree(G) 将 $x \in T_d$ 映射到 $y \in T_d$，那么 σ 的每个扩展 $\eta \in$ Tree(G) 都会将 T_d 中距离 x 为 n 的元素映射到 T_d 中距离 y 为 n 的元素，反之亦然。这就得到了定义 6.3 中（3）所要求的可计算界 $H(\sigma, i)$。□

10. Algorithmic properties of objects associated with a t.d.l.c. group

10.1. 模函数是可计算的。 在第 5.6 小节中，我们讨论了模函数 Δ: $G \to \mathbb{R}^+$。作为推论 9.9的一个应用，我们证明，对于任意可计算表示，模函数都是可计算的。

推论 10.1. 设 G 通过贝尔表示（$[T]$、乘法、求逆）成为可计算全不连通局部紧群。那么模函数 $\Delta\colon\ [T] \to \mathbb{Q}^+$ 是可计算的。

证明。令 $V \in \mathcal{W}$ 为任意子群。给定 $g \in [T]$，利用推论 9.9计算 $A = gV$。计算 $U \in \mathcal{W}$ 使得 A 是 U的右陪集，因此 $A = Ug$。对于 μ 上的任意左 Haar 测度 G，我们有

$$\Delta(g) = \mu(A)/\mu(U) = \mu(V)/\mu(U).$$

根据备注 8.10 ，我们可以选择 μ 使其可计算；因此这足以确定$\Delta(g)$。□

10.2. Cayley-Abels 图是可计算的。令 G 为一个紧生成的全不连通局部紧群，即由一个紧子集代数生成。于是存在一个紧开子群 U和一个集合 $S = \{s_1, \dots, s_k\} \subseteq G$，使得 $S = S^{-1}$ 和 $U \cup S$ 代数生成 G。

Cayley-Abels 图

$$\Gamma_{S,U} = (V_{S,U}, E_{S,U})$$

G 的定义如下。顶点集 $V_{S,\ U}$ 是 $L(U)$ 的左陪集 U 的集合，边关系为

$$E_{S,U} = \{\langle gU, gsU\rangle\colon\ g \in G, s \in S\}.$$

部分背景介绍和原始参考文献见 [43]的第 5 节。更详细的背景介绍见 [40], 的第 4 部分，或 [18, 第 2]节。如果 G 是离散的（因而是有限生成的），那么 $\Gamma_{S,\{1\}}$ 就是生成集 S对应的通常意义下的凯莱图。 G 的任意两个 Cayley-Abels 图都是拟等距的。形式化定义见 [18, 定义 3] ，或 [40] 。

定理 10.2. 假设 G 是可计算全不连通局部紧且紧生成的。

> (i) G 的每个 Cayley-Abels 图 $\Gamma_{S,U}$ 都有一个可计算副本 $\mathcal{L}$。(ii) 如果 $\Gamma_{T,V}$ 是如上所述得到的另一个 Cayley-Abels 图，那么 $\Gamma_{S,U}$和$\Gamma_{T,V}$ 是可计算拟等距的。

证明。(i) 对于可计算副本 $\mathcal{L}$的定义域，我们取 U的左陪集所构成的可计算集。我们证明，边关系可由参数一阶定义，且可以验证它也是可计算的。

设 $V_i = C_i \cdot C_i^{-1}$，使得 C_i 是 V_i 的右陪集。设 $V = U \cap \bigcap_{1 \le i \le k} V_i$。为了用给定的参数对 E_Γ 在 $\mathcal{W}$ 中进行一阶定义，思路是将 E_Γ 的定义中的元素 g 替换为 V 的左陪集 P，因为它们是对 g 足够精确的近似。容易验证，$\langle A,\ B\rangle \in E_\Gamma \Leftrightarrow$

$$\exists i \le k \exists P \in L(V) \exists Q \in L(V_i)\,[P \subseteq A \wedge P \subseteq Q \wedge B = Q \cdot C_i],$$

其中 L（U）表示子群 U 的左陪集集合：对于蕴含“⇐”，设 $g \in P$；则有 $A = gU$ 和 $B = gs_iU$。对于蕴含“⇒”，给定 $A = gU$ 和 $B = gs_iU$，设 $P \in L$（V），使得 $g \in P$。

我们验证边关系 E_Γ 是可计算的。由于 $\mathcal{W}$ 是 Haar 可计算的，根据通常的枚举论证，我们可以获得包含于 A中的 V 的左陪集集合的强指标。给定该集合中的 P 以及

$i \le k$，上面表达式中的 V_i 的左陪集 $Q = Q_{P,\,i}$ 是唯一的，并且可以有效确定。因此，我们可以通过尝试所有P和所有 $i \le k$，并检查 $B = Q_{P,\,i} \cdot C_i$，来测试 $\langle A, B\rangle \in E_\Gamma$。

(ii)（概要）首先假设 $V \subseteq U$。存在一个可计算映射ψ： $L(U) \to L(V)$，使得 $\psi(A) \subseteq A$。定理 2^+] 的证明表明，ψ: $\Gamma_{S,U} \to \Gamma_{T,V}$是一个拟等距。在一般情形下，令 $R \subseteq G$ 为一个有限对称集，使得 $(U \cap V) \cup R$ 代数生成 G。如上所述，存在可计算拟等距 ϕ: $\Gamma_{S,U} \to \Gamma_{R,U\cap V}$和 ψ: $\Gamma_{T,V} \to \Gamma_{R,U\cap V}$。存在一个可计算拟等距 θ： $\Gamma_{R,U\cap V} \to \Gamma_{T,V}$: 给定一个顶点 $y \in L(U \cap V)$，令 $x = \theta(y)$为 $L(V)$中的一个顶点，使得 $\psi(x)$到 y的距离至多为 c，其中 c 是上述 ψ 的一个常数。那么 $\theta \circ \phi$就是所需的拟等距。□

10.3. 尺度函数的算法性质。全不连通局部紧群 G 的尺度函数s: $G \to \mathbb{N}^+$ 由 Willis [41] 引入。回顾一下，对于 G 的紧开子群 V 和元素 $g \in G$，定义$m(g, V) = |V^g : V \cap V^g|$，并且

$$s(g) = \min\{m(g, V) : V \text{ is a compact open subgroup}\}.$$

Willis 证明了尺度函数是连续的，其中 $\mathbb{N}^+$ 赋予离散拓扑。他引入了这样的关系：紧开子群 V对 g 是整齐的，并证明这一条件等价于对 g 极小，即 $s(g) = m(g, V)$。M¨oller [25] 使用图论方法证明，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，V 对 g 极小，当且仅当 $m(g^k, V) = m(g, V)^k$。他还推导出“谱半径公式”：对于任意紧开子群 U，有 $s(g) = \lim_k m(g^k, U)^{1/k}$。

下面这个例子广为人知（[43, 例 2]）；我们将其纳入本文，以说明我们的框架足以作为先前研究中针对全不连通局部紧群的可计算性个案方法的一般背景。

例 10.3 （与 Stephan Tornier 合作）。对于 $d \ge 3$，例 T_d的可计算表示中的 Aut(9.10) 的尺度函数是可计算的。

证明。T_d 的自同构 g 恰有以下三种类型之一（见 [9]）：

(1) g 固定一个顶点 v: 此时 $s(g) = 1$，因为 g 保持 v的稳定子，而它是一个紧开子群。(2) g 反转一条边: 此时 $s(g) = 1$, 因为 g 保持这条边两个端点的集合稳定子。(3) g 沿一条测地线平移（它是 T_d 的一个子集，且为度为 2 的齐次树）: 此时 $s(g) = (d-1)^\ell$，其中 ℓ 是长度。为此，对于 $\ell = 1$，可取固定轴上两个相邻顶点的自同构所构成的紧开子群作为极小子群。对于 $\ell > 1$，利用对每个 k 和 $r \in \mathrm{Aut}(T_d)$，都有 $s(r^k) = s(r)^k$；另见 [41]。

以对应于 $g \in \mathrm{Aut}(T_d)$ 的路径作为预言机，预言机图灵机并行搜索 (1) 的见证、(2) 的见证，以及 (3) 中足够长的一段轴，使得平移变得“可见”。随后，它输出相应的尺度值。□

在本节余下部分，固定一个全不连通局部紧群$[T]$的可计算 Baire 表示（乘法，求逆），如定义 G 所述。令 7.1。令 $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\text{comp}}$($G$为由定义 $\mathcal{W}$(G给出的 9.8的 Haar 可计算副本。回顾一下， $\mathcal{W}$的定义域是 $\mathbb{N}$。通过 $\mathcal{W}$，我们可以将 G 的紧开陪集与自然数对应起来。以下结论可直接由推论 9.9得出。

事实 10.4。函数 $m\colon\ [T] \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$（如果第二个参数不是子群，则定义为 0）是可计算的。

研究尺度函数（将其视为一个函数）是否$s\colon\ [T] \to \mathbb{N}$按照定义 6.7 的含义是可计算的，是很有意义的。我们注意到，M¨oller 的谱半径公式和 Willis 的整洁化过程（另见 [43]）都无法按照我们的含义计算尺度。

当且仅当可以用算法判定一个子群是否为极小时，尺度才是可计算的：

事实 10.5。 自然数集 $[T]$ 上的尺度函数是可计算的， $\Leftrightarrow$ 以下函数Φ 按照定义 *6.7*的含义是可计算的：如果 $g \in [T]$ 且 V 是 G的紧开子群，那么 $\Phi(g, V) = 1$ （如果 V是 g的极小子群）；否则$\Phi(g, V)$。 $= 0$

证明。 $\Rightarrow$: 一台以 g 为预言机的预言机图灵机搜索第一个对于 g 而言是极小的 V，并输出 $m(g, V)$。
$\Leftarrow$: 对于预言机 g，给定输入 V，检查 $m(g, V) = s(g)$ 是否成立。若成立则输出 1，否则输出 0。□

接下来我们给出一个限制尺度函数复杂度的事实。若存在一个可计算函数 $\Theta\colon\ [T] \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对于每个 $f \in [T], r \in \mathbb{N}$，都有 $\Theta(f, r) \geq \Theta(f, r + 1)$，则称函数 $\Psi\colon\ [T] \to \mathbb{N}$ 从上方可计算逼近，并且

$$\Psi(f) = k \text{ iff } \lim_r \Theta(f, r) = k.$$

事实 10.6。尺度函数从上方可计算逼近。

证明。令 $\Theta(f, r)$ 为所有 $s \leq r$ 中 $m(f, s)$ 的最小值。 □

11. Closure properties of the class of computably t.d.l.c.groups

本节中的所有可计算表示均为贝尔表示（见定义 7.1），我们通常将全不连通局部紧群 G 具体地视为可计算 Baire 表示。将前文在 $S(\omega$ 的闭子群情形下的记号加以扩展，我们用 $Tree(G)$ 表示这个可计算 Baire 表示所对应的 c.l.c. 树。显然有以下结论。

事实 11.1（可计算闭子群）。设 G 是一个可计算全不连通局部紧群。设 H 是 G 的闭子群（因此 Tree(H) 是 Tree(G) 的子树）。那么 H 通过基于 Tree(H)（它是 c.l.c.）的贝尔表示，亦为可计算全不连通局部紧群，其中运算由 G 限制到 H 上得到。

例如，考虑闭子群 U（F）属于 Aut(T_d)，其中 $d \geq 3$以及 F 是 S_d的子群，由 Burger 和 Mozes 引入 [4]。根据例 9.10 以及前述事实，每个群 U（F）都是可计算全不连通局部紧的。

再举一例，考虑例 $_2$（$\mathbb{Q}_p$）中给出的 SL 的可计算 Baire 表示7.2。令 S 为 T 的闭且局部闭子树，其路径描述形如 $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ 的矩阵（因此 $s = r^{-1}$）。由此得到群（$\mathbb{Q}_p^*$, ·）的可计算 Baire 表示。

例 11.2. 对每个素数 p 和 $n \geq 2$，群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ 都是可计算全不连通局部紧的。

证明。 我们采用嵌入 $F\colon\ GL_n(\mathbb{Q}_p) \to SL_{n+1}(\mathbb{Q}_p)$，它将矩阵 A 扩展为矩阵 B，其中新增的行和列除对角元素外均为零（该对角元素必然等于 $(\det A)^{-1}$）。显然，存在一个闭且局部闭子树 S，它属于 T 在例 7.2 中针对 $n+1$ 所述的闭且局部闭子树，并且满足 $[S] =$ 值域(F)。现在我们应用事实 11.1。 □

另一种仍处于全不连通局部紧群这一类中的构造，是基于连续作用的半直积。在有效情形下，我们使用第 6.2 节意义下可计算的作用。

命题11.3（对可计算半直积封闭）。设G、 H是可计算的全不连通局部紧群。假设 $\Phi\colon\ G \times H \to H$是一个可计算函数，它指定了 G 通过拓扑自同构对 H 的作用。那么，拓扑半直积 $L = G \ltimes_\Phi H$ 是可计算的全不连通局部紧群。

证明。令 T 为由 G 和 H 的树中相同长度字符串的对应分量配对而得到的树，即

$$T = \{\sigma \otimes \tau\colon\ \sigma \in Tree(G) \wedge \tau \in Tree(H)\}.$$

显然， T 是一棵紧致局部闭树。通过自然双射

$$[T] \to [Tree(G)] \times [Tree(H)],$$

可以将 L 的元素写成 $\langle g, h\rangle$ 的形式，其中 $g \in$ [Tree(G)] 和 $h \in$ [Tree(H)]。

根据半直积的标准定义（[33, 第 27] 页），用通常的群论方式表示 G 和 H 的运算，我们有

$$\begin{aligned} Mult(\langle g_1, h_1\rangle, \langle g_2, h_2\rangle) &= \langle g_1 g_2, \Phi(g_2, h_1) h_2\rangle \\ Inv(\langle g, h\rangle) &= \langle g^{-1}, (\Phi(g^{-1}, h))^{-1}\rangle. \end{aligned}$$

这表明乘法和求逆是可计算的，因此为 L 得到了一个可计算 Baire 表示 ([T], Mult, Inv)。 □

接下来的两个闭包性质在相关论文的 [24, 第 11] 节中得到证明。关于局部直积，参见 Wesolek 的 [39, 定义 2.3]。

命题11.4（[24]中的命题11.5）。设（G_i）$_{i\in\mathbb{N}^+}$ 是关于 i一致可计算的全不连通局部紧群，并且对每个 i， U_i 是G_i的关于 i一致可计算的紧开子群。那么 $G = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}^+}$（$G_i$, U_i）是可计算全不连通局部紧群。

其中最困难的是对可计算闭正规子群取商运算封闭。

定理 11.5（ [24]中的定理 11.11）。设 G 是可计算全不连通局部紧的。设 N是 G 的闭正规子群，且 Tree(N) 是 Tree(G) 的可计算子树。那么 G/N 是可计算全不连通局部紧的。

例 11.6. 对每个素数 p 和每个 $n \geq 2$，群 $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{Q}_p)$ 都是可计算全不连通局部紧的。

证明。在例11.2 中，我们得到一个可计算 Baire 表示（T，乘法，求逆）来表示 GL_n（$\mathbb{Q}_p$）。在此表示中，GL_n（$\mathbb{Q}_p$）的中心由对角（$n+1$）$\times$（$n+1$）矩阵构成，这些矩阵的对角线上前 n 个元素相同。因此显然，$Tree$（N）是例11.2中树 S 的一个可计算子树。于是我们可以应用定理11.5。□

12. Uniqueness of computable presentation

如第5.8小节所述，若一个可数结构有一个可计算副本，且它的所有可计算副本都彼此可计算同构，则称该结构为自稳定。我们将这一概念调整到当前的情形。

定义 12.1. 若对任意两个基于树 $T, S \subseteq \mathbb{N}^*$ 的 G 可计算贝尔表示，都存在一个可计算群同胚 Ψ: $[T] \to [S]$，则称可计算全不连通局部紧群 G 为自稳定。注意，Ψ^{-1}也可由[24, 推论 9.3]计算得到。

现在我们给出一个自稳定判据，并通过各种例子展示它的用途。

命题 12.2。可计算的全不连通局部紧群 G 是自稳定的，当且仅当其交半群胚的任意两个 Haar 可计算副本 $\mathcal{W}(G)$ 都可计算同构。

我们只会用到蕴含关系“$\Leftarrow$”。不过，逆向蕴含本身也很有意思，因为它表明，我们所说的自稳定性与采用可计算的 Baire 表示还是基于交半群胚的可计算表示无关。

证明。参见判据 12.2 的 [24], 证明。 □

定理 12.3。可计算的全不连通局部紧群 $\mathbb{Q}_p$ 和 $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Q}_p$ 都是自稳定的。

证明。在例8.12 中，我们得到了交半群胚 $\mathcal{W}(\mathbb{Q}_p)$的一个 Haar 可计算副本 $\mathcal{W}$。回忆一下，$\mathcal{W}$ 的元素表示为陪集$D_{r,\ a} = \pi_r^{-1}(a)$，其中 $r \in \mathbb{Z}$, π_r: $\mathbb{Z}_p \to C_{p^\infty}$ 是核为 $U_r = p^r\mathbb{Z}_p$ 的典范投影，并且 $a \in C_{p^\infty}$。

根据上述判据，只需证明任意一个 $\mathcal{W}(\mathbb{Q}_p)$ 的 Haar 可计算副本 $\widetilde{\mathcal{W}}$ 都与 $\mathcal{W}$ 可计算同构。根据关于 $\mathcal{W}$ 的假设，存在一个同构 Γ: $\mathcal{W} \to \widetilde{\mathcal{W}}$。令 $U_r = \Gamma(U_r)$，其中 $r \in \mathbb{Z}$。我们将构造一个可计算同构 Δ: $\mathcal{W} \to \widetilde{\mathcal{W}}$，使其在集合$\{U_r: r \in \mathbb{Z}\}$上与 Γ 一致。首先，我们证明可以从 r 计算出子群 $U_r \in \widetilde{\mathcal{W}}$。

(a) 若已确定 U_r，$r \geq 0$，则通过搜索 $\widetilde{\mathcal{W}}$ 中指数为 p 的唯一子群，计算 U_{r+1}。

(b) 若已确定 U_r，$r \leq 0$，则通过搜索 $\widetilde{\mathcal{W}}$ 中满足 U_r 在其中的指数为 p 的唯一子群，计算 U_{r-1}。

移位同胚 S: $\mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ 定义为 $S(x) = px$。注意， $B \to S(B)$ 是交半群胚的一个自同构 $\mathcal{W}$。使用例 8.12 （如上所述）中的记号，对每个 $\alpha \in \mathbb{Q}_p$， $r \in \mathbb{Z}$，都有$\pi_{r+1}(S(\alpha)) = \pi_r(\alpha)$，因此对每个 $a \in C_{p^\infty}$，

$$S(D_{r,a}) = D_{r+1,a}. \tag{12.1}$$

我们证明，可以用以子群 U_r 为参数的存在公式在 $\mathcal{W}$ 中定义 S。回想一下，给定一个交半群胚 $\mathcal{W}$，我们用 $L(U)$ 表示子群 U 的左陪集集合。对于 $D \in L(U_r)$，我们将 D^k 记作 $D \cdot \ldots \cdot D$（含有 k 个因子），注意到它是有定义的，并且属于 $L(U_r)$。

断言 12.4. 设 $B \in L(U_r)$ 且 $C \in L(U_{r+1})$。那么

$$C = S(B) \Leftrightarrow \exists D \in L(U_{r+1})\,[D \subseteq B \wedge D^p = C].$$

$\Leftarrow$: 若 $x \in C$，则对某个 $y \in B$ 有 $x = py$，因此 $x \in S(B)$。于是 $C \subseteq S(B)$，从而鉴于 $S(B) \in L(U_{r+1})$，有 $C = S(B)$。
$\Rightarrow$: 设 $x \in C$，则对某个 $y \in B$ 有 $x = S(y)$。令 $y \in D$，其中 $D \in L(U_{r+1})$。那么 $D \subseteq B$。由于 $D^p \cap C \neq \emptyset$，这两个 U_{r+1} 的（左）陪集相同。这就证明了该断言。

我们用它来证明定义在 $\widetilde{\mathcal{W}}$ 上的函数 $\widetilde{S} = \Gamma \circ S \circ \Gamma^{-1}$ 是可计算的。由于 $\Gamma(U_r) = U_r$，$(r \in \mathbb{Z})$， S 在将 U_r 替换为 U_r 后满足该断言。因此，交半群胚 $\mathcal{W}$ 是可计算的，给定 $B \in \mathcal{W}$，$\widetilde{\ }$，我们可以搜索 $\mathcal{W}$，寻找一个如右侧所示的见证 $D \in L(U_{r+1})$，然后输出 $C = S(B)$。所以函数 S 是可计算的。

$\widetilde{\ }$我们分四个阶段构造可计算同构 $\Delta\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W}$。前$\widetilde{\ }$三个阶段构造可计算同构 $L(U_0) \to L(U_0)$，其中$\sim$ $\sim$ $\sim L(U_0) \subseteq \mathcal{W}$ 表示 U_0 的左陪集群。（这个群与 C_{p^∞} 同构，因此这相当于在 C_{p^∞} 的两个可计算副本之间定义一个可计算同构。）最后一个阶段利用 S 是 $\mathcal{W}$ 的自同构这一点，将该同构扩展到 $\mathcal{W}$ 的所有$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$。

对于 $q \in \mathbb{Z}[1/p]$，我们记作 $[q] = \mathbb{Z} + q \in C_{p^\infty}$。我们将 $D_{r,[q]} = \Delta(D_{r,a})$ 定义为 $r \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}[1/p]$

(a) 设 $D_{0,[p^{-1}]}$ 是 $L(U_0)$ 中阶为 p 的元素。(b) 递归地，对于 $m > 0$，设 $D_{0,[p^{-m}]}$ 是$\sim$ $\sim$ $\sim L(U_0)$ 中阶为 p^m 的元素，使得 $(D_{0,[p^{-m}]})^p = D_{0,[p^{-m+1}]}$。(c) 对于 $a = [kp^{-m}]$，其中 $0 \leq k < p^m$ 且 p 不整除 k，令 $\widetilde{D}_{0,a} = (\widetilde{D}_{0,[p^{-m}]})^k$。(d) 对于 $r \in \mathbb{Z} - \{0\}$，令 $D_{r,a} = S^r(D_{0,a})$。

容易验证， $\Delta\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ 是可计算的，并且保持交群胚运算。为验证 Δ 是满射，取 $B \in \mathcal{W}$。对于某个 r，有 $B \in L(\widetilde{U}_r)$。存在最小的 m，使得对于某个 $k < p^m$， $B = (\widetilde{D}_{r,[p^{-m}]})^k$。于是 p 不整除 k，所以 $B = D_{r,[kp^{-m}]}$。

接下来我们讨论 $G = \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Q}_p$的情形。设 $\mathcal{V}$是$\widetilde{\ }$的 $\mathcal{W}(G)$ Haar 可计算副本，该副本在例8.12中得到；再设 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{W}(G)$的另一个 Haar 可计算副本。使用例8.12中的记号，令

$$E_{z,r,a} = g^z D_{r,a} \text{ for each } z, r \in \mathbb{Z}, a \in C_{p^\infty}.$$

我们列出这些 $\mathcal{V}$ 的元素的一些性质，稍后将会用到。注意，通过将 $\mathcal{W}$ 嵌入 $\mathcal{V}$ 并令 $\langle r、\ a\rangle$ 对应于$\langle 0、\ r、\ a\rangle$，我们可以把$E_{z、\ r、\ a}$看作 $U_{r-z} \to U_r$（使用 Fact 8.3之后讨论的范畴记号）。由于 $D_{r+1、\ a} \subseteq D_{r、\ pa}$，我们有

$$E_{z,r+1,a} \subseteq E_{z,r,pa}. \tag{12.2}$$

此外，

$$E_{z,r,0} = g^z U_r = U_{r+z} g^z = (g^{-z} U_{r-z})^{-1} = (E_{-z,r-z,0})^{-1}. \tag{12.3}$$

根据关于 $\mathcal{V}$ 的假设，存在一个交群胚同构 $\Gamma\colon\ \mathcal{V} \to \mathcal{V}$。由于 G 除了 $\mathcal{W}(\mathbb{Q}_p)$ 中已有的紧开子群之外没有其他紧开子群，族 $(U_r)_{r\in\mathbb{Z}}$（其中 $U_r = \Gamma(U_r)$）可通过与前面相同的论证，在 $\mathcal{V}$ 中计算得到。通过检查 $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1}$，即可计算出 $\mathcal{V}$ 中同时为同一个子群的左陪集和右陪集的元素集合 A。$\widetilde{\mathcal{V}}$ 的运算在该集合上诱导出一个 Haar 可计算交群胚 $\widetilde{\mathcal{W}}$。显然，受限映射 $\Gamma = \overline{\Gamma} \mid \mathcal{W}$ 是一个同构 $\mathcal{W} \to \mathcal{W}$。因此，根据 $\mathbb{Q}_p$ 的情形，存在一个可计算同构 $\Delta\colon\ \mathcal{W} \to \mathcal{W}$。

我们将把 Δ 扩展为一个可计算同构 $\overline{\Delta}\colon\ \mathcal{V} \to \mathcal{V}$。以下总结了这一设定：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\overline{\Gamma},\overline{\Delta}} & \widetilde{\mathcal{V}} \\ \subseteq\uparrow & & \uparrow\subseteq \\ \mathcal{W} & \xrightarrow[\Gamma,\Delta]{} & \widetilde{\mathcal{W}} \end{array}$$

经过五个阶段，我们定义一个可计算的族 $E_{z,r,a}$ $(z, r \in \mathbb{Z}, a \in C_{p^\infty})$，并令 $\overline{\Delta}(E_{z,r,a}) = E_{z,r,a}$。和之前一样，记作 $D_{r,a} = \Delta(D_{r,a})$。

(a) 令 $E_{0,r,a} = D_{r,a}$。选择 $F_0 := E_{-1,0,0}\colon\ U_1 \to U_0$。

(b) 通过对 $|r|$进行递归计算 $F_r := E_{-1,r,0}\colon\ U_{r+1} \to U_r$，其中 $r \in \mathbb{Z}$，满足使得对每个 $r \in \mathbb{Z}$都有 $F_{r+1} \subseteq F_r$；根据(12.2)，并且由于 $\mathcal{V} \cong \mathcal{V}$ 通过 $\overline{\Gamma}$，这是可能的。

(c) 对于 $z < -1$，计算 $\widetilde{E}_{z,r,0}\colon\ U_{r-z} \to U_r$ 如下：

$$\widetilde{E}_{z,r,0} = F_{r-z-1} \cdot F_{r-z-2} \cdot \ldots \cdot F_r.$$

(d) 对于 $z > 0$，令 $E_{z,r,0} = (\widetilde{E}_{-z,r-z,0})^{-1}$；这由（12.3）强制实现。

(e) 令 $E_{z,r,a} = E_{z,r,0} \cdot D_{r,a_\circ}$

容易验证，$\overline{\Delta}$ 保持交群胚运算（我们省略形式化细节）。为证明 $\overline{\Delta}$ 是满射，假设给定了 $E \in \mathcal{V}$。那么$\sim E = \Gamma(E_{z,r,a})$，其中 z、r、$a_\circ$ 根据 (12.2)，我们可以假设 $z < 0_\circ$ 那么$\sim E_{z,r,0} = \prod_{i=1}^{-z} E_{-1,r-z-i,0}$，如上所述。因此，令 F_s 表示$E_{-1,s,0}$，我们有$\sim\Gamma(E_{z,r,0}) = \prod_{i=1}^{-z} F_{r-z-i} D_{r-z-i,a_i}$，其中 $a_i \in C_{p^\infty\circ}$

注意，对于每个 $D \in L(\widetilde{U}_r) \cap \widetilde{\mathcal{W}}$ 和 F，都有 $\widetilde{S}(D) = F\cdot D\cdot F^{-1}\colon\ \widetilde{U}_{r+1} \to \widetilde{U}_{r\circ}$ 对于，类似的陈述显然在 $\mathcal{V}$ 中成立；接下来利用 $S = \Gamma\circ S\circ\Gamma^{-1}$，以及 $\overline{\Gamma}\colon\ \mathcal{V} \to \widetilde{\mathcal{V}}$ 是一个同构。由于 $\widetilde{D}_{r+1,\ a} = \widetilde{S}(\widetilde{D}_{r,\ a})$，我们可以得出，对于每个这样的 F，都有 $D_{r+1,\ a}\cdot F = F\cdot D_{r,\ a\circ}$ 我们可以利用这些“准-交换关系”将表达式 $\prod_{i=1}^{-z} F_{r-z-i} D_{r-z-i,\ a_i}$ 化简为

$\sim \quad \sim \qquad \sim \quad \sim \quad \sim \quad \sim \qquad {}_{\sim}E_{z,\ r,\ 0}D_{r,\ b}$，其中某个 $b \in C_{p^\infty}$。因此 $E = E_{z,\ r,\ 0}D_{r,\ b}D_{r,\ a}$。这表明 E 属于 $\overline{\Delta}$ 的值域，正如所要求的那样。□

References

[1] SI Adjan。关于某些无挠群。 *Mathematics of the USSR-Izvestiya* 5 3 475, , ( ): . .[2] H. Becker 和 A. 1971 1 5 Kechris。 *The descriptive set theory of Polish group actions*，第 232 1996 3 卷。剑桥大学出版社，。B. Bowditch。唯一乘积性质的一种变体。 [3] *Journal of the London Mathematical Society* 62 3 813 826, 2000 , ( ): – . 2

[4] M. Burger 和 S. Mozes。树上的群作用：从局部结构到整体结构。 *Publications Mathématiques de l'IHÉS,* 92 113 150, 2000 11 : – . P.-E. [5] Caprace 和 N. Monod。将局部紧群分解为简单部分。载于 *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*，第 150 卷，页码 97 128 2011 8 1 – 。剑桥大学出版社，。W. Carter。无挠非唯一乘积群的新例 [6] 子。 *Journal of Group Theory* 17 3 445 464, 2014 1 , ( ): – . . 3

[7] W. Craig 和 P. Linnell。唯一乘积群与同余子群。 *Journal of Algebra and Its Applications* 21 02 2250025, 2022 1 , ( ): . . 3

[8] A. Nies（编）。Logic Blog 2020。可从 https://arxiv.org/pdf/ 2101 09508 2020 3 2, 8 1 . .pdf 获取，。. . A. [9] Figa-Talamanca 和 C. Nebbia。 *Harmonic Analysis and Representation Theory for Groups Acting on Homogenous Trees* 162 ，第 卷。剑桥大学出版社，1991。10.3[10] G. Gardam。群环单位猜想的一个反例。 *Annals of Mathematics* 194 3 967 979, 2021 1 4, 1 6, 1 7, 1 , ( ): – 8

[11] H. Glockner。p-进李群上的尺度函数。 *manuscripta mathematica*, 97 2 205 215, 1998 5 ( ): – . .[12] P. Higgins。 *Categories and groupoids* 1971 8 4 。Van Nostrand Reinhold，。. G. [13] Hjorth 和 A. Kechris。博雷尔等价关系与可数模型的分类。 *Annals of pure and applied logic* 82 3 221 272, 1996 3 3 , ( ): – . . I. Kaplansky。“环论中的问题”再探。 [14] *The American Mathematical Monthly* 77 5 445 454, 1970 , ( ): – . 1

[15] C. Kapoudjian。Neretin 群的球面形变的简单性。载于 *Annales de l'institut Fourier* 49, 1225 1240, 1999 5 ，第 卷，页码 – 。. 5

[16] A. S. Kechris。 *Classical descriptive set theory* 156 ，第 卷。施普林格纽约出版社，1995。7

[17] A. S. Kechris、A. Nies 和 K. Tent。拓扑群同构的复杂性。 *The Journal of Symbolic Logic* 83 3 1190 1203, 2018 3, 3, 3 2, 8 1 , ( ): – . . . B. Kron 和 R. Moller。拓扑群的凯莱 [18] 图类比。 *Mathematische Zeitschrift* 258 3 637 675, 2008 10 2, 10 , ( ): – . . . 2

[19] P. La Roche。有效伽罗瓦理论。 *The Journal of Symbolic Logic* 46 2 385 392, , ( ): – . . .[20] M. 1981 2 3, 5 Lawson。 *Inverse semigroups: the theory of partial symmetries*。世界科学出版社，1998。8 1[21] I Lewin。关于群环中的零因子的一则注记。 *Proceedings of the American Mathematical Society* 31 2 357 359, 1972 1 , ( ): – . . 3

[22] Y. Matijasevic。可枚举集是丢番图的（俄语）。 *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 191 279 282, 1970 11, 1970 5 6 : – .《苏联数学通报》中的译文，第 卷。. Y. Matijasevic。。麻省理工学院出版社，剑桥，。. . [23] *Hilbert's Tenth Problem* 1993 5 6

[24] A. Melnikov 和 A. Nies。可计算的全不连通局部紧群（完整版）。可从 arxiv.org/pdf/2204 2, 11, 11 09878 2022 5, 5 6, 6 . .pdf 获取，。. . . . 4, 11 5, 12 1, 12 . . R. Moller。通过图与置换研究全不连通局部紧群的结构理论。 [25] *Canadian Journal of Mathematics*, 54(4):795–827, 2002。10.3

[26] A. Nies、P. Schlicht 和 K. Tent。粗群，以及寡形群的同构问题。 1
Journal of Mathematical Logic 2150029, 2021 3 2, 3 3, , page . . . . . [27] D.
3 7, 3 8, 8
S Passman。 *The algebraic structure of group rings* 2011 1 1。Courier
[28]
Corporation, 。. A. Pauly。表示空间理论的拓扑方面。 *Computabil-*
ity 5 2 159 180, 2016 5 , ( ): – . .
3
[29] V. Platonov 和 A. Rapinchuk。 *Algebraic groups and number theory*。Academic
Press, 1993。7[30] S Promislow。一个无挠非唯一乘积群的简单例子。 *Bulletin*
of the London Mathematical Society 20 4 302 304, 1988 1 , ( ): – . .
3
[31] J. Raimbault、S. Kionke 和 N. Dunfield。弥散群的
几何方面。*Documenta Mathematica*, 2016。1.1[32] E. Rips 和 Y. Segev。不具有唯一乘积性质的无挠群。 *Journal*
of Algebra 108 1 116 126, 1987 1 , ( ): – . .
3
[33] D. Robinson。
A course in the theory of groups 1988 8 2, 11 。Springer–Verlag, 。. C.
[34] *Coarse Geometry of Topological Groups*
Rosendal。 。剑桥数学丛书。剑桥大学出版社, 2021 3 。M. Schroder。可
[35] *Handbook of Com-*
容许表示空间与 qcb 空间。载于 *putability and Complexity in Analysis* 305 346 2021 5 ,
3
页码 – 。Springer, 。. [36] R. Smith。原有
限群的有效方面。 *The Journal of Symbolic Logic*, 46 04 851 863, 1981 2 3, 5 ( ): – . . .
3
[37] A. Strojnowski。关于唯一乘积群的一则注记。
Communications in Algebra 8 3 231 234, , ( ): – . .[38] D. Van Dantzig。论拓
1980 1 1
扑代数。iii. 布劳威尔群与康托尔群。 *Compositio Mathematica* 3 408 426, 1936 5 1 , : – . . P. Wesolek。初等
[39] *Proceedings of*
全不连通局部紧群。*the London Mathematical Society* 110 6 1387 1434, 2015 5, 5 , ( ): – . .
7, 11
[40] P. Wesolek。全不连通局部紧群导论。
Preprintof a book, *people. math. binghamton. edu/ wesolek/ mathdocs/ TDLC_ Groups. pdf*, 2018 10 2。. [41] G.
Willis。全不连通局部紧群的结构。 *Mathema-*
tische Annalen 300 1 341 363, 1994 10 , ( ): – . .
3, 3
[42] G. Willis。全不连通群上尺度函数的更多性质。
Journal of Algebra 237 1 142 164, 2001 5 6 , ( ): – . . G. Willis。计算全不连通局部紧群上端同态的尺度。
[43] *Axioms* 6 4 27, 2017 5 6, 10 2, 10 3, 10 3 , ( ): . . . . . J. Zielinski。局部 Roelcke 预紧波兰群。
[44] *Groups Geometry and Dy-* , , , ( ): – .
namics 15 4 1175 1196, 2021 3
[45] B. Zimmermann。关于亨茨施-温特流形。 *Monatshefte für Mathematik*, 110 3
321 1 6 ( ): –327, 1990。.