arXiv:2302.11902v1 [cs.GT] 23 Feb 2023

论价格诱导的极小极大匹配

Christoph D¨urr* Mathieu Mari† Ulrike Schmidt-Kraepelin‡

2023年2月24日

摘要

我们研究一个自然的组合定价问题，其中买家依次到达且预算相同。每位买家恰好对一对物品感兴趣，并且当且仅当到达时这两件物品仍可购买，且它们的价格之和不超过其预算时，才会购买这对物品。卖家的目标是为物品定价，使买家以对抗性顺序到达时，交易数量最大化。

形式上，给定一个无向图，其中顶点代表物品，边代表买家。为顶点设定价格后，总价格超过买家预算的边会被驱逐。买家的任何到达顺序都会产生一组交易，这些交易在该子图中构成一个极大匹配；而对抗性到达顺序则会产生一个最小极大匹配。为衡量定价策略的表现，我们将此类匹配的大小与原图中的最大匹配大小进行比较。Correa 等人 [在 IPCO 2022] 中证明，任何定价策略所能保证的最佳比率介于 $[1/2, 2/3]$之间。我们对该问题的贡献有两方面：首先，我们给出若干种刻画，描述哪些子图可能由定价方案产生。其次，在此基础上，我们证明了一个改进的上界 $3/5$和一个下界 $1/2 + 2/n$，其中 n 表示物品数量。

1 引言

设想有一位卖家，拥有一组 V物品，需要为每个 $v \in V$选择价格 $p_v \geq 0$ 。有些买家有意购买恰好两件物品，前提是总价不超过其预算，且这两件物品都尚未售出。我们关注预算相同的买家，并不失一般性地假设预算为 1。卖家知道买家偏好的商品组合，但不知道他们的到达顺序。目标是选择价格，使最坏情况下的交易数量最大化，也就是在买家最差的到达顺序下使交易数量最大化。在更一般的设定中，FGL15a; Cor+22]研究了买家估值为随机变量的情形 [。

*法国国家科学研究中心、索邦大学´、LIP6，法国。C.D. 部分工作是在其隶属于法国国家科学研究中心、智利大学数学建模中心期间完成的。研究经费由法国国家研究署项目 ANR-19-CE48-0016、数学建模中心项目 ANID FB210005、ANID-智利卓越中心 BASAL 资金、德国研究联合会项目 BR 4744/2-1、欧洲研究理事会（ERC）项目 639945（ACCORD）以及 ERC CoG 项目 772346（TUgbOAT）资助。

†华沙大学和 IDEAS-NCBR，波兰

‡智利大学数学建模中心，智利。部分工作是在其隶属于柏林工业大学（德国）期间完成的。

这个问题可以用匹配问题来正式表述。给定一个图$G = （V， E）$，其顶点对应物品，边对应买家。[1] 任何可行的交易集合都对应图中的一个匹配，即一组边 $M \subseteq E$，其中任意两条边都没有共同端点。基数最大的匹配称为最大匹配。若一个匹配无法通过添加任何边来扩展，则称为极大匹配；基数最小的极大匹配称为极小极大匹配。图的最小最大比率是极小极大匹配与最大匹配的基数之比。

众所周知，任意图的最小最大比率至少为 $1/2$，因为任意极大匹配的大小至少是最大匹配的一半。最大匹配可以在多项式时间内求出，但求解极小极大匹配是 NP困难的 [YG80], ，并且在强唯一游戏猜想 [DMM21]成立的条件下，即使是将其近似到优于 $1/2$ 的任意因子也很困难。

对于图顶点的给定价格 p，端点上的价格总和不超过 1 的边集记为 $E_p = \{uv \in E : p_u + p_v \leq 1\}$。我们用 $G_p = (V, E_p)$ 表示限制在这些边上的图。若存在价格 p 使得 $S = E_p$，则称边集 $S \subseteq E$ 为可保留的。目标是选择价格，使得G_p 中的极小极大匹配大小尽可能大。[2] 通过与原图 G中的最大匹配进行比较来衡量性能。可达到的最大比率称为给定图的竞争比。我们的主要目标是确定所有图中的最小竞争比，也称为该问题的竞争比。尽管 Correa 等人 [Cor+22]证明竞争比属于 $[1/2, 2/3]$，我们对该问题的贡献如下：

- 在第2节中，我们给出了可保持边集的若干种刻画。
- 在第3节中，我们将上界改进为 3/5。
- 在第4节中，我们对下界作了小幅改进。具体而言，我们证明竞争比至少为 $1/2 + 2/n$，其中 n是节点（物品）的数量。

相关工作

标价机制 我们的问题属于组合拍卖中标价机制设计的研究范畴。一般而言，买家可能有意购买物品的任意子集，这类子集通常称为商品组合。标价机制为物品设定价格，买家则支付其所获分配商品组合中各物品价格之和。尽管标价机制通常无法实现社会福利最大化，但其本质上具有透明性。许多研究聚焦于瓦尔拉斯均衡是否存在，即是否存在一组物品价格，使得每位买家都能获得效用最大化物品集合 [Arr51；Deb51]。与此不同，我们假设参与者依次到达，因此不要求满足无嫉妒性。

与我们最接近的模型由 Feldman 等人 [FGL15b] 提出，最近又由 Correa 等人 [Cor+22]重新研究。在该模型中，买家按照最坏情况顺序到达，但买家对商品组合的估值是随机抽取的。Correa 等人 [Cor+22] 证明了

[1]我们指出，一般而言，两个买家可能会请求同一对物品，这意味着 G 可能包含平行边。不过，由于所有买家的预算相同，我们可以不失一般性地假设 G 是简单图。[2]在拍卖文献中，通常的目标是最大化（最坏情况下）收取的价格之和。在我们的设定中，这与我们的目标实质上等价，因为我们可以确保所有价格都任意接近 $1/2$。

存在一组价格，能够保证达到任意分配机制（不一定是标价机制）所能实现的最优社会福利的 $1/(d+1)$-近似，其中 d 表示任意买家具有正估值的最大捆绑商品的规模。我们的设定是他们模型的一个特例：令 $d=2$，并考虑买家的估值是单一意向的（即恰好对一个捆绑商品具有正估值）且为确定性估值。

另一个相关且经过充分研究的问题是图定价问题。与我们的设定类似，买家有意购买大小为二的商品组合；然而，一个关键假设是物品的供给无限（即数字商品），且买家的预算可能各不相同。Balcan 和 Blum [BB06] 证明，存在一种高效算法，可为最优定价方案提供 4 倍近似。之后，Lee [Lee15] 证明，假设唯一博弈猜想成立，该问题无法通过小于 4 的常数近似。Friggstad 和 Mahboub [FM21] 研究了有限供给下的图定价问题，但他们的设定与我们的假设不同：买家并非按最坏情况顺序到达。

极小极大匹配 寻找大小最小的极大匹配（即极小极大匹配）是一项众所周知的难题，长期以来的研究成果充分证明了这一点：Yannakakis 和 Gavril [YG80] 证明，极小极大匹配问题是 NP困难，即使在平面图或最大度为 3 的二分图中也是如此。此外，该问题在平面二分图、平面三次图 [HK93], 、 k 正则二分图[DET14]中仍然是 NP困难。相比之下，存在一种适用于串并联图的多项式时间算法[RP88]。

关于近似，Gotthilf 等人 [GLR09] 证明存在一个 $2-c\frac{\log(n)}{n}$ 近似算法。然而，这基本上是紧的，因为在一般图中，该问题难以通过小于 2 的常数进行近似 [DLM19]（假设唯一博弈猜想成立）；即使在二分图中也是如此 [DMM21]（假设唯一博弈猜想的两种加强版本中的任意一种成立）。

2 可保持集合

本节给出可保持边集的若干种刻画。换言之，我们要探究对于哪些边集 $S\subseteq E$，存在价格 p，使得 $uv\in S$ 当且仅当 $p(u)+p(v)\leq 1$。

对于给定的边集 $S\subseteq E$，交替游走是顶点 $v_0,v_1,\ldots,v_\ell$组成的序列，其中 $v_\ell=v_0$, ℓ 为偶数，并且对于每个 i，$(v_i,v_{i+1})\in E$；当且仅当 i 为奇数时，它属于 S。注意，游走中一条边可以出现多次，如图1所示。一个标准论证表明，如果存在交替游走，那么就存在一条交替游走，其中每条边至多出现两次（每个遍历方向各一次）。[3] 每条边至多出现一次的交替游走称为交替圈。我们对可保持边集的第一个刻画基于交替游走。

引理 1. 集合 $S\subseteq E$ 是可保留的，当且仅当不存在相对于 S 的交替游走。

证明。证明采用一个过程：给定 S，该过程要么生成价格 p，使得$E_p=S$；要么生成相对于 S 的交替游走。对于这个过程，令 $\epsilon>0$

[3] 如果某条交替游走沿同一方向两次经过一条边，那么我们可以将这条游走分解为两条规模更小的交替游走。反复将其限制为其中一条游走，最终即可证明该断言。

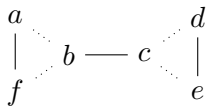

图1：边集 $\{af, bc, de\}$ 不可保留，因为 $(a, b, c, d, e, c, b, f, a)$ 是相对于该集合的一条交替游走。[Cor+22] 中使用了这个图来证明竞争比至多为 $2/3$。

取一个足够小的常数，例如，$1/(2|V|)$即可。初始化一个计数器 $i = 0$。尽可能重复以下步骤。

- 如果存在一个顶点 u，其关联的边全都属于 S，则令 $p(u) = i \cdot \epsilon$；将 i加一；从 G中移除 u及其关联的边。
- 如果存在一个顶点 u，其关联的边全都不属于 S，则令 $p(u) = 1 - i \cdot \epsilon$；将 i 加一；从 G中移除 u及其关联的边。

我们分两种情况讨论。如果该过程结束时图为空，我们断言 $E_p = S$。事实上，顶点 u 在获得价格 $p(u) = i \cdot \epsilon$ 的那一刻，与顶点 v 相连；这些顶点最终获得的价格都严格小于 $1 - i \cdot \epsilon$，这是因为 i增加了。因此，$p(u) + p(v) < 1$，符合要求。另一方面，顶点 u 在获得价格 $1 - i \cdot \epsilon$的那一刻，只与顶点 v相连；这些顶点最终获得的价格都严格大于 $i \cdot \epsilon$，因此 $p(u) + p(v) > 1$，符合要求。

如果过程结束时得到的图 G非空，我们断言其中包含一条交替游走。通过复制 G 中的每个顶点 u，得到有向图 H from G，并针对 G 中的每条边 (u, v)，若 (u, v) 属于 S，则生成弧 (u, v')、(v, u')；若 (u, v) 不属于 S，则生成弧 (u', v)、(v', u)。该有向图的入度和出度均为正。通过在每个顶点选取一条入弧和一条出弧，所选的弧构成一组有向环。每个有向环都对应于 G 中的一条交替游走。

□

我们指出，交替游走的对称性意味着 S 是可保留集合，当且仅当其补集 $V \setminus S$ 是可保留集合。

前面的证明隐含地给出了可保留集合的另一种刻画。证明中描述的过程按照某种顺序处理顶点。如果 S 是可保留集合，那么每个已处理的顶点 v 都具有以下性质：在与 v 相邻且尚未处理的顶点中，要么所有顶点都通过 S 中的一条边与 v 相连，要么一个也没有。

推论 1. 集合 S 是可保留的，当且仅当顶点上存在一个全序 $\prec$和一个子集 $R \subseteq V$，使得每条满足 $u \prec v$ 的边 $uv \in E$ 属于 S，当且仅当 $u \in R$。

将顶点按全序分组，在 R 中的顶点与 R 外的顶点之间交替排列，我们可以直接得到可保留集合的另一种刻画。图 2 展示了示意图。

推论 2. 集合 S 是可保留的，当且仅当存在一个将顶点划分为集合 A_1、A_2、.....、A_ℓ 的有序划分，使得边 uv 属于 S 当且仅当 $\min\{i, j\}$ 为奇数，其中 i、j 满足 $u \in A_i$、$v \in A_j$。这些集合的顺序很重要，因此称为有序划分。为方便起见，我们假设 ℓ 为偶数，并允许其中一些集合为空。

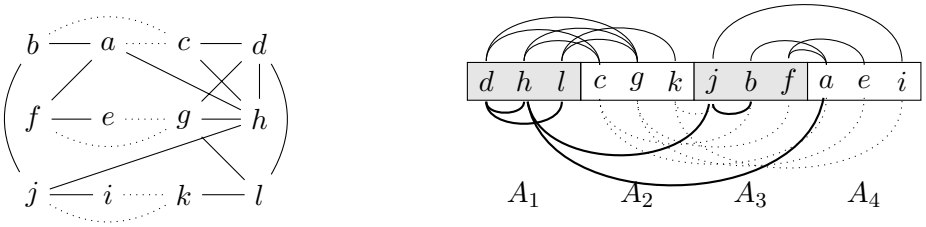

图 2：右侧的有序划分证明了实线边集合是可保留的，这可由推论 2 得证。奇数索引集合以灰色表示。

在某些情况下，我们可以简化有序划分，使其定义相同的可保留集合。假设对于划分 A_1、A_2、.....、A_ℓ，存在某个 $1 < i < \ell$ 使得 $A_i = \emptyset$。那么，将集合 A_{i-1}、A_i、A_{i+1} 替换为单个集合 $A_{i-1} \cup A_{i+1}$，不会改变其所定义的可保留集合。

证明我们下界的算法（第4节）通过从所有边开始并迭代地驱逐越来越多的边，构造一个可保留边集合。可以使用前一个推论完成这种构造。

我们先定义以下边的动态标记。边可以标记为已驱逐、确定保留或暂时保留。我们定义一种操作，称为对给定顶点集 B进行细化，该操作会改变边标签。初始时，所有边都暂时保留。对集合 B 进行细化时，边标签按如下方式改变。

- 两端点都在 B 中的暂时保留边 uv 将被驱逐，
- 没有端点在 B 中的暂时保留边 uv 将确定保留，
- 所有其他边的标签保持不变。

注意，对于给定的顶点集，边标签取决于细化的顺序。例如，如果一条边的两个端点都属于 B，而没有端点属于 C，那么先按 B 细化，再按 C 细化，会将这条边剔除。然而，先按 C 细化，再按 B 细化，则一定会保留这条边。

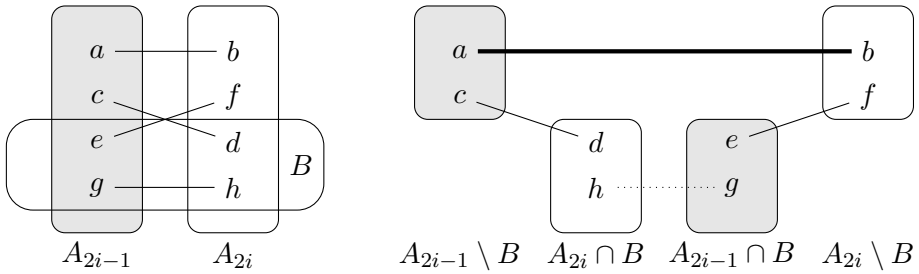

图3：经过集合 B 的一次细化后，左侧的两个集合被右侧的四个集合取代。奇数索引集合带有灰色背景。粗边被永久保留，虚线边被驱逐，图中其余所有边均被暂时保留。

引理 2. 边集 S 是可保留的，当且仅当存在一个顶点集序列 $B_1,\ldots,B_b$，使得按这些集合进行细化后，S 由所有暂时保留和确定保留的边组成。

证明。我们先证明该命题的反向，并使用推论 2 对可保留边集的刻画。我们需要说明如何通过顶点集 B 进行细化来更新有序划分，使边标签符合要求。对于给定的有序划分 $A_1,\ldots,A_\ell$，我们按如下方式标记边。对于一条边 $uv \in E$，令 j,k 满足$u \in A_j, v \in A_k$。不失一般性，假设 $j \le k$。如果 j 为偶数，则该边被驱逐。如果j 为奇数且 $k = j+1$，则该边被暂时保留。但如果 j 为奇数且 $k = j$ 或 $k \ge j+2$，则该边被确定保留。在图 2 右侧，虚线边表示被驱逐的边，细实线边表示暂时保留的边，粗实线边表示确定保留的边。

上述定义的边标签有一种特殊情况。在第一次细化之前，我们有平凡划分 $A_1 = V$，但将所有边都标记为暂时保留。

经过对集合 B 进行第一次细化后，我们得到划分 $A_1 = V \setminus B, A_2 = B$。边按要求标记：$A_1$ 内的边确定保留，A_1 和 A_2 之间的边暂时保留，而 A_2 内的边则被驱逐。

现在，设 $A_1,\ldots,A_\ell$ 是通过之前进行的若干次细化得到的一个有序划分，并考虑按顶点集 B 进行细化。我们按如下方式更新划分。假设 ℓ 为偶数。对于每个 $1 \le i \le \ell/2$，我们将 2 个集合 A_{2i-1}, A_{2i} 替换为 4 个集合 $A_{2i-1} \setminus B, A_{2i} \cap B, A_{2i-1} \cap B, A_{2i} \setminus B$（按此顺序），见图3。

设 $uv \in E$ 是任意一条边，且 j,k 满足 $u \in A_j, v \in A_k$。不失一般性，我们假设 $j \le k$。令 j', k' 分别为替换后 u, v 所属集合的索引。

注意到 j 和 j' 的奇偶性相同，k 和 k'也一样。

这已经意味着，如果 uv 被驱逐，那么 j 就是偶数，j'也一样，因此 uv 仍被驱逐。

如果 uv 被确定保留，那么 j 为奇数，而 k 要么是 j，要么至少是 $j+2$。若是$k = j$，那么替换后，我们要么有 $k' = j'$（如果两个端点都属于 B，或都不属于 B），要么有 $k' = j' + 2$（如果恰有一个端点属于 B）。两种情况下，这条边仍被确定保留。同样，如果 $k \ge j+2$，那么替换后我们仍有$k' \ge j' + 2$，因此这条边仍被确定保留。

如果 uv 被暂时保留，那么 j 为奇数，并且 $k = j+1$。我们需要考虑4种情况，具体取决于 u 是否属于 B 以及 v 是否属于 B。这些情况如图3所示。

如果两个端点都属于 B（图3中的边 gh），则有 $j' = k' + 1$。因此，替换前 u 属于一个索引较小的集合，而现在 v 属于一个索引更小的集合。由于这个较后的索引是奇数，该边会被驱逐。

如果没有端点属于 B（图3中的边 ab），则有 $k' = j' + 3$。因此，该边确定保留。

在剩下的另外两种情形中（图3中的边 cd 和 ef），$k' = j' + 1$，且该边仍暂时保留。

这证明，对有序划分的更新会产生所需的边标记。因此，保留边的集合是可保留的。

还需证明证明的另一个方向。给定一个有序划分，我们要证明存在一个顶点集序列，通过细化得到这个划分。只需证明一个步骤即可。也就是说，给定一个有序划分 $C_1,\ldots,C_\ell$（不失一般性地假设 C_1 是 2 的幂），

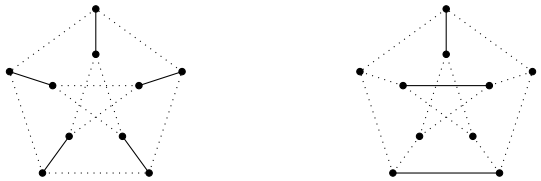

图 4：彼得森图中的一个最大匹配和一个极小极大匹配。

我们可以构造一个有序划分 $A_1, \ldots, A_{\ell/2}$ 和一个顶点集 B，使得用 B 细化 A 后得到 C。只需定义 $B = \bigcup_{i=1}^{\ell/4} C_{4i-2} \cup C_{4i-1}$ 和 $A_i = C_{2i-1} \cup C_{2i}$ 即可。考察细化的定义即可证明这一结论。 □

3 上界

本节中，我们证明了问题竞争比的一个改进上界。为此，我们利用了通过交替游走对可保留边集的刻画（引理 1）。

命题 1. 设 G 为彼得森图。在 G 中，极小极大匹配的大小为 3，且不存在任何价格 $p : E \to [0, 1]$ 使得 G_p 中的极小极大匹配大小大于 3。因此， G 的竞争比为 $3/5$。

证明. 我们证明，在彼得森图中，该比率为 3/5。该图中存在一个大小为 5 的最优匹配（见图 4），我们将证明，该算法无法选出一个可保留边的子集，使得其导出子图中的极小极大匹配大小为 4。

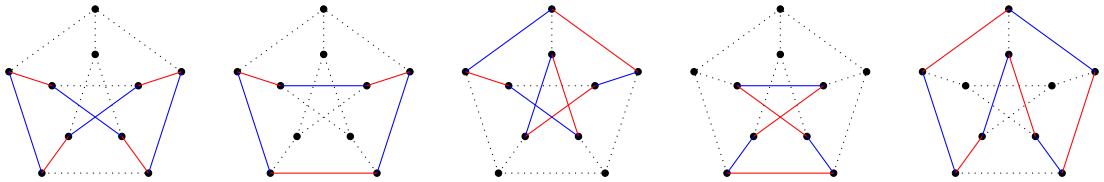

图 5：除旋转外的全部 5 个偶长度环。

证明采用该问题的 0-1 整数规划表述，并通过求解器运行该表述来验证其不可行性。

我们想判断是否存在一个边集 S，具有以下性质：

- S 可保留。
- S 存在一个大小为 4 的匹配。
- S 中的每个大小为 3 的匹配都可以扩展为大小为 4 的匹配。

存在这样的集合 S，意味着图在边集 S 上限制后的每个极小极大匹配的大小至少为 4。因此，如果不存在具有这些性质的集合 S，那么彼得森图的比率至多为 $3/5$ 。

我们为每条边 e 引入一个二元变量 x_e，使得 x 是 S 的特征向量。为确保 S 可保留，我们采用涉及交替游走的刻画。彼得森图中至少有 25 个偶长度环，如图 5 所示（旋转视为相同）。对于每个环，记 A、B 为其交替取出的边集。我们需要确保 S 沿该环不呈交替排列，因此需要同时排除 $A \subseteq S$ 和 $B \cap S = \emptyset$，以及 $B \subseteq S$ 和 $A \cap S = \emptyset$。记 $k = |A| = |B|$，我们写出约束

$$1 - k \leq \sum_{e \in A} x_e - \sum_{e \in B} x_e \leq k - 1.$$

为了强制 S 存在一个大小为 4 的匹配，我们为每个大小为 4 的匹配M 引入变量 y_M。我们要求 $\sum y_M \geq 1$，并添加约束，使得 $y_M = 1$ 蕴含 $M \subseteq S$。具体而言，对于每个大小为 4 的匹配 M，我们添加约束

$$\sum_{e \in M} x_e \geq 4 y_M.$$

最后，我们为每个大小为 3 的匹配 M 引入一个变量 z_M，其含义如下：若 $M \subseteq S$，则 $z_M = 1$。因此，我们添加以下约束

$$\sum_{e \in M} x_e \leq 2 + z_M$$
$$\sum_{e} x_e \geq z_M,$$

其中，第二个求和遍历所有满足 $M \cup \{e\}$ 为匹配的边 $e \notin M$。

我们使用标准的整数线性规划求解器，证明上述线性规划不存在整数解。这个实例非常小（250 个变量，431 个约束），因此 GLPK 求解器能在一秒内给出答案。源代码可在 https://www.lip6.fr/Christoph.Durr/pricing/petersen.py 找到。

请注意，无需证明彼得森图只包含图 5 所示的那 25 个偶长度环。事实上，即使我们遗漏了一些游走，线性规划也只会是一个松弛。而这并不会削弱求解器对不可行性的证明。

□

4 下界

设 $G = (V, E)$ 为给定的图，M^* 为 G中的一个最大匹配。我们知道，G 中每个极小极大匹配的大小至少为 $|M^*|/2$。此外，存在使这一不等式取等的图，例如长度为 3 的路径。本节将证明，总是可以将图限制在一个特定的可保留边集内，并得到一个大小严格更大的极小极大匹配。

命题 2. 对于每个图 $G = (V, E)$，都存在价格 $p\colon E \to [0, 1]$，使得 G_p中的极小极大匹配大小至少为 $(1/2 + 2/n)|M^*|$，其中 M^*是 G中的一个最大匹配。

这一结果有两个不足。首先，我们无法将其加强为常数下界。其次，即使证明是构造性的，也需要计算多个极小极大匹配。由于这是一个 NP 困难问题，因此引出了这样一个问题：能否在多项式时间内计算出这些价格?

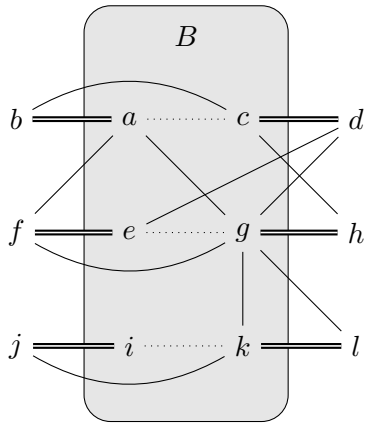

图6：第4节算法示意图。匹配 M^* 用双线表示，匹配 M 用虚线表示。

证明。我们不直接构造价格，而是定义如下细化算法，该算法利用了引理 2 对可保留边集的刻画。算法首先将所有边标记为暂时保留，并固定一个最大匹配 M^*。稍后我们将证明，在算法的整个执行过程中， $M^* \subseteq S$，其中 S 按照引理 2 中的定义，即为暂时保留边和确定保留边的集合。算法重复执行以下步骤，示例见图6。

- 为图 $H = (V, S)$ 计算一个极小极大匹配 M。
- 如果 $M > |M^*|/2$，则任务完成并停止该过程。
- 否则，考虑 M 与 M^* 之间的对称差。它由一组长度为 3 的路径组成，每条路径包含两个内部节点和两个端点。令 B 为这些路径的内部节点集合，它们恰好是由 M 匹配的所有顶点。
- 通过 B 优化边标签，这会将 S 中两个端点均位于 B 的所有边驱逐。特别地， M 中的所有边都会被驱逐。

根据引理 2， S 始终是可保留的。此外，在每次迭代中，每条边都至少有一个端点位于 B 中，这仅仅是因为 M 是极大匹配。因此，在任意时刻，边要么被驱逐，要么被暂时保留，但绝不会被确定保留。

现在我们论证，在算法的整个执行过程中， $M^* \subseteq S$ 。在每次迭代中， B 由长度为 3 的路径的内部节点组成，其中 M^* 中的边构成外部边。因此， M^* 中的每条边恰好有一个端点位于 B 中，因而会暂时保留。

因此， H 中的任何极小极大匹配的大小至少为 $|M^*|/2$，并且在终止后，其大小至少为 $|M^*|/2 + 1 \geq (1/2 + 2/n)|M^*|$。

还需要论证该算法最终会终止。由于算法在每次迭代中都会驱逐一个大小至少为 $|M^*|/2$ 的极小极大匹配，因此该过程会在 $O\left(\frac{|V|^2}{|M^*|}\right)$ 次迭代后终止。

□

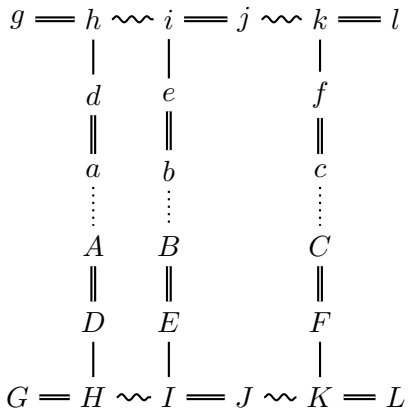

图 7：唯一的最大匹配 M^* 以双线表示。在第一次迭代中，算法收到一个大小为 7 的极小极大匹配 M，以 4 条波浪线和 3 条虚线表示。随后，算法通过集合 $\{a, b, c, A, B, C\}$进行细化。在第二次迭代中，算法收到一个大小为 6 的极小极大匹配，以实线表示；此时这些边均已确定保留。所得图的最小最大比率为 $1/2$。

只要 $M > |M^*|/2$ 成立，所介绍的算法就会停止。有人或许会想知道，该算法能否尽可能地继续驱逐边。更确切地说，该算法仍会通过对称差 $M \Delta M^*$ 中长度为三的路径的内部节点进行细化，但会忽略更长的交替路径。我们将其称为扩展细化算法。

遗憾的是，这种算法无法保证改善最小最大比率。虽然细化策略会保留最优匹配 M^*，但或许令人意外的是，极小极大匹配的大小甚至可能降至 $1/2|M^*|$。我们在图 7 中讨论了这样一个例子。

5 最后的讨论

我们研究了一个由在线组合拍卖中的标价机制所引出的匹配问题。具体而言，我们关注该问题的竞争比，即原图中的最大匹配与任意价格诱导子图中的极小极大匹配最大规模之比。为此，我们给出了价格方案所能诱导的子图的四种刻画。基于这些刻画，我们将竞争比的范围从 $[1/2, 2/3]$ 缩小至 $[1/2 + 2/n, 3/5]$。

由于这个问题远未解决，我们认为未来仍有许多值得探索的方向。除了下界与上界之间尚存的差距外，我们还指出，二分图的竞争比可能介于 $1/2 + 2/n$ 和 $2/3$之间，因为我们用于证明上界的彼得森图并非二分图。

此外，我们从组合拍卖中获得的研究动机，在更一般的设定下引出了许多有趣的问题。例如，我们的刻画能否推广到买家预算各不相同的情形，或者买家感兴趣的是大小大于 2 的商品组合的情形?

虽然我们着重研究了是否存在竞争

比良好的定价方案，但另一个独立的问题是，能否始终在多项式时间内找到最优定价方案，即能够使诱导出的极小极大匹配规模（针对每个实例）最大化的方案；如果不能，其近似效果能有多好？我们指出，文献中的许多相关问题都是 NP困难，甚至难以近似。

致谢。作者谨向 Jos´e Correa 致谢，感谢他向我们介绍这一问题并与我们进行了宝贵的讨论。我们还要感谢 Moritz Buchem 和 Roland Vincze，感谢他们围绕这一问题展开了有趣的讨论。

参考文献

[Arr51] Kenneth J Arrow。《经典福利经济学基本定理的扩展》。载于：《第二届伯克利数学统计与概率研讨会论文集》第2卷。1951年，第507–533页。[Deb51] Gerard Debreu。《资源利用系数》。载于：Econometrica（1951年），第273–292页。[YG80] Mihalis Yannakakis 和 Fanica Gavril。《图中的边支配集》。载于：SIAM应用数学杂志38.3（1980年），第364–372页。[RP88] MB Richey 和 R Gary Parker。《串并联图中的最小极大匹配》。载于：《欧洲运筹学杂志》33.1（1988年），第98–105页。[HK93] Joseph Douglas Horton 和 Kyriakos Kilakos。《最小边支配集》。载于：SIAM离散数学杂志6.3（1993年），第375–387页。[BB06] Maria-Florina Balcan 和 Avrim Blum。《商品定价的近似算法与在线机制》。载于：第七届ACM电子商务会议（EC）论文集。2006年，第29–35页。[GLR09] Zvi Gotthilf、Moshe Lewenstein 和 Elad Rainshmidt。《最小极大匹配问题的（2-cnn）近似算法》。载于：第六届国际近似与在线算法研讨会（WAOA）论文集。Springer，2009年，第267–278页。[DET14] Marc Demange、Tınaz Ekim 和 Cerasela Tanasescu。《最小极大匹配的难度与近似》。载于：《国际计算机数学杂志》91.8（2014年），第1635–1654页。[FGL15a] Michal Feldman、Nick Gravin 和 Brendan Lucier。《通过预设价格进行组合拍卖》。英文。载于：第二十六届ACM-SIAM离散算法年度研讨会论文集。工业与应用数学学会，2015年10月，第123–135页。[FGL15b] Michal Feldman、Nick Gravin 和 Brendan Lucier。《通过预设价格进行组合拍卖》。载于：第二十六届ACM-SIAM离散算法年度研讨会论文集（SODA）。2015年，第123–135页。[Lee15] Euiwoong Lee。《通过广义最大有向割研究图定价的难度》。载于：第四十七届ACM理论计算研讨会年度会议论文集（STOC）。2015年，第391–399页。

[DLM19] Szymon Dudycz、Mateusz Lewandowski 和 Jan Marcinkowski。《最小极大匹配的紧确近似比》。载于：第二十届整数规划与组合优化国际会议（IPCO）论文集。2019年，第181–193页。[DMM21] Szymon Dudycz、Pasin Manurangsi 和 Jan Marcinkowski。《二分图上的最小极大匹配及相关问题的紧确不可近似性》。英文。载于：第十九届国际近似与在线算法研讨会（WAOA）论文集，第12982卷。Springer，2021年，第48–64页。[FM21] Zachary Friggstad 和 Maryam Mahboub。《有限供给下的图定价》。载于：第十七届算法与数据结构国际研讨会（WADS）论文集。Springer。2021年，第399–413页。[Cor+22] Jos´e Correa、Andr´es Cristi、Andr´es Fielbaum、Tristan Pollner 和 S. Matthew Weinberg。《在线组合拍卖中的最优商品定价》。英文。载于：第二十三届整数规划与组合优化会议（IPCO）论文集。Springer，2022年，第126–139页。