arXiv:2302.11903v1 [math.AC] 23 Feb 2023

零维概形的微分理论

MARTIN KREUZER、TRAN N. K. LINH 和 LE N. LONG

This paper is dedicated to the memory of Ernst Kunz (1933-2021).

ABSTRACT. 设 $\mathbb{X}$ 是完美域 K上的一个零维概形， $\mathbb{P}^n$ 我们首先~将其齐次坐标环 R 嵌入截断整闭包 $\bar{R}$中。然后，我们利用 K¨ahler 微分模 $\Omega^1_{R/K}$ 到 $\Omega^1_{\bar{R}/K}$ 的相应映射，求得希尔伯特多项式 $\mathrm{HP}(\Omega^1_{R/K})$ 的公式，以及正则性指标 $\mathrm{ri}(\Omega^1_{R/K})$ 的精确上界。此外，我们将这一结果推广为高阶 K¨ahler 微分模的希尔伯特多项式 $\mathrm{HP}(\Omega^m_{R/K})$ 的公式及其正则性指标的上界。接下来，我们给出弱曲线型概形 $\mathbb{X}$ 的一种新刻画，无需计算其消失理想 $I_{\mathbb{X}}$的初等分解即可验证。此外，我们证明了胖点概形 $\mathbb{X}$的 $\Omega^m_{R/K}$ 的希尔伯特多项式的精确公式，从而拓展并解决了先前的部分结果和猜想。最后，我们利用 $\mathbb{X}$及其子概形的 K¨ahler 微分模的希尔伯特函数，刻画 $\mathbb{X}$ 上的均匀性条件。

1. INTRODUCTION

对射影空间 $\mathbb{P}^n$ 中的零维子概形 $\mathbb{X}$，尤其是有限点集的研究，拥有悠久而丰富的历史。该领域所采用的传统工具包括 $P = K[x_0, \ldots, x_n]$ 中 $\mathbb{X}$ 的齐次消失理想 $I_{\mathbb{X}}$、齐次坐标环 $R = P/I_{\mathbb{X}}$、其希尔伯特函数 $\mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(i) = \dim_K(R_i)$，以及 R 的典范模 ω_R。在此前的几篇论文中，作者引入并开始使用 R 的 K¨ahler 微分模 $\Omega^1_{R/K}$，甚至使用整个 K¨ahler 微分代数 $\Omega^\bullet_{R/K} = \Lambda_R(\Omega^1_{R/K})$，以推进这一主题（见 [4], [7], 和 [8]）。

在本文中，我们将这一方法系统化，通过若干新技术对其加以扩展，解决并统一此前的部分结果与猜想，并推导出一些对若干计算任务颇为有用的应用。下面将更详细地介绍各项成果。

在第2节中，我们回顾与完美域 K 上射影空间 $\mathbb{P}^n$ 中的零维概形 $\mathbb{X}$ 相关的一些基本对象，特别是它的齐次消失理想 $I_{\mathbb{X}} \subseteq P = K[X_0, \ldots, X_n]$、齐次坐标环 $R = P/I_{\mathbb{X}}$，以及它的希尔伯特函数 $\mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(i) = \dim_K(R_i)$，其中 $i \in \mathbb{Z}$。我们始终假设 $\mathbb{X}$ 的支撑包含于仿射空间 $D_+(X_0)$ 中，并将其仿射坐标环记为 $S = K[X_1, \ldots, X_n]/I^{\mathrm{deh}}_{\mathbb{X}}$。将 R 的齐次商环与 $S[x_0, x_0^{-1}]$ 等同后，我们引入一种新工具，即将 ~ 嵌入其截断整闭包 $\bar{R} \cong S[x_0]$ 的映射 R。

Date: 2023年2月24日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：13N05；次要分类：13D40、14N05。1

这些技巧在第3节中得到应用，我们在该节引入并研究 K¨ahler 微分模 $\Omega^1_{R/K}$ 及其希尔伯特函数 $\mathrm{HF}^{\Omega^1_{R/K}}$。这里的新结果包括对 $\mathrm{HP}(\Omega^1_{R/K})$ 的描述，以及 $\Omega^1_{R/K}$ 的（希尔伯特）正则性指标 $\mathrm{ri}(\Omega^1_{R/K}) \leq 2\, r_{\mathbb{X}} + 1$ 的一个尖锐界。这里，$r_{\mathbb{X}}$ 是 $\mathbb{X}$ 的正则性指标，也就是说，从该次数起，希尔伯特函数与希尔伯特多项式的值一致（见命题 3.4）。求得 $\tilde{R}$ 的希尔伯特函数和希尔伯特多项式后（见命题 3.7），我们显式构造典范映射 $\Phi : \Omega^1_{R/K} \to \Omega^1_{\tilde{R}/K}$，证明 $\mathrm{Ker}(\Phi)$ 恰为 $\Omega^1_{R/K}$ 的挠子模，并利用它证明我们的第一个主要结果，即公式

$$\mathrm{HP}(\Omega^1_{R/K}) \;=\; \deg(\mathbb{X}) + \dim_K(\Omega^1_{S/K})$$

$\Omega^1_{R/K}$的希尔伯特多项式。

我们在第4节提供了更多工具，以研究挠子模$T\Omega^1_{R/K}$ 以及 $\Omega^1_{R/K}$ 的其他重要子模。由 $\delta(f) = i\, f$ for $f \in R_i$ 给出的欧拉导子 $\delta\colon\ R \to R$ 可导出欧拉形式 $\varepsilon\colon \Omega^1_{R/K} \to R$，它满足 $\varepsilon(dx_i) = x_i$ for $i = 0, \ldots, n$。ε 上的科祖尔复形称为 R 的欧拉 - 科祖尔复形，而 $\varepsilon^{(2)}\colon\ \Lambda^2\Omega^1_{R/K} \to \Omega^1_{R/K}$ 的像称为 $\Omega^1_{R/K}$ 的科祖尔子模 $U_{R/K} = \langle x_i dx_j - x_j dx_i \mid 0 \leq i < j \leq n \rangle$。$\Omega^1_{R/K}$ 的 T 和 $U_{R/K}$ 都包含在 $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ 中（见命题 4.2 和 4.4 ）。如果 $\mathrm{char}(K)$ 为零或 $\geq 2r_{\mathbb{X}}+1$，科祖尔子模等于 $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$；在其他情形下，这两个子模之间的（微小）差异在命题 4.6 中有详细说明。

接下来，我们将第5节中的前述结果应用于高阶 K¨ahler 微分模 $\Omega^m_{R/K}$，其中 $m \geq 1$。回顾 $\Omega^m_{R/K}$ 的表示与计算˜之后（见命题 5.2），我们利用嵌入 $R \hookrightarrow R$ 证明公式

$$\mathrm{HP}(\Omega^m_{R/K}) \;=\; \dim_K(\Omega^m_{S/K}) + \dim_K(\Omega^{m-1}_{S/K})$$

该公式给出了 $\Omega^m_{R/K}$ 的希尔伯特多项式，以及其正则性指标的尖锐上界 $\mathrm{ri}(\Omega^m_{R/K})$ $\leq r_{\mathbb{X}} + m$ （见命题 5.4）。

在最后三节中，我们将这些代数结果应用并加以推广，以刻画和计算概形 $\mathbb{X}$ 的几何性质。第6节考察（弱）曲线型概形，它们由其局部环的极大理想均由单个元素生成这一性质定义。请注意，这略微推广了这样一个条件：这些局部环具有形式 $K[z]/\langle p^k \rangle$，其中有一个不可约多项式 p。特殊情形当然包括光滑概形；已知它们可以由 $\Omega^1_{S/K} = 0$刻画，或等价地，由 $\mathrm{HP}(\Omega^1_{R/K})$ =$\deg(\mathbb{X})$ 刻画（见命题 6.1）。注意，这使我们无需计算 $I_{\mathbb{X}}$ 的初等分解，就能检验 $\mathbb{X}$ 的光滑性。类似地，我们利用 $\Omega^1_{S/K} \neq 0$ 和 $\Omega^m_{S/K} = 0$ （其中 $m \geq 2$）刻画非光滑的弱曲线型概形。等价地，概形 $\mathbb{X}$ 是弱曲线型但不光滑，当且仅当

$$\mathrm{HP}(\Omega^1_{R/K}) > \deg(\mathbb{X}),\ \mathrm{HP}(\Omega^2_{R/K}) = \mathrm{HP}(\Omega^1_{R/K}) - \deg(\mathbb{X}),\ \mathrm{HP}(\Omega^m_{R/K}) = 0 \text{ for } m \geq 3$$

（见命题 6.6）。因此，无需计算初等分解，我们就能通过算法检验 $\mathbb{X}$ 是否为弱曲线型。利用 $\mathbb{X}$ 的局部环的剩余类域的维数，在弱曲线型情形下，我们还可以写出 $\Omega^1_{R/K}$ 和 $\Omega^2_{R/K}$ 的希尔伯特多项式的显式公式（见推论 6.8）。

下一个应用见于第7节，其中我们考察胖点概形 $\mathbb{X}$。它们由形如 $I_{\mathbb{X}} = I_{p_1}^{m_1} \cap \cdots \cap I_{p_t}^{m_t}$ 的消失理想定义，其中假设 $\mathbb{X}$ 的支撑中的点 p_i 是 K-有理的，并且是 $m_i \geq 1$。约化概形的情形，即 $m_1 = \cdots = m_t = 1$ 的情形，可以通过 $m \geq 2$ 时的 $\mathsf{HP}(\Omega^1_{R/K}) = t$ 和 $\mathsf{HP}(\Omega^m_{R/K}) = 0$ 很容易地刻画（见注 7.1）。一般情形归结为研究形如 $S = A/\mathfrak{q}^k$ 的环的卡勒微分模，其中 $A = K[X_1, \ldots, X_n]$ 且 $\mathfrak{q} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$。在这里，我们得到 $\Omega^m_{S/K}$ 的希尔伯特函数取值的显式公式，该公式只取决于 $\delta = \dim_K(d\mathfrak{q}^k \wedge \Omega^{m-1}_{A/K})$ 的取值（见命题 7.2）。

若 $\mathsf{char}(K) = 0$ 或 $\mathsf{char}(K) > k$，我们通过一系列精妙而详尽的论证，成功确定了这个值 δ（见命题 7.4、7.5 和 7.6）。由此，我们得出了显式公式

$$\dim_K(\Omega^m_{S/K}) = \tbinom{n}{m}\tbinom{n+k-2}{n} + \tbinom{m+k-2}{m}\tbinom{n+k-2}{n-m-1}$$

适用于 $S = K[X_1, \ldots, X_n]/\langle X_1, \ldots, X_n \rangle^k$ 且 $\mathsf{char}(K) = 0$ 或 $\mathsf{char}(K) > k$ 的情形（见定理 7.8）。在对 K 的特征作出更严格假设的情况下，我们还基于欧拉-科祖尔复形的正合性给出了另一种证明（见命题 7.9 和注 7.10）。

最后，我们综合所有结果，得到了 $\mathsf{char}(K) = 0$ 或 $\mathsf{char}(K) > \max\{m_1, \ldots, m_t\}$ 时，模 $\Omega^m_{R/K}$ 的希尔伯特多项式的显式公式。这些公式推广并大幅改进了 [7] 和 [8] 中的部分结果。

最后，在第8节中，我们讨论 $\mathbb{X}$ 一致性性质的微分刻画。其中之一是次数为 d 的 Cayley-Bacharach 性质，它要求：每个包含余长度为 $\mathbb{X}$ 的子概形 $\mathbb{Y}$ 的次数为 d 的超曲面，都必然包含 $\mathbb{X}$。该性质可以通过 $\mathbb{X}$ 的最小分离子的次数来刻画（见注8.2）。这里的关键结果是，子概形 $\mathbb{Y}$ 在 $\mathbb{X}$ 中的消没理想 $I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$，当其初始次数为 $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$ 时，满足 $(dI_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}} \neq 0$，条件是 $\mathsf{char}(K) = 0$ 或 $\mathsf{char}(K) > r_{\mathbb{X}}$（见命题8.3）。由此，我们可以通过其 K¨ahler 微分模的希尔伯特函数，刻画具有次数为 d 的 Cayley-Bacharach 性质的概形（见推论8.4）。更一般地，我们考察 $\mathbb{X}$ 的高阶一致性性质，称为 (i, j)-一致性，并同样通过 $\Omega^1_{R/K}$ 的希尔伯特函数对其进行刻画（见推论8.7）。

本文通过许多例子阐释了我们的结果。这些例子是使用计算机代数系统 ApCoCoA 计算得到的（见 [1]）。关于我们所用的记号和基本定义，请参阅 [11], [12], 和 [13]。关于 K¨ahler 微分模的结果，我们主要参考已故恩师、导师和支持者 Ernst Kunz（1933—2021）的奠基性著作 [14]；我们怀着深深的感激，将本文献给他。

2. Zero-Dimensional Schemes

以下设 $\mathbb{X}$ 是完美域 K 上射影 n 空间中的一个零维概形。$\mathbb{P}^n$ 的齐次坐标环是多项式环 $P = K[X_0, \ldots, X_n]$，而 $\mathbb{X}$ 的齐次坐标环是 $R = P/I_{\mathbb{X}}$，其中 $I_{\mathbb{X}}$ 表示 $\mathbb{X}$ 的齐次消失理想。回忆一下，$I_{\mathbb{X}}$ 是一个饱和齐次理想，而 R 是一个标准分次一维 Cohen-Macaulay 环。特别地，R 中存在一个齐次非零因子。为简化表述，我们作如下假设。

假设 2.1。设 $\mathbb{X}$ 的支撑中没有点包含在超平面 $\mathcal{Z}(X_0)$ 中。

通常，若此假设不成立，只需进行齐次线性坐标变换。这不会影响本文的任何结果。对于有限域 K，可能需要进行小幅基域扩张，以找到合适的齐次线性坐标变换。这也不会影响任何结果。由此假设可知， $\mathbb{X}$ 包含于仿射空间 $\mathbb{A}^n \cong D_+(X_0)$ 中，且 X_0 在 R 中的像 x_0 是一个非零因子。

$\mathbb{X}$ 作为 $\mathbb{A}^n$ 的子概形，其仿射坐标环为 $S = R/\langle x_0 - 1\rangle \cong K[X_1, \ldots, X_n]/I_{\mathbb{X}}^{\mathrm{deh}}$，其中 $I_{\mathbb{X}}^{\mathrm{deh}}$ 是 $I_{\mathbb{X}}$ 关于 X_0 的去齐次化。环 S 是一个零维仿射 K-代数，因此是有限维 K-向量空间。以下函数对于研究射影空间中的零维子概形至关重要。

定义 2.2。在上述设定下，对所有 $i \in \mathbb{Z}$，由 $\mathrm{HF}_{\mathbb{X}} \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ 给出的映射 $\mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(i) = \dim_K(R_i)$ 称为 $\mathbb{X}$ 的希尔伯特函数。

其一阶差分函数 $\Delta\mathrm{HF}_{\mathbb{X}} \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$，由 $\Delta\mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(i) = \mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(i) - \mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(i-1)$ 给出，对于 $i \in \mathbb{Z}$，称为 $\mathbb{X}$ 的卡斯特尔诺沃函数。

希尔伯特函数包含了 $\mathbb{X}$ 嵌入到 $\mathbb{P}^n$ 中的若干有用不变量。下面总结其一些基本性质。

注 2.3。零维概形 $\mathbb{X}$ 在 $\mathbb{P}^n$ 中的希尔伯特函数满足

$$1 = \mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(0) < \mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(1) < \cdots < \mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(r_{\mathbb{X}}) = \mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(r_{\mathbb{X}}+1) = \cdots = \deg(\mathbb{X})$$

其中， $r_{\mathbb{X}}$ 称为 $\mathbb{X}$ 的（希尔伯特）正则性指标，而 $\deg(\mathbb{X})$ 是 $\mathbb{X}$ 的次数，即 R 的（常数）希尔伯特多项式的值。

环 R 在 $\geq r_{\mathbb{X}}$ 次数上的结构可描述如下。

命题 2.4. 对于 $i \geq r_{\mathbb{X}}$，映射 $\varepsilon_i \colon R_i \longrightarrow S$ 由 $f \mapsto f^{\mathrm{deh}}$ 给出，是 K-向量空间之间的同构。

证明。由于 x_0 是 R的非零因子，根据 $r_{\mathbb{X}}$ 的定义，对于 $i \geq r_{\mathbb{X}}$，乘法映射 $\mu_{x_0} \colon R_i \longrightarrow R_{i+1}$ 是同构。再结合观察 $\dim_K(R_i) = \dim_K(S) = \deg(\mathbb{X})$ 对于 $i \geq r_{\mathbb{X}}$成立，可知只需对 $i \gg 0$证明该结论。令 $\{b_1, \ldots, b_r\}$ 为 S的一个 K-向量空间基。利用映射 $\delta \colon R \longrightarrow R/\langle x_0 - 1\rangle \cong S$ 是由去齐次化给出的满射这一事实，对于每个 $j \in \{1, \ldots, r\}$，我们都能找到一个齐次元素$f_j \in R$，使得 $\delta(f_j) = f_j^{\mathrm{deh}} = b_j$。将每个 f_j 乘以适当次幂的 x_0后，可假设所有元素 f_j 具有相同的次数 i。因此，映射 ε_i 是满射，进而是双射，结论得证。□

接下来，我们还将使用以下环。分次 K-代数

$$Q^h(R) = \{\tfrac{a}{b} \mid a, b \in R;\ b \text{ homogeneous non-zerodivisor}\}$$

称为 R 的（完整）齐次商环。我们可以将其描述简化如下。

命题 2.5. 设 R 是如上所述的 $\mathbb{P}^n$ 中一个零维概形 $\mathbb{X}$ 的齐次坐标环。

(a) 典范包含 $R_{x_0} \to Q^h(R)$ 是双射。

(b) 映射 $\varphi\colon Q^h(R) \longrightarrow S[x_0, x_0^{-1}]$ 由 $\varphi(f/x_0^i) = f_{\mathrm{deh}} x_0^{d-i}$ for $f \in R_d$ and $i \geq 0$ 给出，是分次 K- 代数的同构。

证明。为证明 (a)，令 $a \in R_d$ 和 $b \in R_e$ 为 R 中次数分别为 d、$e \in \mathbb{N}$ 的齐次元素，并假设 b 是非零因子。我们需要证明存在 $i \geq 0$ 和一个齐次元素 $f \in R_i$，使得 $a/b = f/x_0^i$。首先，选取 i 使得 $i \geq r_{\mathbb{X}} + e - d$。注意，对于每个 $k \geq r_{\mathbb{X}}$，乘法映射 $\mu_b\colon R_k \longrightarrow R_{k+e}$ 都是双射，因为 b 是非零因子。因此，$d + i \geq r_{\mathbb{X}} + e$ 蕴含元素 $a\,x_0^i \in R_{d+i}$ 可写为 $a\,x_0^i = b\,f$ 的形式，其中 $f \in R_j$，且 $j = d + i - e$。于是得到 $a/b = f/x_0^i$，证毕。

还需证明 (b)。给定 $f \in R_d$ 和 $i \geq 0$，令 $j = r_{\mathbb{X}} + i$。于是有 $x_0^j(f/x_0^i) \in R_{r_{\mathbb{X}}+d}$ 且 $x_0^j\,\varphi(f/x_0^i) = \varphi(x_0^j(f/x_0^i)) = f$ 得 $x_0^{r_{\mathbb{X}}+d}$。结合命题 2.4，可知 $\varphi_{d-i}\colon Q^h(R)_{d-i} \longrightarrow S x_0^{d-i}$ 是 K-向量空间之间的同构。由于 φ 显然是分次环的同态，结论得证。□

利用此命题给出的同构 $Q^h(R) \cong R_{x_0} \cong S[x_0, x_0^{-1}]$，我们现在考察 R 在 $Q^h(R)$ 中的整闭包。

命题 2.6. 设 R 是如上所述的 $\mathbb{P}^n$ 中一个零维概形 $\mathbb{X}$ 的齐次坐标环。

(a) 对于 $f \in R_d$，由 $\psi(f) = f^{\mathrm{deh}}\,x_0^d$ 给出的映射 $\psi\colon R \longrightarrow S[x_0]$ 是一个单射分次 $K[x_0]$-代数同态。(b) 对于 $i \geq r_{\mathbb{X}}$，映射 $\psi_i\colon R_i \longrightarrow S x_0^i$ 是 K-向量空间的一个同构。(c) $Q^h(R)$ 的子环 $\widetilde{R}$ 由所有次数非负的齐次元素生成，满足 $R \cong S[x_0]$，且包含于 R 在 $Q^h(R)$ 中的整闭包内。(d) 环 $\widetilde{R}$ 是 R 在 $Q^h(R)$ 中的整闭包，当且仅当 S 是一个既约环。

证明。断言 (a) 和 (b) 直接由命题 2.4 和命题 2.5 得出。为了证明 (c)，令 $f \in Q^h(R)$ 为次数为 $d \geq 0$ 的齐次元素。利用命题 2.5 中给出的同构 $\varphi\colon Q^h(R) \longrightarrow S[x_0, x_0^{-1}]$，我们将 $\varphi(f) = x_0^d\,g$ 写成其中 $g \in S$。根据定义，映射 φ 将 $\widetilde{R}$ 与 $S[x_0]$ 等同起来。由于 S 是有限的 K-代数，因此存在一个关系 $g^m + a_{m-1}g^{m-1} + \cdots + a_1 g_1 + a_0 = 0$，其中 $a_i \in K$。然后我们对等式两边应用 φ^{-1}

$$x_0^{dm}\,g^m + a_{m-1}x_0^d(x_0^{(m-1)d}g^{m-1}) + \cdots + a_1 x_0^{(m-1)d}(x_0^d g) + a_0 x_0^{dm} = 0$$

并得到 $f^m + a_{m-1}x_0^d f^{m-1} + \cdots + a_1 x_0^{(m-1)d} f + a_0 x_0^{dm} = 0$。因此，$a_i x_0^j \in R$ 蕴含 f 在 R 上是整的。

最后，我们证明 (d)。如果 S 是一个既约环，那么 $\widetilde{R}$ 是 R 在 $Q^h(R)$ 中的整闭包，这由 [2], Ch. V, §2, Prop. 9 和 §8, Prop. 20 得出。反过来，如果 S 含有一个非零幂零元 $f \in S$，满足 $f^k = 0$，其中某个 $k \geq 1$，那么我们考虑齐次元素 $g = \varphi^{-1}(f x_0^{-1}) \in Q^h(R)_{-1}$。根据定义，我们有 $g \notin \widetilde{R}$。此外，由 $\varphi(g^k) = f^k x_0^{-k} = 0$ 可知，$g^k = 0$，因此 g 在 R 上整。□

$\widetilde{\ }$环 R 将非常有用，值得为它取个名字。

定义 2.7. 设 R 为上述 $\mathbb{P}^n$ 中零维概形 $\mathbb{X}$ 的齐次坐标环。那么，由所有非负次数的齐次元素生成的 $Q^h(R)$ 的子环 $\widetilde{R}$ 称为 R的截断整闭包。

我们经常使用由 $f \mapsto f^{\deg} x_0^d$ 给出的识别 $\widetilde{R} \cong S[x_0]$，其中 $f \in R_d$ 是次数为 $d \geq 0$ 的齐次元素 $\widetilde{}$。

3. The Kähler Differential Module

下面我们继续采用上文引入的假设和记号。特别地，设 K 是一个完美域，设 $\mathbb{X}$ 是 $\mathbb{P}^n$ 的一个零维子概形，其关于 $P = K[X_0, \ldots, X_n]$的齐次坐标环为 $R = P/I_{\mathbb{X}}$。对于 $i = 0$、.....、n，我们用 x_i 表示 X_i 在 R 中的像，并假设 x_0 是 R 中的非零因子。此外，令 $\mathfrak{m} = \langle x_0$、.....、$x_n \rangle$ 为 R 的齐次极大理想。由于下述 R-模是本节研究的主要对象，我们回顾其（众所周知的）定义。

定义 3.1. 令 J 为乘法映射 $\mu\colon R \otimes_K R \longrightarrow R$ 的核。于是，$\Omega^1_{R/K} = J/J^2$ 通过 $r \cdot \sum_i a_i \otimes b_i = \sum_i r a_i b_i$ 成为一个 R-模，其中 r、a_i、$b_i \in R$。它称为 R/K 的 K¨ahler 微分模，或称 R/K 的 K¨ahler 微分模。

由 $d_{R/K}(f) = f \otimes 1 - 1 \otimes f + J^2$ 定义的映射 $d_{R/K}\colon R \longrightarrow \Omega^1_{R/K}$ 称为 R/K 的泛导子。

注意，映射 $d_{R/K}$ 确实是 R/K 的导子，即它是 K-线性的，并满足乘积法则。如果上下文已明确代数 R/K，我们通常只写 df，而不写 $d_{R/K}(f)$。下面回顾一下 R/K 的 K¨ahler 微分模的一些基本性质。

命题3.2. 设 R 是如上所述的有理数域 $\mathbb{P}^n$ 上零维概形 $\mathbb{X}$ 的齐次坐标环。

(a) R-模 $\Omega^1_{R/K}$ 是正次数分次的，并由次数为 1 的齐次元素 $\{dx_0, \ldots, dx_n\}$ 生成。(b) 存在分次 R-模的齐次短正合列

$$I_{\mathbb{X}}/I_{\mathbb{X}}^2 \xrightarrow{\alpha} R^{n+1}(-1) \xrightarrow{\beta} \Omega^1_{R/K} \longrightarrow 0$$

其中 α 由 $\alpha(f + I_{\mathbb{X}}^2) = (\frac{\partial f}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ 给出，而 β 对于 $i = 0, \ldots, n$ 由 $\beta(e_i) = dx_i$ 给出。

(c) 分次 R-模 $\Omega^1_{R/K}$ 有一个表示

$$\Omega^1_{R/K} \cong \Omega^1_{P/K}/(I_{\mathbb{X}} \cdot \Omega^1_{P/K} + dI_{\mathbb{X}})$$

其中 $\Omega^1_{P/K} = PdX_0 \oplus \cdots \oplus PdX_n \cong P^{n+1}(-1)$ 是分次自由 P-模，且 $dI_{\mathbb{X}} = \langle \frac{\partial f}{\partial X_0} dX_0 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial X_n} dX_n \mid f \in I_{\mathbb{X}} \rangle$。

证明。断言 (a) 和 (b) 由 [14], 命题 4.12 和 4.17 得出，断言 (c) 则由同上，命题 4.19 得出。□

每个有限生成的分次 R-模都有一个希尔伯特函数、一个常值希尔伯特多项式以及一个正则性指标。由此得到如下定义。

定义3.3。在上述设定中，令 $\Omega^1_{R/K}$ 为 R 的 K¨ahler 微分模。

(a) 映射 $\mathrm{HF}^{\Omega^1_{R/K}}$：$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ 由 $\mathrm{HF}^{\Omega^1_{R/K}}(i) = \dim_K(\Omega^1_{R/K})_i$ for $i \in \mathbb{Z}$给出，称为 $\Omega^1_{R/K}$的希尔伯特函数。(b) 数值 $\mathrm{HP}(\Omega^1_{R/K}) = \mathrm{HF}^{\Omega^1_{R/K}}(i)$ for $i \gg 0$ 称为 $\Omega^1_{R/K}$的希尔伯特多项式。(c) 数值 $\mathrm{ri}(\Omega^1_{R/K}) = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{HF}^{\Omega^1_{R/K}}(j) = \mathrm{HP}(\Omega^1_{R/K})$ for $j \geq i\}$称为 $\Omega^1_{R/K}$的正则性指标。

以下命题表明，$\Omega^1_{R/K}$ 的希尔伯特多项式定义良好，并且其正则性指标存在一个上界。

命题3.4. 设 R 为上文所述的 $\mathbb{P}^n$ 中某个零维概形 $\mathbb{X}$ 的齐次坐标环。

(a) 对于 $i \leq 0$，我们有 $\mathrm{HF}^{\Omega^1_{R/K}}(i) = 0$。(b) 对于 $i \geq r_{\mathbb{X}} + 1$，乘法映射 μ_{x_0}：$(\Omega^1_{R/K})_i \longrightarrow (\Omega^1_{R/K})_{i+1}$ 是满射。特别地，我们有 $\mathrm{ri}(\Omega^1_{R/K}) \geq r_{\mathbb{X}} + 1$。(c) 如果 $\mathrm{ri}(\Omega^1_{R/K}) > r_{\mathbb{X}} + 1$，那么我们有 (d) 对于 $i \geq 2r_{\mathbb{X}} + 1$，乘法映射 μ_{x_0}：$(\Omega^1_{R/K})_i \longrightarrow (\Omega^1_{R/K})_{i+1}$ 是双射。特别地，我们有 $\mathrm{ri}(\Omega^1_{R/K}) \leq 2r_{\mathbb{X}} + 1$。

$$\mathrm{HF}_{\Omega^1_{R/K}}(r_{\mathbb{X}} + 1) > \cdots > \mathrm{HF}_{\Omega^1_{R/K}}(\mathrm{ri}(\Omega^1_{R/K}))$$

证明。断言 (a) 由 $\Omega^1_{R/K}$ 由次数为 1 的齐次元素生成这一事实推出。为证明 (b)，令 $i \geq r_{\mathbb{X}} + 1$ 和 $w \in (\Omega^1_{R/K})_{i+1}$。于是我们可以写成 $w = f_0dx_0 + \cdots + f_ndx_n$，其中 $f_0, \ldots, f_n \in R_i$。由于 $i \geq r_{\mathbb{X}} + 1$，命题 2.4 推出存在元素 $g_j \in R_{i-1}$，使得对于 $j = 0, \ldots, n$，有 $f_j = x_0g_j$，因此 $w = x_0(g_0dx_0 + \cdots + g_ndx_n)$ 属于 μ_{x_0} 的像。

断言 (c) 是 (b) 和 $\mathrm{ri}(\Omega^1_{R/K})$ 的定义的推论。还需证明 (d)。设 $w = f_0dx_0 + \cdots + f_ndx_n$ 是 μ_{x_0} 的核中的一个元素，其中 $f_j \in R_{i-1}$ 对于 $j = 0, \ldots, n$。根据命题 3.2，我们有一个分次 R- 模的正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}(-1) \longrightarrow R^{n+1}(-1) \xrightarrow{\varphi} \Omega^1_{R/K} \longrightarrow 0$$

其中 $\mathcal{G}$ 由满足 $f \in I_{\mathbb{X}}$ 的元组 $(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ 生成，并且 $\varphi(f_0, ..., f_n) = f_0dx_0 + \cdots + f_ndx_n$ 对所有 $f_0, ..., f_n \in R$ 都成立。根据命题 1.1，$I_{\mathbb{X}}$ 由 [6], 在次数 $\leq r_{\mathbb{X}} + 1$ 生成，因此分次 R-模 $\mathcal{G}$ 由次数 $\leq r_{\mathbb{X}}$ 的元素生成。于是，设 $\{v_1, ..., v_k\}$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个齐次生成元系，其中 $\deg(v_j) \leq r_{\mathbb{X}}$。给定一个满足$f_j \in R_{i-1}$（对于 $j = 0, \ldots, n$）的元素 $w = f_0dx_0 + \cdots + f_ndx_n \in \mathrm{Ker}(\mu_{x_0})$，我们有

$$(x_0f_0, \ldots, x_0f_n) \in \mathrm{Ker}(\varphi) = [\mathcal{G}(-1)]_{i+1} = \mathcal{G}_i$$

因此，我们可以写成 $(x_0f_0, ..., x_0f_n) = g_1v_1 + \cdots + g_kv_k$ 齐次元素$g_j \in R$ 的次数为 $\deg(g_j) = i - \deg(v_j) \geq i - r_{\mathbb{X}} \geq r_{\mathbb{X}} + 1$。现在，命题 2.4 允许我们写成 $g_j = x_0h_j$，其中 $h_j \in R$，由此得到

$$(f_0, \ldots, f_n) = h_1v_1 + \cdots + h_kv_k \in \mathcal{G}_{i-1}$$

由此得到 $w = f_0dx_0 + \cdots + f_ndx_n = 0 \in \Omega^1_{R/K}$，证明完毕。 □

分次 R-模

$T\Omega^1_{R/K} = \{w \in \Omega^1_{R/K} \mid rw = 0$ 对于某个齐次非零因子 $r \in R\}$，称为 $\Omega^1_{R/K}$ 的挠子模。我们可以如下描述它。

命题 3.5. 设 R 是如上所述的 $\mathbb{X}$ 的齐次坐标环。

(a) *We have* $T\Omega^1_{R/K} = \{\, w \in \Omega^1_{R/K} \mid x_0^i w = 0$ *for some* $i \geq 1 \,\}$.

(b) *We have* $\mathrm{HP}(T\Omega^1_{R/K}) = 0$ *and* $\mathrm{ri}(T\Omega^1_{R/K}) \leq 2r_{\mathbb{X}} + 1$.

证明. 设 $w \in T\Omega^1_{R/K}$ 是一个非零齐次元素，且 $fw = 0$ 对某个齐次非零因子 $f \in R_i$ 成立，$i \geq 0$。那么 $f^{\mathrm{deh}} \in S$ 是非零因子。由于 S 是阿廷半局部环，它只由单位和零因子组成，因此 $f_{\mathrm{deh}} \in S$ 是单位。取 $u \in S$ 使得 $uf^{\mathrm{deh}} = 1$ 且 $g = \psi_{r_{\mathbb{X}}}^{-1}(ux_0^{r_{\mathbb{X}}})$，其中$\psi_{r_{\mathbb{X}}} : R_{r_{\mathbb{X}}} \to Sx_0^{r_{\mathbb{X}}}$ 是命题 2.6.b 中 K-向量空间的同构。我们有 $gf = x_0^{r_{\mathbb{X}}+i}$，因此 $x_0^{r_{\mathbb{X}}+i} w = gfw = 0$。这就证明了断言 (a)。断言 (b) 由 (a) 和命题 3.4.d 得出。□

下面的例子表明，上述关于 $T\Omega^1_{R/K}$ 正则性指标的上界是一个尖锐界。

例 3.6. 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中的两个由五个 K-有理点组成的集合，使得 $\mathbb{X}$由直线上的三个点和另一条直线上的两个点组成（两条直线可以在 $\mathbb{X}$中的一个点处相交），并且 $\mathbb{Y}$ 包含于一条非奇异圆锥曲线中。用 $R_{\mathbb{Y}}$ 表示 $\mathbb{Y}$的齐次坐标。则 R和 $R_{\mathbb{Y}}$的希尔伯特函数相同，即 $\mathrm{HF}_{\mathbb{X}} = \mathrm{HF}_{\mathbb{Y}}$：$1\ 3\ 5\ \mathbf{5}\cdots$，因此 $r_{\mathbb{X}} = r_{\mathbb{Y}} = 2$。然而，$\Omega^1_{R/K}$ 和$\Omega^1_{R_{\mathbb{Y}}/K}$ 的希尔伯特函数，以及 $T\Omega^1_{R/K}$ 和 $T\Omega^1_{R_{\mathbb{Y}}/K}$ 的希尔伯特函数并不相同：

$$\mathrm{HF}_{\Omega^1_{R/K}} : 0\ 3\ 8\ 10\ \mathbf{7}\ 5\ 5\cdots, \qquad \mathrm{HF}_{\Omega^1_{R_{\mathbb{Y}}/K}} : 0\ 3\ 8\ 10\ \mathbf{6}\ 5\ 5\cdots,$$
$$\mathrm{HF}_{T\Omega^1_{R/K}} : 0\ 0\ 3\ 5\ \mathbf{2}\ 0\ 0\cdots, \qquad \mathrm{HF}_{T\Omega^1_{R_{\mathbb{Y}}/K}} : 0\ 0\ 3\ 5\ \mathbf{1}\ 0\ 0\cdots.$$

特别地，我们得到 $\mathrm{ri}(\Omega^1_{R/K}) = \mathrm{ri}(T\Omega^1_{R/K}) = \mathrm{ri}(\Omega^1_{R_{\mathbb{Y}}/K}) = \mathrm{ri}(T\Omega^1_{R_{\mathbb{Y}}/K}) = 5 = 2r_{\mathbb{X}} + 1$，因此，命题 3.4 和 3.5 中给出的关于 $\Omega^1_{R/K}$ 和 $T\Omega^1_{R/K}$ 的正则性指标上界是尖锐的。此外，对于非约化零维概形 $\mathbb{Y}' \subseteq \mathbb{P}^2$，这些上界同样是尖锐的；其支撑由非奇异圆锥曲线上的五个点 (1 : 0 : 1)、(1 : 1 : 2)、(1 : 2 : 2)、(1 : 3 : 1) 和 (1 : 1 : 0) 组成，其中只有最后一个点 (1 : 1 : 0) 是非约化的，其理想为$I_{(1:1:0)} = \langle X_1 - X_0, X_2^2 \rangle \subseteq K[X_0, X_1, X_2]$ 且 $\mathrm{char}(K) \neq 2$，3，因为计算得到 $\mathrm{HF}_{\mathbb{Y}'}$：$1\ 3\ 6\ \mathbf{6}\cdots$，$r_{\mathbb{Y}'} = 2$，并且

$$\mathrm{HF}_{\Omega^1_{R_{\mathbb{Y}'}/K}} : 0\ 3\ 9\ 14\ 9\ 7\ \mathbf{7}\ \cdots,\ \mathrm{ri}(\Omega^1_{R_{\mathbb{Y}'}/K}) = 5 = 2r_{\mathbb{Y}'} + 1,$$
$$\mathrm{HF}_{T\Omega^1_{R_{\mathbb{Y}'}/K}} : 0\ 0\ 2\ 7\ 2\ 0\ \mathbf{0}\ \cdots,\ \mathrm{ri}(T\Omega^1_{R_{\mathbb{Y}'}/K}) = 5 = 2r_{\mathbb{Y}'} + 1.$$

接下来我们考虑截断整闭包 $R \cong S[x_0]$ 的 K¨ahler 微分模~。其希尔伯特函数、希尔伯特多项式和正则性指标可描述如下。

~命题 3.7. 设 $R \cong S[x_0]$ 是其齐次分式环 R 中的截断整闭包。

（a）我们有一个分次 $K[x_0]$-模的同构

$$\varphi : \Omega^1_{\widetilde{R}/K} \cong S[x_0]dx_0 \oplus K[x_0] \otimes_K \Omega^1_{S/K}.$$

(b) *The Hilbert function* $\mathrm{HF}_{\Omega^1_{\widetilde{R}/K}} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *of* $\Omega^1_{\widetilde{R}/K}$ *is given by* $\mathrm{HF}_{\Omega^1_{\widetilde{R}/K}}(i) = 0$ *for* $i < 0$, *by* $\mathrm{HF}_{\Omega^1_{\widetilde{R}/K}}(0) = \dim_K(\Omega^1_{S/K})$, *and by* $\mathrm{HF}_{\Omega^1_{\widetilde{R}/K}}(i) = \deg(\mathbb{X}) + \dim_K(\Omega^1_{S/K})$ *for* $i > 0$.

(c) *We have* $\mathrm{HP}(\Omega^1_{\widetilde{R}/K}) = \deg(\mathbb{X}) + \dim_K(\Omega^1_{S/K})$ *and* $\mathrm{ri}(\Omega^1_{\widetilde{R}/K}) = 1$.

证明。断言（a）由 [14], 公式 4.11.a 和 $\Omega^1_{K[x_0]/K} \cong K[x_0]dx_0$ 得出。（b）部分是（a）的直接推论，而（c）由（b）得出。□

接下来，我们使用分次 K-代数之间的单同态 $\varphi : \ R \to \widetilde{R} \cong S[x_0]$，该同态由 $f \mapsto f^{\mathrm{deh}} x_0^k$ 给出，其中 $f \in R_k$，以比较 R 和 $\widetilde{R}$的 Kähler 微分模。

命题 3.8. 设 R 如上所述，是 $\mathbb{P}^n$ 中一个零维概形 $\mathbb{X}$ 的齐次坐标环；设 $\widetilde{R} \cong S[x_0]$ 是 R在其齐次商环中的截断整闭包。

(a) 同态 $\varphi : R \to \widetilde{R} \cong S[x_0]$ 诱导出分次 $K[x_0]$-模的同态 $\Phi : \Omega^1_{R/K} \longrightarrow \Omega^1_{\widetilde{R}/K} \cong S[x_0]dx_0 \oplus K[x_0] \otimes_K \Omega^1_{S/K}$，其定义为 $\Phi(f dx_i) = f^{\mathrm{deh}} x_i x_0^k dx_0 + x_0^{k+1} \otimes f^{\mathrm{deh}} dx_i$，其中 $i = 1, \ ..., \ n$；并且对于 $f \in R_k$，有 $\Phi(f dx_0) = f^{\mathrm{deh}} x_0^k dx_0$。(b) 对于 $i \geq 2r_{\mathbb{X}} + 1$，映射 $\Phi_i : (\Omega^1_{R/K})_i \longrightarrow (\Omega^1_{\widetilde{R}/K})_i$ 是 K-向量空间之间的同构。(c) 我们有 $\mathrm{HP}(\Omega^1_{R/K}) = \deg(\mathbb{X}) + \dim_K(\Omega^1_{S/K})$，且 $\mathrm{ri}(\Omega^1_{R/K}) \leq 2r_{\mathbb{X}} + 1$。(d) 我们有 $T\Omega^1_{R/K} = \mathrm{Ker}(\Phi)$。

证明。要证明 (a)，只需使用 φ并计算 $\Phi(f dx_i) = \varphi(f) d\varphi(x_i) = f_{\mathrm{deh}} x_0^k d(x_i x_0) = f_{\mathrm{deh}} x_i x_0^k dx_0 + x_0^{k+1} \otimes f^{\mathrm{deh}} dx_i$对于 $i = 1, \ldots, n$以及 $\Phi(f dx_0) = f_{\mathrm{deh}} x_0^k dx_0$。

接下来证明 (b)。由于乘法映射 $\mu_{x_0} : (\Omega^1_{R/K})_i \longrightarrow (\Omega^1_{R/K})_{i+1}$和 $\mu_{x_0} : (\Omega^1_{\widetilde{R}/K})_i \longrightarrow (\Omega^1_{\widetilde{R}/K})_{i+1}$ 对于 $i \geq 2r_{\mathbb{X}} + 1$是同构，只需证明 $\Psi := \Phi_{2r_{\mathbb{X}}+1} : (\Omega^1_{R/K})_{2r_{\mathbb{X}}+1} \longrightarrow (\Omega^1_{\widetilde{R}/K})_{2r_{\mathbb{X}}+1}$ 是同构。首先证明 Ψ 是单射。包含映射 $R \subset \widetilde{R} \subset Q^h(R) = R_{x_0}$ 诱导出分次 $K[x_0]$- 代数的典范同态

$$\Omega^1_{R/K} \longrightarrow \Omega^1_{\widetilde{R}/K} \longrightarrow \Omega^1_{Q^h(R)/K} \cong \Omega^1_{R_{x_0}/K} \cong (\Omega^1_{R/K})_{x_0}$$

其复合映射是到元素 x_0 处 $\Omega^1_{R/K}$ 的局部化的典范映射。如果 $w \in (\Omega_R)_{2r_{\mathbb{X}}+1}$ 属于 Ψ 的核，那么它在 $(\Omega^1_{R/K})_{x_0}$ 中的像 $\frac{w}{1}$ 为零。因此存在一个数 $j \geq 0$ 使得 $x_0^j w = 0$，由命题 3.4.d 可得 $w = 0$。

剩下要证明 Ψ 是满射。根据命题 3.7.a，我们需要考虑两种情形。对于形如 $f x_0^{2r_{\mathbb{X}}} dx_0$ 的元素，我们令 $F \in R_{r_{\mathbb{X}}}$ 为命题 2.6.b 中同构 $R_{r_{\mathbb{X}}} \cong S x_0^{r_{\mathbb{X}}}$ 下 $f x_0^{r_{\mathbb{X}}}$ 的一个原像。于是我们有 $\Psi(F x_0^{r_{\mathbb{X}}} dx_0) = F_{\mathrm{deh}} x_0^{2r_{\mathbb{X}}} dx_0 = f x_0^{2r_{\mathbb{X}}} dx_0$。对于形如 $x_0^{2r_{\mathbb{X}}+1} \otimes f dg$且满足 $f, g \in S$ 的元素，我们分别令 $F, G \in R_{r_{\mathbb{X}}}$ 为同构 $R_{r_{\mathbb{X}}} \cong S x_0^{r_{\mathbb{X}}}$ 下 $f x_0^{r_{\mathbb{X}}}$ 和 $g x_0^{r_{\mathbb{X}}}$ 的原像。接下来计算

$$\Psi(F x_0 dG) = \varphi(F) x_0 d(\varphi(G)) = f x_0^{r_{\mathbb{X}}+1} d(g x_0^{r_{\mathbb{X}}}) = x_0^{2r_{\mathbb{X}}+1} \otimes f dg + r_{\mathbb{X}} f g x_0^{2r_{\mathbb{X}}} dx_0$$

既然我们已经知道第二个加项属于 Ψ 的像，那么第一个加项也属于其像，证明遂告完成。

最后，断言 (c) 由 (b) 和命题 3.7.c 立即得出，而断言 (d) 则由命题 3.5.a 以及如下事实得出： Φ 被认作从 $\Omega^1_{R/K}$ 到其在 x_0中的局部化的典范映射。□

4. Euler形式与Koszul子模

继续使用前几节引入的记号，设 K 是一个完美域，设 $P = K[X_0, \ldots, X_n]$, 并设 $\mathbb{X}$ 是 $\mathbb{P}^n$ 的一个零维子概形，其齐次坐标环为 $R = P/I_{\mathbb{X}}$。对于 $i = 0$、... ...、 n，我们将 X_i 在 R 中的像记为 x_i，并假设 x_0 是 R中的一个非零因子。

回顾一下，由 $\delta(f) = i \cdot f$ 定义的 K-线性映射 $\delta\colon\ R \longrightarrow R$，对于 $i \geq 0$ 和 $f \in R_i$，是 R 的一个导子（参见 [14], 例 1.5）。它称为 R/K的Euler导子。

定义 4.1. 根据 $\Omega^1_{R/K}$ 的泛性质（参见 [14], 定理 1.19），Euler导子 $\delta\colon R \longrightarrow R$ 给出一个 R-线性映射 $\varepsilon : \Omega^1_{R/K} \longrightarrow R$，使得 $\delta = \varepsilon \circ d_{R/K}$。此映射称为 $\Omega^1_{R/K}$ 上的欧拉形式。

对于 $i = 0, \ldots, n$，我们得到 $\varepsilon(dx_i) = \delta(x_i) = x_i$。因此，$\mathrm{Im}(\varepsilon) = \mathfrak{m}$，其中 $\mathfrak{m} = \langle x_0, ..., x_n \rangle$ 是 R 的齐次极大理想，并且我们将 ε 视为满射 R-线性映射

$$\varepsilon\colon\ \Omega^1_{R/K} \longrightarrow \mathfrak{m} \quad \text{given by} \quad \varepsilon(dx_i) = x_i \quad \text{for} \quad i = 0, \ldots, n.$$

下面的命题汇总了欧拉形式的核的一些性质。

命题 4.2. 设 $\varepsilon : \Omega^1_{R/K} \longrightarrow \mathfrak{m}$ 是 $\Omega^1_{R/K}$ 上的欧拉形式。

(a) 我们有 $T\Omega^1_{R/K} \subseteq \mathrm{Ker}(\varepsilon)$。(b) 我们有 $\mathrm{Ann}_R(dx_0) = \{0\}$ 且 $\mathrm{Ker}(\varepsilon) \cap R dx_0 = \{0\}$。(c) 对于 $i \geq 2r_{\mathbb{X}} + 1$, 我们有 $\mathrm{HF}^{\mathrm{Ker}(\varepsilon)}(i) = \dim_K(\Omega^1_{S/K})$。

证明。首先证明 (a)。设 $w \in T\Omega^1_{R/K}$。由命题 3.5.a，存在一个数 $i \geq 1$，使得 $x_0^i\, w = 0$。由于集合 $\{dx_0, \ldots, dx_n\}$ 生成 $\Omega^1_{R/K}$，我们可以写成 $w = f_0 dx_0 + \cdots + f_n dx_n$，其中 f_0、.....、 $f_n \in R$，并计算 $0 = \varepsilon(x_0^i w) = \varepsilon(x_0^i f_0 dx_0 + \cdots + x_0^i f_n dx_n) = x_0^i f_0 x_0 + \cdots + x_0^i f_n x_n$。现在利用这样一个事实： x_0是 R的非零因子，从而得出 $\varepsilon(w) = f_0 x_0 + \cdots + f_n x_n = 0$。

为证明 (b)，设 $f \in R$，使得 $f dx_0 = 0$。那么 $0 = \varepsilon(f dx_0) = f\,\varepsilon(dx_0) = f\, x_0$ 推出 $f = 0$。这表明 $\mathrm{Ann}_R(dx_0) = \{0\}$。接下来，设 $f \in R$，使得$f dx_0 \in$Ker(ε)。那么 $\varepsilon(f dx_0) = f\, x_0 = 0$推出 $f = 0$, 因此 $f dx_0 = 0$。

最后，结论 (c) 由命题 3.8.c 以及对于 $i \geq r_{\mathbb{X}} + 1$, $\dim_K(\mathfrak{m}_i) = \dim_K(R_i) = \deg(\mathbb{X})$ 得出。□

给定模上的一个线性形式，可以构造出一个相应的 Koszul 复形。

定义 4.3. 如上所述，设 R 是 $\mathbb{P}^n$ 中一个 0 维概形 $\mathbb{X}$ 的齐次坐标环，且 $\varepsilon : \Omega^1_{R/K} \longrightarrow \mathfrak{m}$ 是欧拉形式。

(a) R-模的复形

$0 \longrightarrow \Lambda^{n+1}\Omega^1_{R/K} \xrightarrow{\varepsilon^{(n+1)}} \cdots \xrightarrow{\varepsilon^{(3)}} \Lambda^2\Omega^1_{R/K} \xrightarrow{\varepsilon^{(2)}} \Omega^1_{R/K} \xrightarrow{\varepsilon} \mathfrak{m} \longrightarrow 0$称为 R （或 $\mathbb{X}$）的欧拉-科祖尔复形。这里， $\varepsilon^{(i)}$ 由$\varepsilon^{(i)}(w_1 \wedge \cdots \wedge w_i) = \sum_{j=1}^{i}(-1)^{j-1}\varepsilon(w_j)\ w_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{w_j} \wedge \cdots \wedge w_i$给出，其中 $i \geq 2$和 $w_1, \ldots, w_i \in \Omega^1_{R/K}$。 (b) R-线性映射 $\varepsilon^{(2)}$： $\Lambda^2\Omega^1_{R/K} \longrightarrow \Omega^1_{R/K}$的像，即$\Omega^1_{R/K}$ 的 R子模 $U_{R/K} = \langle x_i dx_j - x_j dx_i \mid 0 \leq i < j \leq n \rangle$ ，称为$\Omega^1_{R/K}$的 Koszul 子模。

显然，$\Omega^1_{R/K}$ 的 Koszul 子模包含于欧拉形式的核中，而且通常这两个子模相等。它们之间关系的更精确描述如下。

命题 4.4. 设 $\varepsilon : \Omega^1_{R/K} \longrightarrow \mathfrak{m}$ 为欧拉形式， $U_{R/K} \subseteq \Omega^1_{R/K}$ 为 $\Omega^1_{R/K}$ 的 Koszul 子模。

(a) 有 $U_{R/K} \subseteq \mathrm{Ker}(\varepsilon)$，且当 $\mathrm{char}(K) = 0$ 或 $\mathrm{char}(K) \geq 2r_{\mathbb{X}} + 1$ 时，这是一个等式。(b) 假设 $\mathrm{char}(K) = p > 0$。若 $i \geq 1$ 满足 $p \nmid i$ ，或者若 $i \geq 2r_{\mathbb{X}} + 1$ ，则有 $(U_{R/K})_i = \mathrm{Ker}(\varepsilon)_i$。(c) $\mathrm{Ker}(\varepsilon) = \{w \in \Omega^1_{R/K} \mid x_0 w \in U_{R/K}\}$。

证明. 首先注意，对 $0 \leq i < j \leq n$ 有 $\varepsilon(x_i dx_j - x_j dx_i) = x_i x_j - x_j x_i = 0$。因此有 $U_{R/K} \subseteq \mathrm{Ker}(\varepsilon)$。此外，注意 $U_{R/K}$ 和 $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ 都是 $\Omega^1_{R/K}$ 的分次 R-子模。

现在令 $i \geq 1$。对于齐次元素 $w \in (\Omega^1_{R/K})_i$，在 [7], 命题 2.4 的证明中已证明 $(\varepsilon^{(2)} \circ d + d \circ \varepsilon)(w) = i\, w$。因此，$\mathrm{Ker}(\varepsilon)_i$ 中的每个元素 $w \in$ 都满足 $\varepsilon^{(2)}(dw) = i\, w$。于是，如果 i 是 K 中的单位，那么我们有 $w = \varepsilon^{(2)}(\frac{1}{i}\, dw) \in U_{R/K}$。这证明了 (a) 中 $\mathrm{char}(K) = 0$ 的情形以及 (b) 中的第一种情形$p \nmid i$ 。

接下来，我们同时考虑 (a) 中的第二种情形和 (b) 中的第二种情形。根据我们已经看到的内容，可以假设 $\mathrm{char}(K) = p > 0$ ，并且 p整除 $\mathrm{Ker}(\varepsilon)_i \subseteq (\Omega^1_{R/K})_i$ 中某个元素 $w \in$ 的次数 $i \geq 2r_{\mathbb{X}} + 1$。我们利用这样一个事实：由命题 3.4.b， $\mu_{x_0} : (\Omega^1_{R/K})_{i-1} \longrightarrow (\Omega^1_{R/K})_i$ 是满射，并写作$w = x_0\tilde{w}$，其中 $\tilde{w} \in (\Omega^1_{R/K})_{i-1}$。这里， $0 = \varepsilon(w) = x_0\varepsilon(\tilde{w})$ 蕴含 $\tilde{w} \in \mathrm{Ker}(\varepsilon)_{i-1}$。由于 $p \nmid (i-1)$，我们有 $\tilde{w} = \frac{1}{i-1}\varepsilon^{(2)}(d\tilde{w}) \in U_{R/K}$，因此 $w = x_0\tilde{w} \in U_{R/K}$。

剩下的就是证明 (c)。根据 (b)，当且仅当 $\mathrm{char}(K) = p > 0$ 且 $p \mid i$时，对于某个 $i \geq 1$ ，包含关系 $(U_{R/K})_i \subseteq \mathrm{Ker}(\varepsilon)_i$ 才可能是严格的。于是，$p \nmid (i+1)$ 蕴含 $x_0 w \in (U_{R/K})_{i+1}$。这就证明了该结论中的包含关系 $\subseteq$。反过来，若 $x_0 w \in U_{R/K} \subseteq \mathrm{Ker}(\varepsilon)$，则由 $0 = \varepsilon(x_0 w) = x_0\varepsilon(w)$ 可得 $\varepsilon(w) = 0$。□

我们也来尽可能明确地描述 $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ 中那些不属于 $\Omega^1_{R/K}$ 的 Koszul 子模的元素。下面的构造将会用到。

注 4.5. 设 $P = K[X_0, \ldots, X_n]$ 和 $\mathfrak{M} = \langle X_0, \ldots, X_n \rangle$ 为其齐次极大理想。那么每个多项式 $F \in \mathfrak{M}$ 都有如下形式的唯一分解： $F = F_0 X_0 + \cdots + F_n X_n$，其中 $F_i \in K[X_i, \ldots, X_n]$。换言之，我们有

$F_n \in K[X_n]$, $F_{n-1} \in K[X_{n-1}, X_n]$ 等等。我们称之为 F 的三角分解。

若将元组 $(F_0, \ldots, F_n)$ 记作 $\vartheta(F)$，则映射 $\vartheta\colon \mathfrak{M} \longrightarrow P^{n+1}$ 是 K-线性的，并给出满射 $\xi\colon P^{n+1} \longrightarrow \mathfrak{M}$ 的一个截面，该满射由 $\xi(e_i) = X_i$（$i = 0, \ldots, n$）给出。换言之，映射 ϑ 将短正合列分裂为

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}(\xi) \longrightarrow P^{n+1} \xrightarrow{\xi} \mathfrak{M} \longrightarrow 0$$

回顾一下，$\operatorname{Ker}(\xi) = \langle X_i e_j - X_j e_i \mid 0 \le i < j \le n \rangle$，因为 $(X_0, \ldots, X_n)$ 是一个 P-正则序列。

借助三角分解，我们得到欧拉形式的核的如下描述。

命题 4.6.（欧拉形式的核）
设 $R = P/I_{\mathbb{X}}$ 是零维子概形 $\mathbb{X}$ 的齐次坐标环，其中 $\mathbb{X}$ 是 $\mathbb{P}^n$ 的子概形；设 $\varepsilon\colon \Omega^1_{R/K} \longrightarrow \mathfrak{m}$ 是欧拉形式。

(a) 设 $\gamma\colon P^{n+1} \longrightarrow \Omega^1_{R/K}$ 是由 $\gamma(e_i) = dx_i$（对 $i = 0, \ldots, n$）定义的满同态，并设 $\eta\colon \Omega^1_{R/K} \longrightarrow \Omega^1_{R/K}/U_{R/K}$ 是典范满同态。那么复合映射 $\delta = \eta \circ \gamma \circ \vartheta\colon \mathfrak{M} \longrightarrow \Omega^1_{R/K}/U_{R/K}$ 是一个 P-线性映射。(b) 我们有 $\delta(I_{\mathbb{X}}) = \operatorname{Ker}(\varepsilon)/U_{R/K}$。(c) 给定 $I_{\mathbb{X}}$ 的一个齐次生成元系 $\{G_1, \ldots, G_r\}$，我们有 $\operatorname{Ker}(\varepsilon) = U_{R/K} + \langle (\gamma \circ \vartheta)(G_1) \ldots, (\gamma \circ \vartheta)(G_r) \rangle$。(d) 设 $m_{\mathbb{X}} = \max\{i \ge 0 \mid (I_{\mathbb{X}}/\mathfrak{M}I_{\mathbb{X}})_i \neq 0\}$ 为 $I_{\mathbb{X}}$ 的齐次极小生成元的最大次数。那么对所有 $i > m_{\mathbb{X}}$，都有 $(U_{R/K})_i = \operatorname{Ker}(\varepsilon)_i$。

证明。首先证明 (a)。由于映射 δ 是由 K 线性映射复合而成的，因此显然是 K 线性的。现在设 $F \in \mathfrak{M}$，并设 $F = F_0X_0 + \cdots + F_nX_n$ 是 F 的三角分解，其中 $F_i \in K[X_i, \ldots, X_n]$。

给定一项 $T \in K[X_0, \ldots, X_n]$，令 k 为整除 T 的不定元中指标最小的一个，并将 $T = X_k \cdot T'$ 写成 $T' \in \mathbb{T}^{n+1}$。于是有

$$T\,F \;=\; \sum_{i=0}^{k-1} T\,F_i\,X_i \;+\; \Big(\sum_{i=k}^{n} F_i X_i T'\Big)\,X_k$$

这显然是 $T\,F$ 的三角分解。因此得到

$$\delta(T\,F) \;=\; \sum_{i=0}^{k-1} t\,f_i\,dx_i + \sum_{i=k}^{n} f_i\,x_i\,t'\,dx_k + U_{R/K}$$

其中，对于 $i = 0$，……，n，f_i 表示 F_i 在 R 中的剩余类，而 t（分别为 t'）表示 T（分别为 T'）的剩余类。另一方面，我们计算得

$$\begin{aligned} t \cdot \delta(F) \;&=\; \sum_{i=0}^{k-1} t\,f_i\,dx_i + \sum_{i=k}^{n} x_k t'\,f_i\,dx_i + U_{R/K} \\ &=\; \sum_{i=0}^{k-1} t\,f_i\,dx_i + \sum_{i=k}^{n} t' f_i x_i dx_k + \sum_{i=k}^{n} t' f_i (x_k dx_i - x_i dx_k) + U_{R/K} \\ &=\; \delta(T\,F) \end{aligned}$$

因此，映射 δ 是 P 线性的。

为证明 (b)，令 $F \in I_{\mathbb{X}}$，并将上文所述的 F 的三角分解写作 $F = F_0X_0 + \cdots + F_nX_n$。于是得到 $\delta(F) = f_0dx_0 + \cdots + f_ndx_n + U_{R/K}$，并且对于

每个元素 $u \in U_{R/K}$，我们得到 $\varepsilon(f_0dx_0+\cdots+f_ndx_n+u) = f_0x_0+\cdots+f_nx_n = F + I_{\mathbb{X}} = 0$。

为证明反向包含，取 $w \in \mathrm{Ker}(\varepsilon)$，并写作 $w = g_0dx_0 + \cdots + g_ndx_n$。用多项式 $G_i \in P$ 表示 $g_i \in R$，并令 $F = G_0X_0 + \cdots + G_nX_n$。由于$\varepsilon(w) = g_0x_0 + \cdots + g_nx_n = 0$，我们有 $F \in I_{\mathbb{X}}$。现在令 $F = F_0X_0 + \cdots + F_nX_n$为 F 的三角分解。于是 $(F_0 - G_0, \ldots, F_n - G_n)$ 是 $(X_0, \ldots, X_n)$ 的 Syzgy，因此属于 $V := \langle X_ie_j - X_je_i \mid 0 \le i < j \le n\rangle$。这意味着

$$\vartheta(F) = (F_0, \ldots, F_n) = (G_0, \ldots, G_n) + v \qquad \text{with } v \in V$$

因此 $\delta(F) = g_0dx_0 + \cdots + g_ndx_n + u + U_{R/K} = w + U_{R/K}$，其中 $u = \gamma(v) \in U_{R/K}$。

由于结论 (c) 可由 (a) 和 (b) 立即推出，因此只需证明 (d)。若有 $(U_{R/K})_{m_{\mathbb{X}}} = \mathrm{Ker}(\varepsilon)_{m_{\mathbb{X}}}$，则由 (c) 可知结论成立。因此，唯一剩下的情形是 $\mathrm{char}(K) = p > 0$ and $p \mid m_{\mathbb{X}}$。在此情形下，由命题 4.4.a,b 可得 $(U_{R/K})_{m_{\mathbb{X}}+1} = \mathrm{Ker}(\varepsilon)_{m_{\mathbb{X}}+1}$。由此可知，对于所有$i \in \{1, \ldots, r\}$以及所有满足 $\deg(f) + \deg(G_j) = m_{\mathbb{X}} + 1$的齐次元素 $f \in R$，都有 $f \cdot (\gamma \circ \vartheta)(G_i) \in U_{R/K}$。由 (c) 和这一观察即可推出结论。□

下一个例子表明，$\Omega^1_{R/K}$ 的挠子模一般不包含在其 Koszul 子模中。

例 4.7. 设 $K = \mathbb{F}_3$，设 $P = K[x_0, x_1, x_3]$，并设 $\mathbb{X}$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中由齐次理想 $I_{\mathbb{X}} = \langle G_1, G_2\rangle$ 定义的零维完全交概形，其中 $G_1 = X_1^2 + X_2^2$ 且 $G_2 = X_0X_1^2 + X_1^3 + X_2^3$。

直接计算可得 $\mathrm{HF}_{\mathbb{X}}$：$1\ 3\ 5\ 6\ 6\cdots$这表明 $r_{\mathbb{X}} = 3$，并且 $\mathrm{HF}^{\Omega^1_{R/K}}$：$0\ 3\ 8\ 11\ 10\ 10\cdots$这意味着 $\mathrm{ri}(\Omega^1_{R/K}) = 4$。此外，我们计算得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{HF}_{T\Omega^1_{R/K}}: \ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\cdots, \text{ and thus } \mathrm{ri}(T\Omega^1_{R/K}) = 4,\\
&\mathrm{HF}_{U_{R/K}}: \ 0\ 0\ 3\ 4\ 4\ 4\cdots, \text{ and thus } \mathrm{ri}(U_{R/K}) = 3,\\
&\mathrm{HF}_{\mathrm{Ker}(\varepsilon)}: \ 0\ 0\ 3\ 5\ 4\ 4\cdots, \text{ and thus } \mathrm{ri}(\mathrm{Ker}(\gamma)) = 4.
\end{aligned}$$

因此，Koszul 子模 $U_{R/K}$ 是 $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ 的真子模。

$G_2 \in I_{\mathbb{X}}$的三角分解为 $G_2 = (X_0X_1 + X_1^2)\ X_1 + (X_2^2)\ X_2$。因此我们可以验证

$$(\gamma \circ \vartheta)(G_2) = (x_0x_1 + x_1^2)\,dx_1 + (x_2^2)\,dx_2 \in \mathrm{Ker}(\varepsilon) \setminus U_{R/K}$$

此外，事实证明 $T\Omega^1_{R/K} = K \cdot (\gamma \circ \vartheta)(G_2)$，因此 $\Omega^1_{R/K}$ 的挠子模一般并不包含于其 Koszul 子模中。注意，对于约化概形，我们有 $T\Omega^1_{R/K} = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$（见 [4], 命题 2.1）。然而，即使在这种情形下，也可能出现 $U_{R/K} \subsetneq \mathrm{Ker}(\varepsilon)$；例如，当 $\mathbb{X}$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中的非奇异圆锥曲线上的五个 $\mathbb{F}_3$- 有理点的集合时。

5. Kähler Differential m-Forms

继续使用上述记号和假设，接下来我们将引入并研究 $\Omega^1_{R/K}$ 的高阶外幂。

定义 5.1. 设 $m \ge 0$，并设 R 为零维概形 $\mathbb{X}$ 在 $\mathbb{P}^n$ 中的齐次坐标环。

(a) m 次外幂 $\Omega^m_{R/K} := \Lambda^m_R\Omega^1_{R/K}$ 称为 R 的 K¨ahler 微分 m-形式模。(b) 分次 R-代数 $\Omega^\bullet_{R/K} := \bigoplus_{m\geq 0}\Omega^m_{R/K}$ 称为 R/K 的 K¨ahler 微分代数。

注意到 $\Omega^0_{R/K} = R$，并且我们可以类似地定义 P-模 $\Omega^m_{P/K}$。对于每个 $m \geq 0$，K¨ähler 微分 m-形式的模是一个有限生成的分次 R-模。为了计算这个 R-模的表示，我们可以使用以下结果。

命题 5.2。设 R 是零维概形 $\mathbb{X}$ 在 $\mathbb{P}^n$ 中的齐次坐标环。

（a）对于 $m \geq n+2$，有 $\Omega^m_{R/K} = \langle 0\rangle$。（b）对于 $m = 0, \ldots, n+1$，P-模 $\Omega^m_{P/K}$ 是一个秩为 $\binom{n+1}{m}$、基为 $\{dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_m} \mid 0 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n\}$ 的自由 P-模。（c）对于 $m \geq 2$，K¨ähler 微分 m-形式的模满足

$$\Omega^m_{R/K} \;\cong\; \Omega^m_{P/K} \,/\, \left(I_{\mathbb{X}}\Omega^m_{P/K} + dI_{\mathbb{X}} \wedge \Omega^{m-1}_{P/K}\right)$$

这里，$dI_{\mathbb{X}}$ 是由 $\{d_{P/K}f \mid f \in I_{\mathbb{X}}\}$生成的 $\Omega^1_{P/K}$ 的 P-子模。

(d) 设 $I_{\mathbb{X}} = \langle f_1, \ldots, f_k\rangle$，其中 $f_1, \ldots, f_k \in P$。那么我们有

$$dI_{\mathbb{X}} = \langle df_1, \ldots, df_k\rangle + \langle f_i dX_j \mid i \in \{1, \ldots, k\},\ j \in \{0, \ldots, n\}\rangle$$

证明。断言 (a) 显然成立，断言 (b) 由 [14, 例 2.5.d 得出，而断言 (c) 则由同上，命题 4.12 得出。

为证明 (d)，注意到 $I_{\mathbb{X}}\Omega^1_{P/K}$ 包含于 $dI_{\mathbb{X}}$，因为对于 $f \in I_{\mathbb{X}}$ 和 $g \in P$，我们有 $f\,dg = d(fg) - g\,df \in dI_{\mathbb{X}}$。这推出包含关系 $\supseteq$。反过来，设 $g \in I_{\mathbb{X}}$，并写作 $g = h_1f_1 + \cdots + h_kf_k$，其中 $h_1, \ldots, h_k \in P$。那么
$dg = h_1df_1 + \cdots + h_kdf_k + f_1dh_1 + \cdots + f_kdh_k$ 包含于右端，因此所需的等式得证。□

由于 K¨ähler 微分 m-形式的模是有限生成的分次R-模，我们可以像往常一样定义它们的希尔伯特函数、希尔伯特多项式和正则性指标。

定义 5.3. 设 R 是 $\mathbb{P}^n$中零维概形 $\mathbb{X}$ 的齐次坐标环，并设 $m \geq 1$。

(a) 映射 $\mathrm{HF}^{\Omega^m_{R/K}}\colon\ \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ 给出 $\mathrm{HF}^{\Omega^m_{R/K}}(i) = \dim_K(\Omega^m_{R/K})_i$，对每个$i \in \mathbb{Z}$ 均成立，称为 $\Omega^m_{R/K}$的希尔伯特函数。(b) 整数 $\mathrm{HP}(\Omega^m_{R/K}) = \mathrm{HF}^{\Omega^m_{R/K}}(i)$，对于 $i \gg 0$，称为 $\Omega^m_{R/K}$的希尔伯特多项式。(c) 数 $\mathrm{ri}(\Omega^m_{R/K}) := \min\{i \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{HF}^{\Omega^m_{R/K}}(j) = \mathrm{HP}(\Omega^m_{R/K})$，对于 $j \geq i\}$，称为 $\Omega^m_{R/K}$的正则性指标。

本节的目标是确定模 $\Omega^m_{R/K}$ 的希尔伯特多项式，并为其正则性指标找到一个精确界。与前一节一样，我们实现这些目标的方法是将其与 $Q^h(R)$ 中 R 的截断整闭包 $\widetilde{R}$ 的 K¨ähler 微分 m-形式模进行比较。模 $\Omega^m_{\widetilde{R}/K}$ 可以按如下方式计算并与 $\Omega^m_{R/K}$ 进行比较。

命题 5.4. 设 R 是 $\mathbb{P}^n$ 中零维概形 $\mathbb{X}$ 的齐次坐标环，设 $\widetilde{R}$ 是 $Q^h(R)$ 中 R 的截断整闭包，设 $S=R/\langle x_0-1\rangle$ 是 $\mathbb{A}^n\cong D_+(x_0)$ 中 $\mathbb{X}$ 的仿射坐标环，并设 $m\geq 1$。

(a) 同构 $R\cong S[x_0]$ 诱导出一个同构

$$\Psi^{(m)}:\ \Omega^m_{\widetilde{R}/K}\ \cong\ K[x_0]\otimes_K\Omega^m_{S/K}\ \oplus\ K[x_0]\,dx_0\wedge\Omega^{m-1}_{S/K}$$

(b) 设 $\Phi:\Omega^1_{R/K}\longrightarrow\Omega^1_{\widetilde{R}/K}$ 是由 $R\subseteq\widetilde{R}$ 诱导的典范 R-线性映射。那么，对于任意 $i\geq 2r_{\mathbb{X}}+m$，K-线性映射 $(\Lambda^m_R\Phi)_i:(\Omega^m_{R/K})_i\longrightarrow(\Omega^m_{\widetilde{R}/K})_i$ 都是同构。(c) 我们有 $\mathrm{HP}(\Omega^m_{R/K})=\mathrm{HP}(\Omega^m_{\widetilde{R}/K})=\dim_K(\Omega^m_{S/K})+\dim_K(\Omega^{m-1}_{S/K})$。(d) 我们有 $\mathrm{ri}(\Omega^m_{R/K})\leq 2r_{\mathbb{X}}+m$。(e) 若 $\mathrm{char}(K)=0$，或者若 $\mathrm{char}(K)=p>0$ 且 $p\nmid(2r_{\mathbb{X}}+n+1)$，那么甚至有 $\mathrm{ri}(\Omega^{n+1}_{R/K})\leq 2r_{\mathbb{X}}+n$。

证明。断言 (a) 由

$$\begin{aligned}\Omega^m_{\widetilde{R}/K}=\Lambda^m_{\widetilde{R}}\,\Omega^1_{\widetilde{R}/K}&\cong\Lambda^m_{S[x_0]}\ \Big((S\otimes_K\Omega^1_{K[x_0]/K})\oplus(K[x_0]\otimes_K\Omega^1_{S/K})\Big)\\&\cong\textstyle\bigoplus_{i=0}^m\Lambda^i_{S[x_0]}(S\otimes_K\Omega^1_{K[x_0]/K})\wedge\Lambda^{m-i}_{S[x_0]}(K[x_0]\otimes_K\Omega^1_{S/K})\\&\cong K[x_0]\otimes_K\Omega^m_{S/K}\oplus(S\otimes_K\Omega^1_{K[x_0]/K})\wedge(K[x_0]\otimes_K\Omega^{m-1}_{S/K})\end{aligned}$$

为证明 (b)，我们先证明 $\Phi:=(\Lambda^m_R\Phi)_i$ 对 $i\geq 2r_{\mathbb{X}}+m$ 是满射。注意到 $K[x_0]\otimes_K\Omega^m_{S/K}\cong S[x_0]\otimes_S\Omega^m_{S/K}$。由 (a)，只需证明

$$x_0^{i-1}dx_0\wedge f dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{m-1}},\ x_0^i\otimes g dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_m}\in\mathrm{Im}(\widetilde{\Phi})$$

其中 $f,g\in S$ 和 $\{i_1,\dots,i_{m-1}\},\{j_1,\dots,j_m\}$ 是 $\{1,\dots,n\}$ 的子集，长度分别为 $m-1$ 和 m。设 $F,G\in R_{r_{\mathbb{X}}}$ 分别是 $fx_0^{r_{\mathbb{X}}}$ 和 $gx_0^{r_{\mathbb{X}}}$ 在命题 2.6.b 中的同构 $R_{r_{\mathbb{X}}}\cong Sx_0^{r_{\mathbb{X}}}$ 下的原像。于是我们有

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Phi}(Fx_0^{i-r_{\mathbb{X}}-m}dx_0\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{m-1}})\\&=\Phi(Fx_0^{i-r_{\mathbb{X}}-m}dx_0)\wedge\Phi(dx_{i_1})\wedge\cdots\wedge\Phi(dx_{i_{m-1}})\\&=F^{\mathrm{deh}}x_0^{i-m}dx_0\wedge(x_{i_1}dx_0+x_0\otimes dx_{i_1})\wedge\cdots\wedge(x_{i_{m-1}}dx_0+x_0\otimes dx_{i_{m-1}})\\&=x_0^{i-1}dx_0\wedge f dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{m-1}}\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Phi}(Gx_0^{i-r_{\mathbb{X}}-m}dx_{j_1}\wedge dx_{j_2}\wedge\cdots\wedge dx_{j_m})\\&\quad=\Phi(Gx_0^{i-r_{\mathbb{X}}-m}dx_{j_1})\wedge\Phi(dx_{j_2})\wedge\cdots\wedge\Phi(dx_{j_m})\\&\quad=(G^{\mathrm{deh}}x_{j_1}x_0^{i-m}dx_0+x_0^{i-m+1}\otimes G^{\mathrm{deh}}dx_{j_1})\wedge\\&\qquad\wedge(x_{j_2}dx_0+x_0\otimes dx_{j_2})\wedge\cdots\wedge(x_{j_m}dx_0+x_0\otimes dx_{j_m})\\&\quad=x_0^{i-1}dx_0\wedge g\sum_{k=1}^m x_{j_k}dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_{j_k}}\wedge\cdots\wedge dx_{j_m}+\\&\qquad+x_0^i\otimes g dx_{j_1}\wedge dx_{j_2}\wedge\cdots\wedge dx_{j_m}\end{aligned}$$

其中，$\widehat{dx_{j_k}}$ 表示省略了 dx_{j_k}。在最后一个等式中，第一项属于 $\widetilde{\Phi}$ 的像，第二项也如此。因此，Φ 是满射。接下来我们证明，对于 $i\geq 2r_{\mathbb{X}}+m$，$\dim_K(\Omega^m_{R/K})_i=\dim_K(\Omega^m_{\widetilde{R}/K})_i$，因此 Φ 是双射。

令 $W := \mathrm{Im}(\Phi) \subseteq \Omega^1_{\widetilde{R}/K}$。那么 $\Phi : \Omega^1_{R/K} \to W$ 是分次R-模之间的满同态。根据 [16], Satz 85.8，我们有如下 K-向量空间的正合列

$$0 \longrightarrow (\mathrm{Ker}(\Phi) \wedge_R \Omega^{m-1}_{R/K})_i \longrightarrow (\Omega^m_{R/K})_i \xrightarrow{\widetilde{\Phi}} (\Lambda^m_R(W))_i \longrightarrow 0.$$

由命题 3.8.d 可知 $T\Omega^1_{R/K} = \mathrm{Ker}(\Phi)$。根据命题 3.5，对于所有 $k \geq 2r_{\mathbb{X}}+1$, $\mathrm{Ker}(\Phi)_k = \{0\}$，因此 $(\mathrm{Ker}(\Phi) \wedge_R \Omega^{m-1}_{R/K})_i = \{0\}$。由此可得 $\dim_K(\Omega^m_{R/K})_i = \dim_K(\Lambda^m_R(W))_i$。另一方面，显然有 $\widetilde{\ }$that $(\Lambda^m_R(W))_i \subseteq (\Omega^m_{\widetilde{R}/K})_i$。因此，$\Phi$的满射性意味着 $(\Lambda^m_R(W))_i = (\Omega^m_{\widetilde{R}/K})_i$，进而得到 $\dim_K(\Omega^m_{R/K})_i = \dim_K(\Omega^m_{\widetilde{R}/K})_i$，如所求。

断言 (c) 和 (d) 可由 (a) 和 (b) 得出。还需证明 (e)。考虑 R 的欧拉-科祖尔复形

$$0 \longrightarrow \Lambda^{n+1}\Omega^1_{R/K} \xrightarrow{\varepsilon^{(n+1)}} \cdots \xrightarrow{\varepsilon^{(3)}} \Lambda^2\Omega^1_{R/K} \xrightarrow{\varepsilon^{(2)}} \Omega^1_{R/K} \xrightarrow{\varepsilon} \mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

根据 [7],命题 2.4，在特征零时，这是一个分次 R-模的正合列。若 $\mathrm{char}(K) = p > 0$ 且 $p \nmid (2r_{\mathbb{X}}+n+1)$，则 [7],命题 2.4 的证明表明，映射 $\varepsilon^{(n+1)} : (\Omega^{n+1}_{R/K})_d \longrightarrow (\Omega^n_{R/K})_d$ 在次数 $d = 2r_{\mathbb{X}}+n+1$ 上也为单射。在这两种情形下，我们都看到结论由 (d) 得出。□

如下例所示，$\Omega^m_{R/K}$ 的正则性指标的上述上界是精确的。

例 5.5. 设 $\mathbb{X} = \{p_1, ..., p_{n+1}\}$ 是 $\mathbb{P}^n$ 中一组处于一般位置的 $n+1$ 个互异 K-有理点。我们断言，$\Omega^m_{R/K}$ 的正则性指标满足 $\mathrm{ri}(\Omega^m_{R/K}) = m+2$，当 $1 \leq m \leq n$ 时；并且 $\mathrm{ri}(\Omega^{n+1}_{R/K}) = n+2$。

首先，显然有 $\mathrm{HF}_{\mathbb{X}}$: $1\ n+1\ n+1 \cdots$ 且 $r_{\mathbb{X}} = 1$。经过线性坐标变换，我们可以假设 $p_1 = (1:0:\cdots:0), \ldots, p_{n+1} = (0:\cdots:0:1)$。由此可得 $I_{\mathbb{X}} = \langle X_i X_j \mid 0 \leq i < j \leq n \rangle$。

现在令 $\mathbb{Y}$ 为由饱和齐次理想 $I_{\mathbb{Y}} = \bigcap_{j=1}^{n+1} I^2_{p_j}$ 定义的 $\mathbb{P}^n$ 的零维子概形。于是有 $\mathrm{HF}_{\mathbb{Y}}$: $1\ \binom{n+1}{n}\ \binom{n+2}{n}\ (n+1)^2\ (n+1)^2 \cdots$ 且 $r_{\mathbb{Y}} = 3$。根据 [14], 命题 4.17，我们得到一个分次R-模的正合列

$$0 \longrightarrow I_{\mathbb{X}}/I_{\mathbb{Y}} \longrightarrow \Omega^1_{P/K}/I_{\mathbb{X}}\Omega^1_{P/K} \longrightarrow \Omega^1_{R/K} \longrightarrow 0$$

因此我们推得 $\mathrm{ri}(\Omega^1_{R/K}) = 3$。此外，$\Omega^{n+1}_{R/K} \cong (P/\langle X_0, ..., X_n\rangle)(-n-1)$，蕴含 $\mathrm{HF}^{\Omega^{n+1}_{R/K}}$: $0 \ldots 0\ 1\ 0\ 0 \ldots$，且 $\mathrm{ri}(\Omega^{n+1}_{R/K}) = n+2$。

综上，根据命题 6.1，只需证明对所有$m \in \{2, \ldots, n\}$，$\mathrm{HF}^{\Omega^m_{R/K}}(m+1) \neq 0$。注意，$(\Omega^{n+1}_{R/K})_{n+1}$中的元素 $w = dx_0 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$非零。由于 $w = d(x_0\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) \neq 0$，$\Omega^n_{R/K}$ 中的元素 $\tilde{w} = x_0\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$也非零。这意味着 $\mathrm{HF}^{\Omega^n_{R/K}}(n+1) \neq 0$。

根据 $\tilde{w} = (x_0\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m) \wedge (dx_{m+1} \wedge \cdots \wedge dx_n)$，我们得到 $\Omega^m_{R/K}$ 中对所有 $m \in \{2, \ldots, n\}$ 都成立的非零元素$x_0\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$，从而证明了这一断言。

注 5.6. 设 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ 是一组互不相同的 K-有理点。如果 $t \leq n$，那么 $\Omega^{n+1}_{R/K} = 0$。当 $t > n$ 且 $r := \mathrm{ri}(\Omega^{n+1}_{R/K}) > 0$ 时，我们得到 $\Omega^m_{R/K}$ 的正则性指标的下界，即 $\mathrm{ri}(\Omega^m_{R/K}) \geq r+m-n$，其中 $2 \leq m \leq n$。特别地，若 $r = 2r_{\mathbb{X}}+n$，则 $\mathrm{ri}(\Omega^m_{R/K}) = 2r_{\mathbb{X}}+m$，其中 $2 \leq m \leq n$。

6. Kähler Differentials of Curvilinear Schemes

和之前一样，设 $\mathbb{X}$ 是完美域 K 上 $\mathbb{P}^n$ 中的一个零维概形，设 $R = P/I_{\mathbb{X}}$ 是 $\mathbb{X}$ 的齐次坐标环，假设 $x_0 \in R_1$ 是 R 的非零因子，并设 $S = R/\langle x_0 - 1\rangle$ 是 $\mathbb{A}^n \cong D_+(x_0)$ 中 $\mathbb{X}$ 的仿射坐标环。本节将探讨 $\mathbb{X}$ 的局部性质与 R/K 的 Kähler 微分 m-形式模的结构之间的联系，其中$m \geq 1$ 取各种值。

我们的第一个命题刻画了光滑概形。

命题 6.1。在上述设定下，以下条件等价。

(a) 概形 $\mathbb{X}$是光滑的。(b) 我们有 $\Omega^1_{S/K} = \langle 0\rangle$。(c) 我们有 $\mathrm{HP}(\Omega^1_{R/K}) = \deg(\mathbb{X})$，并且 $\mathrm{HP}(\Omega^m_{R/K}) = 0$ 对于 $m \geq 2$。

证明。(a) 与 (b) 等价由 [14], 推论 6.9 得出，而 (b) 与 (c) 等价由命题 3.8 得出。□

回忆一下，$\mathbb{X}$ 中的零维概形 $\mathbb{A}^n$ 具有有限支撑，并且 S 是一个零维仿射 K-代数。设 $\mathfrak{q}_1$，……，$\mathfrak{q}_t$ 是 $\langle 0\rangle$ 在 S 中的初等分量。由中国剩余定理可得一个同构 $S \cong S/\mathfrak{q}_1 \times \cdots \times S/\mathfrak{q}_t$，其中环 $\mathcal{O}_i = S/\mathfrak{q}_i$ 都是零维局部环。

定义 6.2。在上述情形下，设 $(T, \mathfrak{n})$ 是一个剩余类域为 $L = T/\mathfrak{n}$ 的零维局部环。

(a) 若环 T 的极大理想 $\mathfrak{n}$ 由一个元素生成，则称其为（弱）曲线型。(b) 若概形 $\mathbb{X}$ 的局部环 $\mathcal{O}_1$，……，$\mathcal{O}_t$ 全部都是（弱）曲线型，则称该概形为（弱）曲线型。

弱曲线型这一条件可以如下刻画。

命题 6.3. 设 $(T, \mathfrak{n})$ 是一个剩余类域为 $L = T/\mathfrak{n}$ 的零维局部诺特环，并设 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{n}}(T)$ 是 T 的伴随分次环。那么以下条件等价。

(a) 环 T 是弱曲线型的。 (b) T 的伴随分次环具有如下形式：$\mathrm{gr}_{\mathfrak{n}}(T) \cong L[z]/\langle z^m\rangle$，其中$m \geq 1$。

证明. 首先证明 (a) 蕴含 (b)。注意，环 T 是阿廷环，且 $\mathfrak{n} = \langle a\rangle$ 对某个 $a \in T$。那么 T 的每个真理想都是 $\mathfrak{n}$的幂，因此都是主理想。特别地，存在最小的数 $m \geq 1$，使得$\langle 0\rangle = \mathfrak{n}^m = \langle a^m\rangle$。于是，由$z \mapsto a + \mathfrak{n}^2$ 定义的 L-代数满同态 $L[z] \to \mathrm{gr}_{\mathfrak{n}}(T)$ 给出一个同构 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{n}}(T) \cong L[z]/\langle z^m\rangle$，证毕。

反过来，若 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{n}}(T) \cong L[z]/\langle z^m\rangle$，则 $\dim_L(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2) = 1$，因此根据中山引理，$\mathfrak{n}$ 是主理想。所以，环 T 是弱曲线型的。□

我们也来比较一下上述弱曲线型零维概形的定义与 [13]中给出的定义。

注 6.4. 在 [13], 定义 4.3.1 中，若一个 0 维局部仿射 K-代数 T具有 $T \cong K[z]/\langle p(z)^m\rangle$ 的形式，其中 $p(z)$

是 $K[z]$ 和 $m \geq 1$中的一个不可约多项式；若$T \cong K[z]/\langle z^m \rangle$ 对某个 $m \geq 1$成立，则称其为曲线型。

对于按此意义为弱曲线型的环 T，其极大理想 $\langle p(z) \rangle$ 是一个主理想。因此，定义 6.2 推广了 [13] 中的定义。由于弱曲线型零维概形的定义使用了其仿射坐标环的局部环，该定义也推广了 [13] 中的定义。

此外，请注意，在代数闭域 K 的情形下，局部环 $\mathcal{O}_i$ of $\mathbb{X}$ 的极大理想是单生成的，当且仅当它是形如 $\langle z-a \rangle$ in $K[z]$ 的某个理想的剩余类理想，其中 $a \in K$。因此，环 $\mathcal{O}_i$ 同构于形如 $K[z]/\langle z^m \rangle$ 的环，其中 $m \geq 1$，这与曲线型零维概形的经典定义一致。这类概形自然地出现在代数几何中，例如著名的论文 [5] 就展示了这一点。

下一个例子表明，定义 6.2 是对 [13]中定义 4.3.1 的适当推广。

例 6.5. 考虑域 $\mathbb{Q}$ 上的零维概形 $\mathbb{X}$ in $\mathbb{P}^2$，其由理想 $I_{\mathbb{X}} = \langle X_1^2 + X_0^2,\ (X_2^2 - 2X_0^2)^2 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[X_0, X_1, X_2]$定义。其仿射坐标环 $S = \mathbb{Q}[X_1, X_2]/\langle X_1^2 + 1,\ (X_2^2 - 2)^2 \rangle$ 是一个带有极大理想 $\mathfrak{n} = \langle x_2^2 - 2 \rangle$ 和剩余类域 $L = S/\mathfrak{n} \cong \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$ 的零维局部环。

由于理想 $\mathfrak{n}$ 是主理想，按照定义 6.2 的含义，环 S 是弱曲线型的。然而，环 S 不能表示为 $S \cong \mathbb{Q}[z]/\langle p(z)^m \rangle$，其中 $p(z) \in \mathbb{Q}[z]$ 是不可约多项式，且有 $m \geq 1$。此外，注意到$S \ncong \mathrm{gr}_{\mathfrak{n}}(S)$。

本节的主要内容是利用 K¨ahler 微分 m-形式模的希尔伯特多项式来刻画弱曲线型零维概形。

命题 6.6. 对于如上所述的 $\mathbb{P}^n$ 中的零维概形 $\mathbb{X}$，以下条件等价。

(a) 概形 $\mathbb{X}$ 是弱曲线型的，但不是光滑的。(b) 对所有 $m \geq 2$，均有 $\Omega^1_{S/K} \neq \langle 0 \rangle$ 和 $\Omega^m_{S/K} = \langle 0 \rangle$。(c) 我们有 $\mathrm{HP}(\Omega^1_{R/K}) > \deg(\mathbb{X})$，且 $\mathrm{HP}(\Omega^2_{R/K}) = \mathrm{HP}(\Omega^1_{R/K}) - \deg(\mathbb{X})$，以及对 $m > 2$ 有 $\mathrm{HP}(\Omega^m_{R/K}) = 0$。

证明。如上所述，令 $S = R/\langle x_0 - 1 \rangle$ 为 R 的仿射坐标环，并令 $S \cong \mathcal{O}_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_t$ 为其分解成局部环。

首先证明 (a) 推出 (b)。由于 $\mathbb{X}$ 不光滑，根据命题 6.1，我们有 $\Omega^1_{S/K} \neq \langle 0 \rangle$。利用同构 $\Omega^2_{S/K} \cong \Omega^2_{\mathcal{O}_1/K} \times \cdots \times \Omega^2_{\mathcal{O}_t/K}$（见 [14], 命题 4.7），可知只需证明 $\Omega^2_{\mathcal{O}_i/K} = \langle 0 \rangle$ 对于 $i = 1, \ldots, t$ 成立。由于 $\mathbb{X}$ 是弱曲线型的，$\mathcal{O}_i$ 的极大理想由一个元素生成。于是，该元素的微分生成了 $\mathcal{O}_i$-模 $\Omega^1_{\mathcal{O}_i/K}$。因此，该模的二阶及所有更高阶外幂均为零。

反过来，证明 (b) 推出 (a)。由于 $\Omega^1_{S/K} \neq \langle 0 \rangle$，概形 $\mathbb{X}$ 不光滑。对于 $i = 1, \ldots, t$，假设和上面的同构给出 $\Omega^2_{\mathcal{O}_i/K} = 0$。

因此，我们可以假设 S 是局部的。设 $\mathfrak{n}$ 为 S的极大理想。由 [14], 推论 6.5 可得 $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \cong \Omega^1_{S/K}/\mathfrak{n}\Omega^1_{S/K}$，而这个 $S/\mathfrak{n}$-向量空间

满足

$$\Lambda^2_{S/\mathfrak{n}}\,(\Omega^1_{S/K}/\mathfrak{n}\,\Omega^1_{S/K}) \;\cong\; (\Lambda^2_S\Omega^1_{S/K})/(\mathfrak{n}\,\Omega^1_{S/K}\wedge\Omega^1_{S/K}) \;\cong\; \langle 0\rangle$$

因为 $\Lambda^2_S\Omega^1_{S/K} = \Omega^2_{S/K} = \langle 0\rangle$。因此， $S/\mathfrak{n}$-向量空间 $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ 的维数为 1，故 $\mathfrak{n}$ 由一个元素生成。

(b) 与 (c) 的等价性由命题 5.4 得出。 □

基于这一刻画，我们现在推导弱曲线型概形 $\mathbb{X}$ 中 $\Omega^1_{R/K}$ 和 $\Omega^2_{R/K}$ 的希尔伯特多项式的显式公式。以下命题给出了关键要素。

命题 6.7。设 $(T,\mathfrak{n})$ 是一个弱曲线型的零维局部仿射 K-代数。记 $\mathfrak{n}=\langle a\rangle$，其中 $a\in T$，并令 ν 为 a 的幂零指数，即令 $\nu=\min\{i\ge 1\mid a^i=0\}$。此外，令 $L=T/\mathfrak{n}$ 为 T 的剩余域，且 $\kappa=\dim_K(L)$。则下列结论成立。

(a) 我们有 $\dim_K(T)=\dim_K(\mathrm{gr}_{\mathfrak{n}}(T))=\nu\,\kappa$。(b) 我们有 $\dim_K(\Omega^1_{\mathrm{gr}_{\mathfrak{n}}(T)/K})=\begin{cases}\nu\,\kappa & \text{若 } \mathrm{char}(K)\mid\nu(\nu-1)\\ \kappa & \text{若 } \mathrm{char}(K)\nmid\nu\end{cases}$。

(c) 代数 T/K 的诺特不同 $\vartheta_N(T/K)$ 满足

$$\vartheta_N(T/K) \;=\; \mathrm{Ann}_T(\Omega^1_{T/K}) \;=\; \begin{cases}\langle 0\rangle & \text{if } \mathrm{char}(K)\mid\nu\\ \langle a^{\nu-1}\rangle & \text{if } \mathrm{char}(K)\nmid\nu\end{cases}$$

(d) 我们有 $\dim_K(\Omega^1_{T/K})=\dim_K(\Omega^1_{\mathrm{gr}_{\mathfrak{n}}(T)/K})$。

证明。要证明 (a)，只需注意到 $\langle 0\rangle=\mathfrak{n}^\nu\subseteq\mathfrak{n}^{\nu-1}\subseteq\cdots\subseteq\mathfrak{n}\subseteq T$ 得出 $\dim_K(T)=\dim_K(T/\mathfrak{n})+\dim_K(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2)+\cdots+\dim_K(\mathfrak{n}^{\nu-1}/\mathfrak{n}^\nu)=\dim_K(\mathrm{gr}_{\mathfrak{n}}(T))$。

接下来证明 (b)。令 $\bar a=a+\mathfrak{n}^2$，我们有 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{n}}(T)=L[\bar a]\cong L[z]/\langle z^\nu\rangle$，因此 $\Omega^1_{\mathrm{gr}_{\mathfrak{n}}(T)/K}\cong L[z]dz/(L[z]\cdot z^\nu\,dz+L[z]\cdot\nu\,z^{\nu-1}\,dz)$。所以，若设 $\nu'=\nu$，若 $\mathrm{char}(K)\mid\nu$ 且 $\nu'=\nu-1$，若 $\mathrm{char}(K)\nmid\nu$，则得到 $\Omega^1_{\mathrm{gr}_{\mathfrak{n}}(T)/K}\cong L[z]/\langle z^{\nu'}\rangle\cong L^{\nu'}$，结论随之成立。

（c）中的第一个等式由 [14], 命题 10.18 得出。其余结论已在 [15], §18，例 3 中证明。为方便读者，我们用本文的记号回顾证明的主要步骤。设 $b_1,\ldots,b_\kappa\in T$是满足以下条件的元素：它们的剩余类 $b_1,\ldots,b_\kappa\in L$ 构成 K的一个 L基。不失一般性，我们可以假设典范迹映射 $\mathrm{Tr}^{L/K}:\ L\longrightarrow K$ 满足 $\mathrm{Tr}^{L/K}(b_1)=1$，且对 $i=2,\ldots,\kappa$有 $\mathrm{Tr}^{L/K}(b_i)=0$。那么，$B=\{a^i b_j\mid i\in\{0,\ldots,\nu-1\},\,j\in\{1,\ldots,\kappa\}\}$ 中的元素构成 T 的一个 K基。由于对所有 $i\ge 0$都有$\mathfrak{n}\cdot\langle a^i\rangle=\langle a^{i+1}\rangle$，典范迹映射 $\mathrm{Tr}^{T/K}:\ T\longrightarrow K$ 满足：对每个 $c\in T$，都有 $\mathrm{Tr}^{T/K}(c)=\nu\cdot\mathrm{Tr}^{L/K}(\bar c)$。

在特征为 $K\mid\nu$ 的情形下，可得 $\mathrm{Tr}_{T/K}=0$。由于 T 是一个带有迹映射 σ 的戈伦斯坦环，并且根据推论 F.12，对于 $\vartheta_N(T/K)$ 的生成元 $g\in T$，有 $\mathrm{Tr}^{T/K}=g\cdot\sigma$，因此可得 $\vartheta_N(T/K)=\langle 0\rangle$，证毕。

现在假设特征为 $K\nmid\nu$。令 $\sigma:\ T\longrightarrow K$ 为沿着基 B 其余部分到 $a^{\nu-1}b_1$ 的投影。容易验证，σ 是 T/K 的迹映射，且 $\mathrm{Tr}_{T/K}=\nu\,a^{\nu-1}\sigma$。因此，元素 $a^{\nu-1}$ 生成 $\vartheta_N(T/K)$，证毕。

还需证明 (d)。由 $\Omega^1_{T/K}=T\,da$，我们得到 $\dim_K(\Omega^1_{T/K})=\dim_K(T)-\dim_K(\vartheta_N(T/K))$。因此，该结论可由 (b) 和 (c) 推出。□

作为此命题和命题 6.6 的推论，当 $\mathbb{X}$ 为弱曲线型时，我们得到 $\Omega^m_{R/K}$ 的希尔伯特多项式的以下公式。

推论 6.8. 设 $\mathbb{X}$ 是 $\mathbb{P}^n$ 中的一个零维弱曲线型概形，设 $S = \mathcal{O}_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_t$ 是其仿射坐标环分解为局部环的分解，设 L_i 是 $\mathcal{O}_i$ 的剩余类域，设 $\kappa_i = \dim_K(L_i)$，并设 $\nu_i = \dim_K(\mathcal{O}_i)/\kappa_i$ 对于 $i = 1, \ldots, t$。

(a) 我们有 $\mathrm{HP}(\Omega^1_{R/K}) = 2\deg(\mathbb{X}) - \sum_{\text{特征}(K)\nmid\nu_i} \kappa_i$. (b) 我们有 $\mathrm{HP}(\Omega^2_{R/K}) = \deg(\mathbb{X}) - \sum_{\text{特征}(K)\nmid\nu_i} \kappa_i$. (c) 对于 $m > 2$，我们有 $\mathrm{HP}(\Omega^m_{R/K}) = 0$。

7. Kähler Differentials of Fat Point Schemes

对于胖点概形，关于 K¨ahler 微分模的希尔伯特函数和希尔伯特多项式的上述结果可以得到更明确的表述。设 K 是一个完美域，且 $P = K[X_0, \ldots, X_n]$。设 $t \geq 1$，令 p_1、.....、p_t 为 $\mathbb{P}^n$ 中互不相同的 K-有理点，并令 $I_{p_i} \subseteq P$ 为关于 $i = 1$、.....、t 的 p_i 的齐次消失理想。给定正整数 m_1、.....、m_t，回忆一下，由饱和齐次理想定义的零维概形 $\mathbb{X}$

$$I_{\mathbb{X}} = I_{p_1}^{m_1} \cap \cdots \cap I_{p_t}^{m_t}$$

称为支撑为 $\mathrm{Supp}(\mathbb{X}) = \{p_1, \ldots, p_t\}$、重数为 m_1、.....、m_t 的胖点概形。通常将概形 $\mathbb{X}$ 写作 $\mathbb{X} = m_1 p_1 + \cdots + m_t p_t$。下面我们先总结这一情形的一些初步观察。

注 7.1. 对于 $\mathbb{X} = m_1 p_1 + \cdots + m_t p_t$ 中 $\mathbb{P}^n$的胖点概形，我们知道：

(a) $\mathbb{X}$ 的次数由 $\deg(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^t \binom{n+m_i-1}{n}$ 给出。(b) 概形 $\mathbb{X}$ 是约化概形，当且仅当对 $m \geq 2$，$\mathrm{HP}(\Omega^1_{R/K}) = t$ 且 $\mathrm{HP}(\Omega^m_{R/K}) = 0$。

自然会问，对于 $1 \leq m \leq n+1$，$\Omega^m_{R/K}$ 的希尔伯特多项式是什么。更确切地说，$\Omega^m_{R/K}$ 的希尔伯特多项式是否仅取决于 m、n以及重数 m_1、.....、m_t?

根据命题 5.4，要确定胖点概形 $\mathbb{X}$的 $\Omega^m_{R/K}$的希尔伯特多项式，只需求出对于 $m = 1$、.....、n，K-向量空间 $\Omega^m_{S/K}$的维数。根据命题 4.7，我们有

$$\Omega^m_{S/K} = \Omega^m_{\mathcal{O}_1/K} \times \cdots \times \Omega^m_{\mathcal{O}_t/K}$$

因此 $\dim_K(\Omega^m_{S/K}) = \sum_{i=1}^t \dim_K(\Omega^m_{\mathcal{O}_i/K})$。这引出我们计算 $\mathbb{X}$的一个胖点处的 $\dim_K(\Omega^m_{\mathcal{O}_i/K})$。

利用齐次线性坐标变换，我们假设 $\mathbb{X} = kp$ with$p = (1 : 0 : \ldots : 0)$ and $k \geq 1$。于是我们有 $I_p = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle \subseteq P$。令$A := K[X_1, \ldots, X_n]$ and $\mathfrak{q} := \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$，则 $\mathbb{X}$ 在 p 处的局部环为 $S = A/\mathfrak{q}^k$。

在约化情形 $k = 1$ 中，对于所有 $m \geq 2$，我们都有 $\Omega^m_{S/K} = \langle 0 \rangle$。因此现在考虑情形 $k \geq 2$。我们赋予 A 标准分次，并注意到 $\mathfrak{q}^k$ 是

一个齐次理想。因此， S 是一个分次的 0 维仿射 K-代数。其希尔伯特函数为

$$\mathrm{HF}_S(i) \;=\; \begin{cases} \binom{n-1+i}{n-1} & \text{for } 0 \le i \le k-1 \\ 0 & \text{for } i \ge k \end{cases}$$

因此 $\dim_K(S) = \sum_{i\ge 0}$希尔伯特函数$_S(i) = \binom{n+k-1}{n}$。

接下来，我们要明确描述分次 S-模 $\Omega^m_{S/K}$ 对所有 $m \ge 1$ 的希尔伯特函数。注意，对于 $m > n$， $\Omega^m_{S/K} = 0$ 。

命题 7.2. 在上述设定中，设 $1 \le m \le n$。那么 $\Omega^m_{S/K}$ 的希尔伯特函数为

$$\mathrm{HF}_{\Omega^m_{S/K}}(i) \;=\; \begin{cases} \binom{n}{m}\binom{n+i-m-1}{n-1} & \text{if } i < m+k-1 \\ \binom{n}{m}\binom{n+k-2}{n-1} - \delta & \text{if } i = m+k-1 \\ 0 & \text{if } i > m+k-1 \end{cases}$$

其中 $\delta = \dim_K(d\mathfrak{q}^k \wedge \Omega^{m-1}_{A/K})_{m+k-1}$。

证明。由 [14], 命题 4.12，我们得到一个分次 A-模的齐次短正合列

$$0 \;\longrightarrow\; (\mathfrak{q}^k\,\Omega^m_{A/K} + d\mathfrak{q}^k \wedge \Omega^{m-1}_{A/K}) \;\longrightarrow\; \Omega^m_{A/K} \;\longrightarrow\; \Omega^m_{S/K} \;\longrightarrow\; 0$$

其中 $\Omega^{m-1}_{A/K} = A$ if $m = 1$。这里， $\Omega^m_{A/K} = \bigoplus_{1\le i_1<\cdots<i_m\le n} A dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_m}$ 是一个秩为 $\binom{n}{m}$ 的分次自由 A-模，其基元素的次数为 m。此外，我们有 $\mathfrak{q}^k = \langle t_1, \ldots, t_N \rangle$ ，其中 $\mathbb{T}^n_k = \{t_1, \ldots, t_N\}$ 且 $N = \binom{n+k-1}{n-1}$。由命题 5.2，我们有

$$d\mathfrak{q}^k \;=\; \langle\, dt_1, \ldots, dt_N \,\rangle + \langle\, t_i dX_j \mid 1 \le i \le N;\ 1 \le j \le n \,\rangle$$

特别地，分次 A-模 $\mathfrak{q}^k\,\Omega^m_{A/K} + d\mathfrak{q}^k \wedge \Omega^{m-1}_{A/K}$ 由次数为 $m+k-1$ 和 $m+k$ 的元素生成。因此，对于 $i < m+k-1$，我们有

$$\mathrm{HF}_{\Omega^m_{S/K}}(i) \;=\; \mathrm{HF}_{\Omega^m_{A/K}}(i) \;=\; \binom{n}{m}\binom{n+i-m-1}{n-1}$$

此外，对于 $i \ge m+k$，我们有 $A_{i-m} = (\mathfrak{q}^k)_{i-m}$ 且

$$(\Omega^m_{A/K})_i \;=\; \sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le n} A_{i-m} dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_m} \;=\; (\mathfrak{q}^k \Omega^m_{A/K} + d\mathfrak{q}^k \wedge \Omega^{m-1}_{A/K})_i$$

因此，我们得到 $\mathrm{HF}^{\Omega^m_{S/K}}(i) = 0$。在 $i = m+k-1$ 情形下，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{HF}_{\Omega^m_{S/K}}(m+k-1) \;&=\; \mathrm{HF}_{\Omega^m_{A/K}}(m+k-1) - \dim_K(d\mathfrak{q}^k \wedge \Omega^{m-1}_{A/K})_{m+k-1} \\ &=\; \binom{n}{m}\binom{n+k-2}{n-1} - \dim_K(d\mathfrak{q}^k \wedge \Omega^{m-1}_{A/K})_{m+k-1} \end{aligned}$$

因为 $(\mathfrak{q}^k \Omega^m_{A/K})_{m+k-1} = 0$。 □

要完整描述 $\Omega^m_{S/K}$ 的希尔伯特函数，还需计算$\delta = \dim_K(d\mathfrak{q}^k \wedge \Omega^{m-1}_{A/K})_{m+k-1}$。为此，我们作如下简化记号。

注 7.3. 对每个 $m \ge 1$，由$\varrho(f dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_m}) = f e_{i_1,\ldots,i_m}$给出的映射 $\varrho : \Omega^m_{A/K} \longrightarrow A(-m)^{\binom{n}{m}}$，其中 $f \in A$且 $1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n$，是分次 A-模的同构。注意，标准基向量的次数满足 $\deg(e_{i_1,\ldots,i_m}) = m$ 。

为了计算所求的数 δ，我们必须考虑 $A(-m)^{\binom{n}{m}}$ 的分次 A-子模$U = \varrho(d\mathsf{q}^k \wedge \Omega^{m-1}_{A/K})$。根据命题 7.2，对于 $i < m+k-1$，有 $U_i = \{0\}$；对于 $i > m+k-1$，有 $U_i = (A(-m)^{\binom{n}{m}})_i$。因此，$U$ 唯一值得关注的齐次分量是 U_{m+k-1}，其 K- 维数就是我们要找的数 δ。向量空间 U_{m+k-1} 将称为 $\Omega^1_{S/K}$ 的初始定义向量空间。

为了描述 U_{m+k-1} 的 K-基，我们在 $A(-m)^{\binom{n}{m}}$ 上使用模项序$\sigma =$ 反向字典序 – 位置，并确定一个具有互不相同首项的 U_{m+k-1} 生成元系。这里，标准基向量 $e_{i_1,\ \ldots,\ i_m}$ 通过对元组 $(i_1, \ldots, i_m)$ 使用字典序进行排序。接下来的三个命题为我们的主要结果奠定基础。

命题 7.4。在前述备注的设定下，假设 $\mathrm{char}(K) = 0$或 $\mathrm{char}(K) > k$。令 $\{t_1, \ldots, t_N\}$ 为 A 中次数为 $m+k-1$ 的项的集合，其中 $N = \binom{n+k-1}{n-1}$，并且这些项按照反向字典序递减排列。

(a) 对于 $i = 1, \ldots, N$，我们有 $\varrho(dt_i) = \frac{\partial t_i}{\partial X_1} e_1 + \cdots + \frac{\partial t_i}{\partial X_n} e_n$。我们将右侧的向量记为 $\mathrm{grad}(t_i)$。(b) 设 $i \in \{1, \ldots, N\}$，并写作 $t_i = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \in \mathbb{T}^n_k$，其中 $\alpha_j \geq 0$。那么我们有

$$\mathrm{LT}_\sigma(\mathrm{grad}(t_i)) = \begin{cases} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n - 1} e_n & \text{if} \quad \alpha_n > 0 \\ X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_{n-1}^{\alpha_{n-1} - 1} e_{n-1} & \text{if} \quad \alpha_n = 0, \alpha_{n-1} > 0 \\ \vdots & \\ X_1^{\alpha_1 - 1} e_1 & \text{if} \quad \alpha_n = \cdots = \alpha_2 = 0, \alpha_1 = k \end{cases}$$

(c) 对于 $i \in \{1, \ldots, N\}$，我们可以将 $\mathrm{LT}_\sigma(\mathrm{grad}(t_i)) = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \cdots X_\ell^{\beta_\ell} e_\ell$写成 $\ell \in \{1, \ldots, n\}$和 $\beta_j \geq 0$。那么我们有 $t_i = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \cdots X_\ell^{\beta_\ell + 1}$。
因此，$\mathrm{LT}_\sigma(\mathrm{grad}(t_i))$ 并且 t_i 唯一地相互确定，且所有首项 $\mathrm{LT}_\sigma(\mathrm{grad}(t_i))$ 两两不同。
(d) 在 $m = 1$ 情形下，集合 $B_1 = \{\mathrm{LT}_\sigma(\mathrm{grad}(t_1)) \ldots, \mathrm{LT}_\sigma(\mathrm{grad}(t_N))\}$ 具有 $N = \binom{n+k-1}{n-1}$ 个不同元素。

证明。断言 (a) 可由 $dt_i = \frac{\partial t_i}{\partial X_1} X_1 + \cdots + \frac{\partial t_i}{\partial X_n} X_n$ 得出，而断言 (b) 是 $\mathrm{grad}(t_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j X_1^{\alpha_1} \cdots X_j^{\alpha_j - 1} \cdots X_n^{\alpha_n} e_j$ 的推论。断言 (c) 由 (b) 得出，而断言 (d) 由 (c) 得出。□

在 $m \geq 2$ 情形下，确定 U_{m+k-1} 中的首项要稍微复杂一些。

命题 7.5。（初始定义向量空间的生成元）
在上述设定中，令 $m \geq 2$，并假设 $\mathrm{char}(K) = 0$ 或 $\mathrm{char}(K) > k$。对于 $i \in \{1, \ldots, N\}$ 和 $1 \leq j_1 < \cdots < j_{m-1} \leq n$，令$J = \{j_1, \ldots, j_{m-1}\}$，并定义

$$v_{i,J} = \varrho(dt_i \wedge dX_{j_1} \wedge \cdots \wedge dX_{j_{m-1}}) \in U_{m+k-1}.$$

(a) 向量的集合 $G\ v_{i,\ J}$ 生成了 K-向量空间 U_{m+k-1}。

(b) 对于上述集合 $J=\{j_1,\dots,j_{m-1}\}$ 以及 $\ell\notin J$，取 $\nu_\ell\in\{0,\dots,m-1\}$使得 $1\le j_1<\cdots<j_{\nu_\ell}<\ell<j_{\nu_\ell+1}<\cdots<j_{m-1}\le n$，并令$\bar{e}_{\ell,\ J}=(-1)^{\nu_\ell}\,e_{j_1,\ j_{\nu_\ell},\ \ell,\ j_{\nu_\ell+1},\ j_{m-1}}$。于是有

$$v_{i,J}=\sum_{\ell\notin J}\frac{\partial t_i}{\partial X_\ell}\,\bar{e}_{\ell,J}.$$

证明。断言 (a) 由以下事实得出：元素 $dt_i\wedge dX_{j_1}\wedge\cdots\wedge dX_{j_{m-1}}$生成向量空间 $(\mathfrak{q}^k\Omega^m_{A/K}+d\mathfrak{q}^k\wedge\Omega^{m-1}_{A/K})_{m+k-1}$，因为 $(\mathfrak{q}^k\Omega^m_{A/K})_{m+k-1}=0$。

为证明 (b)，我们计算

$$\begin{aligned}dt_i\wedge dX_{j_1}\wedge\cdots\wedge dX_{j_{m-1}}&=\left(\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial t_i}{\partial X_\ell}dX_\ell\right)\wedge dX_{j_1}\wedge\cdots\wedge dX_{j_{m-1}}\\&=\sum_{\ell\notin J}\frac{\partial t_i}{\partial X_\ell}(-1)^{\nu_\ell}dX_{j_1}\wedge\cdots\wedge dX_{j_{\nu_\ell}}\wedge dX_\ell\wedge dX_{j_{\nu_\ell+1}}\wedge\cdots\wedge dX_{j_m}\end{aligned}$$

并应用映射 ϱ。 □

描述了初始定义向量空间的生成元系后，现在我们转而求它相对于 σ 的首项向量空间。然后，我们可以通过 $\dim_K(U_{m+k-1})=\dim_K(\mathrm{LT}_\sigma(U_{m+k-1}))$ 推出其维数。

命题 7.6.（初始定义向量空间的首项）在上述设定下，假设 $\mathrm{char}(K)=0$ 或 $\mathrm{char}(K)>k$。

(a) 令 $i\in\{1,\dots,N\}$ 和 $J=\{j_1,\dots,j_{m-1}\}$，其中 $1\le j_1<\cdots<j_{m-1}\le n$。则有

$$\mathrm{LT}_\sigma(v_{i,J})\ =\ \tfrac{t_i}{X_\ell}\,e_{\ell,J}$$

其中 $\ell\in\{1,\dots,n\}$ 是满足 $\ell\notin J$和 $X_\ell\mid t_i$的最大指标，并且 $e_{\ell,J}=e_{j_1,\dots,j_\nu,\ell,j_{\nu+1},\dots,j_{m-1}}$。如果不存在这样的 ℓ，则有 $v_{i,J}=0$。

(b) 令 $i,i'\in\{1,\dots,N\}$ 满足 $i\le i'$，并假设 $J=\{j_1,\dots,j_{m-1}\}$和 $J'=\{j'_1,\dots,j'_{m-1}\}$ 满足 $1\le j_1<\cdots<j_{m-1}\le n$ 以及$1\le j'_1<\cdots<j'_{m-1}\le n$。设有 $v_{i,J}\ne v_{i',J'}$ 且 $\mathrm{LT}_\sigma(v_{i,J})=\mathrm{LT}_\sigma(v_{i',J'})$。则以下性质成立。

(1) $i<i'$(2) 存在指标 $\ell\in\{1,\dots,n\}\setminus J$ 和 $\ell'\in\{1,\dots,n\}\setminus J'$，使得 $t_i=X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$ 和 $t_{i'}=X_1^{\alpha'_1}\cdots X_n^{\alpha'_n}$ 满足 $\alpha_\ell=\alpha'_\ell+1$ 和 $\alpha'_{\ell'}=\alpha_{\ell'}+1$。(3) $\ell<\ell'$(4) 集合 $\hat{}J=J\cap J'$ 满足 $\hat{}J=J\setminus\{\ell'\}=J'\setminus\{\ell\}$。(5) 我们有分解 $t_i=\hat{}t\cdot\tilde{t}\cdot X_\ell^{\alpha_\ell}X_{\ell'}^{\alpha_{\ell'}}$ 和 $t_{i'}=\hat{}t\cdot\tilde{t}\cdot X_\ell^{\alpha'_\ell}X_{\ell'}^{\alpha'_{\ell'}}$，其中 $\hat{}t\in K[X_j\mid j\in\hat{}J]$，且其中 $\tilde{t}=X_{\nu_1}^{\alpha_{\nu_1}}\cdots X_{\nu_r}^{\alpha_{\nu_r}}$ 满足 $\nu_1,\dots,\nu_r\notin\hat{}J\cup\{\ell,\ell'\}$。

(c) 在 (b) 的设定下，我们有

$$\begin{aligned}v_{i,J}\ &=\ \alpha_\ell\ \mathrm{LT}_\sigma(v_{i,J})+\sum_{\kappa=1}^{r}\hat{t}\ X_\ell^{\alpha_\ell}X_{\ell'}^{\alpha_{\ell'}}\tfrac{\partial\tilde{t}}{\partial X_{\nu_\kappa}}\,e_{\nu_\kappa,J}\quad and\\ v_{i',J'}\ &=\ \alpha'_{\ell'}\ \mathrm{LT}_\sigma(v_{i',J'})+\sum_{\kappa=1}^{r}\hat{t}\ X_\ell^{\alpha_\ell-1}X_{\ell'}^{\alpha_{\ell'}+1}\tfrac{\partial\tilde{t}}{\partial X_{\nu_\kappa}}\,e_{\nu_\kappa,J'}\end{aligned}$$

(d) G 中元素的首项生成 $\mathrm{LT}_\sigma(U_{m+k-1})$。

(e) *The set of distinct σ-leading terms of elements of G is*

$$B_m := \{\, t\, e_{j_1,\ldots,j_m} \mid t = X_1^{\alpha_1}\cdots X_\ell^{\alpha_\ell} \in \mathbb{T}^\ell_{k-1}, 1 \le j_1 < \cdots < j_m \le n,\, \ell \le j_m, \alpha_\ell > 0\}$$
$$= \{\mathrm{LT}_\sigma(v_{i,J}) \mid i \in \{1,\ldots,N\},\, J = \{j_1,\ldots,j_{m-1}\},\, 1 \le j_1 < \cdots < j_{m-1} \le n\}.$$

(f) *We have* $\#B_m = \binom{n}{m}\binom{n+k-2}{n-1} - \binom{m+k-2}{m}\binom{n+k-2}{n-m-1}$.

证明。首先证明 (a)。如果对所有满足 $\ell \in \{1,\ldots,n\}$ 的指标 $\ell \in J$ 都有 $X_\ell \mid t_i$，那么命题 7.5.b 表明 $v_{i,J} = 0$。因此，设最大指标 ℓ 满足 $X_\ell \mid t_i$ 且 $\ell \notin J$ 存在。根据命题 7.5.b，我们可以写成 $\mathrm{LM}_\sigma(v_{i,J}) = \frac{\partial t_i}{\partial X_\ell}\, \bar{e}_{\ell,J}$，只需注意 $\frac{\partial t_i}{\partial X_\ell}$ 与 $\frac{t_i}{X_\ell}$ 相差 K 的一个单位。

接下来，我们逐一证明 (b) 中所述的性质。为验证 (1)，我们注意到 $i = i'$ 蕴含 $\mathrm{LT}_\sigma(v_{i,J})$ 和 $\mathrm{LT}_\sigma(v_{i',J'})$ 中的幂乘积相等。但这样一来，这两个首项的位置也必须相同，即有 $J = J'$。总之，等式 $(i,J) = (i',J')$ 与 $v_{i,J} \neq v_{i',J'}$ 矛盾。

为检验 (2)，我们利用 (a)，找到 $\ell, \ell' \in \{1,\ldots,n\}$，使得 $\mathrm{LT}_\sigma(v_{i,J}) = \mathrm{LT}_\sigma(v_{i',J'})$ 中的幂乘积为 $\frac{t_i}{X_\ell} = \frac{t_{i'}}{X_{\ell'}}$。正如我们刚才所见，这两个幂乘积不可能相等，因此 $\ell \neq \ell'$。现在，$X_{\ell'}\, t_i = X_\ell\, t_{i'}$ 给出了不定元指数所需的等式。

为了看出 (3) 为什么成立，我们必须回想一下，项 $t_1, \ldots, t_N$ 是按照反向字典序降序排列的。因此，$i < i'$ 给出 $t_i >_{\mathtt{DegRevLex}} t_{i'}$。由于这两项仅在 X_ℓ 和 $X_{\ell'}$ 的指数上不同，因此可知 $\ell < \ell'$，因为对于不定元 $X_{\ell'}$，$t_{i'}$ 的指数较大。

断言 (4) 由 (2) 立即得出。因此，只需验证 (5)。令 $\tilde{t}_i$ 为 t_i 中不在 $\hat{}\, J \cup \{\ell, \ell'\}$ 里的不定元的幂乘积，并类似地定义 $\tilde{t}_{i'}$。回想一下，$\ell = \max\{\lambda \notin J \mid \alpha_\lambda > 0\}$。因此，所有整除 $\tilde{t}_i$ 的不定元的指标 $\lambda \notin \hat{}J \cup \{\ell, \ell'\}$ 都满足 $\lambda < \ell$。类似地，我们有 $\ell' = \max\{\lambda \notin \hat{}J \cup \{\ell\} \mid \alpha_\lambda > 0\}$。这个最大值大于 ℓ，而 ℓ 的极大性意味着，在 ℓ 和 ℓ' 之间不存在这样的指标 λ。因此，所有整除 $\tilde{t}_{i'}$ 的不定元的指标 $\lambda \notin \hat{}J \cup \{\ell, \ell'\}$ 都满足 $\lambda < \ell$，于是得到 $\tilde{}\quad \tilde{}\quad \tilde{}t := t_i = t_{i'}$。由于 t_i 和 $t_{i'}$ 的指数仅在 X_ℓ 和 $X_{\ell'}$ 处不同，将指标属于 $\hat{}J$ 的不定元合并为 $\hat{}t$，便得到 t_i 和 $t_{i'}$ 所要求的分解。

为了证明 (c)，我们必须考察 $dt_i \wedge e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{m-1}}$ 在 ϱ 下的像。利用 (b.5) 中给出的 t_i 的分解，并注意到对于 $\lambda \in J = J \cup \{\ell'\}$，$e_\lambda \wedge \hat{} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{m-1}} = 0$，楔积中只有涉及偏导数 $\frac{\partial t_i}{\partial X_\lambda}$ 且带有 $X_\lambda \mid \tilde{t}$ 或 $\lambda = \ell$ 的项不会消失。根据 (a) 中所示的 $\mathrm{LT}_\sigma(v_{i,J})$ 公式，即得出关于 $v_{i,J}$ 的结论。对于 $v_{i',J'}$，同理可得。

接下来证明 (d)。如果线性组合 $\sum_i c_i v_{i,J}$ 中最大的首项在 $c_i \in K$ 下不相消，那么所得向量的首项就是某个 $\mathrm{LT}_\sigma(v_{i,J})$，结论成立。现在假设线性组合中出现的最大项相消。我们对线性组合结果中出现的最大项进行归纳法，并证明它可以利用 G 化简。于是，G 中元素的首项生成 $\mathrm{LT}_\sigma(U_{n+k-1})$。

开始归纳法时，我们注意到，次数为 $m + k - 1$ 的最小项是 $X_n^{k-1} e_{n-m+1,\ldots,n}$。它是 $\varrho(dX_n^k\, e_{n-m+1} \wedge \cdots \wedge e_{n-1})$ 的首项，因此也是 $\mathrm{LT}_\sigma(G)$ 中的首项。减去 G 中相应元素的适当倍数后，结果必为零，因为不存在更小的项。

对于归纳步骤，我们注意到，向量 $v_{i,J}$的任何线性组合，只要其最大项相消，就可以写成如下形式的基本 syzygy 的线性组合

$$\alpha_{\ell'} v_{i,J} - \alpha_\ell v_{i',J'} \;=\; \alpha_{\ell'} \sum_{\kappa=1}^{r} \hat{t}\, X_\ell^{\alpha_\ell} X_{\ell'}^{\alpha_{\ell'}} \tfrac{\partial \tilde{t}}{\partial X_{\nu_\kappa}}\, e_{\nu_\kappa,J} - \alpha_\ell \sum_{\kappa=1}^{r} \hat{t}\, X_\ell^{\alpha_\ell - 1} X_{\ell'}^{\alpha_{\ell'}+1} \tfrac{\partial \tilde{t}}{\partial X_{\nu_\kappa}}\, e_{\nu_\kappa,J'}$$

因此，只需考虑一个基本 syzygy，其支撑包含尚未证明该断言的最大项。由于 $X_\ell^{\alpha_\ell} X_{\ell'}^{\alpha_{\ell'}}$ 大于$X_\ell^{\alpha_\ell - 1} X_{\ell'}^{\alpha_{\ell'}+1}$，可知此 syzygy 的首项是 $\hat{}t\, X_{\ell'}^{\alpha_{\ell'}} \frac{\tilde{t}}{X_{\nu_r}} X_\ell^{\alpha_\ell} e_{\nu_r,\, J}$。该项是 $v_{i'',\, J''}$的首项，其中 $t_{i''} = t_i \cdot X_{\ell'}/X_{\nu_r}$和 $J'' = \{\nu_r\} \cup \hat{}J$，因为我们有 $t_{i''} = \hat{}t\, X_{\nu_1}^{\alpha_{\nu_1}} \cdots X_{\nu_{r-1}}^{\alpha_{\nu_{r-1}}} \cdot X_{\nu_r}^{\alpha_{\nu_r}-1} X_\ell^{\alpha_\ell}\, X_{\ell'}^{\ell'+1}$和 $\{\nu_r, \ell'\} \cup \hat{}J = \{\nu_r\} \cup J$。因此，若减去 $v_{i'',\, J''}$的适当倍数，所得结果为零或首项更小，而该断言由归纳假设得证。

为证明 (e)，我们首先说明 B_m 中的每个元素确实都是 G 中某个元素的首项˜。给定 $t\, e_{j_1,\ldots,j_m} \in B_m$，其中 $t \in \mathbb{T}_k^n$，令 $t = t\, X_{j_m}$和 $J = \{j_1, \ldots, j_{m-1}\}$。那么 $\tilde{t}$ 的次数为 k，而关于 K 的特征的假设意味着 $\alpha_{j_m} + 1 \le \deg(\tilde{t}) = k$ 是 K 中的一个单位。选取满足 $t_i = \tilde{t}$ 的 $i \in \{1, \ldots, N\}$，由 (a) 得到 $\mathrm{LT}_\sigma(v_{i,J}) = t\, e_{j_1,\ldots,j_m}$。

反过来，(a) 部分表明，G 中任意元素的首项都属于 B_m。我们还注意到，B_m 中的元素显然两两不同。

最后，为证明 (f)，我们计算 $\#B_m$。给定一个固定的指标 $\ell \in \{1, \ldots, n\}$，为了构造一个项 $t = X_\ell \cdot \hat{}t$，使得 $\hat{}t \in \mathbb{T}_{k-2}^{\ell}$，我们有 $\binom{\ell+k-3}{\ell-1}$ 种选择。在满足 $j_1 < \cdots < j_m$ 的所有 $\binom{n}{m}$种 $(j_1, \ldots, j_m)$ 选择中，需减去满足 $\{j_1, \ldots, j_m\} \subseteq \{1, \ldots, \ell-1\}$ 的所有 $\binom{\ell-1}{m}$ 种选择。总之，我们得到

$$\begin{aligned}\#B_m &= \sum_{\ell=1}^{n} \tbinom{\ell+k-3}{\ell-1}\big[\tbinom{n}{m} - \tbinom{\ell-1}{m}\big] = \tbinom{n}{m} \sum_{\ell=0}^{n-1} \tbinom{\ell+k-2}{\ell} - \sum_{i=0}^{n-m-1} \tbinom{m+i+k-2}{m+i}\tbinom{m+i}{m} \\ &= \tbinom{n}{m}\tbinom{n+k-2}{n-1} - \sum_{i=0}^{n-m-1} \tbinom{m+i+k-2}{m+k-2}\tbinom{m+k-2}{m} = \tbinom{n}{m}\tbinom{n+k-2}{n-1} - \tbinom{m+k-2}{m}\tbinom{n+k-2}{n-m-1}\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

请注意，在（d）部分的证明的关键步骤中，我们甚至可以给出更明确的表达，如下述注记所示。

注 7.7. 设 $v_{i,J}$ 和 $v_{i',J'}$ 是两个向量，满足 $\mathrm{LT}_\sigma(v_{i,J}) = \mathrm{LT}_\sigma(v_{i',J'})$，其中 $i, i' \in \{1, \ldots, N\}$ 和 J, J' 满足命题（b）部分的条件。于是，我们可以将 $v_{i,J}$ 和 $v_{i',J'}$ 的基本 syzygy 写成如下形式

$$\alpha_{\ell'} v_{i,J} - \alpha_\ell v_{i',J'} \;=\; \sum_{\kappa=1}^{r} \alpha_{\nu_\kappa} v_{\mu_\kappa, J_\kappa}$$

其中 v_{μ_κ, J_κ} 是 $\mathrm{grad}(X_{\ell'}\, t_i/X_{\nu_\kappa}) \wedge e_{\nu_\kappa,\, \hat{}J}$在 ϱ下的像。这可通过直接但冗长的计算得出，并为（d）提供了另一种证明。

现在我们可以证明本节的主要结果，该结果使我们能够确定胖点的 K¨ahler 微分模的希尔伯特函数。

定理 7.8. 设 $k \ge 1$，令 K 为特征 $\mathrm{char}(K) = 0$ 或 $\mathrm{char}(K) > k$的域，令 $\mathfrak{q} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$为 $A = K[x_1, \ldots, x_n]$的齐次极大理想，并令 $S = A/\mathfrak{q}^k$。

(a) 对每个 $m \geq 1$，我们有

$$\delta \;=\; \dim_K(d\mathfrak{q}^k \wedge \Omega^{m-1}_{A/K})_{m+k-1} \;=\; \tbinom{n}{m}\tbinom{n+k-2}{n-1} - \tbinom{m+k-2}{m}\tbinom{n+k-2}{n-m-1}.$$

(b) 对每个 $m \geq 1$，我们有

$$\dim_K(\Omega^m_{S/K}) \;=\; \tbinom{n}{m}\tbinom{n+k-2}{n} + \tbinom{m+k-2}{m}\tbinom{n+k-2}{n-m-1}.$$

证明。为证明 (a)，我们利用注 7.3 中的映射 ϱ，将 $(d\mathfrak{q}^k \wedge \Omega^{m-1}_{A/K})_{m+k-1}$ 视为 $(A(-m)^{\binom{n}{m}})_{m+k-1}$ 的 K-向量子空间 U_{m+k-1}。

在 $m = 1$ 情形下，我们应用命题 7.4，得到

$$\dim_K(d\mathfrak{q}^k)_k \;=\; \dim_K\langle \mathrm{LT}_\sigma(\mathrm{grad}(t_1)), \ldots, \mathrm{LT}_\sigma(\mathrm{grad}(t_N))\rangle_K \;=\; \tbinom{n+k-1}{n-1}$$

因此，结论由下式得出

$$\tbinom{n+k-1}{n-1} = \tbinom{n+k-2}{n-1} + \tbinom{n+k-2}{n-2} = n\tbinom{n+k-2}{n-1} - k\tbinom{n+k-2}{n-2} + \tbinom{n+k-2}{n-2}.$$

现在令 $m \geq 2$。鉴于命题 7.6，只需注意 B_m 中的元素构成 $\mathrm{LT}_\sigma(U_{m+k-1})$ 的一个 K-基，并应用众所周知的等式 $\dim_K(U_{m+k-1}) = \dim_K(\mathrm{LT}_\sigma(U_{m+k-1}))$（例如参见 [12]，定理 5.1.18）。

为证明 $m = 1$ 情形下的 (b)，我们使用命题 7.2，得到

$$\dim_K(\Omega^1_{S/K})_k \;=\; n\tbinom{n+k-2}{n-1} - \tbinom{n+k-1}{n-1} = (k-1)\tbinom{n+k-2}{n-2}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\dim_K(\Omega^1_{S/K}) \;&=\; \sum_{i=0}^{k-1} n\tbinom{n+i-2}{n-1} + (k-1)\tbinom{n+k-2}{n-2} \\ &=\; n\tbinom{n+k-2}{n} + (k-1)\tbinom{n+k-2}{n-2}.\end{aligned}$$

最后，我们证明 $m \geq 2$ 情形下的 (b)。由 (a) 和命题 7.2，我们有

$$\mathrm{HF}_{\Omega^m_{S/K}}(m+k-1) = \tbinom{n}{m}\tbinom{n+k-2}{n-1} - \delta = \tbinom{m+k-2}{m}\tbinom{n+k-2}{n-m-1}.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\dim_K(\Omega^m_{S/K}) \;&=\; \sum_{i=0}^{m+k-2} \tbinom{n}{m}\tbinom{n+i-m-1}{n-1} + \tbinom{m+k-2}{m}\tbinom{n+k-2}{n-m-1} \\ &=\; \tbinom{n}{m}\tbinom{n+k-2}{n} + \tbinom{m+k-2}{m}\tbinom{n+k-2}{n-m-1}.\end{aligned}$$

由此，定理得证。 □

在对基域特征稍严格一些的假设下，我们可以给出该定理的另一种证明，此证明基于 $\mathbb{X}$ 的仿射坐标环 $S = R/\langle x_0 - 1\rangle = K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{q}^k$ 的欧拉-科祖尔复形，其中 $\mathfrak{q} = \langle X_1、\ldots、X_n\rangle$。该复形构造如下。仿照定义 4.1，代数 S/K 具有欧拉形式 $\varepsilon_S : \Omega^1_{S/K} \to \mathfrak{q}/\mathfrak{q}^k$，其定义为：对每个齐次元素 $f \in S$，有 $\varepsilon_S(d_{S/K}f) = \deg(f) \cdot f$。构造 ε_S 的科祖尔复形后，我们得到以下结果。

命题 7.9。在上述设定中，令 $\varepsilon_S : \Omega^1_{S/K} \to \mathfrak{q}/\mathfrak{q}^k$ 为 S/K 的欧拉形式。

(a) 这一列 S-线性映射

$$0 \longrightarrow \Omega^n_{S/K} \xrightarrow{\varepsilon_S^{(n)}} \cdots \xrightarrow{\varepsilon_S^{(3)}} \Omega^2_{S/K} \xrightarrow{\varepsilon_S^{(2)}} \Omega^1_{S/K} \xrightarrow{\varepsilon_S} \mathfrak{q}/\mathfrak{q}^k \longrightarrow 0$$

是一个复形，称为 S/K 的欧拉-科祖尔复形。这里，$\varepsilon_S^{(i)}$ 定义为 $\varepsilon_S^{(i)}(w_1 \wedge \cdots \wedge w_i) = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j-1} \varepsilon_S(w_j)\, w_i \wedge \cdots \wedge \widehat{w_j} \wedge \cdots \wedge w_i$ 对 $i \geq 2$ 以及 w_1、……、$w_i \in \Omega^1_{S/K}$.

(b) 设 $i \geq 1$，并假设 $\mathrm{char}(K) = 0$，或者 $\mathrm{char}(K) > 0$ 不是 i 的因子。那么，K-向量空间序列

$$0 \longrightarrow (\Omega^n_{S/K})_i \xrightarrow{\varepsilon_S^{(n)}} \cdots \xrightarrow{\varepsilon_S^{(3)}} (\Omega^2_{S/K})_i \xrightarrow{\varepsilon_S^{(2)}} (\Omega^1_{S/K})_i \xrightarrow{\varepsilon_S} (\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^k)_i \longrightarrow 0$$

is exact.

证明。断言 (a) 可由以下观察得出：这个序列不过是与 S-线性映射 ε_S 相关联的科祖尔复形。

为证明 (b)，我们必须证明对于 $m \geq 1$，$\mathrm{Ker}(\varepsilon_S^{(m)}) \subseteq \mathrm{Im}(\varepsilon_S^{(m+1)})$。根据命题 7.2，只需在情形 $i \in \{1, \ldots, m+k-1\}$ 下检验这一条件。容易验证，对于每个 $w \in (\Omega^m_{S/K})_i$，都有 $(\varepsilon_S^{(m+1)} \circ d + d \circ \varepsilon_S^{(m)})(w) = iw$。取 $w \in \mathrm{Ker}(\varepsilon^{(m)})$，利用 $i \in K \setminus \{0\}$ 这一事实，并令 $w' = \frac{1}{i} dw \in (\Omega^{m+1}_{S/K})_i$。则 w' 满足 $\varepsilon_S^{(m+1)}(w') = \frac{1}{i}(\varepsilon^{(m+1)} \circ d + d \circ \varepsilon^{(m)})(w) = w$。因此我们有 $w \in \mathrm{Im}(\varepsilon^{m+1})$，证明完成。□

根据这个命题，在对 $\mathrm{char}(K)$ 作出更严格假设的情况下，我们可以给出定理 7.8.b 的另一种证明。

注 7.10. 在定理 7.8 的设定中，假设 $\mathrm{char}(K) = 0$ 或 $\mathrm{char}(K) > m + k - 1$。那么该命题给出

$$\begin{aligned}
\mathrm{HF}_{\Omega^m_{S/K}}(m+k-1) &= \sum_{\ell=m+1}^{n} (-1)^{\ell-m+1} \mathrm{HF}_{\Omega^\ell_{S/K}}(m+k-1) \\
&= \sum_{\ell=m+1}^{n} (-1)^{\ell-m+1} \binom{n}{\ell} \binom{n+m+k-\ell-2}{n-1} \\
&= \sum_{j=1}^{n-m} (-1)^{j+1} \binom{n}{m+j} \binom{n+k-j-2}{n-1} = \binom{m+k-2}{m} \binom{n+k-2}{n-m-1}
\end{aligned}$$

其中最后一个等式可以用归纳法证明。由这个公式可知，定理 7.8.b 的结论可按该定理的证明方式推出。

定理 7.8 中关于 K 的特征的条件是必要的，下面的例子说明了这一点。

例 7.11. 考虑域 $K = \mathbb{F}_2$ 上的胖点概形 $\mathbb{X} = 2p$，其中 $p = (1:0:0)$。那么我们有 $k = 2 = \mathrm{char}(K)$ 和

$$\mathrm{HF}_S : 1\ 2\ 0\ 0\ \cdots, \quad \mathrm{HF}_{\Omega^1_{S/K}} : 0\ 2\ 3\ 0\ 0 \cdots, \quad \mathrm{HF}_{\Omega^2_{S/K}} : 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \cdots$$

这说明 $\dim_K(d\mathfrak{q}^2)_2 = 1 \neq 3 = \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} - \binom{k-1}{1}\binom{n}{n-2}$，且 $\dim_K(\Omega^1_{S/K}) = 5 \neq 3 = \binom{n}{1}\binom{n}{n} + \binom{k-1}{1}\binom{n}{n-2}$。换句话说，定理 7.8 中给出的公式在这种情形下并不成立。

此外，我们看到 $\mathrm{HF}_S(2) - \mathrm{HF}^{\Omega^1_{S/K}}(2) + \mathrm{HF}^{\Omega^2_{S/K}}(2) \neq 0$。因此，命题 7.9 中给出的 K-向量空间序列对于 $i = 2$ 并不正合。

本节的最后一个结果为所有 K¨ahler 微分模的 Hilbert 多项式提供了一个显式公式，前提是基域的特征不是太小。

定理 7.12。设 $\mathbb{X} = m_1p_1 + \cdots + m_tp_t$ 是 $\mathbb{P}^n$ 中的一个胖点概形，令 $m \in \{1, \ldots, n+1\}$，并假设 $\mathrm{char}(K) = 0$ 或 $\mathrm{char}(K) > \max\{m_1, \ldots, m_t\}$。则有

$$\mathrm{HP}(\Omega^m_{R/K}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{t} \left[\binom{n+m_i-1}{n} + (m_i-1)\binom{n+m_i-1}{n-1}\right] & \text{if} \quad m = 1, \\ \sum_{i=1}^{t} \left[\binom{n+1}{m}\binom{n+m_i-2}{n} + \delta_{i,m}\right] & \text{if} \quad 1 < m \leq n, \\ \sum_{i=1}^{t} \binom{n+m_i-2}{n} & \text{if} \quad m = n+1. \end{cases}$$

其中 $\delta_{i,m} = \binom{m+m_i-2}{m}\binom{n+m_i-2}{n-m-1} + \binom{m+m_i-3}{m-1}\binom{n+m_i-2}{n-m}$。

证明。由命题 5.4 和 [14], 命题 4.7，得

$$\begin{aligned} \mathrm{HP}(\Omega^m_{R/K}) &= \mathrm{HP}(\Omega^m_{\widetilde{R}/K}) = \dim_K(\Omega^m_{S/K}) + \dim_K(\Omega^{m-1}_{S/K}) \\ &= \sum_{i=1}^{t} (\dim_K(\Omega^m_{\mathcal{O}_i/K}) + \dim_K(\Omega^{m-1}_{\mathcal{O}_i/K})) \end{aligned}$$

对于 $m = 1$，定理 7.8 得出

$$\begin{aligned} \dim_K(\mathcal{O}_i) + \dim_K(\Omega^1_{\mathcal{O}_i/K}) &= \binom{n+m_i-1}{n} + n\binom{n+m_i-2}{n} + (m_i-1)\binom{n+m_i-2}{n-2} \\ &= \binom{n+m_i-1}{n} + (m_i-1)\binom{n+m_i-1}{n-1} \end{aligned}$$

对于 $2 \leq m \leq n+1$，定理 7.8 表明

$$\begin{aligned} &\dim_K(\Omega^m_{\mathcal{O}_i/K}) + \dim_K(\Omega^{m-1}_{\mathcal{O}_i/K}) \\ &\qquad = \binom{n+1}{m}\binom{n+m_i-2}{n} + \binom{m+m_i-2}{m}\binom{n+m_i-2}{n-m-1} + \binom{m+m_i-3}{m-1}\binom{n+m_i-2}{n-m} \end{aligned}$$

特别地，我们有 $\dim_K(\Omega^{n+1}_{\mathcal{O}_i/K}) + \dim_K(\Omega^n_{\mathcal{O}_i/K}) = \dim_K(\Omega^n_{\mathcal{O}_i/K}) = \binom{n+m_i-2}{n}$。因此，我们得到了 $\mathrm{HP}(\Omega^m_{R/K})$ 的所需公式。□

这个定理推广并统一了此前考虑过的若干特殊情形。我们来提及其中之一。

注 7.13。在 $m = n+1$ 的情形下，定理 7.12 得出

$$\mathrm{HP}(\Omega^{n+1}_{R/K}) = \deg(\mathbb{Y}) = \sum_{i=1}^{t} \binom{m_i+n-2}{n}$$

其中 $\mathbb{Y}$ 是胖点概形 $\mathbb{Y} = (m_1 - 1)\, p_1 + \cdots + (m_t - 1)\, p_t$，位于 $\mathbb{P}^n$ 中。这为 [7] 中提出的一个问题给出了肯定的回答。另请参见 [8]，其中给出了这一结果的另一种证明。

8. Kähler Differentials of Uniform Schemes

本节考察 $\mathbb{P}^n$ 中零维概形的一致性性质，特别是 Cayley-Bacharach性质，如何反映在其 K¨ahler 微分模的结构中。因此，我们继续令 K 为完美域，令 $\mathbb{X}$ 为 $\mathbb{P}^n$ 中具有 K-有理支撑的零维子概形，并令$R = P/I_{\mathbb{X}}$ 为 $\mathbb{X}$ 的齐次坐标环。回忆一下， $\mathbb{X}$ 的 Cayley-Bacharach性质定义如下。

定义 8.1. 设 $d \in \mathbb{N}$，并设 $r_{\mathbb{X}}$ 为 $\mathbb{X}$的正则性指标。

(a) 若概形 $\mathbb{X}$ 具有次数 d的 Cayley-Bacharach 性质（简称， $\mathbb{X}$ 具有 CBP(d)），则任何包含 $\mathbb{X}$的一个次数为 deg($\mathbb{Y}$) $=$deg($\mathbb{X}$)-1 的子概形 $\mathbb{Y}$的次数为 d 的超曲面，都自动包含 $\mathbb{X}$。(b) 如果 $\mathbb{X}$ 具有次数 $r_{\mathbb{X}} - 1$的 Cayley-Bacharach 性质，那么 $\mathbb{X}$ 称为 Cayley-Bacharach 概形。

从代数角度看，Cayley-Bacharach 性质可以如下刻画。

注记 8.2. 设 $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$ 的一个次数为 deg($\mathbb{X}$) -1的子概形。

(a) $\mathbb{Y}$ 在 $R = P/I_{\mathbb{X}}$ 中的消失理想 $I_{\mathbb{Y}} \subseteq P$ 的像记为$I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} = I_{\mathbb{Y}}/I_{\mathbb{X}}$。其初始次数 $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} =min\{k \in \mathbb{N} \mid (I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}})_k \neq 0\}$ 称为 $\mathbb{Y}$在 $\mathbb{X}$中的分离子次数。于是， $\mathbb{Y}$的希尔伯特函数满足

$$\mathrm{HF}_{\mathbb{Y}}(i) \;=\; \begin{cases} \mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(i) & \text{for} \quad i < \alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}, \\ \mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(i) - 1 & \text{for} \quad i \geq \alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}, \end{cases}$$

并且有 $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} \leq r_{\mathbb{X}}$。

(b) 次数为 $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$ 的非零齐次元素 $f^*_{\mathbb{Y}} \in I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$ 称为 $\mathbb{Y}$ 在 $\mathbb{X}$中的最小分离子。在这种情形下，对于每个 $i \geq 0$，都有 $(I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}+i} = K\, x_0^i\, f^*_{\mathbb{Y}}$。(c) 使用这一术语，对于每个$d \geq 1$，以下条件等价（另见 [10], 命题 2.1）：(1) $\mathbb{X}$具有 CBP(d)。(2) $\mathbb{X}$ 的每个次数为 deg($\mathbb{X}$) -1 的子概形 $\mathbb{Y}$ 都满足 $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} \geq d + 1$。(3) $(I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}})_{r_{\mathbb{X}}} \setminus \{0\}$ 中的任何元素都不能被 $x_0^{r_{\mathbb{X}}-d}$ 整除。

注意，数 $r_{\mathbb{X}} - 1$ 是满足 $\mathbb{X}$ 具有 CBP(d) 的最大次数 $d \geq 0$。因此， $\mathbb{X}$ 是 Cayley-Bacharach 概形，当且仅当它具有关于可能的最大次数的 CBP。次数为 deg($\mathbb{Y}$) $=$ deg($\mathbb{X}$) -1 的 $\mathbb{X}$ 的子概形 $\mathbb{Y}$ 的 K¨ahler 微分模可描述如下。

命题 8.3. 设 $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$的真子概形，且 $R_{\mathbb{Y}} = R/I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$ 是 $\mathbb{Y}$的齐次坐标环。

(a) 我们有 $\Omega^1_{R_{\mathbb{Y}}/K} \cong \Omega^1_{R/K}/dI_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$。此外，对于 $I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$ 的一组非零齐次生成元 $\{g_1, \ldots, g_r\}$，有

$$dI_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} \;=\; \langle dg_i,\; g_i\, dx_j \mid i = 1, \ldots, r;\; j = 0, \ldots, n \rangle.$$

(b) 若 deg($\mathbb{Y}$) $=$deg($\mathbb{X}$) -1，则有 $dI_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} = \langle df^*_{\mathbb{Y}},\, f^*_{\mathbb{Y}}\, dx_0 \rangle$，其中 $f^*_{\mathbb{Y}}$ 是 $\mathbb{X}$ 中 $\mathbb{Y}$ 的最小分离子。(c) 若 char(K) $= 0$，或 char(K) $> r_{\mathbb{X}}$，则有 $(dI_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}} \neq 0$。

证明。断言 (a) 是命题 5.2.d 的推论。断言 (b) 对 $k \geq \alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$ 由 $(I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}})_k = K\, x_0^{k-\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}} f_{\mathbb{Y}}^*$ 得出。

还需证明 (c)。设 $g \in I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$ 是次数最低的非零齐次生成元 $^{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}}$。由于 g 是齐次的，其像 g^{deh} 在 $\mathbb{X}$的仿射坐标环 $S = R/\langle x_0 - 1\rangle$ 中非零。根据 (a)，只需证明 $dg \neq 0$。

设 $\Phi : \Omega^1_{R/K} \longrightarrow \Omega^1_{\widetilde{R}/K} \cong S[x_0]dx_0 \oplus K[x_0] \otimes_K \Omega^1_{S/K}$ 为命题 3.8 中构造的典范$K[x_0]$-线性映射。将 Φ 与到第一直和项 $\Theta : \Omega^1_{R/K} \xrightarrow{\Phi} \Omega^1_{\widetilde{R}/K} \to S[x_0]dx_0$ 的投影复合，满足$\Theta(f dx_i) = f_{\mathrm{deh}} x_i x_0^k dx_0$，其中 $i = 1, \ldots, n$，且 $\Theta(f dx_0) = f_{\mathrm{deh}} x_0^k dx_0$，其中 $f \in R_k$。利用 $dg = \frac{\partial g}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n} dx_n$，我们得到

$$\begin{aligned}
\Theta(dg) &= \Theta(\tfrac{\partial g}{\partial x_0} dx_0) + \Theta(\tfrac{\partial g}{\partial x_1} dx_1) + \cdots + \Theta(\tfrac{\partial g}{\partial x_n} dx_n) \\
&= ((\tfrac{\partial g}{\partial x_0})^{\mathrm{deh}} + (\tfrac{\partial g}{\partial x_1})^{\mathrm{deh}} x_1 + \cdots + (\tfrac{\partial g}{\partial x_n})^{\mathrm{deh}} x_n)\, x_0^{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}-1} dx_0 \\
&= (\tfrac{\partial g}{\partial x_0} x_0 + \tfrac{\partial g}{\partial x_1} x_1 + \cdots + \tfrac{\partial g}{\partial x_n} x_n)^{\mathrm{deh}}\, x_0^{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}-1} dx_0 \\
&= \alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}\, g^{\mathrm{deh}}\, x_0^{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}-1}\, dx_0
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由欧拉关系得出。由于 $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} \neq 0$ 属于 K 且$g^{\mathrm{deh}} \neq 0$ 属于 S，我们得到 $\Theta(dg) \neq 0$。因此，如所需，我们有 $dg \neq 0$。□

这个命题给出了使用 K¨ahler 微分模刻画 $\mathbb{X}$ 的 Cayley-Bacharach性质。

推论 8.4. 假设 $\mathrm{char}(K) = 0$ 或 $\mathrm{char}(K) > r_{\mathbb{X}}$。那么，概形 $\mathbb{X}$具有 CBP(d)，当且仅当对于每个次数满足 $\deg(\mathbb{Y}) = \deg(\mathbb{X}) - 1$的子概形 $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$，都有 $\mathrm{HF}^{\Omega^1_{R/K}}(d) = \mathrm{HF}^{\Omega^1_{R_{\mathbb{Y}}/K}}(d)$。

证明. 首先假设 $\mathbb{X}$ 具有 CBP(d)。由注记 8.2.c，$\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} \geq d+1$，因此 $dI_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$ 的齐次生成元的次数为 $\geq d+1$。这意味着 $\mathrm{HF}^{\Omega^1_{R/K}}(d) = \mathrm{HF}^{\Omega^1_{R_{\mathbb{Y}}/K}}(d)$。

反过来，假设 $\mathbb{X}$ 不具有 CBP(d)，且 $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$ 的一个子概形，满足 $\deg(\mathbb{Y}) = \deg(\mathbb{X}) - 1$ 和 $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} \leq d$。那么由命题 8.3.c 可得 $(dI_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}} \neq 0$，因此 $\mathrm{HF}^{\Omega^1_{R/K}}(d) > \mathrm{HF}^{\Omega^1_{R_{\mathbb{Y}}/K}}(d)$。□

回忆一下，我们假设概形 $\mathbb{X}$ 具有 K-有理支撑。这样可以确保存在 $\mathbb{X}$ 的子概形 $\mathbb{Y}$，其次数满足 $\deg(\mathbb{Y}) = \deg(\mathbb{X}) - 1$，因为在 $\mathbb{X}$ 支撑中的每个点处，局部环都包含一个底元，它生成一个一维 K-向量空间理想。

在 [9], 的第2节和第3节中，Cayley-Bacharach 概形的概念被推广到了 $\mathbb{P}^n$中的任意零维概形 $\mathbb{X}$。下面的例子表明，当概形 $\mathbb{X}$ 不具有 K-有理支撑时，推论 8.4 不成立。

例8.5. 考虑 $\mathbb{Q}$ 上由 $I_{\mathbb{X}} = \langle (X_1 - X_0)^2,\ X_2^3 + 2X_0^2X_2 + X_0^3\rangle$ 定义的 $\mathbb{P}^2$ 中的零维概形 $\mathbb{X}$。则 $\deg(\mathbb{X}) = 6$，并且 $\mathbb{X}$ 不具有 K-有理支撑。

概形 $\mathbb{X}$ 没有次数为 $\deg(\mathbb{X}) - 1$的子概形。相反，它有一个唯一的次数为 3 的极大子概形 $\mathbb{Y}$，即由$I_{\mathbb{Y}} = \langle X_1 - X_0, X_2^3 + 2X_0^2X_2 + X_0^3\rangle$定义的概形。我们计算得 $\mathrm{HF}_{\mathbb{X}}$：1 3 5 6 6 $6\cdots$, $r_{\mathbb{X}} = 3$，以及 $\mathrm{HF}_{\mathbb{Y}}$：1 2 3 3 $\cdots$。因此，概形 $\mathbb{X}$按照 [9], 定义3.10的意义是一个 Cayley-Bacharach 概形。

然而，进一步计算表明，我们有 $\mathrm{HF}^{\Omega^1_{R/K}}$：0 3 8 12 12 10 9 9 $\cdots$以及 $\mathrm{HF}^{\Omega^1_{R_{\mathbb{Y}}/K}}$：0 2 4 5 4 3 3 $\cdots$。特别地，我们有 $\mathrm{HF}^{\Omega^1_{R/K}}(2) \neq \mathrm{HF}^{\Omega^1_{R_{\mathbb{Y}}/K}}(2)$，因此推论 8.4 不成立。

Cayley-Bacharach性质可以解释为概形 $\mathbb{X}$ 上的一种较弱的均匀性条件。这是以下更一般性质的一个特例。

定义 8.6. 设 $1 \leq i < \deg(\mathbb{X})$ 且 $1 \leq j \leq r_{\mathbb{X}} - 1$。如果概形 $\mathbb{X}$ 的每个次数为 $\deg(\mathbb{Y}) = \deg(\mathbb{X}) - i$ 的子概形 $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ 都满足 $\mathrm{HF}_{\mathbb{Y}}(j) = \mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(j)$，则称概形 $\mathbb{X}$ 是 (i, j)-均匀的。

用这种术语来说，概形 $\mathbb{X}$ 具有 CBP(d) 当且仅当它是 $(1, d)$-均匀的。另一个众所周知的情形是 $(\deg(\mathbb{X}) - n - 1, 1)$-均匀性，这也称为线性一般位置。如果满足所有可能的 (i, j)-均匀性，通常称概形 $\mathbb{X}$ 处于均匀位置。利用命题 8.3.c，我们可以用 K¨ahler 微分模的希尔伯特函数来刻画 (i, j)-均匀性，如下所示。

推论 8.7. 假设 $\mathrm{char}(K) = 0$ 或 $\mathrm{char}(K) > r_{\mathbb{X}}$。那么，概形 $\mathbb{X}$ 是(i, j)-均匀的，当且仅当对于每个次数满足 $\deg(\mathbb{Y}) = \deg(\mathbb{X}) - i$的子概形 $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$，都有 $\mathrm{HF}^{\Omega^1_{R/K}}(j) = \mathrm{HF}^{\Omega^1_{R_{\mathbb{Y}}/K}}(j)$。

证明. 对于 $\mathbb{X}$ 的一个子概形 $\mathbb{Y}$，其次数满足 $\deg(\mathbb{Y}) = \deg(\mathbb{X}) - i$，我们有正合列

$$0 \longrightarrow dI_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} \longrightarrow \Omega^1_{R/K} \longrightarrow \Omega^1_{R_{\mathbb{Y}}/K} \longrightarrow 0.$$

显然，条件 $\mathrm{HF}_{\mathbb{Y}}(j) = \mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(j)$ 等价于 $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} > j$。由命题 8.3.c，这又等价于$(dI_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}})_j = \langle 0 \rangle$，因此等价于 $\mathrm{HF}^{\Omega^1_{R/K}}(j) = \mathrm{HF}^{\Omega^1_{R_{\mathbb{Y}}/K}}(j)$。□

References

1. ApCoCoA 团队，《计算机代数中的应用计算》，网址：*apcocoa.uni-* 2. *passau.de*

N. Bourbaki, *Commutative Algebra*, Springer-Verlag，柏林、海德堡，1989年。3. W. Bruns 和 J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*，《剑桥数学高等研究丛书》第39卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993年。4. G. de Dominicis 和 M. Kreuzer，点的 K¨ahler 微分，《纯粹与应用代数杂志》141（1999），153-173。5. D. Eisenbud 和 J. Harris，线性一般位置中的有限射影概形，《代数几何杂志》1（1992），15-30。6. A.V. Geramita 和 P. Maroscia，在 $\mathbb{P}^n$ 中有限点集上消失的形式的理想，《代数学杂志》90（1984），528-555。7. M. Kreuzer、T.N.K. Linh 和 L.N. Long，零维概形的 K¨ahler 微分代数，《代数学杂志》501（2019），255-284。8. M. Kreuzer、T.N.K. Linh 和 L.N. Long，胖点概形的 K¨ahler 微分模的希尔伯特多项式，《越南数学学报》46（2021），441-455。9. M. Kreuzer、L.N. Long 和 L. Robbiano，关于 Cayley-Bacharach 性质，《代数学通讯》47（2019），328-354。10. M. Kreuzer，零维概形的典范模，《加拿大数学杂志》141（1994），357–379。11. M. Kreuzer 和 L. Robbiano, *Computational Commutative Algebra 1*, Springer-Verlag，海德堡，2000年。12. M. Kreuzer 和 L. Robbiano, *Computational Commutative Algebra 2*，Springer-Verlag，海德堡，2005年。

13. M. Kreuzer 和 L. Robbiano， *Computational Linear and Commutative Algebra*，Springer Int. Publ.，施普赖尔，2016年。14. E. Kunz， *Kähler Differentials*，Adv. Lectures Math.，Vieweg Verlag，布伦瑞克，1986年。15. G. Scheja 和 U. Storch，*Lokale Verzweigungstheorie*（德文），弗赖堡大学数学研究所丛书，弗赖堡，1974年。16. G. Scheja 和 U. Storch， *Lehrbuch der Algebra*，第2部分，B.G. Teubner Verlag，斯图加特，1988年。
Faculty of Informatics and Mathematics, University of Passau, D-94030 Passau, Germany*Email address*: martin.kreuzer@uni-passau.deDepartment of Mathematics,
University of Education - Hue University, 34 Le Loi,Hue, Vietnam*Email address*: tnkhanhlinh@hueuni.edu.vnDepartment of Mathematics,
University of Education - Hue University, 34 Le Loi,Hue, Vietnam*Current address*: 帕绍大学信息学与数学学院，D-94030 帕绍，德国*Email address*: lengoclong@dhsphue.edu.vn