arXiv:2302.11912v1 [math.AP] 23 Feb 2023

与带孔波导相关的均匀化问题参数族的谱的渐近稳定性*

Delfina G´omez[a], Sergei A. Nazarov[b], Rafael Orive-Illera[c,d], Maria-Eugenia P´erez-Mart´ınez[e]

[a] 数学、统计学与计算系，坎塔布里亚大学，桑坦德，西班牙，gomezdel@unican.es

[b] 俄罗斯科学院圣彼得堡机械工程问题研究所，圣彼得堡，俄罗斯，srgnazarov@yahoo.co.uk

[c] 数学科学研究所，CSIC-UAM-UC3M-UCM，马德里，西班牙，[d] 马德里自治大学数学系，马德里，西班牙，rafael.orive@icmat.es

[e] 应用数学与计算机科学系，坎塔布里亚大学，桑坦德，西班牙，meperez@unican.es

摘要：本文针对定义在平面内、 高度为 H 的矩形带孔区域上的拉普拉斯算子问题参数族，为其低频部分的收敛速率给出一致界。孔洞沿纵坐标轴以 $O(\varepsilon)$ 的间距周期排列，其中 ε 是一个趋于零的参数。另一个参数 η，即 Floquet 参数，在区间 $[-\pi,\pi]$ 内取值。矩形两侧的边界条件为准周期条件，其余边界上则施加 Neumann 条件。我们得到了收敛速率的精确界，该界对参数 ε 和 η 均一致，并且强烈依赖于 H。作为与波导相关的模型问题，我们分析中的主要难点之一出现在极限色散曲线的节点附近。

关键词：带隙结构、谱隙、谱扰动、均匀化、带孔介质、双重周期性、诺伊曼-拉普拉斯算子、波导**MSC**：35B27, 35P05, 47A55, 35J25, 47A10

*这是以下文章经同行评审前的版本： [Delfina G´omez、Sergei A. Nazarov、Rafael Orive-Illera、Mar´ıa-Eugenia P´erez-Mart´ınez。《与带孔波导相关的参数族均匀化问题的谱的渐近稳定性》，《数学新闻》，2023年，DOI：10.1002/mana.202100589], 该文章最终版本将发表于 [https://doi.org/10.1002/mana.202100589]。根据 Wiley 关于自存档版本使用的条款和条件，本文可用于非商业用途。

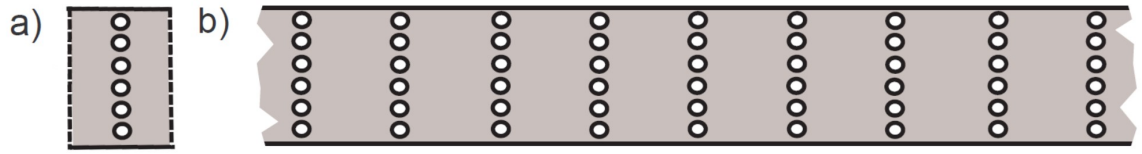

图1：**a)** 穿孔域 ϖ^ε。**b)** 穿孔条带 Π^ε 。

1 引言。

本节将表述谱摄动问题，该问题构成了周期性穿孔矩形域中的拉普拉斯算子均匀化问题， εH 为周期，且满足 $\varepsilon \ll 1$ 和 $H > 0$； H 为矩形的高度。所谓的***Floquet*** 参数$\eta \in [-\pi, \pi]$ 出现在侧边界条件中。其余边界上施加诺伊曼条件。孔洞沿纵坐标轴周期性排列。第 1.2 节介绍均匀化问题，该问题仍然是一个依赖于 η的问题。第 1.3 节介绍该问题的一些背景及论文结构。我们的目标是研究当 $\varepsilon \to 0$时谱的渐近行为，以及它对其他参数 η和 H的依赖关系。

1.1 均匀化谱问题的参数族。

令 H 为正参数，并令 ϖ^0 为矩形

$$\varpi^0 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1/2, \quad x_2 \in (0, H)\}. \tag{1.1}$$

令 ω 为平面 $\mathbb{R}^2$ 中的一个域，该域由光滑简单闭曲线 $\partial\omega$围成，其紧闭包 $\omega = \omega \cup \partial\omega$ 位于 ϖ^0内部。我们引入穿孔域$\overline{\varpi^\varepsilon}$（见图1 a)），它由 ϖ^0 去除一族孔洞后得到

$$\omega^\varepsilon(k) = \{x : \varepsilon^{-1}(x_1, x_2 - \varepsilon k H) \in \omega\}, \quad k = 0, \dots, N-1, \tag{1.2}$$

这些孔洞沿直线 $x_1 = 0$周期性分布。每个孔洞与 ω 相似缩放，比例为 ε，并平移 $\varepsilon\omega = \omega^\varepsilon$**(0)**。 具体来说，

$$\varpi^\varepsilon = \varpi^0 \setminus \overline{\omega^\varepsilon} \quad \text{where} \quad \omega^\varepsilon = \bigcup_{k=0}^{N-1} \omega^\varepsilon(k). \tag{1.3}$$

这里， ε 是一个较小的正参数， N 是一个较大的自然数，两者满足关系 $N = \varepsilon^{-1}$。周期为 εH ，其中 $\varepsilon \ll 1$.

在域 ϖ^ε中，我们考虑由以下偏微分方程构成的谱问题

$$-\Delta_x U^\varepsilon(x;\eta) = \Lambda^\varepsilon(\eta) U^\varepsilon(x;\eta), \ x \in \varpi^\varepsilon, \tag{1.4}$$

ϖ^ε两侧竖直边界上的准周期条件

$$U^\varepsilon\Big(\frac{1}{2},x_2;\eta\Big)=e^{i\eta}U^\varepsilon\Big(-\frac{1}{2},x_2;\eta\Big),\ x_2\in(0,H),$$
$$\frac{\partial U^\varepsilon}{\partial x_1}\Big(\frac{1}{2},x_2;\eta\Big)=e^{i\eta}\frac{\partial U^\varepsilon}{\partial x_1}\Big(-\frac{1}{2},x_2;\eta\Big),\ x_2\in(0,H), \tag{1.5}$$

a以及 ϖ边界其余部分上的诺伊曼条件 ε

$$\partial_\nu U^\varepsilon(x;\eta)=0,\ x\in\{x\in\partial\varpi^\varepsilon:\ |x_1|<1/2\}. \tag{1.6}$$

这里，$\eta\in[-\pi,\pi]$ 是 Floquet 参数，∂_ν 表示沿外法向 ν的方向导数。$\Lambda^\varepsilon(\eta)$ 和 $U^\varepsilon(\cdot;\eta)$ 分别表示同时依赖于扰动参数和 Floquet 参数的特征值与特征函数。我们研究当 $\varepsilon\to0$时 $(\Lambda^\varepsilon(\eta)\ U^\varepsilon(\cdot;\eta))$ 的渐近行为。

问题 (1.4)–(1.6) 的变分形式如下（例如参见 [12]）：求 $\Lambda^\varepsilon(\eta)$ 和$U^\varepsilon(\cdot;\eta)\in H^{1,\eta}_{per}(\varpi^\varepsilon)$，$U^\varepsilon(\cdot;\eta)\neq0$，使其满足

$$(\nabla_x U^\varepsilon(\cdot;\eta),\nabla_x V^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon}=\Lambda^\varepsilon(\eta)(U^\varepsilon(\cdot;\eta),V^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon}\quad\forall V^\varepsilon\in H^{1,\eta}_{per}(\varpi^\varepsilon), \tag{1.7}$$

其中 $H^{1,\eta}_{per}(\varpi^\varepsilon)$ 是由 $H^1(\varpi^\varepsilon)$ 中满足准周期条件 (1.5) 的函数构成的索博列夫空间，而 $(\cdot,\cdot)_{\varpi^\varepsilon}$ 表示 $L^2(\varpi^\varepsilon)$ 中的内积。

鉴于 $H^1(\varpi^\varepsilon)\subset L^2(\varpi^\varepsilon)$ 的紧嵌入，问题 (1.7) 具有离散谱，由无界的单调特征值序列构成（参见 [4, § 10.2] 和 [29, § 4.5]），

$$0\le\Lambda^\varepsilon_1(\eta)\le\Lambda^\varepsilon_2(\eta)\le\cdots\le\Lambda^\varepsilon_p(\eta)\le\cdots\to+\infty,\quad\text{as } p\to+\infty, \tag{1.8}$$

这些特征值按照其重数重复出现。此外，相应的特征函数$\{U^\varepsilon_p(\cdot;\eta)\}_{p=1}^\infty$被选取为 $L^2(\varpi^\varepsilon)$ 中的正交归一基。

此外，函数

$$[-\pi,\pi]\ni\eta\ \mapsto\ \Lambda^\varepsilon_p(\eta),\quad p\in\mathbb{N}, \tag{1.9}$$

是连续的，并且具有 2π-周期性。最后这一断言源于以下事实：问题 (1.4)-(1.6) 是与波导相关的模型问题，即文献中近期研究的一种周期穿孔的 Neumann 条带（参见 (1.17)、图1 b) 以及 [9]）。为完整起见，为了概述所考虑的问题 (1.4)-(1.6) 的意义及其性质，我们将在第 1.3 节简要介绍这一波导。

1.2 均匀化问题的参数族。

类比于沿带有诺伊曼边界条件的流形对穿孔区域进行均匀化（例如参见 [15]），我们很容易看出，均匀化问题是在矩形 ϖ^0 上的一个拉普拉斯算子谱问题，参见 (1.1)，其水平边（垂直边）上分别满足稳定诺伊曼条件 (1.11)（准周期条件 (1.12)）。为方便读者，我们在此介绍该问题，并给出特征值和特征函数关于参数 η and

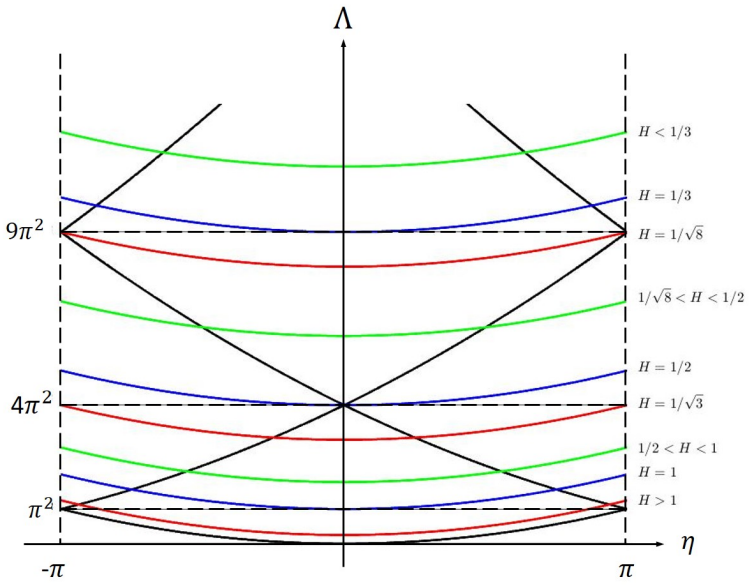

图 2：不同 H 取值下的第一极限色散曲线。第一条曲线为 $\Lambda = \eta^2$。这条曲线沿 Λ 轴平移得到的抛物线是依赖于 H 的曲线 $\Lambda = \eta^2 + \pi^2 H^{-2}$。其他抛物线部分则是沿 η 轴的平移，即，$\Lambda = (\eta \pm 2\pi j)^2$, 而 $j = 1,\ 2$。

H。当 $\varepsilon \to 0$ 时，(1.4)-(1.6) 的谱收敛性将在第2节中作为一个更一般结果（参见定理 2.2）的推论加以概述（参见推论 2.3）。

在 ϖ^0中，我们设定均匀化谱问题

$$-\Delta_x U^0(x;\eta) = \Lambda^0(\eta) U^0(x;\eta),\ x \in \varpi^0, \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial U^0}{\partial x_2}(x_1, 0;\eta) = \frac{\partial U^0}{\partial x_2}(x_1, H;\eta) = 0,\ x_1 \in \Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big), \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} U^0\Big(\frac{1}{2}, x_2;\eta\Big) &= e^{i\eta} U^0\Big(-\frac{1}{2}, x_2;\eta\Big), \\ \frac{\partial U^0}{\partial x_1}\Big(\frac{1}{2}, x_2;\eta\Big) &= e^{i\eta}\frac{\partial U^0}{\partial x_1}\Big(-\frac{1}{2}, x_2;\eta\Big),\ x_2 \in (0, H), \end{aligned} \tag{1.12}$$

其中 $\Lambda^0(\ \eta)$ 和 $U^0(\cdot;\ \eta)$ 分别表示特征值及其对应的特征函数。

问题 (1.10)-(1.12) 的变分形式为：求 $\Lambda^0(\eta)$ 和 $U^0(\cdot;\ \eta)\ \neq\ 0, U^0(\cdot;\ \eta)\ \in H^{1,\ \eta}_{per}(\varpi^0)$，使其满足

$$(\nabla_x U^0(\cdot;\eta), \nabla_x V)_{\varpi^0} = \Lambda^0(\eta)(U^0(\cdot;\eta), V)_{\varpi^0} \quad \forall V \in H^{1,\eta}_{per}(\varpi^0). \tag{1.13}$$

众所周知，它具有离散谱，我们可以按递增顺序将其写为

$$0 \le \Lambda^0_1(\eta) \le \Lambda^0_2(\eta) \le \cdots \le \Lambda^0_p(\eta) \le \cdots \to +\infty, \quad \text{as } p \to +\infty, \tag{1.14}$$

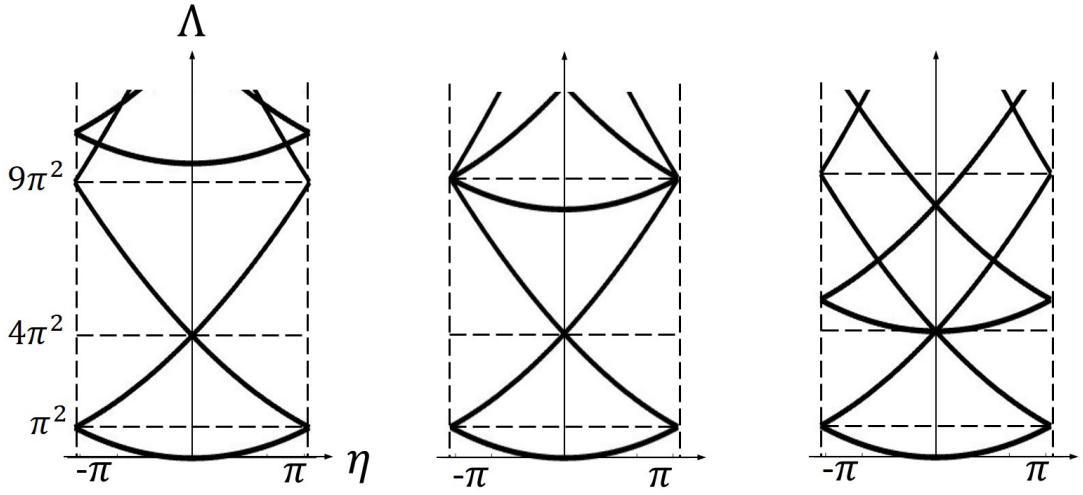

图 3：在 $H < 1/3$、 $H = 1/\sqrt{8}$ 和 $H = 1/2$. 情形下的第一极限色散曲线¯

其中采用了重特征值的约定。此外，相应的特征函数 $\{U_p^0(\cdot;\,\eta)\}_{p=1}^{\infty}$ 被选取为 $L^2(\varpi^0)$ 中的标准正交基。此外，函数

$$[-\pi,\pi] \ni \eta \;\mapsto\; \Lambda_p^0(\eta), \quad p \in \mathbb{N}, \tag{1.15}$$

连续且具有 2π 周期。

通过分离变量，可得到 (1.10)-(1.12) 的特征值和特征函数的显式公式：

$$\Lambda_{jk}^0(\eta) = (\eta + 2\pi j)^2 + \pi^2 \frac{k^2}{H^2}\,, \qquad U_{jk}^0(x;\eta) = e^{\mathrm{i}(\eta+2\pi j)x_1} \cos\left(\pi k \frac{x_2}{H}\right), \quad j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1.16}$$

需要指出的是，为了构成单调序列 (1.14)，需要对 (1.16) 中的特征值重新编号。

注意，公式 (1.16) 对于绘制不同 H 值下的极限色散曲线非常有用。回想一下，这些曲线是 $\Lambda_p^0(\eta)$ 的图像，其中 $\eta \in [-\pi,\pi]$。图 2 展示了此类曲线的行为随 H 的取值而呈现出的多种可能性。此外，结合图 3 和图 4，可以了解受扰色散曲线可能呈现的行为，例如图 4 的第二行所示。

1.3 研究现状与论文结构

首先，让我们介绍一个与（1.4）—（1.6）密切相关的问题：具有双重周期性的周期性穿孔条带中的拉普拉斯算子的诺伊曼问题。

沿 x_1 轴按周期性扩展 ϖ^ε （参见（1.3）和图1 a)），我们构造出无界穿孔条带 Π^ε （见图 1 b)）：

$$\Pi^\varepsilon = \mathbb{R} \times (0,H) \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \bigcup_{k=0}^{N-1} \overline{\omega^\varepsilon(j,k)}$$

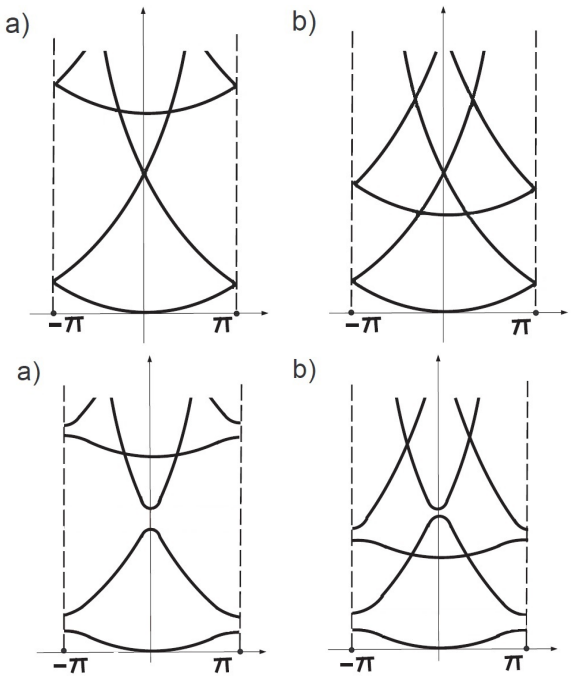

图 4：上方为均匀化问题在某些 H，a) $H \in (1/\sqrt{8},\ 1/2)$，b) $H \in (1/2,\ 1)$ 取值下的前六条色散曲线。下方为扰动问题在相同 H 取值下的一些可能的色散曲线。

其中 $\omega^\varepsilon\ (j,k)\ = \{x:\ \ \varepsilon^{-1}\ (x_1 - j, x_2 - \varepsilon k H)\ \in \omega\}$，其中 $j \in \mathbb{Z},\ k = 0, 1, \ldots, N-1.$。在波导 Π^ε 中，我们考虑诺伊曼谱问题

$$\begin{aligned} -\Delta_x u^\varepsilon(x) &= \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x),\ x \in \Pi^\varepsilon, \\ \partial_\nu u^\varepsilon(x) &= 0,\ x \in \partial\Pi^\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.17}$$

随后，应用 Floquet–Bloch–Gelfand 变换（例如参见 [7, 28, 31, 11, 25]）

$$u^\varepsilon(x)\ \mapsto\ U^\varepsilon(x;\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} e^{-ip\eta} u^\varepsilon(x_1 + p, x_2),$$

问题 (1.17) 转化为 ϖ^ε 中的边值问题 (1.4)-(1.6)。

与问题 (1.17) 相关的希尔伯特空间 $L^2(\Pi^\varepsilon)$ 上算子的谱由下式给出

$$\sigma^\varepsilon = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \beta_p^\varepsilon \tag{1.18}$$

其中

$$\beta_p^\varepsilon = \{\Lambda_p^\varepsilon(\eta) :\ \eta \in [-\pi, \pi]\} \subset \overline{\mathbb{R}_+}. \tag{1.19}$$

根据前文提到的 $\Lambda^\varepsilon(\eta)$ 在 (1.9) 中的连续性，集合 β_p^ε 是闭的、连通的有限线段。问题 (1.17) 的谱的公式 (1.18) 和 (1.19) 在 Floquet–Bloch–Gelfand 理论框架下是众所周知的（参见 [3, 28, 30, 31, 29, 11,25, 6, 1, 9]）。

因此，研究 (1.4)–(1.6) 的谱的渐近行为，关键在于探明谱 (1.18) 的带隙结构。关于在低频处打开带隙，[9]在对孔洞施加某些对称性限制的条件下对此进行了探讨（具体而言，即所谓的镜像对称性，见 (2.14) 和图5）：粗略地说，这涉及控制坐标轴 $(\eta,\ \Lambda)$ 上能带 $[-\pi,\pi]\times[0,\infty$ 内某些方框中的扰动特征值总数。然而，[9] 中的技术无法为不同 p 值下的色散曲线 $\{\Lambda_p^\varepsilon(\eta):\ \eta\in[-\pi,\pi]\}$ 与 $\{\Lambda_p^0(\eta):\ \eta\in[-\pi,\pi]\}$ 之间的偏差导出一致界。相比之下，本文中的技术有助于探究如何打开这些带隙。不过，我们不处理这一任务，而是致力于获得上述一致界。

与文献中的早期论文相比，我们认为 [23], [8], [9] 和 [10] 是与本文最为相关的论文。[23] 和 [9] 分别研究了带孔波导中拉普拉斯算子在狄利克雷和诺伊曼边界条件下的开隙问题。[10], 研究了将诺伊曼条件改为狄利克雷条件后问题 (1.4)-(1.6) 谱的渐近稳定性；而在 [8]中，(1.4)-(1.6) 是所研究的刚性问题的一个极限情形。值得注意的是，对于 [23] 中的狄利克雷条件，极限色散曲线与 η 无关，因此 [10] 中的分析比诺伊曼情形简单得多。

值得一提的是，显式公式 (1.16) 使我们能够精确确定每个 $p=1,\ 2,\ \cdots$ 以及每个 $\eta\in[-\pi,\pi]$对应的特征值 $\Lambda_p^0(\eta)$ 的重数。这一点对我们在第 3–5 节中的分析至关重要，因为该分析给出了扰动问题的特征值中，距均匀化问题特征值 $O(\varepsilon)$ 以内的特征值的精确数量（参见图 8）。在点 $\eta_{0,\ p}$ 附近，情况尤其复杂，因为极限特征值$\Lambda_p^0(\eta)$的重数会从 1 变为 2 或 3（参见图 3、图 6 和图 8 以及注 4.4）。请注意，极限色散曲线会随 H呈现不同的行为；参见图 2、图 3 和图 4，以了解以下情形之间的差异：

$$a)\quad H\in\Big(0,\frac{1}{\sqrt{8}}\Big),\qquad b)\quad H\in\Big[\frac{1}{\sqrt{8}},\frac{1}{2}\Big),\qquad c)\quad H\in\Big[\frac{1}{2},1\Big),\qquad d)\quad H\in[1,+\infty).$$

事实上，当 H 取值较大时，首先会出现重数为 3 的极限特征值，其中第一个为 $\Lambda=4\pi^2$ when $H=1/2$，见图 2 和图 3。这正是我们的最终结果（参见定理 5.1）针对不同区间，根据 H 给出偏差一致界的主要原因；因此，我们将注意力集中在最小的几个特征值上。

下面介绍论文的结构。

在第2节中，我们给出一些适用于孔的任意几何形状且边界光滑的初步结果。首先，我们为扰动问题 (1.4)-(1.6) 的特征值给出上界，即，

$$\Lambda_m^\varepsilon(\eta)\le\Lambda_m^0(\eta)+c_m\varepsilon\quad\text{ for }\quad\varepsilon\le\varepsilon_m,\quad\eta\in[-\pi,\pi],$$

这表明它们如何受均匀化问题 (1.10)-(1.12) 的特征值控制。随后，在第2.1节中，我们介绍一个关于特征值及其对应特征函数收敛到均匀化问题相应特征值及特征函数的结果，并证明了重数守恒；该结果还允许对 Floquet 参数进行扰动（见定理 2.2 和推论 2.3），

$$\Lambda_m^{\varepsilon_l}(\eta_l)\to\Lambda_m^0(\widehat{\eta}),\quad\text{ as }\quad(\varepsilon_l,\eta_l)\xrightarrow{l\to\infty}(0,\widehat{\eta}).\tag{1.20}$$

这表明，两个问题对准周期性条件中出现的参数 η 都具有很强的稳定性，参见 (1.5) 和 (1.12)。该结果最近已在波导模型问题的相关文献中提出，参见 [9] 和 [10], ；它对于获得扰动问题与极限问题的特征值之间收敛速率的一致界（关于扰动参数和弗洛凯参数）至关重要。在第2.2节中，我们介绍一个定义在无界条带上的边界层问题（参见 (2.5)-(2.9)）；该问题通过 [9] 中的渐近展开得到。

在第 3 节和第 4 节中，我们得到了关于特征值渐近行为的互补结果，为极限问题的色散曲线与均匀化问题的色散曲线之间的距离提供了界。为此，我们采用谱扰动理论中关于近似特征值和特征函数的一个著名结果（参见引理 3.1），该结果意味着可以根据均匀化问题和边界层问题的解构造一族准模态（参见 (3.19)-(3.21)）。我们对孔洞几何和极限特征值的选取都施加了一些限制（参见 (2.14) 和 (3.7)）。若要避免这些限制，就需要进一步的渐近展开项以及更多边界层函数，计算也会变得过于繁复。综上，我们可以设定:

$$|\Lambda^{\varepsilon}_{p(\varepsilon,\eta,m)}(\eta) - \Lambda^0_m(\eta)| < C_0\varepsilon, \qquad \text{for } \varepsilon \le \varepsilon_0,\ \eta \in [-\pi,\pi],\ \text{and some } p(\varepsilon,\eta,m) \ge m,$$

当 $m = 1$ 和 $H > 0$时，当 $m = 2$ 和 $H \in (0,\ 1/2)$ 时，以及当 $m = 3$ 和 $H \in (0,\ 1/\sqrt{8})$ 时。对于取值范围更小的 η （该范围取决于 m 和 H），在第 4 节中针对更高的 m 也得到了相同的结果（见定理 4.1 和定理 4.2）。

在这一阶段，我们无法断言 $p(\varepsilon,\ \eta,\ m) = m$，而这正是第 5 节的目标。在该节中，我们结合第 2 节和第 4 节的结果，并运用涉及收敛 (1.20) 的不同反证法论证。我们得到

$$|\Lambda^{\varepsilon}_m(\eta) - \Lambda^0_m(\eta)| < C_0\varepsilon, \qquad \text{with } \varepsilon \le \varepsilon_0 \text{ and } \eta \in [-\pi,\pi],$$

对于相同的 m 和 H 值亦然。在上文及整篇论文中，ε_m、c_m 和 C_m（其中 $m \in \mathbb{N}_0$）表示某些正常数，它们与变量 ε 和 η 均无关。

鉴于色散曲线的桁架-节点结构较为复杂（参见图 2），定理中我们对指标 m 施加了取决于 H 的限制。这可能会影响 Floquet 参数取值的区间，但该方法可以推广到 m 的更多取值。

最后需要强调的是，此处提出的方法可用于波导理论中的许多问题，参见 [19, 20, 21, 5, 2] 等文献。

2 预备结果：收敛与边界层。

在第2.1节中，我们陈述了一个收敛结果：ε依赖问题的谱趋向于均匀化问题的谱，该结果允许弗洛凯参数发生扰动，参见定理 2.2。此结果推广了每个固定$\eta \in [-\pi,\pi]$时谱的通常收敛性，参见推论 2.3，并且是推导我们在第5节中的结果所必需的。在第2.2节中，我们引入一个边界层问题及其解；在第3节中，该问题及其解有助于构造新的近似函数，这些近似函数对应于(1.4)-(1.6)中在小区间内取值的特征值所对应的特征函数组。

首先，下面我们将获得一些关于扰动问题特征值的估计，这些估计联系了均匀化与均匀化问题，其结果源于对两个谱的比较。

命题 2.1。 对于固定的 $m = 1$、$2, \cdots$，设 $\Lambda_m^\varepsilon(\eta)$ 和 $\Lambda_m^0(\eta)$ 分别为序列(1.8) 和 (1.14) 中的特征值。那么，存在正常数 c_m 和 ε_m，它们与 ε和 η无关，使得

$$\Lambda_m^\varepsilon(\eta) \le \Lambda_m^0(\eta) + c_m\varepsilon, \quad \text{for } \varepsilon \in (0, \varepsilon_m], \quad \eta \in [-\pi, \pi]. \tag{2.1}$$

证明。 我们来应 用极小极大原理。对每个 $m = 1, 2, \cdots$和 $\eta \in [-\pi, \pi]$，我们记 te

$$\Lambda_m^\varepsilon(\eta) = \min_{E_m^\varepsilon \subset H^{1,\eta}_{per}(\varpi^\varepsilon)} \max_{V \in E_m^\varepsilon, V \neq 0} \frac{(\nabla_x V, \nabla_x V)_{\varpi^\varepsilon}}{(V, V)_{\varpi^\varepsilon}}, \tag{2.2}$$

w其中，最小值是在由 $H^{1,\eta}_{per}(\varpi^\varepsilon)$ 的子空间 E_m^ε 构成的集合上取的，这些子空间的维数为 m。为 证明 (2.1)，我们取一个特定的子空间 $E^{\varepsilon,*}_m$，并将其构造为如下线性空间

$$E_m^{\varepsilon,*} = \langle U_1^0(\cdot;\eta)\big|_{\varpi^\varepsilon}, \cdots, U_m^0(\cdot;\eta)\big|_{\varpi^\varepsilon} \rangle,$$

其中 $\{U_k^0(\cdot;\eta)\}_{k=1}^m$是 (1.13) 的特征函数，对应于特征值 $\{\Lambda_k^0\}_{k=1}^m$，且它们在 $L^2(\varpi^0)$ 中正交归一。

对于 $V \in E^{\varepsilon,*}_m$，不作任何限制，我们可以假设 $\|V;\ L^2(\varpi^0)\|^2 = 1$ （参见 [2] 和 [8]，其中给出了不同问题中的相关思路）。因此，对于某些常数 α_i，满足 $\|V;\ L^2(\varpi^0)\|^2 = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_m^2 = 1$，我们有 $V = \alpha_1 U_1^0(\cdot;\eta) + \cdots + \alpha_m U_m^0(\cdot;\eta)$。因此，我们写作

$$(\nabla_x V, \nabla_x V)_{\varpi^\varepsilon} \le (\nabla_x V, \nabla_x V)_{\varpi^0} = \alpha_1^2\Lambda_1^0(\eta) + \cdots + \alpha_m^2\Lambda_m^0(\eta) \le \Lambda_m^0(\eta).$$

此外，我们可以写作

$$(V, V)_{\varpi^\varepsilon} = (V, V)_{\varpi^0} - (V, V)_{\varpi^0 \setminus \varpi^\varepsilon} = 1 - (V, V)_{\varpi^0 \setminus \varpi^\varepsilon} \ge 1 - \widetilde{c}_m\varepsilon,$$

对于某个与 η 无关且 ε充分小的常数 $\widetilde{c}_m$。事实上，为了证明最后一个不等式，我们使用估计式 $\|V;\ L^2(\varpi^0 \cap \{|x_1| < \varepsilon\})\|^2 \le C\varepsilon\|V;\ H^1(\varpi^0)\|^2\ \forall V \in H^1(\varpi^0)$，例如参见 [18], 中的引理 2.4，从而得到，

$$(V, V)_{\varpi^0 \setminus \varpi^\varepsilon} \le c\varepsilon\left((\nabla V, \nabla V)_{\varpi^0} + (V, V)_{\varpi^0}\right) \le c\varepsilon(\Lambda_m^0(\eta) + 1) \le \widetilde{c}_m\varepsilon.$$

因此，(2.2) 得出

$$\Lambda_m^\varepsilon(\eta) \le \max_{V \in E_m^{\varepsilon,*}, V \neq 0} \frac{(\nabla_x V, \nabla_x V)_{\varpi^\varepsilon}}{(V, V)_{\varpi^\varepsilon}} \le \frac{\Lambda_m^0(\eta)}{1 - \widetilde{c}_m\varepsilon} \le \Lambda_m^0(\eta) + c_m\varepsilon,$$

对于某个常数 c_m，且 ε 足够小。这证明了 (2.1)，命题得证。 □

2.1 特征值的收敛。

基于穿孔区域中特征函数的延拓（例如，参见 [26] 中的第 I.4.2 节）、映射 (1.9) 和 (1.15) 关于 Floquet 参数的连续性，以及一些反证法，以下结果已在 [9] 中得到证明。

定理 2.2。 对于满足 $\varepsilon_r \to 0$ 和 $\eta_r \to \widehat{\eta} \in [-\pi, \pi]$ 的任意子序列 $\{(\varepsilon_r、\ \eta_r)\}_{r=1}^{\infty}$，当 $r \to \infty$ 时，序列 (1.8) 中问题 (1.4)–(1.6) 的特征值 $\Lambda_m^{\varepsilon_r}(\eta_r)$，当 $(\varepsilon、\ \eta) \equiv (\varepsilon_r、\ \eta_r)$ 时，收敛于问题 (1.10)–(1.12) 的特征值（当 $\eta \equiv \widehat{\eta}$ 时），当 $r \to \infty$ 时成立，并且重数守恒。也就是说，对于每个 $m = 1、2、\cdots$，该收敛

$$\Lambda_m^{\varepsilon_r}(\eta_r) \to \Lambda_m^0(\widehat{\eta}), \qquad as\ r \to \infty, \tag{2.3}$$

成立，其中 $\Lambda_m^0(\widehat{\eta})$ 是序列 (1.14) 中算子 (1.10)–(1.12)的第 m 个特征值，对应于 $\eta \equiv \widehat{\eta}$。

此外，我们可以抽取一个子序列，仍记作 ε_r，使得特征函数 $\{U_m^{\varepsilon_r}(\cdot;\eta_r)\}_{m=1}^{\infty}$在 $L^2(\varpi^{\varepsilon_r})$中归一化后，其适当延拓 $\{\widehat{U}_m^{\varepsilon_r}(\cdot;\widehat{\eta})\}_{m=1}^{\infty}$在 $L^2(\varpi^0)$中收敛；当 $r \to \infty$ 时，它们趋于算子 (1.10)–(1.12) 的特征函数 $\{U_m^0(\cdot;\widehat{\eta})\}_{m=1}^{\infty}$，这些特征函数构成 $L^2(\varpi^0)$的标准正交基。

定理 2.2 表明，在对 Floquet 参数 η 作任意扰动时，(1.4)–(1.6) 的极限谱具有一定的稳定性。

推论 2.3。 对于任意 $\eta \in [-\pi, \pi]$，问题 (1.7) 在序列(1.8) 中的特征值 $\Lambda_m^{\varepsilon}(\eta)$ 收敛于问题 (1.10)–(1.12)在序列 (1.14)中的特征值，即，

$$\Lambda_m^{\varepsilon}(\eta) \ \to \Lambda_m^0(\eta) \quad \text{as} \ \ \varepsilon \to 0, \tag{2.4}$$

并且重数守恒。此外，对于每个序列，我们可以抽取一个子序列（仍记为 ε），使得特征函数 $\{U_m^{\varepsilon}(\cdot;\eta)\}_{m=1}^{\infty}$在 $L^2(\varpi^{\varepsilon})$中归一化后，经过适当延拓，$\{\widehat{U}_m^{\varepsilon}\}_{m=1}^{\infty}$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时在 $L^2(\varpi^0)$中收敛于问题 (1.10)–(1.12) 的特征函数$\{U_m^0(\cdot;\eta)\}_{m=1}^{\infty}$，这些特征函数构成 $L^2(\varpi^0)$的一组标准正交基。

该推论给出了问题 (1.7) 的经典谱收敛；其证明可直接由定理 2.2 得出。

2.2 边界层问题。

按照双尺度边界均匀化中的惯例，在穿孔串 $\omega^{\varepsilon}(0), \ldots, \omega^{\varepsilon}(N-1) \subset \varpi^0$, 附近会出现一个边界层，可用拉伸坐标描述

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) = \varepsilon^{-1}(x_1, x_2 - \varepsilon k H). \tag{2.5}$$

利用这些辅助坐标，我们引入一个边界层问题，并给出其在无界穿孔条带中的解

$$\Xi := \{x \in \mathbb{R} \times (0, H)\} \setminus \varpi\,. \tag{2.6}$$

显然，对于每个 $k = 0, \cdots, N-1$，变量替换 (2.5) 将 $\omega^{\varepsilon}(k)$ 转换为 ω，参见 (1.2)。本节结果的证明见 [9]；有关该技术及更多参考文献，也可参见 [23] 和 [24] 。

设函数 W_0^1 在 Ξ 中为调和函数，

$$-\Delta_{\xi} W_0^1(\xi) = 0, \ \xi \in \Xi, \tag{2.7}$$

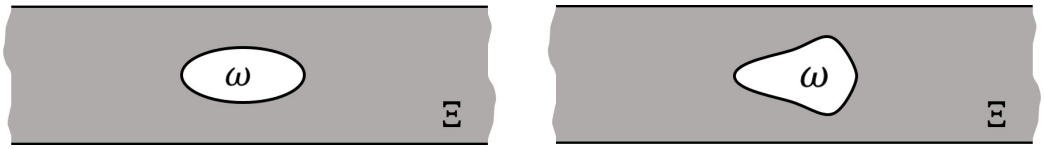

图5：条带 Ξ 中孔洞 ω的两种不同可能几何形状。

满足周期性条件

$$W_0^1(\xi_1, H) = W(\xi_1, 0),\ \frac{\partial W_0^1}{\partial \xi_2}(\xi_1, H) = \frac{\partial W_0^1}{\partial \xi_2}(\xi_1, 0),\ \xi_1 \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

以及孔洞 ω边界上的非齐次诺伊曼条件

$$\partial_{\nu(\xi)} W_0^1(\xi) = -\partial_{\nu(\xi)}\xi_1 = -\nu_1(\xi),\ \xi \in \partial\omega. \tag{2.9}$$

这里， $\nu(\xi) = (\nu_1(\xi)\ \nu_2(\xi))$ 表示 $\partial\omega$上相对于 Ξ向外的法向量。

此外，为方便起见，我们在此引入截断函数 $\chi_\pm \in C^\infty(\mathbb{R})$ ，

$$\chi_\pm(t) = 1 \text{ for } \pm t > 2R \text{ and } \chi_\pm(t) = 0 \text{ for } \pm t < R, \tag{2.10}$$

其中固定的 $R > 0$ 满足

$$\overline{\omega} \subset \Xi(R) := \{\xi \in \Xi :\ |\xi_1| < R\}. \tag{2.11}$$

(2.7)-(2.9) 的变分形式如下：求满足条件的 $W_0^1 \in \mathcal{H}^1_{per}(\Xi)$

$$(\nabla_\xi W_0^1, \nabla_\xi V)_\Xi = (-\nu_1(\xi), V)_{\partial\omega} \quad \forall V \in \mathcal{H}^1_{per}(\Xi), \tag{2.12}$$

其中，空间 $\mathcal{H}^1_{per}(\Xi)$ 表示线性空间 $C^\infty_{per}(\Xi)$ 的完备化；该线性空间由具有紧支集且关于 ξ_2 无限可微、 H-周期的函数构成，其范数为

$$\|W; \mathcal{H}^1_{per}(\Xi)\| = \left(\|\nabla_\xi W; L^2(\Xi)\|^2 + \|W; L^2(\Xi(2R))\|^2\right)^{1/2}.$$

由于相容条件 $(-\nu_1(\xi),\ 1)_{\partial\omega} = 0$， 得到满足，问题 (2.12) 存在唯一解 $W_0^1 \in \mathcal{H}^1_{per}(\Xi)$，该解除加性常数外唯一确定。此外，由于边界 $\partial\omega$ 光滑，该解关于 Ξ 无限可微；傅里叶方法（参见 [14], [17] 和 [9]）特别给出了如下分解：

$$W_0^1(\xi) = \sum_{\pm} \chi_\pm(\xi_1) C_\pm + \widetilde{W_0^1}(\xi) \tag{2.13}$$

$\widetilde{\ }$，其中余项 W_0^1 指数衰减，且存在一些常数 $C_\pm$，这些常数也可能取决于 R，参见 (2.10) 和 (2.11)。

请注意，上述结果对任意光滑孔洞均成立。此外，在满足镜像对称性的假设下：

$$\omega = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 :\ (\xi_1, H - \xi_2) \in \omega\}, \tag{2.14}$$

例如，参见 中，图5中的函数 W_0^1 关于 $\xi_2 - H/2$ 变量为偶函数，并满足 s

$$\frac{\partial W_0^1}{\partial \xi_2}(\xi_1, 0) = \frac{\partial W_0^1}{\partial \xi_2}(\xi_1, H) = 0,\ \xi_1 \in \mathbb{R}, \tag{2.15}$$

证明见 [9] 。

3 收敛速率的渐近公式

在本节和下一节中，我们将在低频范围内，针对受扰色散曲线的渐近行为，得出式（2.4）的一些重要补充结果。这意味着要构造与（1.4）—（1.6）相关的紧算子的所谓近似特征值和特征函数或准模态。为此，我们为扰动问题建立一个抽象框架，并利用均匀化问题的特征函数和一个边界层函数构造近似解（参见第2.2节）。当极限特征值对应的特征函数不依赖于x_2时，我们得到特征值的渐近公式及其估计，参见式（1.16）、（3.7）和（3.8）。这些公式无法预测序列（1.8）中特征值的确切指标，该指标将在第5节利用第2节的结果确定。本节中另一项简化计算的限制来自穿孔的几何形状：我们假设具有镜像对称性（参见图5、式（2.14）和（2.15））。

首先，我们将谱问题 (1.4)–(1.6) 改写为希尔伯特空间上的算子问题。令 $\mathcal{H}^\varepsilon(\eta)$ 表示赋有 $H^1(\varpi^\varepsilon)$中通常内积的空间 $H^1_{per}{}^{,\eta}(\varpi^\varepsilon)$。我们用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\eta\varepsilon}$ 表示该内积，用 $\|U^\varepsilon;\mathcal{H}^\varepsilon(\eta)\|$ 表示相应范数。

在空间 $\mathcal{H}^\varepsilon(\eta)$中，我们定义紧致、正且对称的算子 $\mathcal{B}^\varepsilon(\eta)$，如下：

$$\langle\mathcal{B}^\varepsilon(\eta)U^\varepsilon,V^\varepsilon\rangle_{\eta\varepsilon}=(U^\varepsilon,V^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon}\quad\forall U^\varepsilon,V^\varepsilon\in H^{1,\eta}_{per}(\varpi^\varepsilon). \tag{3.1}$$

显然，(1.4)–(1.6) 的变分形式 (1.7) 可改写如下：

$$\mathcal{B}^\varepsilon(\eta)U^\varepsilon(\eta)=M^\varepsilon(\eta)U^\varepsilon(\eta)\quad\text{in}\quad\mathcal{H}^\varepsilon(\eta), \tag{3.2}$$

其中新的谱参数为

$$M^\varepsilon(\eta)=(1+\Lambda^\varepsilon(\eta))^{-1}. \tag{3.3}$$

以下结果针对 (3.1) 中的特定算子 $\mathcal{B}^\varepsilon(\eta)$ 给出，其依据是谱扰动理论中关于近似特征值和近似特征函数的引理，参见 [32],[26, §3.1], [22, §7.1] 和 [13,§5.32]。

引理 3.1. 设 $M^\varepsilon_{as}(\eta)\in\mathbb{R}$和 $U^\varepsilon_{as}(\eta)\in\mathcal{H}^\varepsilon(\eta)\setminus\{0\}$满足关系

$$\|\mathcal{B}^\varepsilon(\eta)U^\varepsilon_{as}(\eta)-M^\varepsilon_{as}(\eta)U^\varepsilon_{as}(\eta);\mathcal{H}^\varepsilon(\eta)\|=\delta^\varepsilon\|U^\varepsilon_{as}(\eta);\mathcal{H}^\varepsilon(\eta)\|. \tag{3.4}$$

那么，算子 $\mathcal{B}^\varepsilon(\eta)$ 存在一个特征值 $M^\varepsilon(\eta)$，使得

$$|M^\varepsilon(\eta)-M^\varepsilon_{as}(\eta)|\le\delta^\varepsilon. \tag{3.5}$$

Mo此外，对于任意 $\delta^\varepsilon_1>\delta^\varepsilon$，存在系数 $\alpha^\varepsilon_J,\cdots,\alpha^\varepsilon_{J+K-1}$，满足

$$\left\|\|U^\varepsilon_{as}(\eta);\mathcal{H}^\varepsilon(\eta)\|^{-1}U^\varepsilon_{as}(\cdot;\eta)-\sum_{j=J}^{J+K-1}\alpha^\varepsilon_jU^\varepsilon_j(\eta);\mathcal{H}^\varepsilon(\eta)\right\|\le2\frac{\delta^\varepsilon}{\delta^\varepsilon_1},\qquad\sum_{j=J}^{J+K-1}(\alpha^\varepsilon_j)^2=1, \tag{3.6}$$

其中，$M^\varepsilon_J(\eta)\ \cdots,M^\varepsilon_{J+K-1}(\eta)$是算子 $\mathcal{B}^\varepsilon(\eta)$在区间$[M^\varepsilon_{as}(\eta)-\delta^\varepsilon_1,M^\varepsilon_{as}(\eta)+\delta^\varepsilon_1]$内的所有特征值，而 $U^\varepsilon_J(\cdot;\eta)\ \cdots,U^\varepsilon_{J+K-1}(\cdot;\eta)$是相应的特征向量，其归一化方式为

$$\langle U^\varepsilon_i(\cdot;\eta),U^\varepsilon_j(\cdot;\eta)\rangle_{\eta\varepsilon}=\delta_{ij},\quad i,j=J,\cdots,J+K-1,$$

为 δ_{ij} 克罗内克δ。

引理 3.1 中的数对 ($M^{\varepsilon}_{as}(\eta)$ $\|U^{\varepsilon}_{as}(\eta);\, \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)\|^{-1}U^{\varepsilon}_{as}(\eta)$) 是算子 $\mathcal{B}^{\varepsilon}(\eta)$ 的所谓准模态，其余项为 δ^{ε}。如 (3.5)-(3.6) 所述，它逼近算子$\mathcal{B}^{\varepsilon}(\eta)$ 的特征值和特征函数。此外，若不致混淆，函数 $\|U^{\varepsilon}_{as}(\eta);\, \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)\|^{-1}U^{\varepsilon}_{as}(\eta)$ 也称为准模态。

下文中，在本节始终构造 $M^{\varepsilon}_{as}(\eta)$ 和 $U^{\varepsilon}_{as}(\eta)$，并得到 (3.4) 中 δ^{ε} 的一个界，参见 (3.13)。$M^{\varepsilon}_{as}(\eta)$ 与序列 (1.8) 中真正的特征值之间的关系将在第 4 节给出。

对于 $j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，令

$$\Lambda^{0}_{\pm,j}(\eta) = (\eta \pm 2\pi j)^2 \tag{3.7}$$

它们是 (1.16) 中对应于固定弗洛凯参数 $\eta \in [-\pi, \pi]$ 的特征值。通过显式计算，相应的特征函数

$$U^{0}_{\pm,j}(x_1;\eta) = e^{\mathrm{i}(\eta\pm 2\pi j)x_1}, \tag{3.8}$$

不依赖于 x_2 变量。显然，对于不同的符号，(3.7) 中的值和 (3.8) 中的函数仅在 $j = 0$ 时才重合。具体而言，对于 $j = 0$，我们有递增序列 (1.14) 中的第一个特征值及其对应的特征函数:

$$\Lambda^{0}_{1}(\eta) = \Lambda^{0}_{\pm,0}(\eta) = \eta^2, \quad U^{0}_{1}(\cdot;\eta) = U^{0}_{\pm,0}(x_1;\eta) = e^{\mathrm{i}\eta x_1}. \tag{3.9}$$

根据 (3.3) 中的记号，我们取

$$M^{0}_{\pm,j}(\eta) = (1 + \Lambda^{0}_{\pm,j}(\eta))^{-1}$$

分别作为近似特征值（$M^{\varepsilon}_{as}(\eta)$ 对应于 $\pm$），并且

$$\begin{aligned} U^{\varepsilon}_{\pm,j}(x;\eta) =& X^{\varepsilon}(x_1)U^{0}_{\pm,j}(x_1;\eta) + (1 - X^{\varepsilon}(x_1))\left(U^{0}_{\pm,j}(0;\eta) + x_1\frac{\partial U^{0}_{\pm,j}}{\partial x_1}(0;\eta)\right) \\ &+ \varepsilon\chi_0(x_1)\frac{\partial U^{0}_{\pm,j}}{\partial x_1}(0;\eta)W^{1}_{0}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big), \end{aligned} \tag{3.10}$$

作为近似特征函数 $U^{\varepsilon}_{as}(\eta)$，它由 $U^{0}_{\pm,j}$ 中的 (3.8) 以及 $W^{1}_{0}(\xi)$ 构造而成；后者是 Ξ 中的有界调和函数，见 (2.6)、(2.7)-(2.9) 和 (2.13)。这里,

$$\begin{aligned} &X^{\varepsilon}(x_1) = 1 - \chi_{+}(x_1/\varepsilon) - \chi_{-}(x_1/\varepsilon), \quad \text{and,} \\ &\chi_0 \in C^{\infty}(\mathbb{R}),\ \chi_0(x_1) = 1 \text{ for } |x_1| \le 1/6,\ \chi_0(x_1) = 0 \text{ for } |x_1| \ge 1/3, \end{aligned} \tag{3.11}$$

其中，偶光滑截断函数 $\chi_{\pm}$ 由 (2.10) 定义。容易验证，$U^{\varepsilon}_{\pm,j}(x;\,\eta) \in \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)$。

注意，特征值 $M^{0}_{\pm,j}(\eta)$ 可能是单重的，也可能具有大于或等于 2 的重数，这取决于 H、$j \in \mathbb{N}_0$ 和 $\eta \in [-\pi, \pi]$。显然，一旦固定了 H 和 j，序列 (1.14) 中的特征值序号也可能随 η 而变化。下文中，我们固定 j 及正号或负号；为简洁起见，省略函数 $U^{\varepsilon}_{\pm,j}$ 对 η 的依赖关系。

为了应用引理 3.1，我们将 (3.4) 乘以 $\|U^{\varepsilon}_{as}(\eta);\ \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)\|^{-1}$，写作 $\delta^{\varepsilon} \equiv \delta^{\varepsilon}_{\pm,j}(\eta)$，并得到余项

$$\delta^{\varepsilon}_{\pm,j}(\eta) \ := \ \|U^{\varepsilon}_{\pm,j};\mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)\|^{-1}\|\mathcal{B}^{\varepsilon}(\eta)U^{\varepsilon}_{\pm,j} - M^{0}_{\pm,j}(\eta)U^{\varepsilon}_{\pm,j};\mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)\|, \tag{3.12}$$

对此我们得到如下统一估计：

$$\delta^{\varepsilon}_{\pm,j}(\eta) \le c_j\varepsilon, \quad \text{for } \varepsilon \le \varepsilon_j, \tag{3.13}$$

其中 c_j 和 ε_j 是两个正常数，且与 η 和 ε无关。

为证明 (3.13)，首先，我们来证明由 (3.10) 构造的函数族具有几乎正交性：

$$|\langle U^{\varepsilon}_{+,j}, U^{\varepsilon}_{-,j}\rangle_{\eta\varepsilon}| \le C_j\varepsilon^{1/2} \qquad \text{for } \varepsilon < \varepsilon_j,\ \eta \in [-\pi,\pi], \quad j \in \mathbb{N}, \tag{3.14}$$

$$|\langle U^{\varepsilon}_{\pm,j}, U^{\varepsilon}_{\mp,k}\rangle_{\eta\varepsilon}| \le C_{j,k}\varepsilon^{1/2} \qquad \text{for } \varepsilon < \varepsilon_{j,k},\ \eta \in [-\pi,\pi], \quad j,k \in \mathbb{N}_0,\ j \ne k, \tag{3.15}$$

其中 C_j、 $C_{j,k}$、 ε_j 和 $\varepsilon_{j,k}$ 是一些正常数，且与 ε 和 η无关；请回忆， $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\eta\varepsilon}$表示 $\mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)$ 中的内积。

我们来证明 (3.14)。由于函数 $U^0_{\pm,j}$ 在 $L^2(\varpi^0)$ 和 $H^1(\varpi^0)$ 中的正交性，我们可以写成

$$\begin{aligned}|\langle U^{\varepsilon}_{+,j}, U^{\varepsilon}_{-,j}\rangle_{\eta\varepsilon}| =& (\nabla_x(U^{\varepsilon}_{+,j} - U^0_{+,j}), \nabla_x U^{\varepsilon}_{-,j})_{\varpi^\varepsilon} + (\nabla_x U^0_{+,j}, \nabla_x(U^{\varepsilon}_{-,j} - U^0_{-,j}))_{\varpi^\varepsilon}\\ &- (\nabla_x U^0_{+,j}, \nabla_x U^0_{-,j})_{\varpi^0\setminus\varpi^\varepsilon} + (U^{\varepsilon}_{+,j} - U^0_{+,j}, U^{\varepsilon}_{-,j})_{\varpi^\varepsilon}\\ &+ (U^0_{+,j}, U^{\varepsilon}_{-,j} - U^0_{-,j})_{\varpi^\varepsilon} - (U^0_{+,j}, U^0_{-,j})_{\varpi^0\setminus\varpi^\varepsilon}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

此外，根据 $U^{\varepsilon}_{\pm,j}$的定义 (3.10)，有

$$\begin{aligned}\|U^{\varepsilon}_{\pm,j} - U^0_{\pm,j}; \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)\| \le& \left\|(1 - X^{\varepsilon}(x_1))\left(U^0_{\pm,j}(x_1;\eta) - U^0_{\pm,j}(0;\eta) - x_1\frac{\partial U^0_{\pm,j}}{\partial x_1}(0;\eta)\right); \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)\right\|\\ &+ \left\|\varepsilon\frac{\partial U^0_{\pm,j}}{\partial x_1}(0;\eta)W^1_0\big(\frac{x}{\varepsilon}\big); \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)\right\|.\end{aligned}$$

因此，由于 $U^0_{\pm,j}$是光滑函数， $1 - X^{\varepsilon}$ 的支集包含于 $\{|x_1| < 2R\varepsilon\}$ 和 $W^1_0 \in \mathcal{H}^1_{per}(\Xi)$ 中，我们有

$$\|U^{\varepsilon}_{\pm,j} - U^0_{\pm,j}; \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)\| \le \widehat{C}_j\varepsilon^{1/2}, \tag{3.17}$$

其中，根据 (3.11)，我们对 $U^0_{\pm,j}(x_1,\eta)$ 在 $|x_1| \le O(\varepsilon)$ 处应用了泰勒公式，进行了变量替换 (2.5)，并利用了 $W^1_0(\xi)$ 在 ξ_2 方向上的周期性。此外， $\widehat{C}_j$ 是一个与 ε 和 η 无关的常数。现在，利用 (3.17)、$U^0_{\pm,j}(x_1,\eta)$ 的光滑性以及 $|\varpi^0 \setminus \varpi^\varepsilon| = O(\varepsilon)$ 这一事实，我们得到

$$\|U^{\varepsilon}_{\pm,j}; \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)\|^2 \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \|U^0_{\pm,j}; L^2(\varpi^0)\|^2 + \|\nabla_x U^0_{\pm,j}; L^2(\varpi^0)\|^2 = (1 + \Lambda^0_{\pm,j}(\eta))H. \tag{3.18}$$

因此，综合 (3.16)、(3.17)、(3.18)，并利用 $|\varpi^0 \setminus \varpi^\varepsilon| = O(\varepsilon)$，我们得到 (3.14)。

对每个 k 和 j, $\kappa \ne j$，以略作修改的方式重述上述证明，即可得到 (3.15) 中的四个估计。

那么，对于正号或负号以及指标 $j \in \mathbb{N}_0$ 和 $\eta \in [-\pi,\pi]$，我们引入 e

$$U^{\varepsilon}_{as,\pm,j}(\eta) := \|U^{\varepsilon}_{\pm,j}(\eta); \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)\|^{-1} U^{\varepsilon}_{\pm,j}(\eta) \tag{3.19}$$

为由与$\Lambda^0_{\pm,j}(\eta)$对应的特征函数构造的准模态，参见和式（3.8）。由式（3.14）、（3.15） (3.10)
和（3.18），我们得到近似正交归一条件：

$$|\langle U^{\varepsilon}_{as.+,j}, U^{\varepsilon}_{as,-,j}\rangle_{\eta\varepsilon}| \le \widetilde{C}_j\varepsilon^{1/2} \qquad \text{for } \varepsilon < \widetilde{\varepsilon}_j,\ \eta \in [-\pi,\pi], \quad j \in \mathbb{N}, \tag{3.20}$$

$$|\langle U^{\varepsilon}_{as,\pm,j}, U^{\varepsilon}_{as,\mp,k}\rangle_{\eta\varepsilon} - \delta_{kj}| \le \widetilde{C}_{j,k}\varepsilon^{1/2} \qquad \text{for } \varepsilon < \widetilde{\varepsilon}_{j,k},\ \eta \in [-\pi,\pi], \quad j,k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.21}$$

~ ~其中， C_j、 $C_{j,k}$、 $\widetilde{\varepsilon}_j$ 和$\widetilde{\varepsilon}_{j,k}$ 是与 ε 和 η无关的某些正常数。最后，我们写出以下估计

$$\|\mathcal{B}^\varepsilon(\eta)U^\varepsilon_{\pm,j} - M^0_{\pm,j}(\eta)U^\varepsilon_{\pm,j}; \mathcal{H}^\varepsilon(\eta)\| \le \widehat{c}_j\varepsilon, \quad \text{for } \varepsilon \le \widehat{\varepsilon}_j$$

（对于某个与 ε 和 η 无关的正常数 $\widehat{c}_j$ ），其证明涉及繁琐的计算，这里不再赘述：稍作修改后，可由 [9] 中的证明推出。结合该估计与收敛关系 (3.18)，我们可以写出余项 (3.13) 的一致界。

现在，应用 引理 3.1 给出了算子 $\mathcal{B}^\varepsilon(\eta)$ 的一个特征值 $M^\varepsilon_{\pm,j}(\eta)$，使得

$$|M^\varepsilon_{\pm,j}(\eta) - M^0_{\pm,j}(\eta)| \le c_j\varepsilon, \quad \text{for } \varepsilon \le \varepsilon_j,\ \eta \in [-\pi,\pi], \tag{3.22}$$

其中因子 $c_j > 0$ 和常数 $\varepsilon_j > 0$ 均与 η 和 ε 无关。回顾 (3.3)，由 (3.22) 可得

$$|\Lambda^\varepsilon_{\pm,j}(\eta) - \Lambda^0_{\pm,j}(\eta)| \le c_j\varepsilon(1+\Lambda^0_{\pm,j}(\eta))(1+\Lambda^\varepsilon_{\pm,j}(\eta)), \tag{3.23}$$

因此

$$(1+\Lambda^\varepsilon_{\pm,j}(\eta))(1-c_j\varepsilon(1+\Lambda^0_{\pm,j}(\eta)) \le 1+\Lambda^0_{\pm,j}(\eta).$$

令

$$\widetilde{\varepsilon}_j := \frac{1}{2c_j(1+4\pi^2j^2)} \text{ when } j = 1,2,\cdots \quad \text{while } \widetilde{\varepsilon}_0 := \frac{1}{2c_0(1+\pi^2)} \text{ when } j = 0.$$

T因此，对于 $\varepsilon \le \min(\varepsilon_j,\ \widetilde{\varepsilon}_j)$，我们有 $(1-c_j\varepsilon(1+\Lambda^0_{\pm,\ j}(\eta)) > 1/2$ ，因此 e

$$|\Lambda^\varepsilon_{\pm,j}(\eta) - \Lambda^0_{\pm,j}(\eta)| \le 2c_j\varepsilon(1+\Lambda^0_{\pm,j}(\eta))^2 \le C_j\varepsilon \qquad \forall \eta \in [-\pi,\pi]. \tag{3.24}$$

估计式 (3.22) 和 (3.24) 对下文至关重要，可用于推导序列 (1.8) 和 (1.14) 中特征值之间收敛速率的界。

4 近似特征值与真正的特征值

本节将说明引理 3.1 给出的特征值 $\Lambda^\varepsilon_{\pm,\ j}(\eta)$ 与递增序列 (1.8) 中某个特征值之间的关系，该特征值满足 (3.24)。为陈述定理 4.1 和定理 4.2 以及推论 4.3，我们将运用第 3 节中的结果，并采用关于趋近于特征函数的近似正交函数族的论证；关于这一技术在迥异问题中的应用，参见 [16], [27] 和 [23] 。相关内容另见 [13, §5.32] 。

根据定义 （3.7）—（3.9）以及估计（3.22）和（3.24），我们得到以下结果 .

定理 4.1。 对于序列 （1.14）中的问题 （1.10）—（1.12） 的每个特征值 Λ^0_m（η） ，其中 $m = 1$、2、3、 $\cdots$，并且相应的特征函数在区间 $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] \subset [-\pi,\pi]$内不依赖于 x_2-变量（ η），至少存在一个问题 （1.4）—（1.6） 的特征值 $\Lambda^\varepsilon_{p(\varepsilon,\eta,m)}$（$\eta$） 满足

$$|\Lambda^\varepsilon_{p(\varepsilon,\eta,m)}(\eta) - \Lambda^0_m(\eta)| < C_m\varepsilon \qquad \forall\ \eta \in [\mathfrak{a},\mathfrak{b}],\ \varepsilon \le \varepsilon_m, \tag{4.1}$$

其中， C_m 和 ε_m 是与 ε 和 η无关的某些正常数。此外，对于不包含 η_0 的区间 $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ ，若 $\Lambda^0_m(\eta_0)$ 的重数大于1，则$p(\varepsilon,\eta,m) \ge m$。

证明。 根据假设， $\Lambda^0_m(\eta)$与 $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ 中的某个$\Lambda^0_{\pm,j}(\eta)$重合，其中符号取正或负，且存在某个 $j\equiv j(m)$，我们针对相同的符号和 j，令 $\Lambda^\varepsilon_{p(\varepsilon,\eta,m)}(\eta)=\Lambda^\varepsilon_{\pm,j}(\eta)$。需要注意的是，该符号可能在 $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$的子区间内发生变化。因此，由(3.24)可得(4.1)。 $p(\varepsilon,\eta,m)$大于或等于 m 这一事实源于估计式(2.1)，定理得证。 □

需要强调的是，虽然推论 2.3 给出了 (1.4)-(1.6) 与 (1.10)-(1.12) 的所有特征值之间的逼近方法，但定理 4.1 仅对均匀化问题 (1.4)-(1.6) 的某些特征值与均匀化问题 (1.10)-(1.12) 的某些特征值之间的偏差给出估计，且这些估计适用于 η 所在的某些区间；这些区间可能随 m 和 H 的取值而与 $[-\pi,\pi]$ 重合（见图 2、图 3 和图 4）。然而，我们无法保证所有特征值 (1.14) 都能如此逼近。此外，我们目前也无法保证数目 $p(\varepsilon,\eta,m)$ 与 m 相同。只有对于 m 的少数几个取值，才能严格证明这一点，而且始终取决于 H 的值。这是因为难以将特征值 (3.7) 按单调序列 (1.14) 排序。特别是，为了说明这一难点，我们证明，对于 $m=1$、2、3，$p(\varepsilon,\eta,m)=m$（参见定理 5.1）。下面的定理给出初步结果：当 η 属于 η_0 的一个邻域时，$p(\varepsilon,\eta,m)\geq m$，且 $\Lambda^0_m(\eta_0)$ 是 (1.10)-(1.12) 的重特征值。不过，根据 (3.20)-(3.24)，对于定理 4.1 陈述中出现的 m 的取值，只要 $\{\Lambda_p(\eta)\}_{p=1}^m$ 有一个仅依赖于 x_1 的对应特征函数，就可以继续这一过程；例如，当 $H<1/\sqrt{8}$ 时见图 3，以及注 4.4。

为简化下一条定理的证明，当 $m=1$,2,3 时，将 (3.22) 和 (3.24) 写成以下形式会很有用：

$$|M^\varepsilon_{\pm,j}(\eta)-M^0_{\pm,j}(\eta)|\leq c\varepsilon\qquad\forall\eta\in[-\pi,\pi],\,\varepsilon\leq\varepsilon_0 \tag{4.2}$$

and

$$|\Lambda^\varepsilon_{\pm,j}(\eta)-\Lambda^0_{\pm,j}(\eta)|\leq C\varepsilon\qquad\forall\eta\in[-\pi,\pi],\,\varepsilon\leq\varepsilon_0, \tag{4.3}$$

其中 ε_0、 c 和 C 为某些正常数。因此，对任意 $c_r\geq c$，区间 $[M^0_{\pm,j}(\eta)$ $c_r\varepsilon$ $M^0_\pm$ η $+c_r\varepsilon]$ $M^\varepsilon_\pm$ η ε_0 $_{,,j}(\,)$ 至少包含一个特征值 $_{,j}(\,)$，并且可以将 的值替换为 $\varepsilon_{0,r}$，以使 (4.3) 对某个常数 C_r 成立。也就是说，

$$|M^\varepsilon_{\pm,j}(\eta)-M^0_{\pm,j}(\eta)|\leq c_r\varepsilon\qquad\forall\eta\in[-\pi,\pi],\,\varepsilon\leq\varepsilon_{0,r} \tag{4.4}$$

and

$$|\Lambda^\varepsilon_{\pm,j}(\eta)-\Lambda^0_{\pm,j}(\eta)|\leq C_r\varepsilon\qquad\forall\eta\in[-\pi,\pi],\,\varepsilon\leq\varepsilon_{0,r}. \tag{4.5}$$

注意，上述公式包含 $j=0$ 的情形，参见 (3.9)：

$$|(1+\Lambda^\varepsilon_{\pm,0}(\eta))^{-1}-(1+\eta^2)^{-1}|\leq c_r\varepsilon\qquad\forall\eta\in[-\pi,\pi],\,\varepsilon\leq\varepsilon_{0,r}, \tag{4.6}$$

and

$$|\Lambda^\varepsilon_{\pm,0}(\eta)-\eta^2|\leq C_r\varepsilon\qquad\forall\eta\in[-\pi,\pi],\;\varepsilon\leq\varepsilon_{0,r}. \tag{4.7}$$

同样地，为简便起见，对于固定的 $m=1$、2、3 和 $\eta\in[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]\subset[-\pi,\pi]$，我们省略相应的符号以及指标 $j\equiv j(m)$ 的书写，并将由分别对应于 $\Lambda^0_m(\eta)$ 和 $\Lambda^0_{m+1}(\eta)$ 的两个特征函数构造出的 (3.19) 中的两个准模态记为 $U^\varepsilon_{as,\,m}(\eta)$ 和 $U^\varepsilon_{as,\,m+1}(\eta)$，参见 (3.10)

和 (3.8)，其中 j 对应于符号加号或减号。根据 (3.20) 和 (3.21)，它们满足

$$\langle U^{\varepsilon}_{as,m}(\eta)\,,\,U^{\varepsilon}_{as,m+1}(\eta)\rangle_{\eta\varepsilon}=\widetilde{C}\sqrt{\varepsilon}\to 0\quad\text{ and }\quad\|U^{\varepsilon}_{as,m}(\eta);\mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)\|^2=1,\quad m=1,2,3.\tag{4.8}$$

定理 4.2. 存在常数 $\varepsilon_0>0$ 和 C_0，它们与 ε 和 $\eta\in[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]\subseteq[-\pi,\pi]$ 无关，使得对于序列 (1.14)中问题 (1.10)–(1.12) 的每个特征值 $\Lambda^0_m(\eta)$，其中 $m=1$、2、3，且对应的特征函数仅依赖于 x_1变量，都存在问题 (1.4)–(1.6) 的一个特征值$\Lambda^{\varepsilon}_{p(\varepsilon,\eta,m)}(\eta)$，满足

$$|\Lambda^{\varepsilon}_{p(\varepsilon,\eta,m)}(\eta)-\Lambda^0_m(\eta)|<C_0\varepsilon\qquad for\ m=1,2,3,\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0\ \ and\ \ \eta\in[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]\subset[-\pi,\pi],\tag{4.9}$$

其中 $p(\varepsilon,\eta,m)\geq m$。根据 H和 m，区间 $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ 可以与整个$[-\pi,\pi]$ 重合，也可以是任意一个不包含色散曲线与对应的、依赖于 x_2的特征函数相交的交点横坐标的区间。

特别地，对于 $m=1$ 和 $H>0$、$m=2$ 和 $H\in(0,1/2)$ 以及 $m=3$ 和$H\in(0,1/\sqrt{8})$，我们得到

$$|\Lambda^{\varepsilon}_{p(\varepsilon,\eta,m)}(\eta)-\Lambda^0_m(\eta)|<C_0\varepsilon,\qquad for\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0,\ \eta\in[-\pi,\pi],\ \ and\ \ p(\varepsilon,\eta,m)\geq m.\tag{4.10}$$

证明。定理 4.1 已证明存在这样的指标 $p(\varepsilon,\ \eta,\ m)$。对于每个 m，我们来证明 $p(\varepsilon,\ \eta,\ m)\geq m$，即使 $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ 包含满足 $\Lambda_m(\eta^0)=\Lambda_{m+1}(\eta^0)$ 的点 η_0 也是如此。我们根据 m 将证明分为若干步。

1.- 当 $m=1$ 时的情形。若 $m=1$，则结果 $p(\varepsilon,\eta,m)\geq m$ 显而易见，且 $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]=[-\pi,\pi]$。此外，当 $\eta=\pm\pi$ 时，$\Lambda^0_1(\pm\pi)$ 的重数为 2，而 $(\pm\pi,\pi^2)$ 是极限色散曲线 $\Lambda^0_1(\eta)$ 上重数大于 1 的仅有的点。也就是说，对于 $\eta=\pm\pi$，极限问题的第一特征值是二重的：$\Lambda^0_1(\pm\pi)=\Lambda^0_2(\pm\pi)=\pi^2$。当 $\eta=-\pi$ 时，相应的特征函数为 $U^0_1(-\pi)=e^{-i\pi x_1}$ 和 $U^0_2(-\pi)=e^{i\pi x_1}$；而当 $\eta=\pi$ 时，则为 $U^0_1(\pi)=e^{i\pi x_1}$ 和 $U^0_2(\pi)=e^{-i\pi x_1}$，并且我们可以证明 $p(\varepsilon,\pm\pi,2)\geq 2$。事实上，我们来证明 (1.4)–(1.6) 至少有两个特征值满足 (4.6)。由于这两个点可以用同样的方式处理，我们以 $\eta=-\pi$为例。所构造的准模态$U^{\varepsilon}_{as,}1(-\pi)$ 和$U^{\varepsilon}_{as,}2(-\pi)$ 满足条件 (4.8)。显然，实际上，$U^{\varepsilon}_{as,}1(-\pi):=U^{\varepsilon}_{as,\pm,}0(-\pi)$ 且$U^{\varepsilon}_{as,}2(-\pi)=U^{\varepsilon}_{as,+,}1(-\pi)$，参见 (3.9)、(3.7)、(3.8) 和 (3.10)，进一步明确地说，

$$U^{\varepsilon}_{as,1}(-\pi)=\|U^{\varepsilon}_{\pm,0}(-\pi);\mathcal{H}^{\varepsilon}(-\pi)\|^{-1}U^{\varepsilon}_{\pm,0}(-\pi),\quad U^{\varepsilon}_{as,2}(-\pi)=\|U^{\varepsilon}_{+,1}(-\pi);\mathcal{H}^{\varepsilon}(-\pi)\|^{-1}U^{\varepsilon}_{+,1}(-\pi).$$

对于任意 $c_r\geq c$ （参见 (4.4) 和 (4.5)），考虑所有特征值

$$\{M^{\varepsilon}_J(-\pi),\cdots,M^{\varepsilon}_{J+K-1}(-\pi)\}$$

在区间 $[(1+\Lambda^0_1(-\pi))^{-1}-c_r\varepsilon,\ (1+\Lambda^0_1(-\pi))^{-1}+c_r\varepsilon]$ 及相应的特征函数$\{U^{\varepsilon}_J(\cdot;\,-\pi)\,\cdots,\ U^{\varepsilon}_{J+K-1}(\cdot;\,-\pi)\}$。利用引理 3.1 中的界 (3.6)，我们得到

$$\|U^{\varepsilon}_{as,l}(-\pi)-\sum_{i=J}^{J+K-1}\alpha^{\varepsilon}_{i,l}U^{\varepsilon}_i(\cdot;-\pi);\mathcal{H}^{\varepsilon}(-\pi)\|\leq 2\frac{c}{c_r},\qquad\sum_{i=J}^{J+K-1}|\alpha^{\varepsilon}_{i,l}|^2=1,\quad l=1,2.$$

我们来证明 $\widetilde{U}_1^\varepsilon := \sum_{i=J}^{J+K-1} \alpha_{i,\ 1}^\varepsilon U_i^\varepsilon(\cdot;\ -\pi)$ 和 $\widetilde{U}_2^\varepsilon := \sum_{i=J}^{J+K-1} \alpha_{i,\ 2}^\varepsilon U_i^\varepsilon(\cdot;\ -\pi)$ 是线性无关的函数，因此，在序列 $\{M_J^\varepsilon(-\pi)\ \cdots,\ M_{J+K-1}^\varepsilon(-\pi)\}$ 中，方程 (1.4)–(1.6) 至少有两个特征值，其总重数大于或等于 2。

事实上，利用上述估计和 (4.8)，可写为

$$\begin{aligned}\left|\langle \widetilde{U}_1^\varepsilon\,,\widetilde{U}_2^\varepsilon\rangle_{-\pi\varepsilon}\right| \ \le\ & \left|\langle \widetilde{U}_1^\varepsilon\,,\widetilde{U}_2^\varepsilon - U_{as,2}^\varepsilon(-\pi)\rangle_{-\pi\varepsilon}\right| + \left|\langle \widetilde{U}_1^\varepsilon - U_{as,1}^\varepsilon(-\pi)\,,U_{as,2}^\varepsilon(-\pi)\rangle_{-\pi\varepsilon}\right| \\ & + \left|\langle U_{as,1}^\varepsilon(-\pi)\,,U_{as,2}^\varepsilon(-\pi)\rangle_{-\pi\varepsilon}\right| \le 2\frac{c}{c_r} + 2\frac{c}{c_r} + \widetilde{C}\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

现在，假设 $\widetilde{U}_1^\varepsilon$ 和 $\widetilde{U}_2^\varepsilon$ 是两个线性相关函数，不失一般性，我们可写成 $\alpha\widetilde{U}_1^\varepsilon = \widetilde{U}_2^\varepsilon$，其中 $\alpha \neq 0, |\alpha| = 1$，对 $\widetilde{U}_1^\varepsilon$取内积可得

$$|\alpha|\left|\langle \widetilde{U}_1^\varepsilon\,,\widetilde{U}_1^\varepsilon\rangle_{-\pi\varepsilon}\right| = 1 = \left|\langle \widetilde{U}_2^\varepsilon\,,\widetilde{U}_1^\varepsilon\rangle_{-\pi\varepsilon}\right| \le 2\frac{c}{c_r} + 2\frac{c}{c_r} + \widetilde{C}\sqrt{\varepsilon}.$$

因此，只需取 $c_r := c_{r_0}$ 和 $\varepsilon_0 := \varepsilon_{0,\ r_0}$，使得

$$4\frac{c}{c_{r_0}} + \widetilde{C}\sqrt{\varepsilon_{0,r_0}} < 1$$

即可导出反证法。因此，我们还证明了 $p(\varepsilon,\ -\pi,\ 2) \ge 2$ 和 $p(\varepsilon,\ \pi,\ 2) \ge 2$，并可在 (4.9) 中固定常数 $C_0 := C_{r_0}$ 和 $\varepsilon_0 := \varepsilon_{0,\ r_0}$，从而得到 $p(\varepsilon,\ \eta,\ 1) \ge 1\ \forall \eta \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \equiv [-\pi, \pi]$；而在 $\eta = \pm\pi$ 处，若 $\Lambda_1^0(\eta)$ 的重数为二，则指标 $p(\varepsilon,\ \pm\pi,\ 2)$ 也大于或等于 2。

2.- 当 $m = 2$. 我们继续考虑 $m = 2$，使得同时也有 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = [-\pi, \pi]$，即 $H \in (0,\ 1/2)$，参见图 3 和图 4 a)。现在，由于 $\Lambda_2^0(-\pi) = \Lambda_1^0(-\pi) = \pi^2$ 且 $\Lambda_2^0(+\pi) = \Lambda_1^0(+\pi) = \pi^2$，我们可以避开这两个点，因为结果与 $\Lambda_1^0(\pm\pi)$ 和$p(\varepsilon,\ \pm\pi,\ 2) \ge 2$ 的情形相同。

对于每个 $\varepsilon \le \varepsilon_0$，我们考虑两个点的横坐标 $\tilde{a}_{\pm\pi,\ \varepsilon}$，这两个点分别是 $(1+\Lambda_2^0(\eta))^{-1}$ 的 ε-邻域与 $(1+\Lambda_1^0(\eta))^{-1}$ 的 ε-邻域相交之处。更具体地说，我们考虑直线的交点

$$(1 + \Lambda_1^0(\eta))^{-1} - c_{r_0}\varepsilon \quad \text{and} \quad (1 + \Lambda_2^0(\eta))^{-1} + c_{r_0}\varepsilon, \tag{4.12}$$

我们分别将其记为 $\tilde{a}_{-\pi,\varepsilon}$ 和 $\tilde{a}_{\pi,\varepsilon}$（见图6和图7）。

考虑区间 $(\tilde{a}_{-\pi,\varepsilon}, \tilde{a}_{\pi,\varepsilon})$ 中的 η，由于 ε-邻域互不相交，当 $j = 1$ 时，公式 (4.4)–(4.5) 和 (4.6)–(4.7) 给出 (1.4)–(1.6) 的两个不能重合的特征值，因此结论成立，即 $p(\varepsilon, \eta, 2) \ge 2\ \forall \eta \in (\tilde{a}_{-\pi,\varepsilon}, \tilde{a}_{\pi,\varepsilon})$。

现在考虑区间 $(-\pi, \tilde{a}_{-\pi,\varepsilon}]$ 和 $\varepsilon \le \varepsilon_0$）中的 η。在这种情形下，两个 ε-邻域相交，因此我们取一个更大的区间 $[(1+\Lambda_2^0(\eta))^{-1} - 3c_{r_0}\varepsilon, (1+\Lambda_2^0(\eta))^{-1} + 3c_{r_0}\varepsilon]$，它包含$[(1 + \Lambda_1^0(\eta))^{-1} - c_{r_0}\varepsilon, (1 + \Lambda_1^0(\eta))^{-1} + c_{r_0,}\varepsilon]$，因此至少包含算子 $\mathcal{B}^\varepsilon(\eta)$ 在 (3.2) 中的一个特征值。下面证明它还包含该算子的另一个不同特征值，并且当 $H \in (0, 1/2)$ 时，定理的结论对 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = [-\pi, \pi]$ 也成立。此处以及下文的整个证明中，我们所说的“不同”是指这两个特征值的总重数大于或等于 2，或者等价地说，它们在 (1.4)–(1.6) 的特征值序列 (1.8) 中有两个对应项。

事实上，公式 (4.4) 和 (4.6) 给出了 (1.4)–(1.6) 的两个特征值，而目前它们可能重合。不过，我们构造了两个准模态 $U_{as,\ 1}^\varepsilon(\eta)$ 和 $U_{as,\ 2}^\varepsilon(\eta)$，它们满足 (4.8)。下面我们

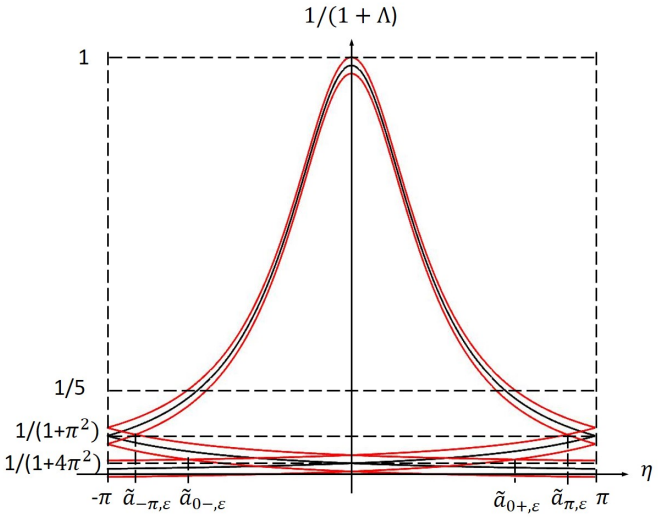

图6：曲线 $(1+\Lambda_1^0(\eta))^{-1}$ 和 $(1+\Lambda_2^0(\eta))^{-1}$ 在 $H \in (0, 1/2)$ 时的图形。相应的ε-邻域是周围红线之间的区域。

证明它们趋近于 (1.4)–(1.6) 的两个特征函数的线性组合，且这两个线性组合是线性无关函数。为此，我们考虑算子 $\mathcal{B}^\varepsilon(\eta)$ 在区间 $[(1+\Lambda_2^0(\eta))^{-1}-3c_{r_0}\varepsilon,\ (1+\Lambda_2^0(\eta))^{-1}+3c_{r_0}\varepsilon]$, $\{M_i^\varepsilon(\eta)\}_{i=J_\eta}^{J_\eta+K_\eta-1}$ 中的所有可能特征值及其对应的特征函数，并在引理 3.1 中应用 (3.6)；由此得到

$$\Big\|U^\varepsilon_{as,l}(\eta) - \sum_{i=J_\eta}^{J_\eta+K_\eta-1} \alpha^\varepsilon_{i,l,\eta} U^\varepsilon_i(\cdot;\eta); \mathcal{H}^\varepsilon(\eta)\Big\| \le 2\frac{c}{3c_{r_0}}, \qquad \sum_{i=J_\eta}^{J_\eta+K_\eta-1} |\alpha^\varepsilon_{i,l,\eta}|^2 = 1, \quad l = 1, 2,$$

并对 $\eta = -\pi$ 按上述方法继续（参见 (4.11)），通过反证法得到结果：具体而言，我们声称算子 $\mathcal{B}^\varepsilon(\eta)$ 在 $[(1+\Lambda_2^0(\eta))^{-1} -3c_{r_0}\varepsilon,(1+\Lambda_2^0(\eta))^{-1}+3c_{r_0}\varepsilon]$ 中至少有两个不同的特征值。然后，我们固定来自 $3c_{r_0}$ 和 $\varepsilon_0 := \varepsilon_{r_0}$ 的常数 C_0 和 ε_0，如 (4.9) 中所示，参见 (3.23)-(3.24)，从而得到 $p(\varepsilon,\eta,2)$ 大于等于 2, $\forall \eta \in [-\pi, \pi]$。

此外，当 $0 < H < 1/2$ （参见图 3 和图 4）时，我们可以证明，在点 $\eta \equiv 0$ 处，其中 $\Lambda_2^0(0) = \Lambda_3^0(0) = 4\pi^2$，指标 $p(\varepsilon, 0, 3)$ 满足 $p(\varepsilon, 0, 3) \ge 3$。事实上，考虑当 $\eta \equiv 0$ 属于 $[(1+\Lambda_2^0(0))^{-1} - 3c_{r_0}\varepsilon,\ (1+\Lambda_2^0(0))^{-1} + 3c_{r_0}\varepsilon]$ 时，算子 $\mathcal{B}^\varepsilon(\eta)$ 的所有特征值。公式 (3.22) 给出了 (1.4)–(1.6) 的两个特征值，它们目前可能重合。但是，我们构造了两个满足 (4.8) 的准模态 $U^\varepsilon_{as,\ 2}(0)$ 和 $U^\varepsilon_{as,\ 3}(0)$。下面证明上述两个特征值彼此不同。

为此，我们考虑所有可能的特征值

$$\{M^\varepsilon_{J_0}(0), \cdots, M^\varepsilon_{J_0+K_0-1}(0)\}$$

在区间 $[(1+\Lambda_2^0(0))^{-1}-3c_{r_0}\varepsilon,\ (1+\Lambda_2^0(0))^{-1}+3c_{r_0}\varepsilon]$ 内，取相应的特征函数$\{U^\varepsilon_{J_0}(\cdot;0)\ \cdots,\ U^\varepsilon_{J_0+K_0-1}(\cdot;0)\}$，并利用引理 3.1 中关于偏差的界，参见 (3.6)；可得

$$\|U^\varepsilon_{as,l}(0) - \sum_{i=J_0}^{J_0+K_0-1} \alpha^\varepsilon_{i,l,0} U^\varepsilon_i(\cdot;0); \mathcal{H}^\varepsilon(0)\| \le 2\frac{c}{3c_{r_0}}, \qquad \sum_{i=J_0}^{J_0+K_0-1} |\alpha^\varepsilon_{i,l,0}|^2 = 1, \quad l = 2, 3.$$

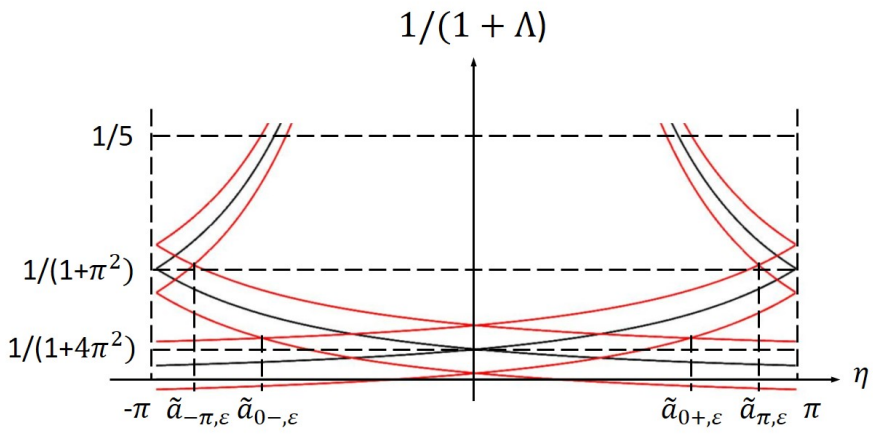

图6将纵坐标轴拉伸后的结果：曲线 $(1+\Lambda_1^0(\eta))^{-1}$ 和 $(1+\Lambda_2^0(\eta))^{-1}$，以及红线之间对应的 ε-邻域。

并像处理 $\eta=-\pi$ 那样，采用反证法，参见 (4.11)，找到两个线性无关函数

$$\Big\{\sum_{j=J_0}^{J_0+K_0-1}\alpha_{j,2,0}^{\varepsilon}U_j^{\varepsilon}(\cdot;0)\,,\ \sum_{j=J_0}^{J_0+K_0-1}\alpha_{j,3,0}^{\varepsilon}U_j^{\varepsilon}(\cdot;0)\Big\}.$$

因此，对于 $\eta\equiv 0$，算子 $\mathcal{B}^{\varepsilon}(\eta)$ 至少有两个不同的特征值，参见（3.2），且它们位于区间 $[(1+\Lambda_2^0(0))^{-1}-3c_{r_0}\varepsilon,\ (1+\Lambda_2^0(0))^{-1}+3c_{r_0}\varepsilon]$内。

因此，我们得到 $p(\varepsilon,0,2)\geq 2$ 和 $p(\varepsilon,0,3)\geq 3$。这是因为数值 $\Lambda^{\varepsilon}_{p(\varepsilon,0,1)}(0)$ 不能与 $\Lambda^{\varepsilon}_{p(\varepsilon,0,2)}(0)$ 或 $\Lambda^{\varepsilon}_{p(\varepsilon,0,3)}(0)$ 重合。

现在，在 $H\geq 1/2$的情形下，参见图4 b)和图3，考虑任意不包含色散曲线 $(\eta\pm 2\pi)^2$ 与 $\eta^2+\pi^2/H^2$的交点横坐标 η_0的区间 $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]=[-\pi,\mathfrak{b}_0]$ 或 $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]=[\mathfrak{a}_0,\pi]$，定理的结论均成立。也就是说，对于任意 $\eta\in[-\pi,\mathfrak{b}_0]\cup[\mathfrak{a}_0,\pi]$，$p(\varepsilon,\eta,2)\geq 2$是由上述关于 $m=1$、$m=2$的结果以及定理 4.1 推出的。

3.- 情形 $m=3$。当 $H<1/2$时，该过程可以继续进行 $m=3$，参见图 4 a) 和图 3。我们来证明，当 $\eta\in[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ 且 $0\in[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]\subset[a_0,b_0]\subset[-\pi,\pi]$时，$p(\varepsilon,\eta,3)\geq 3$，其中 a_0，b_0 是不包含曲线 $((\eta+2\pi)^2+1)^{-1}$ 与 $((\eta^2+\pi^2/H^2)+1)^{-1}$ 的交点横坐标，也不包含曲线 $((\eta-2\pi)^2+1)^{-1}$ 与 $((\eta^2+\pi^2/H^2)+1)^{-1}$ 的交点横坐标的最大区间。

事实上，考虑曲线 $(\Lambda_2^0(\eta)+1)^{-1}$ 和 $(\Lambda_3^0(\eta)+1)^{-1}$ 的 ε-邻域的交点横坐标 $\tilde{a}_{0\pm,\,\varepsilon}$，它们位于 $\eta=0$ 附近，即特征值 $\mathcal{B}^{\varepsilon}(0)$ 的二重特征值 $(1+\Lambda_2^0(0))^{-1}=(1+\Lambda_3^0(0))^{-1}=1/(1+4\pi^2)$ 附近。具体而言，$\tilde{a}_{0-,\,\varepsilon}$ 和 $\tilde{a}_{0+,\,\varepsilon}$ 表示曲线的交点横坐标

$$(1+\Lambda_2^0(\eta))^{-1}-c_{r_0}\varepsilon\quad\text{and}\quad(1+\Lambda_3^0(\eta))^{-1}+c_{r_0}\varepsilon,$$

其中 $\tilde{a}_{0-,\,\varepsilon}<\tilde{a}_{0+,\,\varepsilon}$；参见图6和图7。

在 $\mathfrak{a}>-\pi$（类似地，$\mathfrak{b}<\pi$）的情形下，显然，对于 $\eta\in[\mathfrak{a},\tilde{a}_{0-,\varepsilon})$（类似地，$\eta\in(\tilde{a}_{0+,\,\varepsilon},\mathfrak{b}]$），特征值 $\Lambda_i^0(\eta)$ 在 $i=1,2,3$ 时是简单的；(4.2) 和 (4.6) 保证在每个 $(\Lambda_i^0(\eta)+1)^{-1}$ 的 ε-邻域内至少存在一个特征值 $(\Lambda_p^{\varepsilon}(\eta)+1)^{-1}$，并且由于这些

邻域互不相交，因此至少存在三个不同的特征值 $\Lambda^{\varepsilon}_{p(\varepsilon,\eta,i)}(\eta)$ 、 $i=1$，2，3（它们的总重数大于或等于 3）。因此，对于 $\eta\in[\mathfrak{a},\tilde{a}_{0-,\varepsilon})$ ， $p(\varepsilon,\ \eta,\ 3)\geq 3\cup(\tilde{a}_{0+,\ \varepsilon},\ \mathfrak{b}]$。此外，如果 $\mathfrak{a}=-\pi$ （类似地， $\mathfrak{b}=\pi$），上文已证明，在 $(\Lambda^0_1(\eta)\ +1)^{\ -1}$ 的一个 ε-邻域内，算子 $\mathcal{B}^{\varepsilon}(\eta)$ 至少有两个特征值，参见 (3.2)，其总重数大于或等于 2；同样， $p(\varepsilon,\ \eta,\ 3)\geq 3$。

接下来，我们证明该结果对 $\eta\in[\tilde{a}_{0-,\varepsilon},\tilde{a}_{0+,\varepsilon}]$ 成立。

至于 $\eta=0$，结果 $p(\varepsilon,\ 0,\ 3)\geq 3$ 已在上一步骤中证明。由于对称性，只需进一步详细分析 $p(\varepsilon,\ \eta,\ 3)$ 在 $\eta\in[\tilde{a}_{0-,\varepsilon},0)$ 情形下的取值。对于 $\Lambda^0_2(\eta)$ 且 η 接近 $-\pi$ 的情形，我们采用上一步骤中的思路。也就是说，现在两个 ε-邻域相交，我们取一个更大的区间 $[(1+\Lambda^0_3(\eta))^{-1}-3c_{r_0}\varepsilon,\ (1+\Lambda^0_3(\eta))^{-1}+3c_{r_0}\varepsilon]$，它包含 $[(1+\Lambda^0_2(\eta))^{-1}-c_{r_0}\varepsilon,\ (1+\Lambda^0_2(\eta))^{-1}+c_{r_0,\ }\varepsilon]$ ，因此其中至少包含算子 $\mathcal{B}^{\varepsilon}(\eta)$ 的一个特征值，参见 (3.2)。下面证明它还包含该算子的另一个不同特征值。

事实上，公式 (4.2) 与 $j=1$ 一起给出了两个特征值 (1.4)–(1.6)，而这两个特征值目前可能相等。但是，我们构造了两个满足 (4.8) 的准模态 $U^{\varepsilon}_{as,2}(\eta)$ 和 $U^{\varepsilon}_{as,3}(\eta)$。下面推导可知，它们趋近于 (1.4)–(1.6) 的两个特征函数的线性组合，且这两个线性组合是线性无关函数。为此，我们考虑 $\mathcal{B}^{\varepsilon}(\eta)$ 在 $[(1+\Lambda^0_3(\eta))^{-1}-3c_{r_0}\varepsilon,(1+\Lambda^0_3(\eta))^{-1}+3c_{r_0}\varepsilon]$, $\{M^{\varepsilon}_i(\eta)\}_{i=J'_\eta}^{J'_\eta+K'_\eta-1}$ 中所有可能的特征值及其对应的特征函数，并应用引理 3.1，参见 (3.6)；于是得到

$$\left\|U^{\varepsilon}_{as,l}(\eta)-\sum_{i=J'_\eta}^{J'_\eta+K'_\eta-1}\dot{\alpha}^{\varepsilon}_{i,l,\eta}U^{\varepsilon}_i(\cdot;\eta);\mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)\right\|\leq 2\frac{c}{3c_{r_0}},\qquad \sum_{i=J_\eta}^{J_\eta+K_\eta-1}|\dot{\alpha}^{\varepsilon}_{i,l,\eta}|^2=1,\quad l=2,3.$$

并如上所述对 $\eta=-\pi$ （参见（4.11））使用反证法，从而得到所需结果。因此，算子 $\mathcal{B}^{\varepsilon}(\eta)$ 在 $[(1+\Lambda^0_3(\eta))^{-1}-3c_{r_0}\varepsilon,\ (1+\Lambda^0_3(\eta))^{-1}+3c_{r_0}\varepsilon]$ 中至少有两个不同的特征值。由于对于 $\eta\in[\tilde{a}_{0-,\varepsilon},\tilde{a}_{0+,\varepsilon}]$，在 $(\Lambda^0_1(\eta)\ +1)^{\ -1}$ 的 ε-邻域中还有另一个特征值，它不会与此处考虑的那些 ε-邻域相交（对于 $M^0_{\pm,\ 1}(\eta)$），因此我们得到了 (1.4)–(1.6) 的至少三个特征值，且其总重数大于或等于 3。再次，我们取 (4.9) 中的常数 C_0 、 $3c_{r_0}$ 和 $\varepsilon_0:=\varepsilon_{r_0}$ ，从而得到定理陈述中的值 $p(\varepsilon,\ \eta,\ 3)\geq 3$。

事实上， $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]\equiv[-\pi,\pi]$ 对于 $H<1/\sqrt{8}$，见图 3。因此，(4.10) 以及定理的所有结论均成立。□

由定理 4.2 的证明可知，在处理均匀化问题的重数为 2 的特征值的小邻域时，我们可以得出以下结果。

推论 4.3. 在定理 4.2 的假设下，设对于某个 $m\in\{1,2,3\}$ 和某个 $\eta^0\in[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$， $\Lambda^0_m(\eta^0)=\Lambda^0_{m+1}(\eta^0)$。那么，对于 $\varepsilon\leq\varepsilon_0$，存在 $a_{\eta^0_-,\varepsilon}$ 和 $a_{\eta^0_+,\varepsilon}$ ，使得对于 $\eta\in[a_{\eta^0_-,\varepsilon},a_{\eta^0_+,\varepsilon}]\subset[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$，至少有两个特征值 $\Lambda^{\varepsilon}_{p(\varepsilon,\eta,m)}(\eta)$ 和 $\Lambda^{\varepsilon}_{p(\varepsilon,\eta,m)+1}(\eta)$ 满足(4.9)，因此，

$$\left|\Lambda^{\varepsilon}_{p(\varepsilon,\eta,m)}(\eta)-\Lambda^0_j(\eta)\right|\leq C_0\varepsilon,\quad \left|\Lambda^{\varepsilon}_{p(\varepsilon,\eta,m)+1}(\eta)-\Lambda^0_j(\eta)\right|\leq C_0\varepsilon,\quad \forall\eta\in[a_{\eta^0_-,\varepsilon},a_{\eta^0_+,\varepsilon}],\ \varepsilon\leq\varepsilon_0,\tag{4.13}$$

当 $j=m,m+1$ 时。小区间的端点 $a_{\eta^0_-,\ \varepsilon}$ 和 $a_{\eta^0_+,\ \varepsilon}$ 可由 ε-邻域确定，该邻域以 $(1+\Lambda^0_m(\eta))^{-1}$ 和 $(1+\Lambda^0_{m+1}(\eta))^{-1}$ 为中心；二者都趋近于 η^0，当 $\varepsilon\to 0$ 时。

注 4.4. 比较定理 4.1 和定理 4.2 的结果时，有必要注意：对于满足 $\Lambda^0_m(\eta_0) = \Lambda^0_{m+1}(\eta_0)$ 的点 η_0，定理 4.1 的结果至少给出一个特征值 $\Lambda^{\varepsilon}_{p(\varepsilon,\eta_0,m)}(\eta)$，满足 $p(\varepsilon,\eta_0,m) \geq m$，但并未考虑重数。也就是说，它不能确保存在另一个不同的指标 $p(\varepsilon,\eta_0,m+1)$，使得 $p(\varepsilon,\eta_0,m+1) \geq m+1$；在 η_0 的一个小邻域内也可能出现同样的情况。定理 4.2 则给出了这一结果。定理 4.2 的证明中，主要困难出现在我们处于两条色散曲线 $(\eta_0,\Lambda^0_m(\eta_0)) \equiv (\eta_0,\Lambda^0_{m+1}(\eta^0))$ 的碰撞点的 ε-邻域内时；在这些点处，每个分支 $\Lambda^0_m(\eta)$ 和 $\Lambda^0_{m+1}(\eta)$ 的重数都会从一变为二（见图 8）。在这些邻域内，定理 4.2 的证明还确保存在两个不同的指标；具体而言，当 η 在 η_0 的一个小邻域内变化时，至少特征值 $\Lambda^{\varepsilon}_{p(\varepsilon,\eta,m)}(\eta)$ 和 $\Lambda^{\varepsilon}_{p(\varepsilon,\eta,m)+1}(\eta)$ 满足 (4.9)，参见推论 4.3。

此外，关于定理 4.2 证明的最后一步，值得注意的是，同样根据 $H < 1/\sqrt{8}$ 的取值，推理可以继续推广到其他甚至大于 3 的 m 值（参见图 3），而定理的结论对更多的 m 值也成立。然而，这一过程依赖于曲线 $(1+\Lambda^0_m(\eta))^{-1}$ 复杂的桁架-节点结构，计算也会变得繁琐，这正是本文避免进行这些计算的原因。 □

5 C低频色散曲线的收敛速率 .

本节中，我们证明论文的主要结果。我们证明，上一节中得到的指标 $p(\varepsilon,\eta,m) \geq m$ 与 m 一致，因此，我们为序列 (1.8) 和 (1.14) 的特征值之间的偏差给出界限，且这些界限对参数 ε 和 η 均一致。

定理 5.1。设 m 固定，m 在 $\{1,2,3\}$ 中变化，并且 $\Lambda^0_m(\eta)$ 是序列 (1.14)中的问题 (1.10)–(1.12) 的一个特征值，该特征值对应的特征函数对于区间 $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] \subseteq [-\pi,\pi]$ 内的 η 不变。

i). 假设区间 $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ 不包含满足 $\Lambda^0_m(\eta^0) = \Lambda^0_{m+1}(\eta^0)$ 的 η^0，那么我们证明，存在正常数 ε_0 和 C_0，它们与 η 和 ε 无关，使得序列 (1.8) 中问题 (1.4)–(1.6) 的特征值 $\Lambda^{\varepsilon}_m(\eta)$ 是唯一满足该估计的特征值

$$|\Lambda^{\varepsilon}_m(\eta) - \Lambda^0_m(\eta)| \leq C_0\varepsilon, \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0,\ \eta \in [\mathfrak{a},\mathfrak{b}]. \tag{5.1}$$

ii). 若对于某个 $\eta_0 \in [\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$，$m$ 满足 $\Lambda^0_m(\eta^0) = \Lambda^0_{m+1}(\eta^0) < \Lambda^0_{m+2}(\eta^0)$，则恰有两个特征值 $\Lambda^{\varepsilon}_m(\eta)$ 和 $\Lambda^{\varepsilon}_{m+1}(\eta)$ 满足 $\eta \in [a_{\eta^0_-,\varepsilon}, a_{\eta^0_+,\varepsilon}] \cap [\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ 对应的偏差 *(5.1)*，其中 $[a_{\eta^0_-,\varepsilon}, a_{\eta^0_+,\varepsilon}]$ 是 η_0 的一个小邻域。边缘 $a_{\eta^0_-}$、ε 和 $a_{\eta^0_+}$、ε 可由色散曲线 $\Lambda^0_m(\eta)$ 和 $\Lambda^0_{m+1}(\eta)$ 的一个 ε-邻域确定，并且二者均趋于 η^0，当 $\varepsilon \to 0$ 时。

iii). 特别地，对于 $m = 1$ 和 $H > 0$、对于 $m = 2$ 和 $H \in (0,\ 1/2)$ 以及对于 $m = 3$ 和 $H \in (0,\ 1/\sqrt{8})$，我们有

$$|\Lambda^{\varepsilon}_m(\eta) - \Lambda^0_m(\eta)| < C_0\varepsilon, \qquad \textit{for } \varepsilon \leq \varepsilon_0,\ \eta \in [-\pi,\pi]. \tag{5.2}$$

证明。 我们分三步进行证明，并在过程中使用定理 4.1 和 4.2 中的界。

第一步：情形 $\forall \eta \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}],\ \Lambda_m(\eta) < \Lambda_{m+1}(\eta)$。 我们来证明，由 (4.1) 得到的 $p(\varepsilon, \eta, m)$ 满足 $p(\varepsilon, \eta, m) = m$ 当 $\eta \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ 时，因此 (5.1) 也成立。

我们采用反证法，否定 (5.1)；同时，根据定理 4.1， $p(\varepsilon, \eta, m) \geq m$。这意味着存在 $\eta^* \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$，使得存在 $\varepsilon_{\eta^*} \leq \varepsilon_m$，满足 $p(\varepsilon_{\eta^*}, \eta^*, m) \geq m+1$，且 (5.1) 不成立。根据假设，

$$\Lambda^0_{m+1}(\eta^*) > \Lambda^0_m(\eta^*).$$

首先，我们注意到，对于这样的 η^*，上文所能选取的 ε_{η^*} 数量必定有限；否则，我们可以取 $\varepsilon_{\eta^*,l} \to 0$ 的一个子序列，使其为 $l \to \infty$，然后由 (4.1)，或等价地由 (4.9)，可写为

$$\Lambda^{\varepsilon_{\eta^*,l}}_{m+1}(\eta^*) \leq \Lambda^{\varepsilon_{\eta^*,l}}_{p(\varepsilon_{\eta^*,l}, \eta^*, m)}(\eta^*) \leq \Lambda^0_m(\eta^*) + C_0 \varepsilon_{\eta^*,l}. \tag{5.3}$$

现在，由于 (2.4)，取极限，当 $l \to \infty$ 时，我们得到反证法 :

$$\Lambda^0_{m+1}(\eta^*) \leq \Lambda^0_m(\eta^*).$$

因此，对于每个不满足 (5.1) 的 η^*，至多存在有限个 $\varepsilon_{\eta^*,1}, \varepsilon_{\eta^*,2}, \cdots \varepsilon_{\eta^*,k_{\eta^*}}$ 使得 (5.1) 不成立。此外，如果只有一个这样的 η^* 取$\varepsilon^*_m = min(\varepsilon_m, \varepsilon_{\eta^*,1}, \varepsilon_{\eta^*,2}, \cdots \varepsilon_{\eta^*,k_{\eta^*}})$，那么不等式 (5.1) 对 $\varepsilon \leq \varepsilon^*_m$ 成立。如果只有有限个 η^* 不满足 (5.1)，情况也相同。

因此，否定 (5.1) 必然意味着至少存在一个序列 $\{\eta^*_r\}_{r=1}^{\infty}$，它收敛到某个 $\widehat{\eta} \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$，当 $r \to \infty$ 时，使得对于 $\varepsilon_{\eta^*_r,1}, \varepsilon_{\eta^*_r,2}, \cdots \varepsilon_{\eta^*_r,k_{\eta^*_r}}, r = 1, 2, \cdots$，(5.1) 不成立，而 (4.1) 成立。无需任何限制，我们可以假设还存在一个 $\varepsilon_{\eta^*_r}$ 序列，当 $r \to \infty$ 时收敛到零。事实上，我们进一步解释这一断言。对于集合 $\mathcal{J} := \{\eta^* \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] :$ (5.1) 不成立 $\} \subset [-\pi, \pi]$，我们考虑上述构造的相关参数集:

$$\mathcal{E} := \{\varepsilon_{\eta^*,1}, \varepsilon_{\eta^*,2}, \cdots \varepsilon_{\eta^*,k_{\eta^*}}\}_{\eta^* \in \mathcal{J}}.$$

要么 $\mathcal{E}$ 有一个下界 $\varepsilon^{**}_m > 0$，要么我们可以提取一个序列 $\{\varepsilon_{\eta^*_r}\}_{r=1}^{\infty}$，当 $r \to \infty$时该序列趋于零，其中每一项 $\varepsilon_{\eta^*_r}$ 都对应某个值 $\eta^*_r \in \mathcal{J}$。在第一种情形下，对于 $\varepsilon \leq \varepsilon^*_m := \min(\varepsilon^{**}_m, \varepsilon_m)$，式 (5.1) 成立，证明即告完成。在第二种情形下，由于序列 $\{\eta^*_r\}_{r=1}^{\infty}$ 有上界也有下界，通过取子序列，我们可以构造上述序列，仍记为 r，

$$(\eta^*_r, \varepsilon_{\eta^*_r}) \to (\widehat{\eta}, 0) \text{ as } r \to \infty.$$

我们来证明，最后这一断言会导出反证法。

为此，我们注意到，与 (5.3) 中一样，由 (4.9) 可得

$$\Lambda^{\varepsilon_{\eta^*_r},}_{m+1}(\eta^*_r) \leq \Lambda^{\varepsilon_{\eta^*_r}}_{p(\varepsilon_{\eta^*_r}, \eta^*_r, m)}(\eta^*_r) \leq \Lambda^0_m(\eta^*_r) + C_0 \varepsilon_{\eta^*_r}, \tag{5.4}$$

对于相应的特征值序列。根据定理 2.2（参见 (2.3)）以及映射 (1.15) 的连续性，对 (5.4) 取 $r \to \infty$ 的极限，并得到 $\Lambda^0_{m+1}(\widehat{\eta}) \leq$

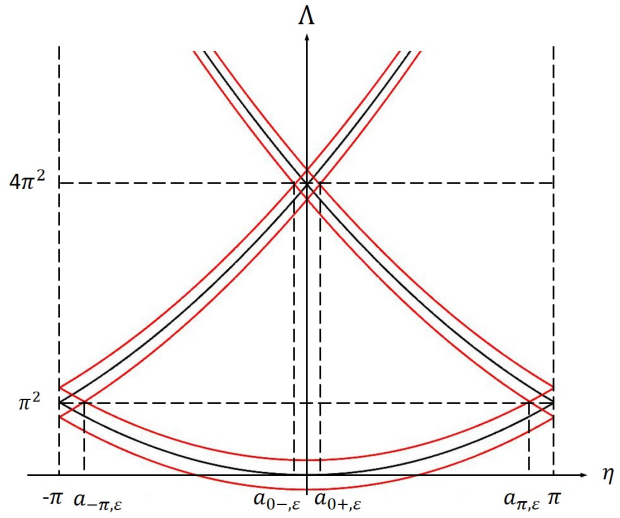

图 8：当 $H \in (0, 1/2)$ 时，极限色散曲线 $\Lambda_1^0(\eta)$ 和 $\Lambda_2^0(\eta)$ 的图像。相关的 ε-邻域是周围红线之间的区域。

$\Lambda_m^0(\widehat{\eta})$。因此，当极限特征值 $\Lambda_m^0(\widehat{\eta})$ 为单特征值时，正如色散曲线和区间 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ 的假设所表明的那样，我们得到反证法。该反证过程还表明，不存在更多满足 (5.1) 的特征值 $\Lambda_p^\varepsilon(\eta)$，因为根据定理 4.1（等价地，根据假设），$p$ 应大于或等于 m。

第二步：情形为 $\eta^0 \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ *with* $\Lambda_m^0(\eta^0) = \Lambda_{m+1}^0(\eta^0)$。我们从 $m = 1$ 开始。

根据关于极限色散曲线的假设，曲线 $\Lambda_1^0(\eta)$ 和 $\Lambda_2^0(\eta)$ 只有两种可能：对于 $\eta_0 = \pm\pi$, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ 的取值，它们有一个公共点；当 $\eta_0 = -\pi$ 时取值为 $[-\pi, \mathfrak{b}]$，或当 $\eta_0 = \pi$ 时取值为 $[\mathfrak{a}, \pi]$。两个节点分别为 $(-\pi, \pi^2)$ 和 (π, π^2)，且这对任意 $H > 0$ 都成立。我们先从 $\eta = -\pi$ 开始，并考虑这些点

$$a_{-\pi,\varepsilon} = -\pi + \alpha_0\varepsilon \quad \text{and} \quad a_{\pi,\varepsilon} = \pi - \alpha_0\varepsilon, \quad \text{with } \alpha_0 = \frac{C_0}{2\pi}, \quad \varepsilon \le \varepsilon_0,$$

它们是色散曲线的 ε-邻域直线的交点横坐标：$\Lambda_1^0(\eta) + C_0\varepsilon$ 和 $\Lambda_2^0(\eta) - C_0\varepsilon$ 在 $\pm\pi$ 附近（参见 (4.12) 进行比较）。由于当 $\eta \in [-\pi, a_{-\pi,\varepsilon}]$ 时，特征值 $\Lambda_1^0(\eta)$ 与 $\Lambda_2^0(\eta)$ 之间的距离为 $O(\varepsilon)$，因此只需证明

$$|\Lambda_1^\varepsilon(\eta) - \Lambda_1^0(\eta)| \le C_0\varepsilon, \quad |\Lambda_2^\varepsilon(\eta) - \Lambda_1^0(\eta)| \le C_0\varepsilon, \quad \forall \varepsilon \le \varepsilon_0,\, \eta \in [-\pi, a_{-\pi,\varepsilon}], \tag{5.5}$$

其中 C_0 是与 ε 和 η无关的正常数。

根据定理 4.2（见步骤 2），已证明对于每个 $\eta \in [-\pi, a_{-\pi,\varepsilon}]$，至少存在两个特征值 $\Lambda_{p(\varepsilon,\eta,1)}^\varepsilon$ 和 $\Lambda_{p(\varepsilon,\eta,1)+1}^\varepsilon$，满足 $p(\varepsilon, \eta, 1) \ge 1$，并且

$$|\Lambda_{p(\varepsilon,\eta,1)}^\varepsilon(\eta) - \Lambda_1^0(\eta)| \le C_0\varepsilon, \quad |\Lambda_{p(\varepsilon,\eta,1)+1}^\varepsilon - \Lambda_1^0(\eta)| \le C_0\varepsilon, \quad \forall \varepsilon \le \varepsilon_0,\, \eta \in [-\pi, a_{-\pi,\varepsilon}].$$

假设（5.5）不成立，这意味着存在 $\varepsilon^* < \varepsilon_0$，使得我们无法保证对于某个 $\eta_{\varepsilon^*} \in [-\pi, a_{-\pi,\varepsilon^*}]$，$p(\varepsilon^*, \eta_{\varepsilon^*}, 1)$等于1；也就是说，$p(\varepsilon^*, \eta_{\varepsilon^*}, 1) \ge 2$ 且$p(\varepsilon^*, \eta_{\varepsilon^*}, 1) + 1 \ge 3$。如果使（5.5）不成立的 ε^* 集合是有限的，取其最小值，

我们可以适当选取 ε^{**}，使得（5.5）对 $\varepsilon \le \varepsilon^{**}$成立。因此，最坏的情况是，我们可以提取出由 ε_r^* 和 η_r^*组成的无穷小序列：$= \eta_{\varepsilon_r^*} \in [-\pi, a_{-\pi,\varepsilon_r^*}]$，对于该序列，$p(\varepsilon_r^*, \eta_r^*, 1) \ge 2$，因而 $p(\varepsilon_r^*, \eta_r^*, 1) + 1 \ge 3$。若如此，则$(\varepsilon_{\eta_r^*}, \eta_r^*) \to (0, -\pi)$，并且如同（5.4）中那样，写出相应的不等式链

$$\Lambda_3^{\varepsilon_{\eta_r^*}}(\eta_r^*) \le \Lambda^{\varepsilon_{\eta_r^*}}_{p(\varepsilon_{\eta_r^*},\eta_r^*,1)+1}(\eta_r^*) \le \Lambda_1^0(\eta_r^*) + C_0\varepsilon_{\eta_r^*}$$

（参见（4.13））。因此取极限并应用定理 2.2，我们得到以下反证 n

$$\Lambda_3^0(-\pi) \le \Lambda_1^0(-\pi) = \Lambda_2^0(-\pi) < \Lambda_3^0(-\pi). \tag{5.6}$$

因此，对于 $\varepsilon \le \varepsilon_0, \eta \in [-\pi, a_{-\pi,\varepsilon}]$，$p(\varepsilon, \eta, 1) = 1$，且（5.5）成立。由于在此区间内，$\Lambda_1^0(\eta)$ 与 $\Lambda_2^0(\eta)$ 的距离为 $O(\varepsilon)$，因此（5.1）对 $m = 1$ 和 $m = 2$ 也成立。此外，满足（5.1）的特征值 $\Lambda_p^\varepsilon(\eta)$ 不可能更多，因为上述反证法同样适用：事实上，另一个特征值必定是某些 ε 和 η（它们取自收敛子序列）对应的 $\Lambda_3^\varepsilon(\eta)$，这将导致矛盾（5.6）。

类似地，我们考察极限色散曲线的另一个可能节点，即当 $m = 2$ 和 $H < 1/2$ 时的点 $(0, 4\pi^2)$。根据关于色散曲线的假设，曲线 $\Lambda_2^0(\eta)$ 和 $\Lambda_3^0(\eta)$ 只有一种可能的交叉方式。这种情况意味着它们在 $\eta_0 = 0$ 和 $0 \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subset [-\pi, \pi]$ 处有一个公共点。

我们考虑这些点

$$a_{0-,\varepsilon} = -\frac{C_0\varepsilon}{4\pi} \quad \text{and} \quad a_{0+,\varepsilon} = \frac{C_0\varepsilon}{4\pi},$$

它们是色散曲线 $\Lambda_2^0(\eta) + C_0\varepsilon$和 $\Lambda_3^0(\eta) - C_0\varepsilon$ 在 $\eta = 0$附近的 ε-邻域直线的交点，参见图 8。

由于当 $\eta \in [a_{0-,\varepsilon}, a_{0+,\varepsilon}]$ 时，特征值 $\Lambda_2^0(\eta)$ 与 $\Lambda_3^0(\eta)$ 之间的距离为 $O(\varepsilon)$，因此只需证明

$$|\Lambda_2^\varepsilon(\eta) - \Lambda_2^0(\eta)| \le C_0\varepsilon, \quad |\Lambda_3^\varepsilon(\eta) - \Lambda_2^0(\eta)| \le C_0\varepsilon, \quad \forall \varepsilon \le \varepsilon_0, \eta \in [a_{0-,\varepsilon}, a_{0+,\varepsilon}]. \tag{5.7}$$

此外，定理 4.2（见步骤 3 及（4.13））已证明，对每个 $\eta \in [a_{0-,\varepsilon}, a_{0+,\varepsilon}]$，至少存在两个特征值 $\Lambda^\varepsilon_{p(\varepsilon,\eta,2)}(\eta)$ 和 $\Lambda^\varepsilon_{p(\varepsilon,\eta,2)+1}(\eta)$ 满足 $p(\varepsilon, \eta, 2) \ge 2$ 且

$$|\Lambda^\varepsilon_{p(\varepsilon,\eta,2)}(\eta) - \Lambda_2^0(\eta)| \le C_0\varepsilon, \quad |\Lambda^\varepsilon_{p(\varepsilon,\eta,2)+1}(\eta) - \Lambda_2^0(\eta)| \le C_0\varepsilon, \quad \forall \varepsilon \le \varepsilon_0, \eta \in [a_{0-,\varepsilon}, a_{0+,\varepsilon}].$$

假设（5.7）不成立，这意味着存在 ε^* 和 $\eta_{\varepsilon^*} \in [a_{0-,\varepsilon^*}, a_{0+,\varepsilon^*}]$，使得我们无法确保 $p(\varepsilon^*, \eta_{\varepsilon^*}, 2)$ 等于 2，即 $p(\varepsilon^*, \eta_{\varepsilon^*}, 2) \ge 3$ 且 $p(\varepsilon^*, \eta_{\varepsilon^*}, 2) + 1 \ge 4$。如上文的推理（第一步）所示，最不利的情形是我们可以抽取一个序列 $(\varepsilon_{\eta_r^*}, \eta_r^*) \to (0, 0)$，并且如（5.4）所示，记

$$\Lambda_4^{\varepsilon_{\eta_r^*}}(\eta_r^*) \le \Lambda^{\varepsilon_{\eta_r^*}}_{p(\varepsilon_{\eta_r^*},\eta_r^*,2)+1}(\eta_r^*) \le \Lambda_2^0(\eta_r^*) + C_0\varepsilon_{\eta_r^*}.$$

取极限并应用定理 2.2，我们得到以下反证法

$$\Lambda_4^0(0) \le \Lambda_2^0(0) = \Lambda_3^0(0) < \Lambda_4^0(0). \tag{5.8}$$

因此，$p(\varepsilon,\ \eta,\ 2)\ =2$ 对于 $\varepsilon\le\varepsilon_0,\ \ \eta\in[a_{0-,\varepsilon},a_{0+,\varepsilon}]$，(5.7) 成立，同时对于 $m=2$和 $m=3$，(5.1) 也成立。此外，由于上述相同的反证法，不可能再有满足 (5.1) 的特征值 $\Lambda_p^\varepsilon(\eta)$，因为：事实上，另一个特征值必然应为 $\Lambda_4^\varepsilon(\eta)$，其中 ε 和 η 取遍子序列，从而导致反证式 (5.8)。

需要注意的是，在序列 (1.14) 中对特征值 (1.16) 编号时，编号为 m 的特征值可能会随 $\eta\in[-\pi,\pi]$ 和 $H>0$ 的取值而变化。当 $m\ge2$ 时，其余节点也可以用类似的方法处理，这里不再给出繁琐的计算。事实上，如果 $H<1/\sqrt{8}$，则当 m 大于 3 时，这一过程也可以继续进行。

第三步。下面我们针对 m 的不同取值证明 (5.2)。现在，根据此前的证明步骤，我们注意到，当 $\eta\in[-\pi,0]$时，尚未证明估计式 (5.2) 的点为：当 $m=1,\ 2$ 时的 $\eta\in[a_{-\pi,\varepsilon},\mathfrak{a}]$，或当 $m=2,\ 3$ 时的 $\eta\in[\mathfrak{a},a_{0-,\varepsilon}]$，其中 $-\pi<\mathfrak{a}<0$ 的任意 $\mathfrak{a}$ 均满足条件。当 $\eta\in[0,\pi]$时，情况也相同：当 $\eta\in[\mathfrak{b},a_{\pi,\varepsilon}]$ 且 $m=1,\ 2$ 时，或当 $m=2,\ 3$ 时的 $\eta\in[a_{0+,\varepsilon},\mathfrak{b}]$，其中 $0<\mathfrak{b}<\pi$ 的任意 $\mathfrak{b}$ 均满足条件。

我们从 $m=1,2$ 和 $\eta\in[-\pi,\mathfrak{a}]\supsetneqq[a_{-\pi,\varepsilon},\mathfrak{a}]$ 开始。定理 4.2 保证 (4.9) 对 $m=2$ 成立，其中 $p(\varepsilon,\eta,2)\ge2$。我们可以应用上文使用的相同反证法，从而得到某个序列

$$(\eta_r^*,\varepsilon_{\eta_r^*})\to(\widehat{\eta},0)\text{ as }r\to\infty,\qquad\text{for some }\widehat{\eta}\in[-\pi,\mathfrak{a}],$$

使得 $p(\varepsilon_{\eta_r^*},\eta_r^*,2)\ge3$。实际上，在

$$\Lambda_3^{\varepsilon_{\eta_r^*}}(\eta_r^*)\le\Lambda_{p(\varepsilon_{\eta_r^*},\eta_r^*,1)}^{\varepsilon_{\eta_r^*}}(\eta_r^*)\le\Lambda_2^0(\eta_r^*)+C_0\varepsilon_{\eta_r^*}$$

参见 (2.3)，我们得到 $\Lambda_3^0(\widehat{\eta})\le\Lambda_2^0(\widehat{\eta})$，这与 $\widehat{\eta}\in[-\pi,\mathfrak{a}]\subset[-\pi,0)$. 矛盾。因此，(5.2) 对 $m=2$ 和 $\eta\in[-\pi,\mathfrak{a}]\subset[-\pi,0)$. 成立。

对于 $m=1$，我们注意到，如果将第二步中端点的构造所用的横坐标 $a_{-\pi,\varepsilon}$ 替换为$_{,\varepsilon}$ （它源自定理 4.2 证明的第二步；见图 6、7 和 8），该构造仍然适用。定理 4.2 中的构造保证，对于 $\eta\in[\widetilde{a}_{-\pi,\varepsilon},\mathfrak{a}]$，至少存在两个不同的特征值： $\Lambda_{p(\varepsilon,\eta,1)}^\varepsilon(\eta)$ 满足带有 $m=1$ 的条件 (4.10)，而 $\Lambda_{p(\varepsilon,\eta,2)}^\varepsilon(\eta)$ 满足带有 $m=2$ 的条件 (4.10)。由于我们已在上文证明 $p(\varepsilon,\eta,2)\ =2$，因此 $p(\varepsilon,\eta,1)\ =1$。由此，(5.2) 对 $m=1$ 和 $\eta\in[-\pi,\mathfrak{a}]$ 也成立，因此我们得出，对于 $H<1/2$，界 (5.2) 对 $m=1,2$ 成立。

当 $m=2,3$ 时，我们在区间 $\eta\in[\mathfrak{a},a_{0-,\varepsilon}]$ 中采用类似的方法，通过反证法证明 $p(\varepsilon,\eta,3)\ge4$，然后将本定理证明中的第二步与定理 4.2 证明中的第三步结合起来。因此，我们得到，对于 $H<1/\sqrt{8}$，当 $m=1,2,3$ 时，界 (5.2) 成立。

因此，最后一条陈述的结论成立，定理得证。 □

参考文献

[1] G. Allaire 和 C. Conca，布洛赫波均匀化与谱渐近分析。J. Math. Pures Appl. 77 (1998)，第 2 期，153–208。

[2]F.L. Bakharev、S.A. Nazarov 和 K.M. Ruotsalainen，周期波导上诺伊曼拉普拉斯算子的谱隙。Appl. Anal. 92 (2013)，第9期，1889–1995。

[3] A. Bensoussan、J.-L. Lions 和 G. Papanicolau，《周期结构的渐近分析》，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，1978。[4] M.S. Birman 和 M.Z. Solomyak，《希尔伯特空间中的谱理论与自伴算子》，Reidel Publishing Co.，多德雷赫特，1987。[5] D.I. Borisov 和 K.V. Pankrashkin，周期性小窗口系统耦合的波导中的带隙开启与分裂的能带边缘。Mat. Zametki，93（2013），第5期，665–683（英文译本：Math. Notes，93（2013），第5–6期，660–675）。[6] C. Conca、J. Planchard 和 M. Vanninathan，《流体与周期结构》，Masson，巴黎，1995。[7] I.M. Gelfand，具有周期系数的方程的特征函数展开（俄文）。Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)，73（1950），1117–1120。[8] D. G´omez、S.A. Nazarov、R. Orive-Illera 和 M.-E. P´erez-Mart´ınez，关于周期性边界与系数奇异摄动下圆柱波导谱渐近行为论证的评注。J. Math. Sci.，257（2021），第5期，597–623（译自俄文：Problemy Matematicheskogo Analiza，111（2021），43–65）。[9] D. G´omez、S.A. Nazarov、R. Orive-Illera 和 M.-E. P´erez-Mart´ınez，双周期穿孔诺伊曼波导中的谱隙。Asymptot. Anal.，印前版（2022），1–57。[10] D. G´omez、S.A. Nazarov、R. Orive-Illera 和 M.-E. P´erez-Mart´ınez，与狄利克雷波导相关的弗洛凯参数族均匀化问题的谱渐近行为。《科学与工程中的积分方法：理论与实际研究中的应用》，Birkh¨auser/Springer，纽约，2022，第95–111页。[11] P. Kuchment，《偏微分方程的弗洛凯理论》，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，1993。[12]O.A. Ladyzhenskaya，《黏性不可压流的数学理论》，第2版，Nauka，莫斯科，1970（英文译本，第2版英文修订增补版，Math. Appl.，第2卷，Gordon and Breach Science Publishers，纽约—伦敦—巴黎，1969）。[13] V.F. Lazutkin，《KAM理论与特征函数的半经典近似》，第二版。Springer-Verlag，柏林，2012。[14] D. Leguillon 和 E. Sanchez-Palencia，《椭圆问题与弹性中的奇异解计算》，Masson，巴黎，1987。[15] M. Lobo、O.A. Oleinik、M.E. P´erez 和 T.A. Shaposhnikova，关于沿流形穿孔区域中边值问题解的均匀化。Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 4^{e} s´erie，25（1997），611–629。[16] M. Lobo 和 E. P´erez，关于边界附近具有多个集中质量的系统的局部振动。C.R. Acad. Sci. Paris，S´er. IIb，324（1997），323–329。[17] V.G. Maz'ya、S.A. Nazarov 和 B.A. Plamenevsky，《奇异摄动区域中椭圆边值问题的渐近理论》，第1、2卷，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2000。

[18] V.A. Marchenko 和 E.Ya. Khruslov，《具有细密边界的域中的边值问题》，Naukova Dumka，基辅，1974（俄文）。[19] S.A. Nazarov，《周期扰动波导连续谱中的谱隙开启》，Mat. Zametki，87（2010），第 5 期，764–786 页（英文译本：Math. Notes，87（2010），第 5–6 期，738–756 页）。[20] S.A. Nazarov，《含小空洞周期族的扰动波导谱隙的渐近分析》，《数学分析问题》，66（2012），101–146 页（英文译本：J. Math. Sci.，186（2012），第 2 期，247–301 页）。[21] S.A. Nazarov，《正则扰动周期波导中谱隙的渐近行为》，《圣彼得堡大学学报》，7（2013），第 2 期，54–63 页（英文译本：Vestnik St.-Petersburg Univ. Math.，46（2013），第 2 期，89–97 页）。[22] S.A. Nazarov，《薄板与杆的渐近理论》，第 1 卷，新西伯利亚：Nauchnaya Kniga，2002。[23] S.A. Nazarov、R. Orive-Illera 和 M.-E. P´erez-Mart´ınez，《具有双重周期穿孔的狄利克雷条带中的谱的渐近结构》，Netw. Heterog. Media，14（2019），733–757 页。[24] S.A. Nazarov、R. Orive-Illera、M.-E. P´erez-Mart´ınez，《关于穿孔条带的极化矩阵》，《科学与工程中的积分方法：解析处理与数值近似》，Birkh¨auser/Springer，纽约，2019，267–281 页。[25] S.A. Nazarov 和 B.A. Plamenevsky，《具有分段光滑边界的域中的椭圆问题》，Walter de Gruyter & Co.，柏林，1994。[26] O.A. Oleinik、A.S. Shamaev 和 G.A Yosifian，《弹性与均匀化中的数学问题》，数学及其应用研究，26，North-Holland，阿姆斯特丹，1992。[27] E. P´erez，《半带上的周期型斯捷克洛夫特征值问题与谱均匀化问题》，Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B (DCDS-B)，7（2007），第 4 期，859–883 页。[28] M. Reed 和 B. Simon，《现代数理物理方法》，III：散射理论，Academic Press，纽约，1979。[29] J. Sanchez-Hubert 和 E. Sanchez-Palencia，《连续系统的振动与耦合：渐近方法》，Springer-Verlag，柏林，1989。[30] J. Sanchez-Hubert 和 N. Turbe，《周期带中的弹性波》，RAIRO - Mod´el. Math. Anal. Num´er.，20（1986），第 3 期，539–561 页。[31] M.M. Skriganov，《多维周期算子谱理论中的几何与算术方法》，Proc. Steklov Inst. Math.，171（1987），第 2 期，1–121 页。[32] M.I. Vishik 和 L.A. Ljusternik，《小参数线性微分方程的正则退化与边界层》，Am. Math. Soc. Trans.，20（1962），239–364 页。