关于紧致 K¨ahler 轨形

Xiaojun WU

2023年2月24日

摘要

本文研究紧致复轨形。第一部分展示两种 K¨ahler 轨形概念的等价性。第二部分介绍 Demailly 正则化定理在紧轨形上的若干版本，并研究轨形向量丛的正性。最后一节给出 Brion 告知我们的等变 GAGA 的一个版本。

arXiv:2302.11914v1 [math.AG] 23 Feb 2023

1 引言

在本文中，我们研究紧复轨形。粗略地说，复轨形是一种复空间，它局部上是某个欧几里得空间的开集在有限群的同态作用下所得的商空间。为复轨形赋予 K¨ähler 结构有两种自然方式。第一种方式是将复轨形定义为：若它是 K¨ähler 复空间（第 2 节中回顾），则称其为 K¨ähler。第二种方式是将复轨形定义为：若每个局部（光滑）分歧覆盖上都存在 K¨ähler 形式，且这些形式在交集上“相一致”，则称其为 K¨ähler。

从代数几何的角度来看，按照复空间的观点给出的第一种定义更为自然，因为射影轨形上的 Fubini-Study 度量的限制赋予该轨形一种 K¨ähler 复空间结构。从解析的角度来看，按照轨形的观点给出的第二种定义更为自然，因为 Sobolev 嵌入、椭圆正则性等基本工具在轨形上的适用方式与在流形情形下完全相同。

在本文第 2 节中，我们证明了对于紧复轨形，这两个定义是等价的。特别地，在给定的上同调类中，按复空间意义存在 K¨ähler 形式，当且仅当按轨形意义存在 K¨ähler 形式。

“如果”部分的证明源于 Varouchas [Var89] 提供的连续拟次调和函数正则化版本。“仅如果”部分的证明源于局部严格拟次调和函数的单位分解。

我们还构造了紧轨形上任意相干层的第一陈类。注意，即使轨形是射影的，希尔伯特簇关系定理一般也不适用于轨形。特别地，我们无法通过用局部自由层解消相干层来轻易定义相干层的陈类。因此，在紧复轨形上定义相干层的陈类并非易事。第一陈类的情形源于这样一个事实：紧轨形的二阶上同调同构于其正则部分的二阶上同调。除非另有说明，全文均采用奇异上同调。

在本节末尾，利用 [Fau22]，的结果，我们推导出以下版本的 Bogomolov 不等式。

命题 A. 设 E 是紧致 K¨ähler 复空间（X，ω）上的一个具有商奇点的轨形向量丛。假设将其 E 视为轨形层时，对于所有轨形子层都是 $\omega-$多项式稳定的。则 E 满足 Bogomolov 不等式。

在第 3 节中，我们验证了 Demailly 正则化对于紧复轨形的相关技术。注意，如果一个轨形流在每个分歧光滑覆盖上都是（几乎）正的，则称其为（几乎）正的。类似地，我们可以定义轨形（拟次调和或几乎拟次调和）函数。注意，由于局部各向同性群的唯一性（第 2 节中已回顾），这样的分歧光滑覆盖作为芽是唯一的。轨形拟多重次调和函数的勒隆数和乘子理想层也可以定义为分歧光滑覆盖上的相应概念。

定理 A. 设 T 是紧复轨形 X 上的闭几乎正 (1, 1)– 轨形流，并设 α 是与 T 属于同一 $\partial\overline{\partial}$–上同调类的光滑实 (1, 1)– 轨形形式，即 $T = \alpha + i\partial\overline{\partial}\Psi$，其中 Ψ 是几乎拟次调和轨形函数（即在局部分歧光滑覆盖上是几乎拟次调和的）。设 γ 是满足 $T \geq \gamma$ 的连续实 (1, 1)– 轨形形式。假设轨形切丛 T_X 配备了一个光滑厄米轨形度量 ω，使得轨形空间切尔恩曲率形式 $\Theta(T_X)$ 满足

$$(\Theta(T_X) + u \otimes \mathrm{Id}_{T_X})(\theta \otimes \xi, \theta \otimes \xi) \geq 0, \forall \theta, \xi \in T_X \text{ with } \langle \theta, \xi \rangle = 0,$$

对于某个连续非负的 (1,1)–阶轨形形式 u，其定义在 X 上。则存在一族闭的几乎正的 (1,1) 阶轨形形式 $T_\varepsilon = \alpha + i\partial\overline{\partial}\psi_\varepsilon$，使得 ψ_ε、$\forall \varepsilon \in]0$、$\varepsilon_0[$ 在 X 上轨形光滑，随 ε 递增，并且当 ε 趋于 0 时收敛到 Ψ（特别地，T_ε 是轨形光滑的，并在 X 上弱收敛到 T），且满足

(i) $T_\varepsilon \geq \gamma - \lambda_\varepsilon u - \delta_\varepsilon \omega$ 其中：

(ii) $\lambda_\varepsilon(x)$ 是定义在 X 上的一族递增的连续函数，使得在每一点处，$\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon(x) = \nu(T, x)$ 等于 T 在 x 处的勒隆数（定义在局部分歧光滑覆盖上），

(iii) δ_ε 是一族递增的正常数，使得 $\lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon = 0$。

另一方面，我们有如下奇异性衰减过程。对于每个 $c > 0$，存在一族闭的几乎正的 (1,1) 阶轨形流 $T_{c,\,\varepsilon} = \alpha + i\partial\overline{\partial}\psi_{c,\,\varepsilon}$、$\varepsilon \in]0$、$\varepsilon_0[$，使得 $\psi_{c,\,\varepsilon}$ 在 $X \setminus E_c(T)$ 上轨形光滑，随 ε 递增，并且当 ε 趋于 0 时收敛到 Ψ（特别地，流 $T_{c,\,\varepsilon}$ 在 $X \setminus E_c(T)$ 上轨形光滑，并在 X 上弱收敛到 T），且满足

(i) $T_{c,\,\varepsilon} \geq \gamma - \min(\lambda_\varepsilon, c)u - \delta_\varepsilon\omega$ 其中：(ii) $\lambda_\varepsilon(x)$ 是定义在 X 上的连续函数递增族，且 $\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon(x) = \nu(T, x)$ (iii) δ_ε 是正常数递增族，且 $\lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon = 0$，(iv) $\nu(T_{c,\,\varepsilon}, x) = (\nu(T, x) - c)_+$ 在每一点 $x \in X$ 处成立。

定理 B. 设 φ 是紧复轨形 X 上的几乎拟次调和轨形函数，满足 $i\partial\overline{\partial}\varphi \geq \gamma$，其中 γ 是某个连续 (1,1) 轨形形式。那么存在一列几乎拟次调和轨形函数 φ_m，使得 φ_m 在局部分歧光滑覆盖上具有与全纯函数平方和的对数相同的奇点；并且存在一列递减且收敛到 0 的序列 $\varepsilon_m > 0$，使得

(i) 关于覆盖 X 的分歧光滑坐标开集，$\varphi(x) \leq \varphi_m(x) \leq \sup_{|\xi - x| < r} \varphi(\xi) + C(|\log r|/m + r + \varepsilon_m)$。特别地，$\varphi_m$ 逐点且在 $L^1(X)$ 中收敛到 φ，并且 (ii) 对每个 $x \in X$，$\nu(\varphi, x) - \frac{n}{m} \leq \nu(\varphi_m, x) \leq \nu(\varphi, x)$；(iii)$i\partial\overline{\partial}\varphi_m \geq \gamma - \varepsilon_m\omega$。

定理 C. 设 φ 是紧复轨形 X 上的一个几乎拟次调和轨形函数，满足 $i\partial\overline{\partial}\varphi \geq \gamma$，其中 γ是某个连续 (1,1) 轨形形式。则存在一列几乎拟次调和轨形函数 φ_m，使得 $\varphi = \lim_{m\to\infty} \varphi_m$，并且

(i) φ_m 在解析集 $Z_m \subset X$的补集 $X \setminus Z_m$ 上是轨形光滑的；(ii) φ_m 是一个递减序列，且对所有 m，$Z_m \subset Z_{m+1}$；(iii) 对每个 m，$\int_X (e^{-2\varphi} - e^{-2\varphi_m}) dV_\omega$ 有限，并且当 $m \to \infty$时收敛到 0；(iv) 对所有 m，$\mathcal{I}(\varphi_m) = \mathcal{I}(\varphi)$（“等奇异性”），在局部分歧光滑覆盖上成立；(v) $i\partial\overline{\partial}\varphi_m \geq \gamma - \epsilon_m\omega$，其中 $\lim_{m\to\infty} \epsilon_m = 0$。

在第4节中，我们研究紧轨形上的强伪有效（简称 stronglypsef）轨形向量丛，这推广了 [Wu22] 的结果。

在紧复流形上伪有效向量丛的定义中，对典范线丛上的近似奇异度量附加了一个条件。有人可能会问，能否直接对典范线丛上的某个正奇异度量（无需近似）施加这一附加条件。例如，设 h 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ 上的正奇异度量，我们能否要求奇异集$\{h = \infty\}$ 在 X 中的投影是一个（完全）多极集？然而，正如 Demailly 向作者指出的例 8 所示，这类条件在函子性方面表现不佳。

接下来，我们证明轨形情形下定理 1.18 [DPS94] 的类似结论。

定理 D. 设 X 是一个紧致 K¨ahler 轨形。则轨形向量丛 E在 X 上数值平坦（即 E和 E^* 均为数值有效），当且仅当 E 存在一个滤过

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_p = E$$

由轨形向量子丛构成，使得其商 E_k/E_{k-1} 为轨形厄米平坦向量丛。

主要困难如下。给定不可约紧复空间上的无挠相干层，总存在一个光滑模型，使得该相干层的拉回模去挠部分是局部自由的。因此，可以将论证归结为向量丛的情形。然而，尚不清楚对于紧轨形上的无挠轨形相干层，是否存在一个由轨形态射复合而成的修改，使得该层的拉回模去挠部分是轨形向量丛。因此，我们不像 [DPS94]，第 2 节那样证明所有陈类不等式，而只使用命题 A 中证明的 Bogomolov 不等式。

作为几何应用，我们得到 [BDPP13] 中定理 7.7 的以下推广。

推论 A. 对于紧 K¨ahler 轨形 X，若 $c_1(X) = 0$ 且 T_X 是强伪有效的，则 X 的一个有限准- ´étale 覆盖是一个复环面。特别地，不可约辛轨形或 Calabi-Yau 轨形的轨形切丛或轨形余切丛都不是强伪有效的。

证明依赖于 Campana [Cam04] 所证明的 Beauville-Bogomolov 分解定理的轨形版本。

基于第 3 节中 Demailly 正则化的轨形版本，我们可以将 [Wu22] 中的 Serge 流技术推广到轨形情形。

定理 E. 设 $\pi : X \to Y$ 是紧致 K¨ahler 轨形之间相对维数为 $r-1$ 的轨形浸没。设 T 是上同调类 $\{\alpha\} \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 中的闭正 $(1,1)-$ 轨形流，且 T 具有解析奇异性（即在每个分歧光滑覆盖中都具有解析奇异性），并在 $X \setminus \pi^{-1}(Z)$ 上轨形光滑，其中 Z 是余维至少为 k 的闭解析集。假设对于任意 $y \in Y$，存在 y 的一个开邻域 U，以及定义在 X 上的准拟次调和轨形函数 ψ，使得在$\pi^{-1}(U)$ 上的轨形流意义下有 $\alpha + i\partial\overline{\partial}\psi \geq 0$，且 ψ 在余维至少为 $k+r$ 的某个闭解析集之外轨形光滑。那么存在一个属于上同调类 $\pi_*\alpha^{r+k-1}$ 的闭正轨形流。

基于 Zhang [Zha91], [Zha93], 的一个例子，我们证明，将[BDPP13] 可能推广到射影轨形范畴的版本并不成立。更准确地说，存在一个具有商奇点的有理射影簇 X，其轨形典范线丛是伪有效的。

最后一节讨论的主题与其他各节不同。设 X 是一个射影流形。设 $\mathcal{F}$ 是 X上的一个全纯相干层。Serre 的 GAGA 表明，$\mathcal{F}$ 是某个代数相干层的解析化。一个非平凡的问题是：是否存在某个代数群 L 在 X 上的代数作用，使得一个 $L-$等变全纯向量丛是某个 $L-$等变代数向量丛的解析化。由于 L 不是紧的，通常的 GAGA 并不适用。对于某种 L，我们有 Brion 告知我们的以下 GAGA 等变版本。

命题 A。（Brion）设 X 是一个带有连通约化群 L 的（代数）作用的射影流形。设 E 是 X 上的全纯 $L-$等变向量丛。那么存在 L 的一个连通有限覆盖 L'，使得 E 是一个代数 $L'-$等变向量丛。

这是将 [Bri18] 秩一情形的定理 5.2.1 推广到高秩情形。我们还有以下关于射影托里克簇的刻画。

命题 B. 设 X 是一个连通紧致 K¨ahler 流形，它是 $(\mathbb{C}^*)^n-$ 拟齐次的，且 $n=\dim_{\mathbb{C}}(X)$，其在开稠密集上的作用是 $(\mathbb{C}^*)^n$ 的乘法。那么X 是一个射影托里克簇。

致谢 我感谢我的博士导师 Jean-Pierre Demailly 对我的指导、耐心与慷慨。我还要感谢我的博士后导师 Mihai P˘aun 提供了许多支持。感谢 Junyan Cao、Patrick Graf、Daniel Greb、Mihai P˘aun、Thomas Peternell 和 Philipp Naumann 对本文早期稿件提出的许多宝贵建议。特别要由衷感谢 Michel Brion 为我提供了最后一节所用的论证。本文得到德国研究联合会（DFG）项目 Singul¨are Hermitianische Metriken f¨ur Vektorb¨undel und Erweiterung kanonischer Abschnitte 的资助，该项目由 Mihai P˘aun 负责。

2 轨形预备知识

为便于阐述，我们回顾一些关于复轨形的基本定义，这些定义取自 [MM07]。我们首先定义范畴 $\mathcal{M}_s$（分别为 $\mathcal{M}_k$）如下： $\mathcal{M}_s$的对象是由一对 (G,M) 组成的类，其中 M是连通光滑（分别为连通光滑 K¨ahler）流形， G 是一个在 M 上有效作用的有限群（即，若 $g\in G$ 对任意 $x\in M$都满足 $gx=x$，则 g是 G的单位元）。若 (G,M) 和 (G',M') 是两个对象，则态射$\Phi:(G,M)\to(G',M')$ 是一族开全纯嵌入 $\varphi:\ M\to M'$（分别为保持 K¨ahler 形式），满足：

1. 对于每个 $\varphi\in\Phi$，存在一个单射群同态 $\lambda_\varphi:\ G\to G'$，使得 φ 是 λ_φ-等变的。2. 对于 $g\in G',\varphi\in\Phi$，我们定义 $g\varphi:\ M\to M'$，使得对于 $x\in M$，$(g\varphi)(x)=g\varphi(x)$。如果 $(g\varphi)(M)\cap\varphi(M)\neq\emptyset$，那么 $g\in\lambda_\varphi(G)$。3. 对于 $\varphi\in\Phi$，我们有 $\Phi=\{g\varphi,g\in G'\}$。

定义 1. 设 X 是一个仿紧豪斯多夫空间，并设 $\mathcal{U}$ 是 X 的一个覆盖，由范畴 $\mathcal{M}_s$ 中的连通开子集组成。我们假设 $\mathcal{U}$ 满足以下条件：对于任意 $x\in U\cap U'$、$(U,U'\in\mathcal{U})$，存在 $U''\in\mathcal{U}$ 使得 $x\in U''\subset U\cap U'$。

那么， X 上的轨形结构 $\mathcal{V}$ 由以下数据组成：

1. 对任意 ，一个分歧覆盖 $\mathcal{V}\ U\ =\{\ G_U\ \tilde{U}\ \xrightarrow{\tau}\ U\qquad\qquad U\in\mathcal{U}\qquad\qquad\qquad U\simeq(\ )\,(\ ,),$ 给出一个识别$U/G_U\}$。 2. 对任意 $U,V\in\mathcal{U},U\subset V$，一个态射 $\varphi_{VU}:(G_U,U)\to(G_V,V)$，它覆盖包含映射$U\subset V$，并且对任意 $U,V,W\in\mathcal{U}$满足 $\varphi_{WU}=\varphi_{WV}\circ\varphi_{VU}$，其中 $U\subset V\subset W$。

如果 $\mathcal{U}'$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个加细，且满足定义中的条件，那么存在一个轨形结构 $\mathcal{V}$，使得 $\mathcal{V}\cup\mathcal{V}'$ 是一个轨形结构。我们认为 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{V}'$ 等价。这样的等价类称为 X上的轨形结构。因此，我们可以任意精细地选取 $\mathcal{U}$。具有轨形结构的空间称为复轨形。注意，复轨形等价于仅具有商奇点的复空间。

设 $(X,\mathcal{V})$ 是一个复轨形。对于每个 $x\in X$，我们可以选择一个小邻域 $(G_x,U_x)\to U_x$，使得 $x\in U_x$ 是 G_x 的不动点（对每个 $x\in X$，这样的 G_x 在同构意义下唯一，称为局部各向同性群）。我们用 $|G_x|$ 表示 G_x的基数。若 $|G_x|=1$，则 x 是 X的光滑点。若 $|G_x|>1$，则 x 是 X的奇点。我们用$X_{\mathrm{sing}}=\{x\in X;|G_x|>1\}$ 表示 X的奇异集。不失一般性，可以假设，G_x 的作用是线性的，作用在某个欧几里得开集 U_x上。局部各向同性群唯一性的证明可见例如 [Pri67]中的定理 2。

U_x。因此，“轨形”光滑形式定义为 G_x 不变光滑形式

定义在“轨形”K¨ahler 形式，是满足相容条件的一组光滑形式（即由范畴 $\mathcal{M}_k$中的对象覆盖的复轨形）。根据单位分解，容易看出，按照流形情形中的类似论证，由“轨形”光滑形式定义的德拉姆上同调群与该轨形的奇异上同调同构。事实上，这是因为“轨形”光滑形式层是软层，并且“轨形”光滑形式层给出了局部常值层的解消。

（特别地，对于任意维数为 n、 $H^i(X, \mathbb{R}) = 0 (\forall i > 2n)$ 的轨形。）

注意，$(X, \mathcal{V})$ 也是一个（约化）复空间（其中，全纯函数层的芽是分歧光滑覆盖上在局部各向同性群作用下不变的全纯函数）。因此，光滑形式在 X 上定义如下（例如参见 [Dem85]）。

定义 2. 由于光滑形式的定义具有局部性质，不失一般性，我们可以假设 X 包含于开集 $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ 中。 X 上的 (p,q)-形式（或 X 上的 d-形式）空间定义为限制态射的像

$$\mathcal{C}^\infty_{p,q}(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty_{p,q}(X_{\mathrm{reg}}) \quad (\mathrm{resp.}\ \mathcal{C}^\infty_d(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty_d(X_{\mathrm{reg}})).$$

德拉姆（或多尔博）上同调定义为光滑形式层复形（或对于某个 p, $\mathcal{C}^\infty_{p,\bullet}(X)$ ）的超上同调。

由于光滑形式经局部商映射与局部嵌入的复合映射拉回后，总是得到在局部有限群作用下不变的光滑形式，因此 X 上的光滑形式总是“轨形”光滑形式。然而，一般而言，“轨形”光滑形式未必是光滑形式。以下是一个典型的简单例子。

例 1. 考虑 $X = \mathbb{C}^2/\langle \pm 1 \rangle$（它通过将 (u,v) 映射到 $(z_1, z_2, z_3) := (u^2, v^2, uv)$ 嵌入 $\mathbb{C}^3$），即 $\mathbb{C}^2$ 在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的变号作用下的商空间。所谓“轨形”光滑形式，是指考虑 $\mathbb{C}^2$ 上在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 下不变的光滑形式（例如 $i\partial\overline{\partial}(|u|^2+|v|^2)$）。它对应于 $\mathbb{C}^3$ 上沿除子 $\{z_1 z_2 = 0\}$ 具有锥形奇点的形式的限制（例如上述例子中的 $i\partial\overline{\partial}(|z_1| + |z_2|)$）。

注意，这个例子还提供了一个简单的例子，其中 $\pi_1(X_{\mathrm{reg}}) \neq \pi_1(X)$。 X_{reg} 有一个单连通的二重覆盖 $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$。因此 $\pi_1(X_{\mathrm{reg}}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。另一方面，映射 $[0,1] \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : (t, (u,v)) \mapsto (tu, tv)$ 给出了从 X 到一点的同伦。因此 X 是单连通的。

另一方面，我们有如下初等引理。关于奇异空间上不同上同调之间比较的更多信息，请参阅注记 [Wu21]。

引理 1. 设 X 是一个同时也是 Kähler 复空间的紧复轨形。Kähler 类在自然态射下的像

$$H^2_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{R}) \to H^2(X, \mathbb{R})$$

是一个“轨形” Kähler 类。

特别地，作为轨形的 Kähler 复空间，在范畴 $\mathcal{M}_k$ 中是一个 Kähler 轨形

为了进行单位分解类型的论证，我们需要进一步研究坐标图变换下的行为。首先，我们将问题化归为只考虑具有小群作用的变换。

定义 3. 若元素 $g \in GL_n(\mathbb{C})$ 的不变空间维数 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)^g = n-1$，则称其为复反射。若子群 $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ 由复反射生成，则称其为复反射群。若子群 $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ 不含复反射，则称其为小群。

回顾一下，我们有 Chevalley-Shephard-Todd 定理 [Che55], [ST54]。

商代数簇 $\mathbb{C}^n/G$ 光滑，当且仅当 G 是复反射群。在这种情况下 $\mathbb{C}^n/G \simeq \mathbb{C}^n$。

注意到，由复反射生成的子群是正规的，因为复反射的矩阵共轭仍是复反射。因此，要研究 $\mathbb{C}^n/G$ 关于 $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ 的商簇，可以将注意力限制在小群 G的商奇点上。特别地，在这种情况下，商映射 $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/G$ 在余维 1 上是 étale 的（或准-étale）。（事实上， $\mathbb{C}^n/G$ 的奇异轨迹是 $\cup_{g \in G,\ g \neq e} (\mathbb{C}^n)^g$ 在商映射下的像。）

令 $(U_\alpha)_\alpha$ 为 X 的一个有限开覆盖，使得 $U_\alpha \simeq U_\alpha/G_\alpha$，其中 U_α 为欧几里得开集，且 $G_\alpha \subset GL_n(\mathbb{C})$ 为小群。不失一般性，我们可以假设，对于某个 N_α，U_α 可以嵌入为 $\mathbb{C}^{N_\alpha}$ 的某个开集 V_α 中的闭解析子集。于是，$\omega|_{U_\alpha}$ 是定义在 $V_\alpha \subset \mathbb{C}^{N_\alpha}$上的某个光滑形式 ω_α 的拉回。现在我们选择 $U_\alpha \cap U_\beta$ 的一个“良好”图卡。

命题 1. 存在一个光滑流形 $V_{\alpha,\beta}$ 使得 $U_\alpha \cap U_\beta \simeq V_{\alpha,\beta}/(G_\alpha \times G_\beta)$ 以及一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{U}_\alpha & \longleftarrow & \tilde{V}_{\alpha,\beta} & \longrightarrow & \tilde{U}_\beta \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U_\alpha & \longleftarrow & U_\alpha \cap U_\beta & \longrightarrow & U_\beta \end{array}$$

使得 $V_{\alpha,\beta} \to U_\alpha$ 是等变的，并且是其像上的主丛；类似地，对于 $V_{\alpha,\beta} \to U_\beta$ 也成立。

证明. 定义

$$\tilde{V}_{\alpha,\beta} \coloneqq \{(z_\alpha, z_\beta) \in \tilde{U}_\alpha \times \tilde{U}_\beta, \pi_\alpha(z_\alpha) = \pi_\beta(z_\beta)\}$$

带有自然诱导的 $G_\alpha \times G_\beta$–作用。根据定义 1，$V_{\alpha,\beta}$ 是光滑的。注意，$V_{\alpha,\beta} \to U_i$ 对于 $i = \alpha, \beta$是G_i–等变的。

另一方面，闭解析集 $\tilde{V}_{\alpha,\beta} \to$ 之外的扎里斯基开集上，G_j–对 $\{i,j\} = \{\alpha,\beta\}$无分歧。由于$V_{\alpha,\beta}$是正规且 U_i 光滑，根据 Zariski-Nagata 的纯性定理（例如参见 P170 [Fis76]），$V_{\alpha,\beta} \to U_i$ 到其像上无分歧。 □

证明。（引理 1 的证明）

设 $(\theta_\alpha)_\alpha$ 是与上述命题 1 中这个开覆盖相对应的单位分解。更确切地说，$(\theta_\alpha)_\alpha$ 按如下方式构造。取 $U'_\alpha \subset\subset U_\alpha$，使得 U'_α 仍覆盖 X。令θ_α 为 $\mathbb{C}^{N_\alpha}$ 上的光滑函数，使得 $\theta_\alpha \equiv 1$ 在 U'_α 上成立，且 θ_α 在 V_α中紧支撑。记 $i_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{C}^{N_\alpha}$ 为闭浸入，$\pi_\alpha : \tilde{U}_\alpha \to U_\alpha$ 为商空间。注意，在 X上$\sum_\alpha \theta_\alpha > 0$。

令 $(z_{i,\alpha})$ 为 U_α的局部坐标。考虑由 $g.z_{i,\alpha}$ 对所有 $g \in G_\alpha$ 和 i 生成的集合 $\{g_{i,\alpha}\}$，因此它是不变的。特别地，

$$\psi_\alpha \coloneqq \sum_i |g_{i,\alpha}|^2$$

在 G_α 作用下保持不变，并下降为 U_α 上的一个函数。注意，$i\partial\overline{\partial}\psi_\alpha$ 在 U_α 上严格为正。采用上述命题中的相同记号，ψ_α 的拉回定义了$V_{\alpha,\beta}$ 上的一个 $G_\alpha-$不变函数。由于$V_{\alpha,\beta} \to U_\beta$ 是其像上的主丛，在识别下，ψ_α 的拉回对任意 β 都下降为 $\pi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ 上的光滑函数。特别地，ψ_α 也定义了 $\pi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ 上的一个光滑函数，使得 $i\partial\overline{\partial}\psi_\alpha$ 在 $\pi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ 上严格为正。

我们断言，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，

$$\omega + \varepsilon i\partial\overline{\partial}(\sum_\alpha i_\alpha^* \theta_\alpha \psi_\alpha)$$

定义了 X 上的一个轨形 K¨ahler 形式，从而完成了证明。

设 X 上有一个 K¨ahler 形式 ω。对于固定的 α，在 $T_{\tilde{U}_\alpha}$ 上固定一个光滑的厄米度量。

$$\pi_\alpha^*[\omega + \varepsilon i\partial\overline{\partial}(\sum_\beta i_\beta^* \theta_\beta \psi_\beta)] = \pi_\alpha^*[i_\alpha^* \omega_\alpha + \varepsilon \sum_\beta (\psi_\beta i\partial\overline{\partial} i_\beta^* \theta_\beta + i\partial\psi_\beta \wedge \overline{\partial} i_\beta^* \theta_\beta - i\overline{\partial}\psi_\beta \wedge \partial i_\beta^* \theta_\beta + i_\beta^* \theta_\beta i\partial\overline{\partial}\psi_\beta)].$$

定义闭解析集 $A \coloneqq \{X \in T_z U_\alpha; D_z(i_\alpha \circ \pi_\alpha)(X) = 0\}$。根据上述命题，在识别下，在 $T(\tilde{U}_\alpha \cap \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta))$ 上，$D(i_\beta \circ \pi_\beta)(A) = 0$ 对任意 β均成立。要证明$\pi_\alpha^*[\omega + \varepsilon i\partial\overline{\partial}(\sum_\beta i_\beta^* \theta_\beta \psi_\beta)]$ 是 U_α上的 K¨ahler 形式，只需证明当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，$F_\alpha(X) = \pi_\alpha^*[\omega + \varepsilon i\partial\overline{\partial}(\sum_\beta i_\beta^* \theta_\beta \psi_\beta)](X, X)$ 对 U_α 上（相对于局部欧几里得度量或轨形切丛上的任意轨形光滑度量）的单位球丛中的 X定义一个严格正函数。由于 ω 是 K¨ahler 形式，$\pi_\alpha^* \omega(X, X)$ 严格为正

在 A 之外，并且在单位球丛上为正。由于 $\sum_\alpha \theta_\alpha > 0$ 在 X 上，且 $i\partial\overline{\partial}\psi_\beta$ 在 $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$上严格为正，

$$\pi_\alpha^*(\sum_\beta i_\beta^* \theta_\beta i\partial\overline{\partial}\psi_\beta)(X, X)$$

在单位球丛上严格正。另一方面，

$$\pi_\alpha^*(\sum_\beta \psi_\beta i\partial\overline{\partial} i_\beta^* \theta_\beta + i\partial\psi_\beta \wedge \overline{\partial} i_\beta^* \theta_\beta - i\overline{\partial}\psi_\beta \wedge \partial i_\beta^* \theta_\beta)$$

在 A 上消失，因为所有项都涉及 $\pi_\alpha^* i_\beta^* \theta_\beta$ 的导数。不妨假设所有形式都定义在 U_α 的闭包上。由于 $T_{\overline{U_\alpha}}$ 中的单位球丛是紧的，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时， F_α 严格正。

□

现在我们给出紧复轨形上相干层（不一定是无挠的）的第一陈类的定义。为此，我们需要对紧复轨形进行更深入的上同调研究。

引理 2。（引理 11.13 的类似结果，见 [Voi07]）L

et X *be* 一个维数为 n 的复轨形（不一定紧），且 Y 是一个闭解析子集 co 的子集 维数至少为 $r+1$。那么限制映射

$$H^l(X, \mathbb{R}) \to H^l(X \setminus Y, \mathbb{R})$$

对 $l \leq 2r$ 是同构的。如果将 $\mathbb{R}$ 改为 $\mathbb{Q}$，同样成立。

证明。在下文中，我们只证明实数情形。有理数情形的证明完全相同。注意到 $X \setminus Y$ 也是一个复轨形。根据 Poincar´e–Verdier 对偶性，只需证明包含映射

$$H_c^l(X \setminus Y, \mathbb{R}) \to H_c^l(X, \mathbb{R})$$

是同构的 对 $l \geq 2n - 2r$ 成立。对于紧支持

$$\cdots H_c^l(X \setminus Y, \mathbb{R}) \to H_c^l(X, \mathbb{R}) \to H_c^l(Y\,\mathbb{R}) \to H_c^{l+1}(X \setminus Y, \mathbb{R}) \cdots .$$

归结为证明，对于 $l \geq 2n - 2r$, $H_c^l(Y, \mathbb{R}) = 0$，这由维数条件可知成立。 □

特别地，若 X 是一个（紧）复轨形，且 X_{sing} 是余维至少为 2 的闭解析子集，则这意味着

$$H^2(X, \mathbb{R}) \simeq H^2(X_{\text{reg}}, \mathbb{R}) (\text{resp. } H^2(X, \mathbb{Q}) \simeq H^2(X_{\text{reg}}, \mathbb{Q})).$$

请注意，整数系数下的类似结论通常不成立。例如，考虑 $X = \mathbb{C}^2/\langle \pm 1 \rangle$，它是可缩的，因此除 0 次情形外，其上同调均为平凡的。然而，其正则部分与 $S^3/\langle \pm 1 \rangle \simeq \mathbb{RP}^2$ 同伦等价，而后者具有非平凡的挠上同调群。

定义 4. 设 $\mathcal{F}$ 是紧复轨形 X上的相干层。我们将 $\mathcal{F}$ 的第一陈类定义为上述同构下 $c_1(\mathcal{F}|_{X_{\text{reg}}})$的原像。关于非紧流形 X_{reg} 上相干层的陈类构造，回顾如下注 1。

我们回顾一些关于凝聚实解析空间的结果，以定义开流形上凝聚层的陈类。首先，回顾复空间的底层实解析空间为凝聚空间时的如下刻画。

命题 2。（第二章。命题 2.*15 [*BMT*86]*）

设 X 是一个（约化）复解析空间， $X^{\mathbb{R}}$ 是其底层（约化）实解析空间。若且唯若 X_a 的不可约分支在 a的某个邻域内仍保持不可约， $X^{\mathbb{R}}$ 在点 a 处才是凝聚的。

特别地，局部不可约复空间的底层空间是凝聚的。凝聚实解析空间的优点在于它们类似于 Stein 空间。例如，我们有如下 Cartan 定理 A 和 B 的实解析类比。

定理 1。（（第二章。定理3。7 [BMT86]））

设 $(X, \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}-\mathrm{an}})$ 是既约实解析空间，且 $\mathcal{F}$ 是相干的 $\mathcal{O}_X^{\mathbb{R}-\mathrm{an}}$-层。(1) 对任意 $x \in X$，$\mathcal{F}_x$ 是由 $H^0(X, \mathcal{F})$ 生成的 $\mathcal{O}_{X,x}^{\mathbb{R}-\mathrm{an}}$-模。(2) 对任意 $q > 0$，$H^q(X, \mathcal{F}) = 0$。

注 1. 若 X 是复维数为 n 的紧复流形，根据上述版本的卡当定理 A，存在一个满射态射 $\mathcal{O}_X^{\mathbb{R}-\mathrm{an},N_0} := E_0 \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}-\mathrm{an}}$，其中 $N_0 \in \mathbb{N}$。核是一个相干的 $\mathcal{O}_X^{\mathbb{R}-\mathrm{an}}-$层，且存在从某个 $\mathcal{O}_X^{\mathbb{R}-\mathrm{an},N_1} := E_1$ 到它的满射态射。继续这一过程，并考虑 $E_1 \to E_0$ 的核。根据希尔伯特零化子定理，$E_{2n-1} \to E_{2n-2}$ 的核必为局部自由的，我们将其记为 E_{2n}。总之，$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}-\mathrm{an}}$ 具有一个定义在 X 上的实解析向量丛解消 $E_\bullet$（事实上，它定义在任意紧相干实解析流形上）。

如果复空间 X 不是紧的（例如，X 是某个紧复轨形的正则部分），我们可以按以下方式定义相干层的陈类。假设 X 是紧不可约复空间 Y 的某个开集，且该开集是光滑的。空间 Y 可以被某个欧几里得开集中的有限个闭解析子集覆盖。开集 X也同样如此。因此，它是第二可数的，因为任意欧几里得开集中的闭解析子集都是第二可数的。由于它是局部紧且豪斯多夫的，因此是仿紧的。设 (X_ν) 是 X 的一个递增开集序列，使得 $X = \bigcup_\nu X_\nu$，且 X_ν 相对紧地包含于 $X_{\nu+1}$中。于是，根据上述版本的卡当定理 A，存在 $H^0(X_{\nu+1}, \mathcal{F})$ 的有限个截面，在任意点 $x \in X_\nu$处生成 $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,x}^{\mathbb{R}-\mathrm{an}}$，。继续进行上述相干层 $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}-\mathrm{an}}|_{X_\nu}$ 的解消构造过程。该过程将在有限步内终止，并以此产生 $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}-\mathrm{an}}|_{X_\nu}$的一个解消 $E_\nu^\bullet$。如上所述定义

$$\mathrm{ch}(\mathcal{F}|_{X_\nu}) := \sum_i (-1)^i \mathrm{ch}(E_\nu^i).$$

另一方面，奇异上同调群 $H^\bullet(X, \mathbb{R})$ 满足

$$H^\bullet(X, \mathbb{R}) = \varprojlim_\nu H^\bullet(X_\nu, \mathbb{R}).$$

（原因如下，这一解释归功于 David E. Speyer。由于任意奇异链的像都是紧的，因此当 ν 足够大时，它包含在某个 X_ν 中。因此，奇异链复形满足

$$C_\bullet(X, \mathbb{R}) = \varinjlim_\nu C_\bullet(X_\nu, \mathbb{R}).$$

由于正向极限函子是正合的，我们得到同调中的同构。由泛系数定理，对于任意 ν，$H^\bullet(X_\nu, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}(H_\bullet(X_\nu, \mathbb{R}), \mathbb{R})$。逆向极限系统 $(H^\bullet(X_\nu, \mathbb{R}))_\nu$ 满足 Mittag-Leffler条件，也就是说，对于任意 $\mu > \nu$，$H^\bullet(X_\mu, \mathbb{R}) \to H^\bullet(X_\nu, \mathbb{R})$ 的像都是有限维的，因此我们得到上同调中的同构。注意，$\mu > \nu$，$H^\bullet(X_\mu, \mathbb{R}) \to H^\bullet(X_\nu, \mathbb{R})$ 可经由有限维空间 $H^\bullet(\overline{X}_\nu, \mathbb{R})$ 分解。）

由于对于任意 ν，$\mathrm{ch}(\mathcal{F}|_{X_\nu})$ 的定义与所选的解消无关，因此 $(\mathrm{ch}(\mathcal{F}|_{X_\nu}))_\nu$ 在 $\varprojlim_\nu H^\bullet(X_\nu, \mathbb{R})$ 中定义了一个元素。我们将此元素定义为 $\mathcal{F}$ 的陈特征类，并记为 $\mathrm{ch}(\mathcal{F})$。相同的论证也适用于有理系数情形。

注意，如下例所示，引理 2 中的轨形假设是必要的。

例 2.（锥的上同调）

设 X 是一个射影流形，A 是 X 上的非常丰的线丛。我们将对偶线丛的全空间记为 A^{-1}。相对于 A，X 的仿射锥 $C(X)$ 定义为 $\mathrm{Spec}(\oplus_{i \geq 0} H^0(X, A^i))$。它只有一个奇点，即顶点处的奇点。将顶点作为闭点进行爆破，得到 $C(X)$ 的奇点消解，该消解同构于 $\pi: A^{-1} \to C(X)$。π 的 Stein因子分解表明，$C(X)$ 是正规的。对于任意 $i > 0$，$R^i\pi_*(\mathcal{O}_{A^{-1}}) = (H^i(A^{-1}, \mathcal{O}_{A^{-1}}))^\sim$，因为 $C(X)$ 是仿射的。由于自然映射 $f: A^{-1} \to X$ 是仿射的，因此它也等于

$$(H^i(X, f_*\mathcal{O}_{A^{-1}}))^\sim \simeq (\oplus_{j \geq 0} H^i(X, A^j))^\sim.$$

特别地，如果 $h^{1,0}(X) \neq 0$，则 $C(X)$ 不是有理奇点，因此也不是复轨形。注意，根据 [Vie77], ，商奇点总是有理奇点。

设 $PC(X)$ 是关于 A 、以 X 为底的射影锥，其中包含 $C(X)$ 作为扎里斯基开集。 $PC(X)$ 的正则部分同胚于 X 上的秩 2 实向量丛，这意味着

$$H^2(PC(X)_{\mathrm{reg}}, \mathbb{R}) \simeq H^2(X, \mathbb{R}).$$

由于 $X \times \{0\}$ 是 $X \times \mathbb{P}^1$ 中某个邻域的变形收缩，根据 [Hat02], 的第 2 章定理 2.13，对于任意 $l > 0$, 我们有以下正合列:

$$\cdots H^{l-1}(X \times \{0\}, \mathbb{R}) \to H^l(X \times \mathbb{P}^1 / X \times \{0\}, \mathbb{R}) \to H^l(X \times \mathbb{P}^1, \mathbb{R}) \to H^l(X \times \{0\}, \mathbb{R}) \cdots .$$

注意到 $X \times \mathbb{P}^1 / X \times \{0\}$ 同胚于 $PC(X)$。根据 Künneth 公式并追踪图表，我们得到 $H^2(PC(X)\ \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$。

设 X 是维数至少为 2 的阿贝尔簇。上述计算表明， $PC(X)$ 及其正则部分的二阶上同调维数不同。特别地，限制映射在上同调上不诱导同构。

（也可以证明 $H^4(PC(X)\ \mathbb{R}) \simeq H^2(X, \mathbb{R})$。设 X 是一个阿贝尔曲面。那么，$PC(X)$ 给出了一个不满足庞加莱对偶的奇异簇的例子。）

在稍微一般一些的情形下，我们可以如下定义同调第一陈类。

命题 3. 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上一个在余维 1 处光滑的紧不可约复空间上的相干层。设 Z 是 X的奇异部分。那么，与上文一样，我们可以通过以下同构定义 $\mathcal{F}$ 的同调第一陈类

$$H_{2n-2}(X, \mathbb{R}) \simeq H^{2n-2}(X, \mathbb{R})^* \simeq H_c^{2n-2}(X \setminus Z, \mathbb{R})^* \simeq H^2(X \setminus Z, \mathbb{R}).$$

若 $\mathcal{F}$ 是挠的，且 ω 是 X上的一个 K ¨ahler 形式，则有

$$\langle c_1^h(\mathcal{F}), \omega^{n-1} \rangle \geq 0$$

其中 $c_1^h(\mathcal{F})$表示同调第一陈类。

证明。考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccc} H^{2n-2}_{c,\mathcal{D}-dR}(X \setminus Z, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\simeq} & H_c^{2n-2}(X \setminus Z, \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \simeq \\ H^{2n-2}_{\mathcal{D}-dR}(X, \mathbb{R}) & \longrightarrow & H^{2n-2}(X, \mathbb{R}). \end{array}$$

注意，第一行中的同构由 $X \setminus Z$ 光滑这一假设得出（参见 Chap IV. (7.10) [Dem12]）。根据 [Her67], ，底部的态射是满射。由该图可知，它实际上是一个同构。

需要对左箭头作一些解释。设 α 是 $X \setminus Z$ 上具有紧支撑的光滑形式。那么，将 α 延拓为 0 后，它在 X 上定义了一个光滑形式。事实上， α 的支集远离 X 的奇异部分。因此，在奇异部分附近局部地看，将 α 延拓为 0 后得到的形式恰好就是零形式的限制。

挠层 $\mathcal{F}|_{X \setminus Z}$ 的行列式线丛具有一个全局非平凡截面，该截面定义了一个流 $[D|_{X \setminus Z}]$，代表 $H_c^{2n-2}(X \setminus Z, \mathbb{R})^* \simeq H_c^{2n-2}{}_{,\mathcal{D}-dR}(X \setminus Z, \mathbb{R})^*$ 中的一个元素。 X 中由这个非平凡截面定义的除子的闭包记为 D ，它作为一个流定义了 $H^{2n-2}_{\mathcal{D}-dR}(X, \mathbb{R})^* \simeq H^{2n-2}(X, \mathbb{R})^*$ 中的一个元素，该元素在 $H_c^{2n-2}(X \setminus Z, \mathbb{R})^*$ 中的像就是 $[D|_{X \setminus Z}]$ 的类。

特别地，我们有

$$\langle c_1^h(\mathcal{F}), \omega^{n-1} \rangle = \int_D \omega|_D^{n-1} \geq 0.$$

□

在下面一段中，我们回顾[LT18]中的轨形向量丛的轨形陈类。特别要强调的是，轨形陈类的定义无需使用度量，并且可以在有理系数的上同调中定义；而 [LT18]之后似乎缺少相关参考文献。回顾一下，在实系数情形下，轨形向量丛的轨形陈类（下文将回顾）在德拉姆上同调中定义为由某个轨形光滑度量的陈曲率形式所表示的上同调类。

首先注意，根据定义 4 的构造，轨形线丛的第一个轨形陈类在德拉姆上同调中与定义 4 中的陈类重合。

回顾下面这个由 [PS03] 给出的 Leray-Hirsch 定理版本。

定义 5. 连续映射 $p\colon M \to B$ 在轨形意义下是一个局部平凡纤维化（称其纤维为 F），如果对于每个 $b \in B$，都存在一个邻域 V_b、一个拓扑空间 U_b 以及一个拓扑群 G_b，使得

1. G_b 作用于 U_b 和 F；在 F 上的作用是由与恒等映射同伦的同胚给出的；
2. V_b 与 U_b/G_b 同胚；
3. $p^{-1}(V_b)$ 与 G_b 的乘积作用下 $U_b \times F$ 的商空间同胚。

在此情形下，将自然商映射 $F \to F/G_b$ 与同胚 $F/G_b \simeq p^{-1}(b)$ 以及包含映射 $p^{-1}(b) \to X$复合，便定义了轨形纤维包含 $r_b\colon F \to X$。

定理 2. (*[PS03]*) 设 $p\colon M \to B$ 是一个在轨形意义下局部平凡的纤维化。假设对所有 $q \geq 0$，都存在上同调类 $e_1, \cdots, e_{n_q} \in H^q(M, \mathbb{Q})$，它们在由轨形纤维包含 $r_b\colon F \to M$诱导的映射下限制为 $H^q(F, \mathbb{Q})$ 的一组基。映射 $a \otimes r_b^*(e_i) \mapsto p^*a \cup e_i, a \in H^\bullet(B, \mathbb{Q})$ 可线性延拓为一个分次线性同构

$$H^\bullet(B, \mathbb{Q}) \otimes H^\bullet(F, \mathbb{Q}) \simeq H^\bullet(M, \mathbb{Q}).$$

设 $\mathcal{F}$ 是复轨形 X上的自反层。根据命题 1 中的图表，采用相同的记号，$(\pi_\alpha^*\mathcal{F}/\mathrm{Tors})_\alpha$ 自然定义了 X 上的轨形层，或者按照几何不变理论的术语，通过命题 1 中的图表“粘合”得到 U_α 上的等变相干 $\tilde{}$层，因为模去挠部分的拉回是一个函子。有关进一步讨论，请参阅 [Fau22] 。为简化记号，我们有时称 $\{U_\alpha\}_\alpha$ 为局部分歧光滑覆盖。这里，Tors 表示相应相干层的挠部分。自然态射$\mathcal{F} \to (\pi_\alpha, {}_*\pi_\alpha^*\mathcal{F}/\mathrm{Tors})^{G_\alpha}$ 在余维 1 处是同构。由于 $\mathcal{F}$ 是自反的，事实上它是一个同构。回顾一下，轨形层 $(\mathcal{G}_\alpha)_\alpha$ 的第一陈类定义为其行列式轨形线丛的第一陈类（即 $\mathcal{G}_\alpha$ 在 U_α上的行列式线丛的第一陈类）。事实上，限制到 X的正则部分后，$(\pi_\alpha^*\mathcal{F}/\mathrm{Tors})_\alpha$ 的第一陈类等于 $\mathcal{F}$ 的第一陈类。

下文中，若对任意 α，$((\pi_\alpha^*\mathcal{F}/\mathrm{Tors})^{**})_\alpha$ 都是局部自由的，则称自反层 $\mathcal{F}$ 为轨形向量丛。注意，对于轨形向量丛 E，其射影化$\mathbb{P}(E)$ E 可自然地定义为一个轨形，并带有典范轨道线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ 和自然投影 $p\colon \mathbb{P}(E) \to X$，后者是一个轨形态射。经过可能的限制，取一个更小的 U_α，我们可以假设，$((\pi_\alpha^*\mathcal{F}/\mathrm{Tors})^{**})_{\tilde{}\ \alpha}$ 的某个（全纯）局部化上的作用，是 U_α 上的群作用与 $\mathbb{C}^r$ 上某个群作用的乘积，其中 r 是秩。利用与轨形结构相容的 $((\pi_\alpha^*\mathcal{F}/\mathrm{Tors})^{**})_\alpha$ 上的 G_α-不变度量，可以定义轨形向量丛的正性。

定义 6. 设 (X, ω) 是紧致 K ¨ahler 轨形。若对于任意 $\epsilon > 0$，存在 E 上的轨形光滑（或奇异）度量 h_ϵ，使得在每个局部分歧光滑覆盖上，按照通常的陈曲率公式，$c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)\ h_\epsilon) + \epsilon p^*\omega$ 为正（或在流的意义下为正，且具有解析奇异性，并且奇异部分在 p 下的投影在 X 中不占主导），则称轨形向量丛 E 为数值有效（或强伪有效）。

数值平坦轨形向量丛 E 是这样一种轨形向量丛：E、E^* 是 nef 轨形向量丛。若一个轨形向量丛上存在一个轨形度量，使其在每个局部分歧光滑覆盖上按照陈曲率的通常公式为厄米平坦，则称该轨形向量丛是厄米平坦的。

注意，秩为 r、 p 的轨形向量丛： $E \to X$ 或其射影化 π： $\mathbb{P}$（E） $\to X$ 在轨形意义下是以 $\mathbb{C}^n$（或 $\mathbb{P}^{r-1}$）为纤维的局部平凡纤维化。注意，GL($r,\mathbb{C}$)、PGL($r,\mathbb{C}$) 是连通的，因此其在轨形纤维上的作用与恒等作用同伦。

定义 7.（有理系数下的轨形陈类）

设 p： $E \to X$ 是一个秩为 r的轨形向量丛。注意， $\mathbb{P}(E)$ 也是一个复轨形，而 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ 是一个轨形向量丛，使得 $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))$ 在轨形纤维包含下的限制生成 $H^\bullet(\mathbb{P}^{r-1},\mathbb{Q})$。根据构造， $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ 在轨形纤维包含下的限制是典范线丛。事实上，

c_1 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}$ 1 $\in$ (( )) (( ))

H^2 $\mathbb{P}$ E $\mathbb{R}$

在轨形纤维包含下的限制由陈曲率形式表示，而该形式在轨形纤维包含下的限制正是 Fubini-Study度量。

因此，存在唯一的元素 $c_i(E) \in H^2(X,\mathbb{Q})$，使得

$$c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^r + \sum_i (-1)^i \pi^*(c_i(E)) \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^{r-i} = 0$$

根据 Leray-Hirsch 定理（定理 2）。我们将轨形向量丛 E 的轨形陈类定义为恰好是 $c_i(E)$。

由 Leray-Hirsch 定理可知，如果一个轨形向量丛有处处非零截面，那么它的最高阶轨形陈类是平凡的。

在整数奇异上同调中定义轨形向量丛的轨形陈类是很有意思的。一个困难在于，对于一个紧复流形 X ，其上有有限群 G 的全纯作用

$$H^\bullet(X/G,\mathbb{Q}) = H^\bullet(X,\mathbb{Q})^G.$$

然而，下一个例子表明，整数奇异上同调中的类似结论通常并不成立。下面给出一个较简单的光滑例子。Enriques曲面 X 是 K3 曲面在无不动点对合下的商空间。 $H^2(X,\mathbb{Z})$ 含有一个非平凡挠元，而 K3 曲面二阶上同调的不变部分是自由的。

例 3。（Torsten Ekedahl 关于奇异 Kummer 曲面上同调的结果）

设 $X \to X$ 是通过爆破 X 的 16 个奇点 x_i（$1 \le i \le 16$）得到的极小解消。由真基变换，我们有

$$\pi_*\mathbb{Z}_{\tilde{X}} = \mathbb{Z}_X, R^2\pi_*\mathbb{Z}_{\tilde{X}} = \oplus_i \mathbb{Z}_{x_i}, R^j\pi_*\mathbb{Z}_{\tilde{X}} = 0 (\forall j \neq 0,2).$$

由 Leray谱序列，我们有

$$H^i(X,\mathbb{Z}) \simeq H^i(\tilde{X},\mathbb{Z}) (\forall i \neq 2,3).$$

由于 $\tilde{X}$ 是一个 K3 曲面，其所有上同调都已知。由于 $H^3(\tilde{X},\mathbb{Z}) = 0$, $E^{3,0}_\infty = 0$ 因此 d_3： $E^{0,2}_2 = H^0(X,R^2\pi_*\mathbb{Z}_{\tilde{X}}) \to E^{3,0}_2 = H^3(X,\mathbb{Z})$ 是满射。我们有一个正合列

$$0 \to E^{0,2}_\infty \to E^{0,2}_2 \to E^{3,0}_2 \to 0.$$

另一方面， $E^{1,1}_\infty = E^{1,1}_2 = 0, E^{2,0}_\infty = E^{2,0}_2$。作为分次模，我们有一个正合列

$$0 \to E^{2,0}_2 = H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(\tilde{X},\mathbb{Z}) \to E^{0,2}_\infty \to 0.$$

因此， $H^3(X,\mathbb{Z})$ 是边同态 $H^2(\tilde{X},\mathbb{Z}) \to H^0(X,R^2\pi_*\mathbb{Z}_{\tilde{X}})$ 的余像。我们声称，~该边同态由与 X 中的 (-2)–曲线取交数给出。由函子性，只需证明边同态 $H^2(\tilde{X},\mathbb{C}) \to H^0(X,R^2\pi_*\mathbb{C}_{\tilde{X}})$ ~ ~由与 X 中的 (-2)–曲线取交数给出。由于 X 是光滑的， $\mathbb{C}_{\tilde{X}}$ 与光滑形式复形 $A^\bullet_{\tilde{X}}$ 拟同构。边缘态射由 $H^2(\tilde{X},\mathbb{C}) = \mathbb{H}^2(\tilde{X},A^\bullet_{\tilde{X}}) \to H^0(X,\mathcal{H}^2(\pi_*A^\bullet_{\tilde{X}}))$ 给出。对于任意 i，芽 $\mathcal{H}^2(\pi_*A^\bullet_{\tilde{X}})_{x_i}$ 通过沿曲线对 $\mathbb{H}^2(\tilde{X},A^\bullet_{\tilde{X}})$ 的光滑形式代表元进行积分而与 $\mathbb{C}$ 识别，这就完成了该断言的证明。

由正合列

$$0 \to H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(\tilde{X},\mathbb{Z}) \to H^0(X, R^2\pi_*\mathbb{Z}_{\tilde{X}}),$$

$H^2(X,\mathbb{Z})$ 是与（-2）–曲线正交补的空间，根据第八章推论 5.6 [BHPV04]，它与 $H^2(A,\mathbb{Z})$ 同构。

由于 (-2)–曲线在 $H^2(X,\mathbb{Z})$ 中定义了线同调类，考虑它们的像可知，边同态的余像是（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）$^{\oplus 16}$的一个商空间。根据第八章命题 5.5 [BHPV04],，诱导的 $H^2(\tilde{X},\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 16}$ 的像的基数为 2^5。特别地，$H^3(X,\mathbb{Z})$ 含有非平凡挠元。

注意，$H^\bullet(A,\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ 然而没有挠元。

[BCGP12] 中还给出了许多其他例子。

例 4。（[BCGP12]）具有有理双点、且为两条曲线的乘积关于有限群的对角作用所得商空间的曲面，被称为乘积商曲面。在 5 [BCGP12]，的第 5 [节中，他们对亏格至少为 2 的曲线的此类曲面进行了分类，$h^{0,1}(S) = h^{0,2}(S) = 0$ 是奇异的。特别地，其基本群 S 是有限群。他们的计算表明，$H_1(S,\mathbb{Z})$ 是非平凡的（换言之，基本群不是完美群）。根据泛系数定理，$H^2(S,\mathbb{Z})$ 含有非平凡挠元。因此，正合列 $H^1(S,\mathcal{O}_S^*) \to H^2(S,\mathbb{Z}) \to H^2(S,\mathcal{O}_S) = 0$ 表明，在 S 上存在线丛具有非平凡挠陈类。

例 5. 令 $X = A/\langle\pm 1\rangle$如例 1 中所示。令 $\pi: A \to X$ 为商映射，该映射也可视为轨形态射。根据构造，自然态射 $T_A \to \pi^*T_X$ 实际上是一个同构。特别地，X 的“轨形”第二陈类满足

$$c_2(X)\cap[X] = \frac{1}{2}\pi_*(\pi^*c_2(X)\cap[A]) = \frac{1}{2}\pi_*(c_2(T_A)\cap[A]) = 0.$$

对于 X上的任意德拉姆上同调类（“轨形”光滑形式）α，我们有

$$\langle\pi_*(\pi^*c_2(X)\cap[A]),\alpha\rangle = \langle(\pi^*c_2(X)\cap[A]),\pi^*\alpha\rangle = \langle[A],\pi^*(c_2(X)\wedge\alpha)\rangle$$

由奇异上同调与奇异同调之间的自然配对，这也等于

$$\int_A \pi^*(c_2(X)\wedge\alpha) = 2\int_X c_2(X)\wedge\alpha = \langle 2c_2(X)\cap[X],\alpha\rangle.$$

由于庞加莱-韦尔对偶性在复轨形上成立，$c_2(X) = 0$.

证明这一事实的另一种方法是注意到，A 上存在一个不变平坦度量，该度量在 X上诱导出一个平坦度量。此外，上述计算同样适用于 $X = Y/G$，其中 Y是一个带有全纯有限群 G 作用的复流形。令 $|G|$ 为 G 的阶，并令$\pi: Y \to X$ 为商映射。我们有

$$c_k(X)\cap[X] = \frac{1}{|G|}\pi_*(c_k(Y)\cap[Y])$$

对任意 k。

现在我们开始证明，任意 K¨ähler 轨形也是一个 K¨ähler 复空间。为此，我们需要一些关于复空间上多重势理论的结果。进一步的信息和参考文献可参阅文章 [Dem85] 。

请回忆，测试函数和流的定义具有局部性质。要在复空间 X上定义它们，我们可以像前面回顾的那样，将 X 视为开集 $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ 中的一个闭解析子集。光滑形式的拓扑由商拓扑诱导。相应的对偶空间定义为 X上的流空间。

定义 8。（D ´定义 1.9 [Dem85]）复空间 Z 上的局部可积函数 V（相对于由任意局部嵌入的勒贝格测度诱导的面积测度）称为弱拟次调和函数（分别称为弱拟拟次调和函数），如果 V 局部有上界，且 $i\partial\overline{\partial}V \geq 0$ 在流的意义下成立（分别地，若 α 是 Z上的一个光滑形式，则 $i\partial\overline{\partial}V \geq \alpha$ 在流的意义下成立）。

当复空间 Z 光滑时，由 V局部可积以及 $i\partial\overline{\partial}V \geq 0$（分别地，若 α 是 Z上的一个光滑形式，则 $i\partial\overline{\partial}V \geq \alpha$ 在流的意义下成立）可推出 V 局部有上界。然而，在奇异情形下并非总是如此。

我们也有复空间上拟次调和函数的定义。

定义9。（定义1. Dem*9 [*）设*85]*: V是一个函数，在 $Z \to [-\infty, \infty[$ 的任意开集上都不恒等于无穷大。若对任意局部嵌入 Z: $V\Omega j$， $Z \hookrightarrow$ 都是Ω上某个拟次调和（分别为准拟次调和）函数的局部限制，则称 $\subset \mathbb{C}^N$为拟次调和（分别为准拟次调和）函数。

J.E. Fornaess 和 R. Narasimhan 给出了拟次调和函数的以下等价定义。

定理3。（定理5.*10 [*FN*80]*）

函数 V 是复空间 X 上的拟次调和函数，当且仅当：（1） V 是上半连续的。（2）对于任意全纯映射 f： $\Delta \to X$ 从单位圆盘 Δ出发，要么 $V \circ f$ 是次调和函数，要么$V \circ f$ 恒等于无穷大。

作为一个直接推论，复空间之间拟多重次调和函数的拉回仍然是拟多重次调和函数。

当然，在复流形上，拟次调和函数与弱拟次调和函数的定义是一致的。然而，一般而言，在复空间上，拟次调和函数与弱拟次调和函数的定义并不相同。

例 6. 设 $Z \subset \mathbb{C}^2$ 是由 $\{z_1 z_2 = 0\}$ 定义的复空间。考虑函数 V，它在 $\{z_1 = 0\}$ 上恒等于 1，在其他地方恒等于 0。那么， V 不可能是 $\mathbb{C}^2$ 中 0 的任意开邻域上某个拟次调和函数的限制。否则，这样一个函数在 $\{z_2 = 0\}$ 上的限制应恒等于 0，这与其在原点处的取值矛盾。然而，我们断言 V 是 Z 上的弱拟次调和函数。事实上， $i\partial\overline{\partial}V = 0$。只需考虑原点的开邻域。设 g 是 Z 在原点附近的一个测试函数。$\langle i\partial\overline{\partial}V,\ g\rangle = \langle V,\ i\partial\overline{\partial}g\rangle = \int_{\{z_1=0\}} i\partial\overline{\partial}g = 0$ 对任意 g。

我们还回顾一下 Bott-Chern 上同调类，它比此前考虑的德拉姆上同调更为精确。根据 [BEG13], 的引理 4.6.1，正规复空间 X 上的任意多重调和分布在局部都是某个全纯函数的实部；也就是说，$i\partial\overline{\partial}$ 算子在双次数为 (0, 0) 的分布层上的核，恰好是全纯芽实部所成的层 $\mathbb{R}\mathcal{O}_X$。Bott–Chern 上同调空间定义为

$$H^{1,1}_{BC}(X, \mathbb{C}) := H^1(X, \mathbb{R}\mathcal{O}_X).$$

若 X 是复轨形，则轨形光滑形式复形给出 $\mathbb{C}_X$ 的软消解。使用轨形光滑形式或轨形流定义 Bott-Chern 复形的通常方式给出一个正合列

$$0 \to \mathbb{R}\mathcal{O}_X \to A^{0,0}_{X,orb} \xrightarrow{i\partial\overline{\partial}} A^{1,1}_{X,orb} \to A^{2,1}_{X,orb} \oplus A^{1,2}_{X,orb} \to \cdots$$

其中 $A^{i,\ j}_{X,\ orb}$ 表示双次数为 (*i, j*) 的轨形光滑形式层或流层。特别地， $H^{1,\ 1}_{BC}(X, \mathbb{C})$ 中的元素可由全局轨形 (1, 1)–形式表示。若 X 进一步是光滑的，我们便得到由 Bott-Chern 复形定义的 Bott-Chern 上同调的通常定义。

设 ω 是 X 上的 K¨ahler 形式。局部而言， ω 是某个光滑函数的 $i\partial\overline{\partial}$ 的限制，并且它与其他局部图表的交集上的差是多重调和的。换言之， ω 在 $H^0(X, C^\infty_X/\mathbb{R}\mathcal{O}_X)$ 中定义了一个元素。短正合列

$$0 \to \mathbb{R}\mathcal{O}_X \to C^\infty_X \to C^\infty_X/\mathbb{R}\mathcal{O}_X \to 0$$

这意味着 $H^1(X, \mathbb{R}\mathcal{O}_X) \simeq H^0(X, C^\infty_X/\mathbb{R}\mathcal{O}_X)/i\partial\overline{\partial}A^{0,\ 0}_{X}(X)$。特别地，K¨ahler 形式 ω在 $H^{1,\ 1}_{BC}(X, \mathbb{C})$ 中定义了一个元素。

由于层 $\mathbb{R}\mathcal{O}_X$ 与 $C_X^\infty \to C_X^\infty/\mathbb{R}\mathcal{O}_X$ 拟同构，复形态射

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A_X^0 & \longrightarrow & A_X^0/\mathbb{R}\mathcal{O}_X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\partial} & & \downarrow{\scriptstyle \partial\overline{\partial}} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_X^0 & \longrightarrow & A_X^1 & \xrightarrow{d} & A_X^2 & \longrightarrow & A_X^3 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

诱导出 $H^{1,1}_{BC}(X,\mathbb{C}) \to H^2_{\mathcal{D}-\mathrm{dR}}(X,\mathbb{C})$。如果将底行中的光滑形式复形替换为光滑轨形形式复形，我们得到自然态射 $H^{1,1}_{BC}(X,\mathbb{C}) \to H^2(X,\mathbb{C})$。注意，对于紧 K¨ahler 轨形，$\partial\overline{\partial}$ 引理成立。Bott-Chern上同调也同构于轨形 Dolbeault 上同调。由于 Hodge 分解对紧 K¨ahler 轨形成立，Bott-Chern上同调可视为 $H^2(X,\mathbb{C})$ 的子空间。自然态射 $H^{1,1}_{BC}(X,\mathbb{C}) \to H^2(X,\mathbb{C})$ 分解为经过 $H^2_{\mathcal{D}-\mathrm{dR}}(X,\mathbb{C})$ 的态射，这意味着 $H^{1,1}_{BC}(X,\mathbb{C})$ 也可视为 $H^2_{\mathcal{D}-\mathrm{dR}}(X,\mathbb{C})$ 的子空间。

我们需要以下由 Varouchas[Var89]给出的复空间上的 Richberg 正则化定理。

定理4. 设 X 是一个复空间。假设它有一个开覆盖 $(U_\alpha)_\alpha$ 以及一组定义在 U_α 上的连续强拟星形函数 φ_α，使得 $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ 在 $U_\alpha \cap U_\beta$上是多重调和的。这里，强拟调和函数是指局部环境空间上的强拟调和函数的局部限制。则存在定义在 U_α 上的光滑强拟星形函数 $\tilde{\varphi}_\alpha$，使得 $\tilde{\varphi}_\alpha - \tilde{\varphi}_\beta = \varphi_\alpha - \varphi_\beta$。特别地，由 $i\partial\overline{\partial}\tilde{\varphi}_\alpha$ 定义的 Bott-Chern 上同调类与由$i\partial\overline{\partial}\varphi_\alpha$定义的上同调类相同。

注2. $C_X^0/\mathbb{R}\mathcal{O}_X$的任意整体截面也定义了 $H^{1,1}_{BC}(X,\mathbb{C})$中的一个元素。事实上，我们有一个同构

$$H^0(X, C^\infty/\mathbb{R}\mathcal{O}_X)/i\partial\overline{\partial}C^\infty(X) \simeq H^0(X, C^0/\mathbb{R}\mathcal{O}_X)/i\partial\overline{\partial}C^0(X) \simeq H^{1,1}_{BC}(X,\mathbb{C}).$$

在文献中，任意整体截面 $H^0(X, \mathcal{D}'_X/\mathbb{R}\mathcal{O}_X)$ 都称为具有局部势的 (1, 1)–流。类似地，任意整体截面 $H^0(X, C^0_X/\mathbb{R}\mathcal{O}_X)$ 都可称为具有连续局部势的 (1, 1)–流。若局部势是强拟次调和的，则它是 K¨ahler 的。Varouchas 的上述定理可改述如下：

由空间 $H^0(X, C^\infty_X/\mathbb{R}\mathcal{O}_X)/i\partial\overline{\partial}C^\infty(X)$ 中的 K¨ahler 形式生成的开锥，与由空间 $H^0(X, C^0_X/\mathbb{R}\mathcal{O}_X)/i\partial\overline{\partial}C^0(X)$ 中具有连续局部势的 K¨ahler 流生成的开锥相同。

注意，Bott-Chern上同调也可以表示为某个复形的超上同调，其中使用的是轨形流而非轨形光滑形式。因此，我们也可以类似地提出问题：由 K¨ahler 轨形形式生成的开锥，是否与由具有连续势的 K¨ahler 轨形流生成的开锥相同？以下论证表明答案是肯定的。设 α 是复轨形 X 上的一个轨形光滑形式。设 φ 是一个连续轨形函数，使得

$$\alpha + i\partial\overline{\partial}\varphi \geq 0$$

在流的意义下。令 P 为标架丛的总空间，其自然投影为 $\pi: P \to X$。例如，可在 [MM10] 的第2.4节中找到该构造。于是，π 是一个 GL$(n,\mathbb{C})$– 等变态射，其中 P 上的群作用由 GL$(n,\mathbb{C})$ 的右乘诱导。局部地，令 U/G 为 X 的一个开集，其中 $U \subset \mathbb{C}^n$ 光滑，且 G 是 SO$(2n)$ 的一个有限子群。原像 $\pi^{-1}(U/G)$ 在全纯意义下同构于轨形 $U \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})/G$，其中 $g \in G$ 在 $(x, A) \in U \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 上的作用由 $g \cdot (x, A) = (g \cdot x, gA)$ 给出。由于 G 在 $U \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 上的作用是自由的，P 是一个光滑流形。在 P 上固定一个光滑的 Hermitian形式 ω'。

因此，$\varphi \circ \pi$是 P上的连续 $\pi^*\alpha$–拟次调和函数。根据经典的 Richberg 正则化定理[Ric68] [GW 75], , 存在 $\psi_\varepsilon \in C^\infty(P)$，使得 $|\varphi \circ \pi - \psi_\varepsilon| \leq \varepsilon$ 并且

$$\pi^*\alpha + i\partial\overline{\partial}\psi_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega'.$$

令 dg 为 GL$(n,\mathbb{C})$ 上总质量为 1 的 Haar测度。不失一般性，我们可以假设 ω' 关于 Haar测度可积。定义 $\varphi_\varepsilon := \int \psi_\varepsilon dg \in C^\infty(P)$。

由于它是 GL($n,\mathbb{C}$)–不变的，因此它下降为 X 上的光滑轨形函数。由于 ψ_ε 在 GL($n,\mathbb{C}$) 的每个轨道上都有界，因此该积分有限。我们有

$$\alpha + i\partial\overline{\partial}\varphi_\varepsilon \geq -\varepsilon \int \omega' dg$$

作为 X 上的轨形光滑形式。

现在我们利用 Varouchas 的结果证明引理 1 的逆命题。

命题4. 设 X 是一个复轨形，且 ω 是 X 上的一个 K¨ahler 轨形形式。假设 X 仿紧且第二可数。那么 X 是一个 K¨ahler 复空间。

~ ~证明。设 $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ 是 X 的一个局部有限覆盖，使得 $U_\alpha \simeq U_\alpha/G_\alpha$，其中 U_α 是单连通欧氏开集，且 $G_\alpha \subset GL_n(\mathbb{C})$ 很小。根据假设，在 U_α 上， ω 由 $i\partial\overline{\partial}\tilde{\varphi}_\alpha$ 给出，其中 $\tilde{\varphi}_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ 是 G_α– 不变的。由于 U_α 作为拓扑空间由 ~ 的商拓扑给出， $\tilde{\varphi}_\alpha$ 在 U_α 上定义了某个连续函数 φ_α。

我们断言 φ_α 在 U_α上是严格拟次调和的。设 ψ_α 是 U_α上的连续严格拟次调和函数。（例如，我们可以将 U_α 嵌入某个欧几里得空间，并令 ψ_α 为该欧几里得空间上某个连续严格拟次调和函数的限制。）不失一般性，我们可以假设 ~ ~， $\tilde{\varphi}_\alpha$、 $\pi_\alpha^*\psi_\alpha$ 定义在 U_α的闭包上。由于 $\tilde{\varphi}_\alpha$是强拟调和的，因此当 $\varepsilon > 0$ 足够小时， $\tilde{\varphi}_\alpha - \varepsilon\pi_\alpha^*\psi_\alpha$ 在 U_α 上是拟次调和的。由于 π_α是正则部分上的无分歧覆盖，故 $\varphi_\alpha - \varepsilon\psi_\alpha$ 在 U_α的正则部分上是拟次调和的。由于 $\varphi_\alpha - \varepsilon\psi_\alpha$ 是连续的，根据定理3，它在 U_α 上是拟次调和的。因此，$\varphi_\alpha = (\varphi_\alpha - \varepsilon\psi_\alpha) + \varepsilon\psi_\alpha$ 是强拟调和的。

由命题 1中的图示容易看出， $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ 在 $U_\alpha \cap U_\beta$上是多重调和的。因此，根据 Varouchas 的结果（定理4）， X 是一个 K¨ahler 复空间。 □

结合引理 1 和命题4可知，若 X 是紧轨形，则它作为复空间是 K¨ahler 的，当且仅当它作为轨形是 K¨ahler 的。

推论1. 设 X 是光滑紧流形， G 是其双全纯自同构群的有限子群。那么 X/G是 K¨ahler 轨形，当且仅当 X 是 K¨ahler 的。特别地， X/G 是射影的，当且仅当 X 是射影的。

证明. 注意到，局部而言， X/G是 X 的某个欧几里得坐标图在 G 的某个线性群作用下的商空间（因此 X/G 是复轨形），由 [Car57]可得。

“若”这一部分显然。在此情形下，注意到我们可以直接应用 [Var89]的推论 3.2.1，得出 X/G 是 K¨ahler 复空间。正如 [DHP08], 的注记 8.5 所指出的，K¨ahler 流形在真满射态射下的像不一定是 K¨ahler 的。这里可以应用 Varouchas 的结果，因为商映射 $X \to X/G$ 是几何平坦的。

反过来，不失一般性，我们可以假设该作用在余维 1 上有效，这意味着 $\cup_{g\in G,\ g\neq e}\{x \in X, g\cdot x = x\}$ 在 X 中的余维至少为 2。否则，由在余维 1 上无效的元素生成的子群 H 是 G 的正规子群。因此 $X/G \simeq (X/H)/(G/H)$，其中 X/H 光滑。根据 [Bin83], 的结果，（平坦有限）商映射 $X \to X/H$ 是一个 K¨ahler 态射。特别地， X 是 K¨ahler 的，当且仅当 X/H 是 K¨ahler 的。若 X/G 是 K¨ahler 的，根据 [Var89] 的引理 4.2.2， X 是弱 K¨ahler 的。由于 X 光滑， X 实际上是 K¨ahler 的。

对于最后一个断言，注意到丰沛线丛 A 在 X/G 上诱导出一个丰沛轨形线丛 $\otimes_{g\in G} g^*A$。因此 X/G 是射影的。反过来，嵌入 X/G 到某个射影空间中，会在 X/G 上诱导出一个轨形 K¨ahler 形式（如引理 1 中所构造），使得该 K¨ahler 形式的拉回取值于 $H^1,\ 1(X) \cap H^2(X,\mathbb{Z})$。 □

注意，该推论给出了一种构造奇异 K¨ahler 复空间的有效方法。以下例子表明，一般而言，具有商奇点的射影簇未必是整体商。

例 7. 我们首先回顾一些关于加权射影空间的基本结果。更多信息请参阅 [Dol82]。若某个维数为 N 的加权射影空间 $\mathbb{P}$ 中的子簇 X 满足 $\pi^{-1}(X)$ 在带有自然投影 $\pi\colon \mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{P}$ 的 $\mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\}$ 中光滑，则称其为准光滑。

在下文中我们始终作此假设。令 $C(X)$ 为 $\pi^{-1}(X)$ 在 $\mathbb{C}^{N+1}$ 中的闭包。注意，若 X 是准光滑的，它不一定光滑，因为 $X \simeq C(X) \setminus \{0\}/\mathbb{C}^*$，其中的 $\mathbb{C}^*-$作用可能有不动点。但根据 [Dol82] 的定理 3.1.6， X 是一个复轨形。根据 2 [Dol82], 的引理 3.2.，若 X 的维数大于二，则 $C(X) \setminus \{0\}$ 是单连通的。由于 X 的奇异部分余维至少为 2，这意味着 $\pi^{-1}(X_{\text{sing}})$ 在光滑流形 $C(X) \setminus \{0\}$ 中的余维至少为 2，因此 $\pi^{-1}(X_{\text{reg}})$ 也是单连通的。由纤维化 $\pi : \pi^{-1}(X_{\text{reg}}) \to X_{\text{reg}}$ 的同伦正合列可知， X_{reg} 是单连通的。

我们断言，若 X 不光滑，则对于某个带有有限群 H的全纯余维 1 上非有效作用的 Y 光滑流形， X 不与 Y/H 同构。否则，记p: $Y \to X$ 为诱导的商映射。商映射 p 在 X_{reg} 上是无分歧覆盖，其次数等于 H的基数。由于 X_{reg} 单连通， H 必为平凡群。这意味着 X 光滑。矛盾。

根据 [GH10]的工作，可以构造更多的 K¨ahler 复空间。

命题 5. 设 $\mathcal{F}$ 是紧轨形 X上的自反层。那么，对于所有轨形子层， $\mathcal{F}$ 稳定（分别地，半稳定）当且仅当 $\mathcal{F}$ 稳定（分别地，半稳定）。

证明. 设 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$的一个子层。存在一个轨形层之间的自然态射 $(\pi_\alpha^*\mathcal{G}/\text{Tors})_\alpha \to (\pi_\alpha^*\mathcal{F}/\text{Tors})_\alpha$。然而，它未必是单射。其像是 $(\pi_\alpha^*\mathcal{F}/\text{Tors})_\alpha$的一个子层，并且在正则部分的原像上与 $(\pi_\alpha^*\mathcal{G}/\text{Tors})_\alpha$ 同构。特别地，该像与 $(\pi_\alpha^*\mathcal{G}/\text{Tors})_\alpha$具有相同的行列式轨形线丛。因此，它们具有相同的第一陈类。若 $\mathcal{F}$ 对于所有轨形子层均稳定（分别地，半稳定），则它是稳定（分别地，半稳定）的。

反之，设 $(\mathcal{G}_\alpha)_\alpha$ 是 $(\pi_\alpha^*\mathcal{F}/\text{Tors})_\alpha$的一个轨形子层。$(\pi_{\alpha,\ *}\mathcal{G}_\alpha)^{G_\alpha}$ 是$\mathcal{F} \simeq (\pi_{\alpha,\ *}\pi_\alpha^*\mathcal{F}/\text{Tors})^{G_\alpha}$的一个子层。自然态射

$$\pi_\alpha^*((\pi_{\alpha,*}\mathcal{G}_\alpha)^{G_\alpha})/\text{Tors} \to \pi_\alpha^*\pi_{\alpha,*}\mathcal{G}_\alpha/\text{Tors} \to \mathcal{G}_\alpha$$

在余维 1 上是同构的，并且两侧具有相同的轨形行列式线丛。如果 $\mathcal{F}$是稳定的（分别为半稳定的），则相对于所有轨形子层， $\mathcal{F}$ 也是稳定的（分别为半稳定的）。

□

现在注意，对于紧致 K¨ahler 轨形，偏微分方程理论的所有工具经过适当修改后仍然适用（例如 Sobolev 不等式、热核估计等）。特别地，我们有如下结果。

命题 6. 设 E 是紧致 K¨ahler 复空间 (X, ω) 上的一个具有商奇点的轨形向量丛。假设将 E 视为轨形层时，对于所有轨形子层都是 $\omega-$多项式稳定的。则 E 满足 Bogomolov 不等式。

证明。根据引理 1 的证明，存在一列轨形 K¨ahler 形式 ω_ε，它们在“轨形”光滑形式的拓扑下收敛于 ω，且属于同一个奇异上同调类。特别地，由于 E 是 $\omega-$多项式稳定的， E 也同样是 $\omega_\varepsilon-$多项式稳定的。根据 [Fau22], 的定理 4.1，对于任意足够小、使得 ω_ε 是“轨形”K¨ahler 形式的 $\varepsilon > 0$，轨形版本的 Uhlenbeck–Yau 定理表明，存在 $\omega_\varepsilon-$ Hermitian–Einstein 度量。特别地，关于 ω_ε 的 E 满足 Bogomolov 不等式。由于 ω_ε 与 ω 属于同一个奇异上同调类，关于 ω 的 E 也满足 Bogomolov 不等式。

□

3 紧复轨形上的正则化

本节给出紧致复轨形上 Demailly 正则化的变体。

我们从用轨形光滑形式对几乎正的轨形流进行正则化开始。设 X 是一个紧复轨形。我们可以定义指数映射的纤维全纯部分

$$\text{exph} : T_X \to X$$

如 [Dem22] 中所述。我们简要回顾这一构造。设 h 是 X 上的（实解析）Hermitian 轨形度量。（例如，可以通过将 X 视为实解析轨形来证明其存在

如 [Kan13] 所示。）考虑度量 h 的陈联络所关联的指数映射（关于紧轨形上指数映射的定义，参见 [CR02] ）。它是 T_X 与 X 之间的实解析轨形态射。我们定义指数映射的纤维全纯部分 exph，它在 T_X 的零截面的一个管状邻域上唯一确定。

Now 如 [Dem94], 中所示，在轨形的背景下，我们有以下正则化定理。

定理5. 设 T 是紧复轨形 X 上的闭几乎正 (1, 1)– 轨形流，且 α 是与 T 属于同一上同调类的光滑实 (1, 1)– 轨形形式，即 $T = \alpha + i\partial\overline{\partial}\Psi$，其中 Ψ 是几乎拟次调和轨形函数（即在局部分歧光滑覆盖上几乎拟次调和）。设 γ 是连续实 (1, 1)– 轨形形式，满足 $T \geq \gamma$。假设 T_X 配备了光滑 Hermitian 轨形度量 ω，使得轨形空间切尔恩曲率形式 $\Theta(T_X)$ 满足

$$(\Theta(T_X) + u \otimes \mathrm{Id}_{T_X})(\theta \otimes \xi, \theta \otimes \xi) \geq 0, \forall \theta, \xi \in T_X \text{ with } \langle \theta, \xi \rangle = 0,$$

对于某个定义在 X 上的连续非负 (1,1)– 轨形形式 u 。那么存在一族闭的几乎正 (1,1)-轨形形式 $T_\varepsilon = \alpha + i\partial\overline{\partial}\psi_\varepsilon$，使得 ψ_ε、$\forall \varepsilon \in]0、\varepsilon_0[$ 在 X 上轨形光滑，随 ε 增大，并在 ε 趋于 0 时收敛到 Ψ （特别地， T_ε 轨形光滑，并在 X 上弱收敛到 T ），且满足

(i) $T_\varepsilon \geq \gamma - \lambda_\varepsilon u - \delta_\varepsilon \omega$ 其中:
(ii) $\lambda_\varepsilon(x)$ 是定义在 X 上的连续函数递增族，使得在每一点都有 $\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon(x) = \nu(T, x)$（ T 在 x 处的勒隆数，定义于局部分歧光滑覆盖上），
(iii) δ_ε 是正常数递增族，使得 $\lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon = 0$。

另一方面，我们有以下奇异性衰减过程。对于每个 $c > 0$，存在一族闭的几乎正的 (1,1)-轨形流 $T_{c,\ \varepsilon} = \alpha + i\partial\overline{\partial}\psi_{c,\ \varepsilon}, \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$，使得 $\psi_{c,\ \varepsilon}$ 在 $X \setminus E_c(T)$ 上是轨形光滑的，关于 ε 递增，并且当 ε 趋于 0 时收敛到 Ψ （特别地，流 $T_{c,\ \varepsilon}$ 在 $X \setminus E_c(T)$ 上是轨形光滑的，并在 X 上弱收敛到 T ），且满足

(i) $T_{c,\varepsilon} \geq \gamma - \min(\lambda_\varepsilon, c)u - \delta_\varepsilon\omega$ 其中：(ii) $\lambda_\varepsilon(x)$ 是定义在 X 上的连续函数递增族，满足 $\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon(x) = \nu(T, x)$；(iii) δ_ε 是正常数递增族，满足 $\lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon = 0$；(iv) $\nu(T_{c,\varepsilon}, x) = (\nu(T, x) - c)_+$ 在每一点 $x \in X$ 处。

证明。取一个截断函数 $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，其为 C^∞ 类，并满足 $\chi(t) > 0$ 对 $t < 1$， $\chi(t) = 0$ 对于 $t \geq 1$， $\int_{v\in\mathbb{C}^n} \chi(|v|^2) d\lambda(v) = 1$。

将 Ψ 的正则化定义为

$$\psi_\varepsilon(z) := \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int_{\xi \in T_{X,z}} \Psi(\exp(z, \xi))\chi(\frac{|\xi|^2}{\varepsilon^2}) d\lambda(\xi)$$

当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，该定义是良定的。

采用与 [Dem94] 中定理 4.1 的证明相同的细致计算，即可得到第一个结果。奇异性衰减过程与 [Dem94] 中定理 6.1 的证明相同，并遵循[Kis79] 的思路。

□

We 也可以通过具有解析奇异性的流进行正则化，如下所示 s.

定理 6. 设 φ 是紧复轨形 X 上的几乎拟次调和轨形函数，且对某个连续 (1,1) 轨形形式 γ，有 $i\partial\overline{\partial}\varphi \geq \gamma$。则存在一列几乎拟次调和轨形函数 φ_m，使得 φ_m （在局部分歧光滑覆盖上）具有与全纯函数平方和的对数相同的奇点；并存在一个递减且收敛到 0 的序列 $\varepsilon_m > 0$，使得

(i) $\varphi(x) \leq \varphi_m(x) \leq \sup_{|\xi-x|<r} \varphi(\xi) + C(|\log r|/m + r + \varepsilon_m)$，其中相对于覆盖 X 的分歧光滑坐标开集。特别地， φ_m 逐点并在 $L^1(X)$ 中收敛到 φ ，并且
(ii) $\nu(\varphi, x) - \frac{n}{m} \leq \nu(\varphi_m, x) \leq \nu(\varphi, x)$，对每个 $x \in X$ 均成立；(iii) 对某个固定的光滑厄米轨形度量 ω，有 $i\partial\overline{\partial}\varphi_m \geq \gamma - \varepsilon_m\omega$ 。

证明。该构造与流形情形类似，如[Dem92]中的命题 3.9 所示。由于该构造并非典范的，因此需要进行一些修改，以确保

逼近函数在有限群的局部作用下保持不变。我们概述该构造，而性质的验证与流形情形几乎完全相同，故略去。

我们选取 X 的一个有限覆盖 (W_ν/G_ν)，其中包含开坐标图 W_ν 和有限群 $G_\nu \subset U(n)$。给定 $\delta > 0$，我们在每个 W_ν 中取一个极大点族，使得各点到边界 $\geq 3\delta$ 的（坐标）距离以及点与点之间的距离均为 $\geq \delta/2$。这样，当 $\delta > 0$ 足够小时，我们就得到 X 的一个有限覆盖：覆盖中的集合是半径为 δ 的开球 U_j' 在商映射下的像，并且同心球 U_j （半径为 2δ ）在相应的图卡 W_ν 中相对紧。注意， U_j' 或 U_j 不一定在局部作用下保持不变。由于 X 的拓扑局部上由商拓扑给出，小球的像在 X 中是开集。令 $\tau_j\colon U_j \to B(a_j, 2\delta)$ 为由 W_ν 的坐标给出的同构。

令 $\varepsilon(\delta)$ 为轨形形式 γ 在集合 U_j 上的连续模，使得 $\lim_{\delta\to 0}\varepsilon(\delta) = 0$，且对所有 $x, x' \in U_j$， $\gamma_x - \gamma_{x'} \leq 2\varepsilon(\delta)\omega_x$。我们将 γ_j 记为在 $B(a_j, 2\delta)$ 上具有常系数的 (1,1)阶轨形形式，使得 $\tau_j^*\gamma_j$ 在 $\tau_j^{-1}(a_j)$ 处与 $\gamma - \varepsilon(\delta)\omega$ 相一致。

我们在 $B(a_j, 2\delta)$ 上定义 $\varphi_j := \varphi \circ \tau_j^{-1}$，并令 q_j 为 $z - a_j$ 中唯一的齐次二次函数，使得在 $B(a_j, 2\delta)$ 上有 $i\partial\overline{\partial} q_j = \gamma_j$。最后，我们在 $B(a_j, 2\delta)$ 上定义 $\psi_j(z) = \varphi_j(z) - q_j(z)$。取拟次调和函数 ψ_j 的伯格曼逼近$\psi_{j,m}$。注意，对于任意 $g \in G_\nu$（满足 $U_j \subset W_\nu$）， $g^*(\psi_{j,m} \circ \tau_j)$ 是 $g^*(\psi_j \circ \tau_j)$ 的伯格曼逼近。特别地， $w_{j,m} := (\psi_{j,m} + q_j) \circ \tau_j$ 在 $\cap_{g\in G_\nu'} gU_j$ 上的 G_ν 的任意子群 G_ν' 作用下保持不变。因此， $w_{j,m}$ 下降为 U_j 的商空间上的函数（即 $(\cup_{g\in G_\nu} gU_j)/G_\nu$ ）。

设 $U_j' \subset\subset U_j'' \subset\subset U_j$为半径分别为 δ、1.5δ、2δ的同心球。与流形情形的证明几乎完全相同，我们可知存在常数 $C_{j,k}$ ，它们与 m 和 δ无关，使得几乎拟次调和函数满足

$$|w_{j,m} - w_{k,m}| \leq C_{j,k}(\log\delta^{-1} + m\varepsilon(\delta)\delta^2)$$

在 U_j''的商空间与 U_k''的商空间的交集上。

为拼接出一个整体的几乎拟次调和轨形函数，取 θ_j 个支集包含于 $\cup_{g\in G_\nu} gU_j''$中的光滑非负函数，使得它们在 $\cup_{g\in G_\nu} gU_j''$上满足 $\theta_j \leq 1$，并且在 U_j'上满足 $\theta_j = 1$；这些函数在G_ν–作用下保持不变。定义

$$\tilde{w}_{j,m}(x) = w_{j,m}(x) + 2m(\frac{C_1}{m} + C_3\varepsilon(\delta)\sup_{g\in G_\nu, x\in g^{-1}U_j}(\delta^2/2 - |(\tau_j(g\cdot x) - a_j)|^2)$$

当 C_3 充分大且 $C_1 > 0$ 满足 $\psi_{j,m} \geq \psi_j - \frac{C_1}{m}$时。注意，$(\delta^2/2 - |\tau_j(x) - a_j|^2)$在 U_j的边界上取到严格最小值。因此，局部而言，上确界总是有限个几乎拟次调和函数的上确界，故其本身也是几乎拟次调和函数。由于 $\tilde{w}_{j,m}$ 定义在 U_j上且保持不变，因此也可将其视为定义在 $(\cup_{g\in G_\nu} gU_j)/G_\nu$上的函数。注意，对于$x \in \cup_{g\in G_\nu} gU_j'' \setminus \cup_{g\in G_\nu} gU_j'$,

$$\tilde{w}_{j,m}(x) \leq \sup_{k\neq j, x\in U_k'} \tilde{w}_{k,m}(x)$$

沿用相同的证明推导该不等式，不对 $g \in G_\nu$ 取上确界，其中 [见 Dem92]。还需注意，形式 gU_j 的重叠球的最大数量 N ，不超过重叠球的最大数量 U_j 乘以 G_ν的最大基数。

容易验证，Dem92] 中的引理 3.5 适用于轨形情形。定义

$$\varphi_m := \frac{1}{2m}\log(\sum_j \theta_j^2 e^{\tilde{w}_{j,m}})$$

这是一个几乎拟次调和轨形函数，并给出了该逼近。 □

此外，我们还有如下等奇异逼近，与 [DPS01]中的结果相同。证明与定理 6 的证明类似。

定理 7. 设 φ 是紧复轨形 X 上的一个几乎拟次调和轨形函数，满足 $i\partial\overline{\partial}\varphi \geq \gamma$ ，其中 γ是某个连续 (1,1) 轨形形式。则存在一列几乎拟次调和轨形函数 φ_m ，使得 $\varphi = \lim_{m\to\infty}\varphi_m$ ，并且

(i) φ_m 在解析集 $Z_m \subset X$的补集 $X \setminus Z_m$ 上是轨形光滑的；

(ii) φ_m 是一个递减序列，且 $Z_m \subset Z_{m+1}$ 对所有 m均成立；(iii) 对每个 m， $\int_X($ $e^{-2\varphi}-e^{-2\varphi_m})dV_\omega$ 均有限，并且当 $m\to\infty$时收敛到 0；(iv) 对局部分歧光滑覆盖上的所有 m， “等奇异性” $\mathcal{I}(\varphi_m)=\mathcal{I}(\varphi)$；(v) $i\partial\overline{\partial}\varphi_m\geq\gamma-\epsilon_m\omega$，其中 $\lim_{m\to\infty}\epsilon_m=0$。

因此，我们还得到紧致 K¨ahler 轨形上伪有效轨形线丛的硬 Lefschetz 定理，参见 [DPS01]。

4 强伪有效轨形向量丛

In t本节将 [Wu22] 的结果推广到紧致 K¨ahler 轨形的情形 .

在光滑流形上伪有效向量丛的定义中，对典范线丛上的近似奇异度量还附加了一项条件。我们不禁要问，能否直接对典范线丛上的某个正奇异度量附加这项条件？例如，设 h 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ 上的一个正奇异度量，我们能否要求奇异集 $\{h=\infty\}$ 在 X 中的投影是一个（完备）多极集？然而，正如下文所示，这类条件在函子意义下的表现并不好。特别是，正如下面的例 8 所示，（完备）多极集在适当态射下的像未必仍是（完备）多极集。注意，根据 Remmert 适当映射定理，闭解析集在适当态射下的像总是（闭）解析集。奇异集 $\{h=\infty\}$ 在 X 中的投影可能非常复杂，从而妨碍 Skoda-El Mir 型延拓定理的应用。

回顾一下，复流形 X 的子集 F 称为多极集，如果对每个点 $z\in F$，都存在一个多重次调和函数 $u, u\not\equiv-\infty$，定义在 z 的开邻域 U 上，使得 $F\cap U\subset\{u=-\infty\}$。复流形 X 的子集 F 称为完全多极集，如果存在一个非恒定的准多重次调和函数 u，定义在 X 上，使得 $F=\{u=-\infty\}$。根据 [Col90], 的结果，当 F 是闭集时，这一定义等价于以下条件：对每个点 $z\in F$，都存在一个多重次调和函数 $u, u\not\equiv-\infty$，定义在 z 的开邻域U 上，使得 $F\cap U=\{u=-\infty\}$ （即完全局部多极）。事实上，他们证明了以下引理。

引理 3.（引理 *1, [Col90]*）设 X 是一个复空间， $A\subset X$ 是一个闭完全局部多极集。那么 A 可由 $\{U_i,\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 定义，其中 U_i 在 X中开且相对紧，$\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$局部有限。存在 $U_i''\Subset U_i'\Subset U_i\Subset X$使得 $X=\cup_i U_i''$， $\varphi_i\colon U_i\to[-\infty,\infty[$是多重次调和函数，

$$A\cap U_i=\{\varphi_i=-\infty\},$$

$\exp(\varphi_i)$连续， φ_i在 A之外光滑，且 $\varphi_i-\varphi_j$在 $U_i'\cap U_j'\setminus A$上有界。

由于 $\varphi_i-\varphi_j$在 $U_i'\cap U_j'\setminus A$上有界，我们可以选取 $p_i\in C_c^\infty(U_i')$，使得

$$\varphi_i+p_i<\varphi_j+p_j$$

在 $\partial U_i'\cap U_j''\setminus A$上且 $p_i\geq0$。特别地，

$$\psi(z):=\max\{\varphi_i(z)+p_i(z);z\in U_i'\}$$

局部上，它是有限个拟多重次调和函数的最大值，因此也是拟多重次调和函数。注意， A 是 ψ的极点集。

注意，多极集在适当态射下的像未必是多极集。例如，设 Z 是 $\mathbb{P}^1$中的非多极集。考虑 $A:=Z\times\{0\}\subset\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$。由于$A\subset\mathbb{P}^1\times\{0\}$， A是多极集。然而，将 A通过 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$到其第一分量的投影取像，所得集合并非多极集。正如 Demailly 向作者推荐的下例所示，即使将条件“多极”改为“完全多极”，这一说法仍然不成立。

例 8。在本例中，我们构造一个完全多极子集 $A\subset\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$，使得 A 在投影到第一分量后的像为 $\mathbb{Q}\subset\mathbb{C}\subset\mathbb{P}^1$。注意，在 $\mathbb{C}$中，多极集的可数并 $\mathbb{Q}$ 仍是多极集。另一方面， $\mathbb{Q}$ 并非完全多极。否则，存在 $\mathbb{P}^1$ 上的一个 K¨ahler 形式 ω，以及 $\mathbb{P}^1$ 上的一个拟多重次调和函数 φ，使得

$\mathbb{Q}=\{\varphi=-\infty\}$ 和 $\omega+i\partial\overline{\partial}\varphi\geq 0$ 在流的意义下成立。特别地，在 $\mathbb{C}$ 上，存在某个 $\psi\in C^\infty(\mathbb{C})$，使得 $\omega|_{\mathbb{C}}=i\partial\overline{\partial}\psi$，并且 $\varphi+\psi$ 是 $\mathbb{C}$ 上极点集为 $\mathbb{Q}$ 的拟次调和函数。因此，$\mathbb{Q}$ 应当是 $\mathbb{C}$ 中的一个 G_δ 子集（即，对于 $\mathbb{C}$ 中的开集 V_j，有 $\mathbb{Q}=\cap_{j\in\mathbb{N}}V_j$）。注意，$\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{C}$ 中稠密，在所有 V_j 中也稠密。因此我们有

$$\emptyset=\mathbb{Q}\cap(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Q})=\cap_{j\in\mathbb{N}}V_j\cap\cap_{q\in\mathbb{Q}}\mathbb{C}\setminus\{q\}$$

这与贝尔纲定理相矛盾。

定义

$$A:=\cup_{a\in\mathbb{N}^*,b\in\mathbb{Z}}\{z_{a,b}=(b/a,a)\}\subset\mathbb{C}^2\subset\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1.$$

对任意 $z\in\mathbb{C}^2$ 定义

$$\delta(z):=\inf_{z\neq z_{a,b}}\log|z-z_{a,b}|^2$$

它在 $\mathbb{C}^2\setminus A$ 上不是无穷的，这意味着 A 在 $\mathbb{C}^2$ 中是离散的。

考虑一个序列 $a_{a,b}>0$，使得 $\sum_{a,b}a_{a,b}<\infty$，这些将在稍后选取。考虑

$$\varphi'(z):=\sum_{a,b}a_{a,b}(\log|z-z_{a,b}|^2-\log(1+|z|^2)).$$

注意，对任意 $z\notin A$，$\varphi'(z)\geq\sum_{a,b}a_{a,b}(\delta(z)-\log(1+|z|^2))\neq-\infty$，以及对任意 $z_{a,b}$，$\varphi'(z_{a,b})=-\infty$。特别地，$A\cap\mathbb{C}^2=\{\varphi'=-\infty\}$。考虑

$$C_{a,b}=\sup_{z\in\mathbb{C}^2}(\log|z-z_{a,b}|^2-\log(1+|z|^2))<\infty.$$

通过适当地选择 $a_{a,\ b}>0$，我们可以假设 $\sum_{a,\ b}a_{a,\ b}C_{a,\ b}<\infty$。特别地，$\varphi'$ 在 $\mathbb{C}^2$ 上有一致的上界，并可延拓为定义在 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 上、极点集为 A 的拟多重次调和函数。

现在我们将数值平坦向量丛的结构定理（定理 1.18[DPS94]）推广到紧致 K¨ahler 轨形上。除了利用推论 2.6 [DPS94]估计第二陈类之外，证明与原证明几乎完全相同。请注意，推论 2.6 [DPS94] 的证明通过奇点消解将问题归约到光滑情形；但在轨形情形下，这一点并非易事。换言之，我们是否总能通过轨形态射对轨形进行奇点消解（使得轨形向量丛的拉回总是定义良好的）？ 我们需要以下引理。

引理 4. 设 E 是紧复轨形上的 nef 轨形向量丛。设 $\mathcal{Q}$ 是 E 的秩为 r的商轨形层。则 $c_1(\mathcal{Q})$是伪有效的（即它包含一个正的轨形 (1, 1)–流）。

证明. 注意，扭结轨形层的行列式轨形线丛具有一个全局非平凡截面，这特别意味着其第一陈类是伪有效的。因此，不妨设 $\mathcal{Q}$ 是无扭的；在这种情况下，在局部分歧光滑覆盖上，$\det(\mathcal{Q})=(\wedge^r\mathcal{Q})^{**}$。

满射 $\wedge^rE\to\wedge^r\mathcal{Q}$ 诱导出一个单射 $\det(\mathcal{Q})^*\to\wedge^rE^*$。特别地，$E$ 上的光滑度量 h_ε 在 $\det(\mathcal{Q})$ 上诱导出一个可能的奇异度量，其曲率局部表示为$T_\varepsilon:=i\partial\overline{\partial}\log|s|^2_{\wedge^rh^*_\varepsilon}$，其中 s 是 $\det(\mathcal{Q})^*$的局部生成元。由于 E 是数值有效的，$T_\varepsilon\geq-\varepsilon\omega$（相对于某个参考厄米度量 ω）在流的意义下成立。弱紧性意味着$c_1(\det(\mathcal{Q}))$是伪有效的。 □

对于紧致复轨形，我们仍有以下计算结果，它可视为交理论的直接推论，并且在形式层面上仍然成立，无需过渡到上同调类：对于每个 $k\in\mathbb{N}$

$$\pi_*\left(\frac{i}{2\pi}\Theta(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1),h)\right)^{r+k}=s_k(E,h)$$

对于任意具有 π 的光滑轨形度量 h（定义在 E 上）：$\mathbb{P}(E)\to X$。注意，塞格雷类可以用陈类表示，而陈类可以由陈形式表示

这些陈形式由曲率张量导出。对于流形情形，例如可参阅论文[Div16], [Gul12] 和 [Mou04]。因此，如果 E 是紧致 K¨ahler 轨形 (X,ω) 上的 nef 轨形向量丛，

$$\pi_*\left(\frac{i}{2\pi}\Theta(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1),h_\varepsilon)+\varepsilon\pi^*\omega\right)^{r+2}=s_2(E,h_\varepsilon)+c_1(E,h_\varepsilon)\wedge(r+2)\varepsilon\omega+\frac{(r+2)(r+1)}{2}\varepsilon^2\omega^2$$

是正的轨形光滑形式，这意味着在 $s_2(E)$ 上存在正轨形流。特别地，我们有陈数估计

$$c_2(E)\cdot\omega^{n-2}\leq c_1^2(E)\cdot\omega^{n-2}.$$

现在我们可以给出定理 1.18 [DPS94] 在轨形情形下的类似结论。

定理 8. 假设 X 是一个紧致 K¨ahler 轨形空间。那么， E 上的轨形向量丛 X 数值平坦（即 E 和 E^* 都是数值有效的），当且仅当 E 具有一个滤过

$$\{0\}=E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_p=E$$

其子对象为轨形向量子丛，且商空间 E_k/E_{k-1} 是厄米特平坦轨形向量丛。

证明. 证明与 [CCM21] 和 [HIM22] 中的证明类似。证明通过考察 E 的 Harder-Narasimhan 滤过，并证明所有分次部分均为厄米平坦向量丛而得出。为方便读者，我们在此概述论证过程，并作必要的修改。

考虑相对于 ω 的 E 的 Harder-Narasimhan 滤过，记为

$$\mathcal{F}_0=0\to\mathcal{F}_1\to\mathcal{F}_2\to\cdots\to\mathcal{F}_m:=E$$

其中，对每个 i 和 $\mu_1\geq\mu_2\geq\cdots\geq\mu_m$， $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ 都是 ω-稳定的； $\mu_j=\mu_\omega(\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{j-1})$ 表示 $\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{j-1}$ 相对于 ω 的斜率。现在考虑相干轨形子层 $\mathcal{S}=\mathcal{F}_{m-1}$。注意，根据构造，必要时取双对偶（在每个局部分歧光滑覆盖上）可使 $\mathcal{S}$ 自反，因为这会保持秩、第一陈类和斜率不变。于是得到短正合列

$$0\to\mathcal{S}\to E\to\mathcal{Q}\to 0.$$

特别地，根据引理 4，其第一陈类 $c_1(\mathcal{Q})$ 是伪有效的。另一方面，我们有

$$0=c_1(E)=c_1(\mathcal{S})+c_1(\mathcal{Q})$$

由假设可知。因此

$$\int_X c_1(\mathcal{Q})\wedge\omega^{n-1}=-\int_X c_1(\mathcal{S})\wedge\omega^{n-1}\leq 0,$$

且 $c_1(\mathcal{Q})=c_1(\mathcal{S})=0$.

我们断言， $\mathcal{S}$ 是 E 的轨形向量子丛，且态射 $\mathcal{S}\to E$ 是轨形丛态射；为此，我们应用 [DPS 94] 的推论 1.20，并证明 $\det(\mathcal{Q}^*)\to\bigwedge^p E^*$ 是单射轨形丛态射（这在局部成立），其中 p 是 $\mathcal{Q}$ 的秩。这对应于整体截面 $\tau\in H^0(X,\bigwedge^p E^*\otimes\det(\mathcal{Q}^{**}))$。因此，根据 [DPS94] 的命题 1.16， τ 不可能在 X 的任何点处消失；该命题的证明在轨形情形下完全相同。至此，断言得证。特别地， $\mathcal{Q}$ 是轨形向量丛。

令 s 为 $\mathcal{S}$ 的秩，它必须严格小于 E 的秩 r。由于 E 是数值有效的，且 $\det\mathcal{Q}^*$ 数值平凡，我们推知 $\mathcal{S}$ 是 nef 轨形向量丛。

根据关于 Segre 形式的讨论，我们有

$$c_2(\mathcal{Q})\cdot\omega^{n-2}\leq c_1(\mathcal{Q})^2\cdot\omega^{n-2}=0.$$

另一方面，Bogomolov 不等式（命题 6）表明

$$\int_X c_2(\mathcal{Q})\wedge\omega^{n-2}\geq 0.$$

因此，轨形向量丛 $\mathcal{Q}$ 实际上是一个厄米特平坦轨形向量丛 .

注意， hat $\mathcal{S}$ 也是数值平坦轨形向量丛。对上述论证进行归纳 即可完成证明。 □

T [Wu22] 中的主要技术引理也可以推广到轨形情形。

定理9. 设 $\pi : X \to Y$ 是紧致 K¨ahler 轨形之间相对维数为 $r-1$的轨形浸没。设 T是上同调类$\{\alpha\} \in H^{1,1}(X,\mathbb{R})$中的闭正(1, 1)–轨形流，满足 T 具有解析奇异性（即在每个局部分歧光滑覆盖中具有解析奇异性），并且在 $X \setminus \pi^{-1}(Z)$ 上轨形光滑，其中 Z 是余维至少为 k的闭解析集。假设对于任意 $y \in Y$，存在 U 的一个开邻域 y 以及定义在 X 上的准拟 plurisubharmonic 轨形函数 ψ，使得 $\alpha + i\partial\overline{\partial}\psi \geq 0$ 在$\pi^{-1}(U)$上以流的意义成立，并且 ψ 在某个余维至少为 $k+r$ 的闭解析集之外轨形光滑。那么，在上同调类 $\pi_*\alpha^{r+k-1}$中存在一个闭正轨形流。

证明。除一处之外，证明几乎完全相同。在证明弱极限的唯一性时，我们利用奇点消解将解析奇异性约化为除子情形。由于唯一性本质上是局部的，我们可以对某个局部分歧光滑覆盖应用相同的证明（并对其进行奇点消解）。 □

利用上一节中的勒隆数估计和轨形版本的光滑形式正则化，我们得到以下结果。

推论2. 设 E 是一个秩为 r 的强伪有效轨形向量丛，定义在紧致 K¨ahler 轨形 (X,ω) 上，并满足 $c_1(E) = 0$。那么 E 是一个数值有效（因而数值平坦）的轨形向量丛。

作为一个几何应用，我们得到 [BDPP13] 中定理 7.7 的以下推广。

推论3. 对于紧致 K¨ahler 轨形，若 $c_1(X) = 0$ 且 T_X 为强伪有效，则 X 的一个有限拟 ´etale 覆盖是一个复环面。特别地，不可约辛轨形或 Calabi-Yau 轨形不具有强伪有效轨形切丛或轨形余切丛。

证明。根据 [Cam04]，中给出的 Beauville-Bogomolov 定理的轨形版本，经过有限次˜ ˜轨形覆盖 $\pi : X \to X$, X 是 $\prod T_i \times \prod S_j \times \prod Y_k$ 的乘积，其中 T_i 是复环面， S_j 是˜Calabi-Yau 轨形，而 Y_k 是不可约辛轨形。由于根据推论 2， X的切丛数值平坦，因此直和中所有分量的轨形切丛都数值平坦。特别地，根据定理 8，所有分量的第二陈类均为零。根据表示论，Calabi-Yau 分量或不可约辛分量的轨形切丛是稳定的（也可由存在轨形 K¨ahler-Einstein 度量得出）。因此，Bogomolov 不等式取等号，这意味着 Calabi-Yau 分量或不可约辛分量的轨形切丛是轨形射影平坦的。由于 Calabi-Yau 分量或不可约辛分量的第一陈类为零，其轨形切丛实际上是轨形厄米平坦的。特别地，Calabi-Yau 分量或不可约辛分量的限制全纯群是平凡的。换言之，只有复环面分量。

□

根据 [LN19], 的研究，我们实际上可以证明，不可约辛轨形或 Calabi-Yau 轨形X 不允许存在强伪有效轨形向量丛 $\wedge^r T_X$，也不允许存在 $\wedge^r T_X^*$ 任意一个 $0 < r <$ 维数为$_{\mathbb{C}}(X)$的这类丛。在射影奇异情形下，更强的结果可见 [HP19]的定理 1.6。

下面的例子表明，将 [BDPP13] 推广到射影轨形范畴的一种可能方式并不成立。更确切地说，存在一个带有商奇点的有理射影簇 X，其轨形典范线丛是伪有效的。

例 9.（对数恩里克斯曲面， [Zha91], [Zha93]）

对数恩里克斯曲面在 [Zha91] 中定义如下。若正规射影代数曲面 X 满足

1. 它仅有商奇点，且奇异部分非空；

2. NK_X对某个正整数 N而言是平凡的卡蒂埃除子；

3. $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$。

由于 X 是具有商奇点的射影空间， X 是紧复轨形。然而， X 不一定具有典范奇点。由于 K_X 在正则部分上局部自由，且与轨形典范线丛一致，条件 2 蕴含轨形典范线丛的轨形第一陈类在 $H^2(X, \mathbb{R}) \simeq H^2(X_{\mathrm{reg}}, \mathbb{R})$ 中是平凡的，因而特别是伪有效的。

另一方面，根据 [Zha91], 的引理 3.4，若 K_X 不是卡蒂埃而 $2K_X$ 是卡蒂埃，则 X 是有理的。从现在起，我们将始终考虑这一特殊情形。注意， X 存在一个拟-´étale 覆盖 Y（在 [Zha91] 中称为典范覆盖），其 $K_Y = \mathcal{O}_Y$ 至多有普通双点。覆盖 Y 给出了 [HP19] 所述的 Beauville-Bogomolov 分解，具体解释见下文 ˜。考虑 $\pi: Y \to Y$ 是 Y 的奇点极小解消。由于 Y 至多有 ˜ 普通双点， $K_{\tilde{Y}}$ 是平凡的。特别地， Y 要么是复环面，要么是 K3 曲面。根据 ˜3. 1 [Zha91] 的引理， Y 是 K3 曲面。下面我们证明，按照 [HP19] 的定义， Y 是不可约辛或不可约 Calabi-Yau；这与曲面的情形一致。回顾一下，以下定义见于 [BGL20]。设 X 是一个具有有理奇点、维数为 $n \geq 2$ 的正规紧致 K¨ahler 复空间。若对于所有拟-´étale 覆盖 $q: X' \to X$，代数 $H^0(X', \Omega_{X'}^{[\bullet]})$ 都由一个全纯辛形式 $\tilde{\sigma} \in H^0(X', \Omega_{X'}^{[2]})$ 生成，则称 X 为不可约全纯辛（IHS）。若对于所有拟-´étale 覆盖 $q: X' \to X$，代数 $H^0(X', \Omega_{X'}^{[\bullet]})$ 都由一个次数为 $\dim X$ 的处处不消失的反身形式生成，则称 X 为不可约 Calabi–Yau（ICY）。回顾一下，若 X 是一个正规复空间，则反身 p-形式层 $\Omega_X^{[p]}$ 可定义为从正则轨 $j: X_{\mathrm{reg}} \to X$ 推前 $j_*\Omega^p_{X_{\mathrm{reg}}}$，该层是自反的。

现在我们证明关于进一步准-´étale 覆盖的条件。设 Z 是 Y的一个准-´étale 覆盖。由于 Y 是平凡的，因此 K_Z 也是平凡的。于是， Z 的极小解消要么是 K3 曲面，要么是复环面。在后一种情况下， Z 本身就是极小解消，因为复环面不含任何有理曲线。我们断言 Z 不是复环面。否则，根据 [CGGN22], 的引理 2.8，令 $Z' \to Z \to Y$为 $Z \to Y$的伽罗瓦覆盖。根据构造， $Z' \to Z$ 是准-´étale 的。由于 Z 光滑， $Z' \to Z$ 是 ´étale 的，且 Z' 是复环面。特别地， Y 是复环面关于某个有限群作用的商空间。根据 [Zha91] 的引理 3.1，并结合 Y 是复环面关于某个有限群作用的商空间这一假设，我们只能得到 A_1、 A_3、 A_5 这几种可能的奇点。我们分别用 N_1、 N_3、 N_5 表示奇点的个数。由于 Y 的极小解消是 K3 曲面，根据全纯 Lefschetz 不动点公式，我们有

$$\chi(\mathcal{O}_Y) = 2 = \frac{1}{12}(\frac{3}{2}N_1 + \frac{15}{4}N_3 + \frac{35}{6}N_5).$$

仅有的可能性是 $N_5 = 0, N_1 = 16, N_3 = 0$ 或 $N_5 = 0, N_1 = 11, N_3 = 2$ 或 $N_5 = 0, N_1 =$6, $N_3 = 4$。这与 [Zha91] 的推论 3.10 矛盾。

5 GAGA 的非等变版本

设 X 是一个带有有限群 L的（代数）作用的射影流形。设 E 是 X上的全纯 L–等变向量丛。由塞尔的 GAGA， 全纯态射$L \times \mathbb{P}(E \oplus \mathcal{O}_X) \to \mathbb{P}(E \oplus \mathcal{O}_X)$ 是某个代数态射的解析化，其中 L对 $\mathcal{O}_X$ 的作用是平凡的。特别地， E 是某个代数 L–等变向量丛的解析化。对于其他类型的 L，我们有以下由 Brion 告知我们的 GAGA 等变版本。

命题 7. (Brion) L

设 XL 是一个带有连通约化群 L 的（代数）作用的射影流形。设 E 是 X 上的全纯 $L-$ 等变向量丛。那么存在 L 的一个连通有限覆盖 L'，使得 E 是一个代数 $L'-$ 等变向量丛。

证明。回顾一下，全纯（分别地，代数）等变向量丛是由一个全纯（分别地，代数）向量丛以及将全纯（分别地，代数）作用 $L \times X \to X$提升 $L \times E \to E$到该向量丛上的作用所组成的一对对象，使得自然投影 $\pi: E \to X$具有等变性。特别地，该作用在每个纤维上都是线性的，这意味着对于任意 $t \in L$和任意 $x \in X$，将 t 在 E_x 上的作用限制到 $E_{t\cdot x}$ 后，是一个线性同构。

由于 X 是射影的，根据 Serre 的 GAGA，向量丛 E 是某个代数向量丛的解析化；为避免繁琐，我们仍将其记作 E。令 G 为 E 的代数自同构群，且其在每个纤维上都是线性的。根据 [BSU13] 的命题 6.3.2，可以证明 G 是一个局部代数群（即局部有限型）。存在一个自然态射 π_*，从 G 到 Aut(X)。（例如，π_* 由将 E 的自同构限制到 E 的零截面所诱导。）根据假设，对于任意 $t \in L$，t^*E 与 E 全纯同构。再次根据 Serre 的 GAGA，该同构是某个代数同构的解析化。特别地，对于任意 $t \in L$，存在一个在每个纤维上线性的 E 的代数自同构，使其在 π_* 下的像是由 t 在 X 上的作用所诱导的 X 的自同构。换言之，L 包含于 π_*的像中。

我们断言，存在一个连通约化代数子群 L' of G，使得在我们的情形中，限制 π_* on L' 是 L 的有限覆盖。由于 L' 是 G的子群，它将代数作用 $L' \times X \to X$ （由 $L' \to L$自然诱导）提升为 $L' \times E \to E$ 的代数作用，因此自然投影 $\pi\colon E \to X$ 是等变的。

现在我们证明这一断言。π_* 的核是（代数）向量丛 E 的自同构群（参见引理 6.3.1 [BSU13]）。由于 X 是紧的，E 的自同态丛的整体截面维数有限。这些整体截面构成一个伴随代数。令 e_i($1 \leq i \leq N$) 为这些整体截面的基。存在 $A_{ij}^k \in \mathbb{C}$ 使得 $e_i \circ e_j = \sum_k A_{ij}^k e_k$。于是 Ker($\pi_*$) 由 det($\sum_i A_{ij}^k a_i)_j^k \neq 0$ in $\mathbb{C}^N = \{(a_1, \cdots, a_N)\} \simeq H^0(X, \mathrm{End}(E))$ 定义。因此 Ker(π_*) 是一个连通仿射簇。

考虑 $H = \pi_*^{-1}(L) \subset G^\circ$，其中 G° 是包含单位元的 G 的连通分支。我们有一个代数群的正合列

$$0 \to \mathrm{Ker}(\pi_*) \to H \to L \to 0$$

这意味着 $H \to L$ 是一个 Ker(π_*)– 主丛。特别地，$H \to L$ 是仿射态射。由于 L 是仿射的，H 也同样是仿射的。此外，H 是连通的。因此，H 是一个连通线性代数群。

为继续证明该断言，我们开始证明 $L = (\mathbb{C}^*)^n$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立的情形（即 L 是代数环面）。在这种情形下，[Ste21] 证明了一个强于我们的命题的结果：若 X 是托里克的，且 E 是环面向量丛，则解析化给出了 X 上的代数托里克向量丛范畴与 X^{an} 上的全纯托里克向量丛范畴之间的范畴等价。请注意，这里我们并不假设 E 是托里克的（因为 X 上的作用不一定是托里克作用）。

设 T_H 是 H 的一个极大复环面。由 [Bo91], 的命题 11.14，$H \to L$ 在 T_H 上的限制也是满射。由 [Bo91], 的推论 8.3，将代数环面与其特征群相对应，可得代数环面与有限秩自由阿贝尔群之间存在双射的反变对应。满射 $T_H \to L$ 对应于特征群的包含关系 i： $X^*(L) \to X^*(T_H)$。设 $X^*(L)$ 的一组基为 $f_\alpha(1 \leq \alpha \leq r)$。用 $X^*(T_H)$ 中的元素 $g_\beta(1 \leq \beta \leq s)$ 补全 $(i(f_\alpha))_\alpha$，使得 $i(f_\alpha)$ g_β 构成 $X^*(T_H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 的一组线性基。设 Λ 是由 $i(f_\alpha)$ g_β 生成、以其为标准基的阿贝尔群。存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得 $X^*(T_H) \subset \frac{1}{N}\Lambda \subset X^*(T_H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$。设 $X^*(L')$ 是由标准基中前 r 个元素的 N 倍生成的阿贝尔群，并配备由投影到前 r 个分量诱导的自然映射 $X^*(T_H) \to X^*(L')$。那么，映射的复合 $X^*(L) \to X^*(T_H) \to X^*(L')$ 的余核有限。这对应于 T_H 的一个代数子环面 L'，使得 $L' \to T_H \to L$ 有限。

现在我们转向一般情形的证明。由 [Bo91], 的 11.22，存在 H 的一个 Levi 子群M，它是一个连通子群，使得 H 是 M 与 R_u的半直积；其中 H 是 H 的幺幂根基。由于 L 是约化的，$R_u(H)$ 的像包含于 $R_u(L)$ 中，而后者是平凡的。特别地，存在一个连通约化群之间的满射态射 $M \simeq H/R_u(H) \to L$，它诱导出一个李代数的满射。

设 T_L（分别为 T_M）是 L（分别为 M）的一个极大环面，使得 T_M 满射到 T_L。通过伴随表示，我们有李代数按特征子空间的分解

$$\mathrm{Lie}(M) = \mathrm{Lie}(T_M) \oplus \oplus_{\alpha \in \Phi(M)} \mathfrak{g}_{\alpha, M}$$

其中 Lie() 表示该群对应的李代数，而 $\mathfrak{g}_{\alpha,M} := \{\eta \in \mathfrak{g} | \mathrm{Ad}(t) \cdot \eta = \alpha(t)\eta, \forall t \in T_M\}$ 以及 $\Phi(M)$ 是根。我们对 L 也有类似的分解。该满射

李代数的满射意味着，对于任意 $\alpha \in \Phi(L)$，存在某个 $\phi(\alpha) \in \Phi(M)$，使得限制映射 Lie(M) $\to$ Lie(L) 在 $\mathfrak{g}_{\phi(\alpha)}$ 上是到 $\mathfrak{g}_\alpha$ 的同构。根据连通约化李群的结构（参见例如 [Sp98]），存在唯一的、由 T_M 规范化的闭连通幺幂子群 $U_{\phi(\alpha)} \subset M$，使得 Lie($U_{\phi(\alpha)}$) $= \mathfrak{g}_{\phi(\alpha)}$。设 T'_M 是在前一种情形中构造的 T_M 的一个代数子环面，且 $T'_M \to T_L$ 是有限的。令 L' 为由 T'_M 以及所有满足 $\alpha \in \Phi(L)$ 的 $U_{\phi(\alpha)}$ 所生成的 M 的子群。根据第 1 [章 91], 中的命题 2.2，李群 L' 也是闭的。Lie(L') $\to$ Lie(L) 的满射性意味着 $L' \to L$ 是满射。由维数关系可知，$L' \to L$ 是有限的。李群 L' 是连通的，因为生成它的所有群都是连通的。

最后，我们也可以作如下论证。由 14.2 [Bo91], $L = C(L) \cdot [L, L]$，其中 $C(L)$ 是包含在 L 中心内的极大代数环面，且 $C(L) \cap [L, L]$ 是有限的。注意，$[L, L]$是半单的，且 $L/C(L) \simeq [L, L]$。满射 $M \to L$ 意味着满射 $C(M) \to C(L)$,$[M, M] \to [L, L]$。令 $C'(M)$ 为前一种情形中构造的 $C(M)$ 的一个代数子环面，使得 $C'(M) \to C(L)$ 是有限的。令 Lie($[M, M]$) $\to$Lie($[L, L]$) 为诱导的李代数满射。将 Lie($[M, M]$)、Lie($[L, L]$) 分解为单李代数的直和。根据单李代数的定义，Lie($[M, M]$) 的任一单分量要么同构地映入 Lie($[L, L]$) 的某个单分量，要么映为 0。因此，存在 Lie($[M, M]$) 的一个子李代数，使得 Lie($[M, M]$) $\to$Lie($[L, L]$) 在其上的限制是一个同构。考虑该子李代数在 $[M, M]$ 中对应的李子群，并考虑由这个 $[M, M]$ 的李子群与 $C'(M)$ 生成的 M 的闭李子群。由此得到连通闭约化子群 L'。

□

注意，证明实际上表明了一个稍强的结果：设 X 是一个带有连通约化群 L 的（代数）作用的射影流形。设 E 是 X 上的一个全纯 $L-$ 不变向量丛（即，对于任意 $t \in L$、$t^*L \simeq L$）。那么存在 L 的一个连通有限覆盖 L'，使得 E 是一个代数 $L'-$ 等变向量丛。

备注 3。注意，L' 的构造先验地取决于向量丛 E。如果 E 的秩为 1，则可以选择 L' 使其独立于 E。根据 [Bri18] 的定理 5.2.1，在这种情况下，E 总是 L 不变的。此外，存在一个正整数 n，使得 $E^{\otimes n}$ 是 L 等变的；我们可以取 n 为 L 的有限阿贝尔皮卡群的指数。在我们的情形中，令 $[L, L]$ 为 $[L, L]$ 的万有覆盖。考虑 $L' := C(L) \times [L, L]$。由于代数环面或单连通半单李群的皮卡群是平凡的，L' 的皮卡群是平凡的。由于 $C(L)$ 包含于 L 的中心中，自然态射 $C(L) \to L$、$[L, L] \to [L, L] \to L$ 诱导出一个有限覆盖 $L' \to L$。特别地，对于任意线丛 E，根据 [Bri18] 的定理 5.2.1，E 总是 $L'-$ 等变的。注意，E 不一定是 $L-$ 等变的。例如，[Bri18] 的例 4.2.4 构造了这样一个例子。注意，Brion 的例子既不是全纯 $L-$ 等变的，也不是代数 $L-$ 等变的。一般而言，一个射影流形上的全纯 $L-$ 等变向量丛是否必然是代数 $L-$ 等变的，似乎尚不清楚。

注 4. 我们的结果可以改述如下。设 X 是一个带有连通约化群 L（代数）作用的射影流形。考虑以下两个范畴。范畴中的对象是 L' 上的全纯（分别为代数）$L'-$等变向量丛，其中 L' 是 L 的某个连通有限覆盖。L_1- 等变丛 E_1 与 L_2- 等变丛 E_2 之间的态射，是全纯（分别为代数）L_3-等变丛态射，其中 L_3 是 L_1 和 L_2 的某个共同有限覆盖，并且 E_1 和 E_2 上带有自然诱导作用。考虑解析化函子。那么我们的结果表明，这个函子是范畴等价。事实上，命题 7 蕴含解析化函子本质满。由 Serre 的 GAGA，解析化函子是满的；它忠实这一点也很容易验证。

最后，我们给出射影托里克簇的一个刻画。

命题 8. 设 X 是一个连通紧致 K¨ahler 流形。设 Aut°(X) 为自同构群的连通分支。设 $G \subset$Aut°(X) 为一个连通约化群。假设存在 $z \in X$，使得 $G \cdot z$ 开且稠密（即 X 是 $G-$拟齐性的）。假设 G 在 Alb(X) 上的作用是平凡的。

那么 X 是射影的。

证明。令 $F(X)$ 为 $X \times X$ 的 Douady空间中包含对角线的不可约分支。令 $F(X)_{\mathrm{red}}$ 为 $F(X)$ 的约化化。根据 Fujiki[Fu78] 的奠基性工作， $F(X)_{\mathrm{red}}$ 是 $\mathrm{Aut}^\circ(X)$ 上的亚纯结构。更准确地说， $F(X)_{\mathrm{red}}$ 是一个紧复空间，包含 $\mathrm{Aut}^\circ(X)$ 作为稠密开子集，并且 $\mathrm{Aut}^\circ(X)$ 的乘法和求逆可延拓为 $F(X)_{\mathrm{red}}$ 上的亚纯映射。

根据定理4.6 [BG19], , 群 G 在 $\mathrm{Alb}(X)$ 上的作用平凡，当且仅当 G 在 $F(X)_{\mathrm{red}}$ 中的闭包是紧的，并且包含 G，后者有一个稠密开集，使得 G 的乘法和求逆可延拓为定义在该闭包上的亚纯映射。

令 $B(X)$ 为 $\{\Gamma_f, f \in \mathrm{Aut}^\circ(X)\} \simeq \mathrm{Aut}^\circ(X)$ 的闭包，即 f 在 $X \times X$ 的 Barlet簇空间中的图 Γ_f。那么， $B(X)$ 是 $X \times X$ 的簇空间的一个不可约分支，而 $B(X) \setminus B^\circ(X)$ 是闭解析子集（参见命题 3.1 [BG19]）。

根据定理4.11 [BG19], , G 在 $B(X)$ 中的闭包是一个射影簇。从 Douady空间到簇空间的自然态射的限制，是对 G 在 $B(X)$ 中的闭包的修改。特别地， G 在 $F(X)_{\mathrm{red}}$ 中的闭包 $\overline{G}$ 有一个光滑射影双亚纯模型。

由命题 2。2 [Fu78], 该作用 $G \times X \to X$ 延拓为 $F(X)_{\mathrm{red}}$ times X中 G 闭包上的亚纯映射。考虑其图像 $\Gamma_{\overline{G} \times X \to X}$ 与$\overline{G} \times \{z\}$ （它是射影的）的交集到 X的投影。该投影的像包含轨道 $G \cdot z$。根据 Remmert 适当映射定理，该像是 X的闭解析子集。因此根据我们的假设，该像为 X。于是，作为从射影簇到其的满射态射的像， X 是 Moishezon。由于 X 也是 K¨ahler， X 是射影的。

□

注5。对于任意紧复流形，该陈述并不成立。例如，Cal- abi–Eckmann 流形 X 是 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ –齐性的（对于某些 m、 $n \geq 2$）。如果 $m \neq n$，则第 m–和第 n–个 Betti数为 1，因此它不是 $\mathcal{C}$类的流形。$\mathrm{Aut}^\circ(X)$ 在 Dolbeault上同调上的作用是平凡的，正如 Borel 的引理 9.3 [Hir66] 所示。

注 4.12 [BG19] 中询问了他们的结果对 $\mathcal{C}$ 类紧复流形是否成立。如果答案是肯定的，那么前一个命题也可以推广到 $\mathcal{C}$ 类紧复流形，并得出 X 是 Moishezon 的结论。

推论 4. 设 X 是一个连通紧 K¨ahler 流形，它是 $(\mathbb{C}^*)^n$–拟齐次的，且 $n = \dim_{\mathbb{C}}(X)$，其在开稠密集上的作用是 $(\mathbb{C}^*)^n$的乘法作用。那么X 是一个射影托里克簇。

证明。要应用前一个命题 8，只需证明 $(\mathbb{C}^*)^n$ 在 $\mathrm{Alb}(X)$ 上的作用是平凡的。注意，事后可知，任何射影光滑托里克簇都是单连通的（定理 12.1.10 [CLS11]）。特别地，第一贝蒂数为 0，根据 Hodge 分解，阿尔巴尼斯环面是平凡的。

令 $U = (\mathbb{C}^*)^n \cdot x$ 为开稠密轨道，并令 $\alpha\colon X \to \mathrm{Alb}(X)$ 为阿尔巴尼斯映射。由于 X 也是 $\mathrm{Aut}^\circ(X)$–拟齐次的，根据备注 4 [Wu21b]， X 的阿尔巴尼斯映射是局部平凡的。特别地， $\alpha^{-1}(\alpha(x))$ 是一个连通的紧复流形。因此， $\alpha^{-1}(\alpha(x)) \cap (X \setminus U)$ 是 $\alpha^{-1}(\alpha(x))$ 的真闭解析子集。特别地， $\alpha^{-1}(\alpha(x)) \cap U$ 是连通的。

反设在 $\mathrm{Alb}(X)$ 上的作用并不平凡。特别地，阿尔巴尼斯环面的维数为正。考虑复合映射 $f\colon (\mathbb{C}^*)^n \to X \to \mathrm{Alb}(X)$，它是 $(\mathbb{C}^*)^n$ – 等变的。因此， f 不是常值映射。于是 $f^{-1}(f(1))$ 是 $(\mathbb{C}^*)^n$ 的真闭子群。 $\mathbb{C}^*$ 的每个闭子群要么是平凡子群，要么是 $\mathbb{C}^*$，要么是离散的。由连通性， $f^{-1}(f(1))$ 同构于 $(\mathbb{C}^*)^d$，其中某个 d。由稠密性， d 等于阿尔巴尼斯映射的纤维维数。

$(\mathbb{C}^*)^n / f^{-1}(f(1))$ 在 $\mathrm{Alb}(X)$ 上的诱导作用是有效的，因此诱导的群态射 $(\mathbb{C}^*)^n / f^{-1}(f(1)) \to \mathrm{Aut}^\circ(\mathrm{Alb}(X))$ 是单射。由于两边都是连通的且维数相同，所以这是一个同构。因此两边都是平凡的。这与 $\mathrm{Alb}(X)$ 的维数矛盾。

□

注意，根据 Sumihiro 的定理 [Sum74], , 对于一个连通射影流形，若它是 $(\mathbb{C}^*)^n$–拟齐性的，且 $n = \dim_{\mathbb{C}}(X)$，并且在开稠密集上的作用是 $(\mathbb{C}^*)^n$的乘法作用，那么它必然由一个扇构造而成（参见推论 3.8 [CLS11]）。

参考文献

[BCGP12] Ingrid Bauer、Fabrizio Catanese、Fritz Grunewald 和 Roberto Pignatelli，《曲线乘积的商：具有 $p_g = 0$ 的新曲面及其基本群》。《美国数学杂志》134（2012年），第4期，993–1049。[BDPP13] S´ébastien Boucksom、Jean-Pierre Demailly、Mihai P˘aun 和 Thomas Peternell，《紧致 K¨ahler 流形的伪有效锥与负 Kodaira 维数簇》，arXiv:math/0405285，《代数几何杂志》22（2013年），第2期，201–248。[BEG13] S´ébastien Boucksom、Philippe Eyssidieux 和 Vincent Guedj，《K¨ahler-Ricci 流简介》，《数学讲义》2086。施普林格，Cham，2013年。viii+333 页。[BG19]Leonardo Biliotti、Alessandro Ghigi，《自同构的亚纯极限》，arXiv:1901.10724，《变换群》26（2021年），第4期，1147–1168。[BGL20] Benjamin Bakker、Henri Guenancia、Christian Lehn，《K¨ahler Calabi–Yau 簇的代数逼近与分解定理》，arXiv:2012.00441。《数学创刊》228（2022年），第3期，1255–1308。[BHPV04] Wolf Barth、Klaus Hulek、Chris A.M. Peters、Antonius Van de Ven，《紧致复曲面》，现代数学综述丛书，4。施普林格出版社，柏林，2004年。xii +436页。ISBN：3-540-00832-2。[Bin83] J¨urgen Bingener，《K¨ahler 空间的变形 I》，《数学杂志》182（1983年），第4期，505–535。[BMT86]Francesco Guaraldo、Patrizia Macrì、Alessandro Tancredi，《实解析空间专题》，数学高级讲座。Friedr. Vieweg and Sohn，布伦瑞克，1986年。x+163页。ISBN：3-528-08963-6[Bo91] Armand Borel，《线性代数群》，第二版。数学研究生教材，126。施普林格出版社，纽约，1991年。xii+288 页。ISBN：0-387-97370-2[Bog78] Fedor Alekseevich Bogomolov，《射影流形上的全纯张量与向量丛》。《苏联科学院消息：数学系列》42（1978年），第6期，1227–1287，1439。[Bri18] Michel Brion，《代数群作用的线性化》，《群作用手册》第 IV 卷，291–340，数学高级讲座（ALM），41，国际出版社，萨默维尔，马萨诸塞州，2018年。[BSU13] Michel Brion、Preena Samuel、V. Uma，《代数群的结构与几何应用讲义》，CMI 数学讲座丛书，1。印度图书代理公司，新德里；金奈数学研究所（CMI），金奈，2013年。viii+120 页。ISBN：978- 93-80250-46-5[Cam 04] Fr´éd´eric Campana，《第一陈类为零的轨形》。（法语）[第一陈类为零的轨形，《Fano 会议》，339–351，都灵大学，都灵，2004年。[Car57] Henri Cartan，《一个解析空间对自同构群的商》，纪念 S. Lefschetz 的研讨会，《代数几何与拓扑》，第90–102页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1957年。[CCM21] Fr´éd´eric Campana、Junyan Cao、Shin-ichi Matsumura，《具有数值有效反典范除子的射影 klt 对》，arXiv:1910.06471，《代数几何》8（2021年），第4期，430–464。[CGGN22] Benoˆıt Claudon、Patrick Graf、Henri Guenancia、Philipp Naumann，《第一陈类为零的 K¨ahler 空间：Bochner 原理、基本群与 Kodaira 问题》，arXiv:2008.13008。《纯粹与应用数学杂志》786（2022年），245–275。[Che55] Claude Chevalley，《由反射生成的有限群的不变量》。《美国数学杂志》77（1955年），778–782。

[CLS11] David A. Cox、John B. Little、Henry K. Schenck，《环面簇》，数学研究生教材第124卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2011年。xxiv+841 页。ISBN：978-0-8218-4819-7[Col90] Mihnea Coltoiu，《完备局部多极集》。《纯粹与应用数学杂志》412（1990年），108–112。[CR02] 陈为民、阮勇斌，《欧伯折叠格罗莫夫–威滕理论》。《数学与物理中的欧伯折叠》（威斯康星州麦迪逊，2001年），25–85，Contemp. Math.，310，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2002年。[Dem85]Jean-Pierre Demailly，《Monge-Ampère 测度与仿射代数簇的几何刻画》，Mém. Soc. Math. France（新辑）第19号（1985年），124页。[Dem92] Jean-Pierre Demailly，《闭正流的正则化与交理论》。《代数几何杂志》1（1992年），第3期，361–409。[Dem94] Jean-Pierre Demailly，《通过陈联络流对 (1,1) 型闭正流进行正则化》，载于《复分析与解析几何文集》，105–126，Aspects Math.，E26，Friedr. Vieweg，布伦瑞克，1994年。[Dem12]Jean-Pierre Demailly，《复解析几何与微分几何》。在线专著：https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf，（2012年）。[Dem22] Jean-Pierre Demailly，《伯格曼丛及其在紧复流形几何中的应用》，Pure Appl. Math. Q. 18（2022年），第1期，211–249。[DHP08] Jean-Pierre Demailly、Jun-Muk Hwang 和 Thomas Peternell，《被复环面覆盖的紧流形》。《几何分析杂志》18（2008年），第2期，324–340。[Div16] Simone Diverio，《Segre 形式与 Kobayashi-Lübke 不等式》。《数学杂志》283（2016年），第3–4期，1033–1047。¨DPS[Jean-Pierre Demailly、Thomas Peternell 和 Michael Schneider，《具有数值有效切丛的紧复流形》。《代数几何杂志》3（1994年），第2期，295–345。94] DPS[Jean-Pierre Demailly、Thomas Peternell 和 Michael Schneider，《紧 Kähler 流形上的伪有效线丛》，Internat. J. Math. 12（2001年），第6期，689–741。01] Dol ¨Igor Dolgachev，《加权射影簇》，载于《群作用与向量场》（不列颠哥伦比亚省温哥华，1981年），34–71，数学讲义第956卷，施普林格，柏林，1982年。[Fau82] Mitchell Faulk，《紧 Kähler 轨形上稳定向量丛的厄米–爱因斯坦度量》，arXiv:2202.08885[Fis22] Gabriele Fischer，《复解析几何》，数学讲义第538卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1976年。vii ¨页。[FN76] John Erik Fornaess、Raghavan Narasimhan，《带奇点复空间上的莱维问题》。《数学年刊》248（1980年），第1期，47–72。+201 Fu[Akira Fujiki，《论紧 Kähler 流形的自同构群》。《数学创刊》44（1978年），第3期，225–258。80] GH[Daniel Greb、Peter Heinzner，《分步 Kähler 约化》，载于《对称性与空间》，63–82，Progr. Math.，278，Birkhäuser Boston，波士顿，MA，2010年。78] GK ¨Patrick Graf、Tim Kirschner，《三维复环面的有限商》，《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）70（2020年），第2期，881–914。[GKKP10] Daniel Greb、Stefan Kebekus、Sándor J. Kovács、Thomas Peternell，《对数典范空间上的微分形式》。Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 第114号（2011年），87–169。

[GR70] Hans Grauert、Oswald Riemenschneider，《复空间上解析上同调群的消失定理》，《数学创刊》11（1970年），263–292。[Gul12] Dincer Guler，《关于正向量丛的 Segre 形式》。《加拿大数学会通报》55（2012年），第1期，108–113。[GW75] Robert Everist Greene、Hung Hsi Wu，《利用调和函数嵌入开黎曼流形》，《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）25（1975年），第1期，vii，215–235。[Hat02] Allen Hatcher，《代数拓扑》，剑桥大学出版社，剑桥，2002年。xii+544页。ISBN：0-521-79160-X；0-521-79540-0[Her67] Miguel Herrera，《半解析集上的 de Rham 定理》。《美国数学会通报》73（1967年），414–418。[HIM22] Genki Hosono、Masataka Iwai、Shin-ichi Matsumura，《关于具有伪有效切丛的射影流形》。《朱塞佩·皮亚诺数学研究所杂志》21（2022年），第5期，1801–1830。[Hir66] Friedrich Hirzebruch，《代数几何中的拓扑方法》，第三版（增订）。新增附录，并由 R. L. E. Schwarzenberger 从第二版德文版翻译，另含 A. Borel 撰写的一节。数学科学基础丛书第131卷，施普林格出版社纽约公司，纽约，1966年。MR 0202713（34 2573）。[HP19] Andreas Höring、Thomas Peternell，《典范丛数值平凡的叶层的代数可积性》。《数学创刊》216（2019年），395–419。https://doi.org/10.1007/s00222- 018-00853-2[Kan13] Marja Kankaanrinta，《关于实解析轨形与黎曼度量》，Algebr. Geom. Topol. 13（2013年），第4期，2369–2381。[Kis79] Christer Oscar Kiselman，《多重次调和函数的稠密性》，Bull. Soc. Math. France 107（1979年），第3期，295–304。[LT18] Steven Lu、Behrouz Taji，《阿贝尔簇有限商的刻画》，Int. Math. Res. Not. IMRN 2018，第1期，292–319。19] LN[Fatima Laytimi、Werner Nahm，《向量丛的丰性等价与支配性》，Geom. Dedicata 200（2019年），77–84。07] MM¨Xiaonan Ma、George Marinescu，《全纯 Morse 不等式与 Bergman 核》，数学进展第254卷。Birkhäuser 出版社，巴塞尔，2007年。xiv+422 页。ISBN：978-3-7643-8096-0。[MM10] Ieke Moerdijk、Janez Mrcun，《叶层与李群胚导论》，剑桥高级数学研究丛书第91卷。剑桥大学出版社，剑桥，2003年。x+173页。ISBN：0-521-83197-0[Mou04] Christophe Mourougane，《在 $\mathbb{P}(E)$ 上计算 Bott-Chern 类》。《杜克数学杂志》124（2004年），第2期，389–420。[Pet59] Franklin P. Peterson，《关于陈类的一些评述》，《数学年刊》（第二辑）69（1959年），414–420。[Qui76]Daniel Quillen，《多项式环上的射影模》，《数学创刊》36（1976年），167–171。[Ric68] Rolf Richberg，《连续严格伪凸函数》，《数学年刊》175（1968年），257–286。[Rie71] Oswald Riemenschneider，《用几乎正的相干解析层刻画 Moishezon 空间》，《数学杂志》123（1971年），263–284。[Ros68] Hugo Rossi，《孤立奇点的 Picard 簇》，Rice Univ. Stud. 54（1968年），第4期，63–73。

[Pri67] David Prill, 《不连续群作用下复流形商空间的局部分类》, 《杜克数学杂志》34 (1967), 375–386.[PS03] Chris A. M. Peters, Joseph H. M. Steenbrink, 《某些几何商空间的Leray谱序列的退化》, Mosc. Math. J. 3 (2003), no. 3, 1085–1095, 1201.[Sum74] Hideyasu Sumihiro, 《等变完备化, I、II》, J. Math. Kyoto Univ. 14 (1974), 1–28; 15 (1975), 573–605.[Sp98] Tonny Albert Springer, 《线性代数群》, 第二版。Progress in Mathematics, 9. Birkh¨auser Boston, Inc., Boston, MA, 1998. xiv+334 页。ISBN: 0-8176-4021-5[ST54] Geoffrey C. Shephard, John Arthur Todd, 《有限酉反射群》。Canad. J. Math. 6 (1954), 274–304.[Ste21] Jonas Stelzig, 《托里克向量丛: GAGA与霍奇理论》, 《数学杂志》298 (2021), no. 1-2, 771–786.[Var89] Jean Varouchas, 《K ¨ahler空间与真开态射》, 《数学年刊》283 (1989), no. 1, 13–52.[Vie77] Eckart Viehweg. 高维概形的有理奇点。《美国数学会会刊》, 63(1):6–8, 1977.[Voi07] Claire Voisin, 《霍奇理论与复代数几何 I》。剑桥高等数学研究丛书, 76。剑桥大学出版社, 剑桥, 2007。x+322 页。ISBN: 978-0-521-71801-1[Wu22] Xiaojun Wu, 《强伪有效与数值平坦自反层》, 《几何分析杂志》32 (2022), no. 4, Paper No. 124, 61 pp.[Wu21] Xiaojun Wu, 《奇异复空间上的Bogomolov不等式》, arXiv:2106.14650.[Wu21b] Xiaojun Wu, 《具有强伪有效切丛的紧K ¨ahler流形札记》, arXiv:2110.02931.[Zha91] De-Qi Zhang, 《对数Enriques曲面》, J. Math. Kyoto Univ. 31 (1991), no. 2, 419–466.[Zha93] De-Qi Zhang, 《对数Enriques曲面 II》, J. Math. Kyoto Univ. 33 (1993), no. 2, 357–397.