arXiv:2302.11922v1 [math.CO] 23 Feb 2023

Hans Freudenthal《有界扁平度的单纯形剖分》一文的译文，载于《数学年刊》第二辑，第43卷第3期，1942年7月，第580–583页。*

译者：Mathijs Wintraecken，Inria Sophia-Antipolis、蔚蓝海岸大学及奥地利科学技术研究所 †

我们回答了布劳威尔提出的一个问题：如何构造多胞体的无限剖分序列，使序列中的下一项是前一项的细分，并且由此产生的子单纯形不会变得任意扁平；换言之，商

$$c^r/v$$

($c=$ 单纯形的直径 $=$ 最长边，$v=$ 单纯形的体积) 对所有 r 维单纯形均有统一上界。此类铺砌在分析以及分析与拓扑学的交界领域中颇有用处。

我们在此给出的构造，类似于我们对两个单纯形的笛卡尔积进行的单纯形剖分。[1]

1

S单纯形将用顶点的一个固定次序表示，平行六面体将用一个标记的顶点
以及从该顶点出发的一组有序边来表示。
单纯形 T 的顶点为

$$e_0,\dots,e_r.$$

我们也可以用向量来描述 T

$$x_0=e_0, \qquad x_i=e_i-e_{i-1} \qquad (i=1,\dots,r).$$

*Freudenthal 在标题下方添加了如下脚注：本文实质上与一篇于1939年3月提交给《数学基础》的短文相同。不过，这篇短文从未发表。该结果也用于另一篇论文《可微流形的三角剖分》，发表于荷兰皇家艺术与科学学院《学报》42卷（1939年），880–901页，https://dwc.knaw.nl/DL/publications/PU00014650.pdf。 [译者补充了更详尽的参考文献信息]

†译者获得了欧洲研究理事会（ERC）的资助，资助项目为欧盟第七框架计划（FP/2007-2013）下的ERC资助协议第339025号 GUDHI（高维几何理解的算法基础）；此外，还获得了欧盟地平线2020研究与创新计划下的玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议第754411号，以及奥地利科学基金（FWF）资助协议M-3073的资助。[1]Freudenthal，《两个单纯形笛卡尔积的单纯形剖分》，《数学基础》29卷（1937年），138–144页，
https://bibliotekanauki.pl/articles/1383987。

设 π 是数 $1\dots r$的一个排列 p_1，……，p_r。点[2]

$$e_i = x_0 + \sum_{\nu=1}^{i} x_{p_\nu} \qquad\qquad (i = 1, \dots, r)$$

（视为顶点）构成一个单纯形 T^π。若 π_0恒等排列是 $1, \dots, r$ 的排列，则 $T^{\pi_0} = T$。$r!$ 单纯形 T^π 互称共轭体。

T^π 是集合[3]

$$T^\pi = \left\{ \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu e_{p_\nu} \middle| \lambda_\nu \geq 0, \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu = 1 \right\},$$

或者说，归根结底是同一回事，[4]

$$T^\pi = \left\{ x_0 + \sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu x_{p_\nu} \middle| 1 \geq \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_r \geq 0 \right\}.$$

由此可知：T^π 是平行六面体 P 的一个细分的像，由下式给出：

$$P = \left\{ x_0 + \sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu x_\nu \middle| 1 \geq \alpha_\nu \geq 0 \right\}.$$

反过来，单纯形 T^π 由平行六面体 P 唯一确定，也就是说，i s giv由顶点 x_0、边向量 $x_1, \dots, x_r$ 以及排列 π 给出。

2

将平行六面体的所有棱都对半切分，得到 [译者注：2^r] 平行六面体

$$P_\sigma = \left\{ x_{\sigma,0} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu x_\nu \middle| 1 \geq \alpha_\nu \geq 0 \right\}$$

其中[5] $\sigma = (s_1, \dots, s_r) \in \{0, 1\}^r$，且

$$x_{\sigma,0} = x_0 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{r} s_\nu x_\nu$$

正如 P被 T^π细分一样，P_σ 也被$(T_\sigma)^\pi$细分。注意，T^π 与$(T_\sigma)^\pi$是位似的 [，位似比为] $(1 : 2)$。

再令 π 为 $1, \dots, r$的一个排列 $p_1 \dots p_r$，并令 $\pi^* = \pi^\sigma$ 为如下得到的排列 $p_1^* \dots p_r^*$：首先（按 π给出的顺序）取所有满足 $s_{p_\nu} = 1$ 的 p_ν，然后取所有满足s_{P_ν}的，于是

- 若 $s_a > s_b$，则 a 在 π^*中先于 b
- 如果在 π 中，$s_a = s_b$ 和 a 位于 b 之前，那么在 π^*中，a 也位于 b 之前。

[2]译者注：求和式中有一处笔误。[3]译者注：此处我对记号作了较大幅度的更新。[4]译者注：这并非完全显而易见，相关论证（或其略微推广）详见 [BKW21]。[5]译者注：此处我对记号作了较大幅度的更新。

我们断言，$(T_\sigma)^\pi$ 完全位于 T^{π^σ}中。事实上，我们有，

$$\begin{aligned}(T_\sigma)^\pi &= \left\{ x_0 + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{r} s_\nu x_\nu + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu x_{p_\nu} \middle| 1 \geq \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_r \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ x_0 + \sum_{\nu \in \{\nu | s_{p_\nu}=1\}} \frac{1}{2}(\alpha_\nu + 1) x_{p_\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\nu \in \{\nu | s_{p_\nu}=0\}} \alpha_\nu x_\nu \middle| 1 \geq \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_r \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ x_0 + \sum_{\nu=1}^{r} \beta_\nu x_{p_\nu^*} \middle| 1 \geq \beta_1 \geq \cdots \geq \beta_u \geq \frac{1}{2} \geq \beta_{u+1} \geq \cdots \geq \beta_r \geq 0 \right\},\end{aligned}$$

其中 u 是 $\#\{\nu | s_{p_\nu} = 1\}$。我们的论断由此得证。此外，我们有满足$\pi^\sigma = \pi^*$ 的 $(T_\sigma)^\pi$ 构成 T的一个单纯形剖分 $Z(T)$。

3[6]

令 $e_{ij}^{\pi^*}$ 为边 $e_i^{\pi^*} e_j^{\pi^*}$ 的中点，其中我们定义 $e_{ii}^{\pi^*} = e_i^{\pi^*}$。根据此定义，并不失一般性地假设 $i \leq j$，我们有[7]

$$\begin{aligned}e_{ij}^{\pi^*} &= \frac{1}{2}\left(x_0 + \sum_{\nu=1}^{i} x_{p_\nu^*} + x_0 + \sum_{\nu=1}^{j} x_{p_\nu^*} \right) \\ &= x_0 + \sum_{\nu=1}^{i} x_{p_\nu^*} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=i+1}^{j} x_{p_\nu^*}\end{aligned}$$

我们将 k' 定义为满足 $s_{p_\nu} = 1$的 ν 的数量，并将 k'' 定义为满足 $s_{p_\nu} = 0$的 ν 的数量。W = 我们说，T_σ^π的第 k个顶点由令 $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 1$ 且 $\alpha_{k+1} = \cdots$给出 $\alpha_r = 0$。T_σ^π的第 k个顶点可以用上述定义的中点表示为 [8]

$$x_0 + \sum_{\nu=1}^{k'} x_{p_\nu^*} + \sum_{\nu=k'+1}^{k''+u} x_{p_\nu^*} = e_{ij}^{\pi^*},$$

其中 $i = k'$ 且 $j = k'' + u$。

由此可知，对于（T^π）$^\sigma$的每个子单纯形 T_σ^π：

- 第 0 个顶点是 $e_{0u}^{\pi^\sigma}$
- 顶点 $e_{ij}^{\pi^\sigma}$ 之后紧接着的是 $e_{i+1\,j}^{\pi^\sigma}$或 $e_{i\,j+1}^{\pi^\sigma}$。
- 第一个指标由 u 限定，第二个指标由 r 限定。

反过来，T^{π^*} 的子单纯形（T_σ）$^\pi$ 正是由这些性质刻画的。

4

现在我们把注意力集中在 $T = T_0^\pi$ 上，以下省略指标 π_0。我们还可以用以下方式描述 T 的细分 $Z(T)$：

[6]译者注：我个人认为，先注意到这是一个超平面排列，然后进行重新缩放，会更容易看清这种细分；参见 [BKW 21], ，另请参阅其中提到的参考文献。[7]译者注：这里也有一个笔误。我怀疑 Freudenthal 是否曾看过这篇论文的证明，因为当时纳粹占领荷兰，而他是犹太人。[8][直译：] 因此得到

$Z(T)$ 的顶点就是 e_{ij};

- e_{ij} 与 $e_{i'j'}$ 构成一维单纯形，当且仅当顶点对 ij 与 $i'j'$ 彼此不分离;

- 一组 $e_{ij}e_{ij}$ 构成 $Z(T)$的单纯形，当且仅当这些元素两两构成 $Z(T)$的单纯形;

- Z(T)中单纯形的顶点按 $i+j$升序排列。

我们还注意到： $Z(T)$的单纯形与 T共轭。

现在给定一个有限多胞体 R 。我们对顶点施加一个顺序，并构造剖分 $Z(R)$，其中对 R的每个单纯形都采用过程 Z 。 $Z(R)$的边按字典序排列。若按需要重复此过程任意多次，就能保持细分的顺序。所有出现的单纯形都与 R 的共轭单纯形相似；由于相似单纯形具有相同的质量

$$c^r/v$$

我们可见，单纯形的平坦度仍然有界。

阿姆斯特丹

致谢 译者感谢《数学年刊》编辑委员会允许公开发表本文译文。《数学年刊》拥有原德文文本的版权。

参考文献

[BKW21]Jean-Daniel Boissonnat、Siargey Kachanovich 和 Mathijs Wintraecken。利用 Coxeter-Freudenthal-Kuhn 三角剖分，在 $\mathbb{R}^d$ in 时间多项式于 d 中追踪等流形。载于 Kevin Buchin 和 Eric Colin de Verdi`ere 编，第三十七届国际计算几何研讨会（SoCG 2021），Leibniz 国际信息学会议论文集（LIPIcs）第 189 卷，第 17:1–17:16 页，德国 Dagstuhl，2021 年。Schloss Dagstuhl – Leibniz 信息学中心。期刊版将发表于 SIAM 计算学杂志。