arXiv:2302.12016v1 [math.FA] 23 Feb 2023

渐近粗 Lipschitz 等价

Bruno M. Braga 和 Gilles Lancien

摘要。我们引入了度量空间的渐近粗 Lipschitz 等价这一概念。我们证明，它严格弱于粗 Lipschitz 等价。我们研究了它对度量空间渐近维数的影响。随后，我们将重点放在巴拿赫空间上。我们证明，对于 $2 \leq p < \infty$，与 ℓ_p 线性同构在渐近粗 Lipschitz 等价下是稳定的。最后，我们在这一框架下建立了 Gorelik 原理的一个版本，并应用它证明巴拿赫空间渐近一致光滑性的各种性质在渐近粗 Lipschitz 等价下具有稳定性。

1. 引言

由于巴拿赫空间是赋范线性空间，如果希望完整保留巴拿赫空间的所有方面，线性等距映射是恰当的等价形式。在此之后，线性同构是巴拿赫空间之间下一种自然的等价关系，它仍然保留了巴拿赫空间的线性结构；通常，巴拿赫空间理论研究者更关注的正是这一等价概念。然而，巴拿赫空间首先也是度量空间，因此，（非线性的）等距映射乃至利普希茨等价也都是值得考虑的自然概念。长期以来，理解某种等价概念能够具备哪些最小性质、同时又足以产生有意义的理论，一直是巴拿赫空间理论研究者深入研究的课题（例如，[MU32、Enf70、Rib76、Rib84、JLS96、Kal12]）。这一领域的第一个里程碑可能是马祖尔-乌拉姆定理，该定理指出，在（实）巴拿赫空间之间保持零点的（非线性）等距映射会自动是线性的（见 [MU32]）。20 世纪 70 年代，P. Enflo 证明，希尔伯特空间的线性结构由一种弱得多的概念决定：只要巴拿赫空间 X 与 ℓ_2一致等价，[1] 它就必然与之（线性）同构（见 [Enf70，定理 6.3.1]）。在过去几十年中，研究者开始关注一种更弱的概念，称为 粗 *Lipschitz* 等价；这是一种只考虑空间大尺度几何方面的等价关系（精确定义将在下一段给出）。正如我们将在下文详细解释的那样，本文研究的是度量空间之间一种更弱的大尺度等价概念，而事实证明，这一概念仍然足够强，能够据此恢复巴拿赫空间的许多线性性质。

度量空间的大尺度几何通常被视为：从距离研究对象非常遥远的位置观察度量空间。由此看来，局部几何特征并不重要，研究重点在于整体特征。这种方法的主要推论之一是，彼此之间距离一致有界的不同事件应被视为

B. M. Braga 得到了美国国家科学基金会 DMS 2054860 号资助项目的部分支持。[1]即，存在一个 $X \to \ell_2$ 双射，它是均匀连续的，且其逆映射也是均匀连续的。

在“实质上”相同。为此，我们引入到度量空间的映射之间接近这一概念。准确地说，给定一个集合 X、一个度量空间 (Y,∂) 以及映射 $f,g\colon X\to Y$，若 f 接近 g，记作 $f\sim g$，则有

$$\sup_{x\in X}\partial(f(x),g(x))<\infty.$$

因此，$\sim$ 是映射 $X\to Y$ 之间的一种等价关系，它弱化了相等关系。此外，如果（X，d）也是一个度量空间，那么函数 $f\colon X\to Y$ 具有一致连续模 $\omega_f\colon [0,\infty)\to[0,\infty)$，其定义为

$$\omega_f(t)=\sup\{\partial(f(x),f(x'))\mid d(x,x')\le t\}\ \text{ for all }\ t\ge 0.$$

如果映射 f 的 ω_f 被某个仿射函数从上方控制，即存在 $L>0$ 使得，则称其为粗 *Lipschitz* 映射。

$$\omega_f(t)\le Lt+L\ \text{ for all }\ t\ge 0.$$

如果映射 f 是粗 Lipschitz 的，并且存在一个粗 Lipschitz 映射 $g\colon Y\to X$，使得 $g\circ f$ 和 $f\circ g$ 分别与恒等映射 Id_X 和 Id_Y 接近，则称映射 f 为粗利普希茨等价。在文献中，粗利普希茨等价也常被称为准等距；尤其是在几何群论中。

本文主要研究对接近关系的一种弱化，以及由此诱导的大尺度几何。此外，我们的研究将特别关注巴拿赫空间。确切地说，以下是本文中的主要新定义。

定义 1.1. 设 (X,d) 和 (Y,∂) 为度量空间。若映射 $f,g\colon X\to Y$ 满足渐近接近，则称它们渐近接近，并记作 $f\sim_\infty g$；若存在某个 $x_0\in X$，使得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\partial(f(x),g(x))}{d(x,x_0)}=0.$$

我们约定，当 X 是有界度量空间时，上述极限恒为 0。换言之，若 X 有界，则任意两个映射 $f,g\colon X\to Y$ 都渐近接近。

显然，上述定义比接近的定义弱，而且它与上述点 x_0 无关（命题 2.2）。

定义 1.2. 若存在粗利普希茨映射 $f\colon X\to Y$ 和 $g\colon Y\to X$，使得 $g\circ f$ 和 $f\circ g$ 分别与 Id_X 和 Id_Y 渐近接近，则称度量空间 X 和 Y 彼此渐近粗利普希茨等价。映射 f（以及 g）称为渐近粗 *Lipschitz* 等价。

注意，如果 X 和 Y 有界，那么任意映射 $f\colon X\to Y$ 和 $g\colon Y\to X$ 都满足上述假设。

我们证明，在度量空间这一类中，渐近粗 Lipschitz 等价是一种等价关系（命题 2.6）。请注意，粗 Lipschitz 等价 f 始终是渐近粗 Lipschitz 等价。然而，反向蕴含并不成立，正如我们在下文的例 2.7 中所见。事实上，渐近粗利普希茨等价比粗利普希茨等价严格 弱：存在渐近粗利普希茨等价的度量空间 X 和 Y，它们甚至并不粗等价；例 2.9 给出了一个例子

其中 AsyDim(X) $\neq$ AsyDim(Y)；命题 2.11 则给出了一个更复杂的例子，其中 AsyDim(X) $=$ AsyDim(Y)（AsyDim 表示渐近维数，定义见第 2.2 小节）。

接下来，我们聚焦于巴拿赫空间之间的渐近粗 Lipschitz 等价。首先，在第 3 节和第 4 节中，我们证明。

定理 A （将在下文作为推论 4.6 证明）。 如果巴拿赫空间 X 与 ℓ_p渐近粗 Lipschitz 等价，且 $p \in [2, \infty)$，那么 X 与 ℓ_p线性同构。

事实上，我们证明了一个更强的结果。我们证明，对于所有 $p_1, \ldots, p_n \in [2, \infty)$, $\ell_{p_1} \oplus \ldots \oplus \ell_{p_n}$ 的渐近粗 Lipschitz 结构完全决定其线性结构（见定理 4.5）。我们的方法不足以得出针对小于 2 的 p 的类似结果。这是因为在这一范围内通常使用的中点论证并不适用于此情形（关于这一点的详细讨论，见下文注 4.4）。

最后，在第 5 节中，我们为渐近粗 Lipschitz 等价建立了 Gorelik 原理的一个变体。我们应用该结果证明，巴拿赫空间的某些渐近线性性质在渐近粗 Lipschitz 等价下也得以保持。[2] 为了陈述这方面的主要结果，我们先回顾渐近一致光滑性的定义。给定一个巴拿赫空间 X，记其闭单位球为 B_X，单位球面为 S_X，并记 cof(X) 为其闭有限余维子空间的集合。然后，我们定义 X 的渐近一致光滑性模为

$$\bar{\rho}_X(\tau) = \sup_{x \in S_X} \inf_{Y \in \mathrm{cof}(X)} \sup_{y \in S_Y} \|x + \tau y\| - 1$$

对所有 $\tau \geq 0$ 均成立。若巴拿赫空间 X 满足渐近一致光滑，则称其为*AUS*，当且仅当

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\bar{\rho}_X(\tau)}{\tau} = 0.$$

已知，如果 X 是 AUS，则存在 $p \in (1, \infty)$，使得对于所有 $\tau \geq 0$,1)， $\bar{\rho}_X(\tau) \leq C\tau^p$（见 [KOS99] 或 [Raj13，第 2.1] 定理）；在这种情况下，将 X 称为 p-渐近一致光滑，缩写为 p-*AUS*。此外，如果存在 $\tau_0 > 0$ 使得对于所有 $\tau < \tau_0$, $\bar{\rho}_X(\tau) = 0$，则称 X 为 ∞-AUS（或渐近一致平坦，简称 AUF）。

请注意，渐近一致光滑性和 p-渐近一致光滑性并非同构不变性质，因此不同的等价范数在这一点上可能会有不同结论。如果巴拿赫空间 X 具有一个使其成为渐近一致光滑的等价范数，我们就称 X 为可赋予*AUS*等价范数。类似地定义 p-可赋予AUS等价范数。

下面给出关于渐近结构保持性的主要结果。

定理 B. 设 $p \in (1, \infty]$，且 X 是一个 p-渐近一致光滑巴拿赫空间。若巴拿赫空间 Y 与 X渐近粗利普希茨等价，则对所有 $p' \in (1, p)$, Y 都可赋予 p'-AUS等价范数。

我们指出，定理 B 无法改进为： p-渐近一致光滑性在渐近粗利普希茨等价下保持不变。事实上，N. Kalton 证明了

[2]我们提醒读者，此处的“渐近”一词可能有些误导。事实上，虽然我们在定义这些等价关系时选用这一词，是受到渐近接近概念的启发， $\sim_\infty$，但巴拿赫空间的渐近性质 通常仅取决于有限余维子空间。

p-渐近一致光滑性即使在更强的粗利普希茨等价概念下也不具有稳定性（参见 [Kal13，第 5.4 定理及第 170]页的评注）。

推论 C。 渐近一致光滑性在渐近粗利普希茨等价下保持不变。

我们以简要讨论上述定理 B 结束本引言。对于$p \in (1, \infty]$，记 T_p 为所有 p-可赋予AUS等价范数的巴拿赫空间组成的类。在巴拿赫空间的文献中，人们经常研究类 T_p的一些小变体；这对于更好地理解 T_p 以及确定在巴拿赫空间之间不同等价概念下保持不变的精确渐近性质都很重要。对于 $p \in (1, \infty]$，对p-渐近一致光滑性的定义进行某些变更，会产生记为 A_p 和 N_p 的巴拿赫空间类（精确定义请参阅第 5.1 小节）。这些类之间由以下包含关系联系起来

$$\mathsf{T}_p \subsetneq \mathsf{A}_p \subsetneq \mathsf{N}_p \subsetneq \bigcap_{p'<p} \mathsf{T}_{p'}, \text{ if } p \in (1,\infty) \text{ and } \mathsf{T}_\infty \subsetneq \mathsf{A}_\infty = \mathsf{N}_\infty \subsetneq \bigcap_{p'<\infty} \mathsf{T}_{p'}.$$

在第 5 节中，我们实际上证明了一个更强的技术性结果，该结果与上述包含关系一起推出定理 B。具体而言，我们将证明，对于 $p \in (1, \infty]$，类 A_p 和 N_p 均在渐近粗利普希茨等价下保持不变（见定理 5.7）。

2. 预备知识

2.1. 基本性质。 本小节将证明引言中给出的新定义的若干基本性质。本文后续部分将反复用到这里证明的内容，同时这些内容也能帮助读者熟悉这些新定义。我们先介绍一个有用的术语。

定义 2.1。 设 X 和 Y 是渐近粗利普希茨等价的度量空间，并设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to X$ 是见证这一等价的映射，即 f 和 g 如定义 1.2 中所述。称 g 是 f 的渐近粗 *Lipschitz* 逆映射，反之亦然。

命题 2.2。 设 (X, d) 和 (Y, ∂) 是度量空间，且 $f, g\colon X \to Y$ 是映射。以下条件等价：

(1) 对某个 $x_0 \in X$，有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\partial(f(x), g(x))}{d(x, x_0)} = 0.$$

(2) 对所有 $x_0 \in X$，都有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\partial(f(x), g(x))}{d(x, x_0)} = 0.$$

证明。 假设 (1) 对 $x_0 \in X$ 成立，并固定 $x_1 \in X$。首先，如果 X 的直径有限，则根据我们的约定，结论立即成立。否则，对于任何满足 $d(x, x_0) > 2d(x_1, x_0)$ 的 $x \in X$，都有

$$\frac{\partial(f(x), g(x))}{d(x, x_1)} \leq \frac{\partial(f(x), g(x))}{d(x, x_0) - d(x_1, x_0)} \leq 2\frac{\partial(f(x), g(x))}{d(x, x_0)}$$

结论便得证。 □

正如引言中所述，渐近粗 Lipschitz 等价是度量空间类上的等价关系。由于自反性和对称性显而易见，我们只需证明其传递性。为此，我们先证明一个预备结果，它将在本文中发挥作用。

命题 2.3。设 (X,d) 和 (Y,∂) 为度量空间，且 $f\colon X\to Y$ 和 $g\colon Y\to X$ 为粗利普希茨映射，满足 $g\circ f\sim_\infty \mathrm{Id}_X$。对每个 $x_0\in X$ 和 $\theta>0$，存在 $L>0$，使得对所有 x、$x'\in X$，都有

$$d(x,x')>\theta\max\{d(x,x_0),d(x',x_0)\}\quad implies\quad \partial(f(x),f(x'))\geq\frac{1}{L}d(x,x')-L.$$

证明。假设命题对 $x_0\in X$ 和 $\theta>0$ 不成立。因此，存在序列 $(x_n)_n,(x'_n)_n\subset X$，使得

(1) $d(x_n,x'_n)>\theta\max\{d(x_n,x_0),d(x'_n,x_0)\}$ for all $n\in\mathbb{N}$, and
(2) $\partial(f(x_n),f(x'_n))\leq\frac{1}{n}d(x_n,x'_n)-n$ for all $n\in\mathbb{N}$.

特别地，(2) 蕴含 $\lim_n d(x_n,x'_n)=\infty$。

设 $g\colon Y\to X$ 为粗利普希茨映射，并满足 $g\circ f\sim_\infty \mathrm{Id}_X$，再固定 $M>0$ 使得

$$d(g(y),g(y'))\leq M\partial(y,y')+M$$

对所有 $y,y'\in Y$ 均成立。因此，上面的 (2) 得出

$$d(g(f(x_n)),g(f(x'_n)))\leq\frac{M}{n}d(x_n,x'_n)+M$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$。

断言 2.4. 如有必要，取一个子序列后，我们可以假设

$$d(g(f(x_n)),x_n)\leq\frac{d(x_n,x'_n)}{3}\quad\text{and}\quad d(g(f(x'_n)),x'_n)\leq\frac{d(x_n,x'_n)}{3}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$。

证明。只需证明该断言对 $(x_n)_n$ 成立。首先，假设 $(x_n)_n$ 有界。在这种情况下，由于 f 和 g 是粗的，我们必有 $(d(g(f(x_n)),x_n))_n$ 有界。于是，由于 $\lim_n d(x_n,x'_n)=\infty$，存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得

$$d(g(f(x_n)),x_n)\leq\frac{d(x_n,x'_n)}{3}$$

对所有 $n>n_0$。

现在假设 $(x_n)_n$ 无界。那么，取一个子序列后，我们假设 $\lim_n d(x_n,x_0)=\infty$。由于 $g\circ f\sim_\infty \mathrm{Id}_X$，存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得

$$d(g(f(x_n)),x_n)\leq\theta\frac{d(x_n,x_0)}{3}$$

对所有 $n>n_0$ 都成立。由于 $d(x_n,x'_n)$ 大于 $\theta d(x_n,x_0)$，我们得出

$$d(g(f(x_n)),x_n)\leq\frac{d(x_n,x'_n)}{3}$$

对所有 $n>n_0$。 □

取一个子序列后，我们现在假设先前的断言对 $(x_n)_n$ 和 $(x'_n)_n$成立。于是我们得出

$$\begin{aligned}\frac{M}{n}d(x_n,x'_n)+M &\geq d(g(f(x_n)),g(f(x'_n)))\\ &\geq d(x_n,x'_n)-d(g(f(x_n)),x_n)-d(g(f(x'_n)),x'_n)\\ &\geq \frac{d(x_n,x'_n)}{3}\end{aligned}$$

对所有 $n>n_0$。这导致矛盾，因为 $\lim_n d(x_n,\ x'_n)=\infty$。 □

接下来我们给出命题 2.3 的一个直接推论。

推论 2.5。设 (X,d) 和 (Y,∂) 是度量空间，且 $f\colon X\to Y$是一个渐近粗利普希茨等价。那么，对所有 $x_0\in X$，存在 $L>0$ 使得

$$\partial(f(x),f(x_0))\geq\frac{1}{L}d(x,x_0)-L$$

对所有 $x\in X$。特别地，对所有 $x_0\in X$，我们有

$$\lim_{x\to\infty}\partial(f(x),f(x_0))=\infty.$$

命题 2.6。渐近粗利普希茨等价是度量空间类上的一个等价关系。

证明。该关系的自反性和对称性是显然的；因此，我们只证明其传递性。为此，设 (X,d_X)、(Y,d_Y) 和 (Z,d_Z) 是度量空间，并设 $f\colon X\to Y$ 和 $g\colon Y\to Z$ 是渐近粗 Lipschitz 等价，其渐近粗 Lipschitz 逆映射分别为 $f'\colon Y\to X$ 和 $g'\colon Z\to Y$。由于 f 和 f' 是粗 Lipschitz，取 $L>0$ 使得对所有 $t\geq 0$,

$$\omega_f(t)\leq Lt+L \text{ and } \omega_{f'}(t)\leq Lt+L.$$

我们来证明 $f'\circ g'\circ g\circ f\sim_\infty \mathrm{Id}_X$。为此，取 $x_0\in X$并注意到

$$\begin{aligned}\frac{d_X(f'(g'(g(f(x)))),x)}{d_X(x,x_0)} &\leq \frac{d_X(f'(g'(g(f(x)))),f'(f(x)))+d_X(f'(f(x)),x)}{d_X(x,x_0)}\\ &\leq \frac{Ld_Y(g'(g(f(x))),f(x))+L+d_X(f'(f(x)),x)}{d_X(x,x_0)}\end{aligned}$$

对所有 $x\in X$均成立。根据推论 2.5，有 $\lim_{x\to\infty}d_Y(f(x),\ f(x_0))=\infty$。因此，由于 $g'\circ g\sim_\infty \mathrm{Id}_Y$，可得

$$\begin{aligned}\limsup_{x\to\infty}\frac{d_Y(g'(g(f(x))),f(x))}{d_X(x,x_0)} &= \limsup_{x\to\infty}\left(\frac{d_Y(g'(g(f(x))),f(x))}{d_Y(f(x),f(x_0))}\cdot\frac{d_Y(f(x),f(x_0))}{d_X(x,x_0)}\right)\\ &\leq \limsup_{x\to\infty}\left(\frac{d_Y(g'(g(f(x))),f(x))}{d_Y(f(x),f(x_0))}\cdot\frac{Ld_X(x,x_0)+L}{d_X(x,x_0)}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

因此，由于 $f'\circ f\sim_\infty \mathrm{Id}_X$，我们得出

$$\lim_{x\to x_0}\frac{d_X(f'(g'(g(f(x)))),x)}{d_X(x,x_0)}=0.$$

这表明 $f'\circ g'\circ g\circ f\sim_\infty \mathrm{Id}_X$，完全对称的论证也表明 $g\circ f\circ f'\circ g'\sim_\infty \mathrm{Id}_Y$。由于 $g\circ f$ 和 $f'\circ g'$ 是粗 Lipschitz 映射，我们得出 X 和 Y 粗 Lipschitz 等价。□

2.2. **一些例子**。显然，任何粗 Lipschitz 等价都是渐近粗 Lipschitz 等价。本小节将给出一些非平凡的渐近粗 Lipschitz 等价例子，即并非粗 Lipschitz 等价的例子（其他此类例子见第 2.3 小节）。事实上，这些例子所涉及的空间甚至并不粗等价：回忆一下，(X, d) 和 (Y, ∂) 若存在映射 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon Y \to X$，使得 f 和 g 都是 粗的，即对所有 $t \geq 0$，都有 $\omega_f(t)\ \omega_g(t) < \infty$，且 $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$ 和 $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$，则称它们粗等价。

例 2.7。 渐近粗 Lipschitz 等价即使在巴拿赫空间类中也不一定是粗（Lipschitz）嵌入；回忆一下，粗等价嵌入（分别地，粗 *Lipschitz* 嵌入）是指到某个子集上的粗等价（分别地，粗 Lipschitz 等价）。令 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为恒等映射，令$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为满足以下性质的连续分段仿射函数：

(1) $g(x) = x$ 对所有 $x \in [-2, 2]$成立，(2) g在区间 $[2^n, 2^n + n]$ 和 $[-2^n - n, -2^n]$ 上对所有 $n \in \mathbb{N}$均为常数，以及 (3) $g'(x) = 1$在区间 $(2^n + n, 2^{n+1})$ 和 $(-2^{n+1}, -2^n - n)$ 上对所有 $n \in \mathbb{N}$成立。

f 和 g 显然都是 1-Lipschitz，并且

$$|x - f(g(x))| = |x - g(f(x))| \leq 1 + \ldots + n$$

对 $[2^n, 2^{n+1}]$ 或 $[-2^{n+1}, -2^n]$中的所有 x 都成立。因此，

$$f \circ g \sim_\infty \mathrm{Id}_X \quad \text{and} \quad g \circ f \sim_\infty \mathrm{Id}_Y.$$

然而，显然

$$\inf_{\|x - x'\| = t} \|g(x) - g(x')\| = 0$$

对所有 $t > 0$都成立。因此，尽管 g 是渐近粗 Lipschitz 等价， g 却不能是粗 Lipschitz 嵌入。此外，显然可以对 f进行修改（类似于 g的定义），使得 f也不是粗 Lipschitz 嵌入。

注 2.8。 巴拿赫空间之间的映射 $f\colon X \to Y$ 称为 几乎不着色 - 散，如果存在 $t > 0$ 使得

$$\inf_{\|x - x'\| = t} \|f(x) - f(x')\| > 0;$$

有关几乎不塌缩映射的更多内容，参见 [Ros17] 和 [Bra18]（我们将此定义限制在巴拿赫空间中，以免条件“$d(x, x') = \mathrm{k}x - x'\mathrm{k} = t$”变得空泛）。请注意，上述意义下映射 f 不使距离塌缩的要求，远弱于 f 成为粗（利普希茨）嵌入的要求（参见 [Bra18，命题 2.5]）。例 2.7 所展示的远不止渐近粗 Lipschitz 等价不必是粗嵌入这一事实：它们甚至不必是几乎不塌缩的。

尽管例 2.7 表明， X 与 Y 之间的渐近粗 Lipschitz 等价不必是粗 Lipschitz 等价，但这个例子中的空间，即 $X = Y = \mathbb{R}$，显然是粗 Lipschitz 等价的。在下一个例子中，我们将说明情况并非总是如此：度量空间的渐近粗 Lipschitz 等价严格弱于粗 Lipschitz 等价。在给出这个例子之前，我们先回顾渐近

维数的定义。回想一下，若 $(X,\ d)$ 是一个度量空间且 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，那么 X 的渐近维数至多为 $n \in \mathbb{N}$，如果对所有 $r > 0$，都存在由 X 的子集构成的族 U_0，.....，U_n，使得

(1) $X = \bigcup_{i=0}^{n} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_i} U$,
(2) $d(U,V) := \inf\{d(x,y),\ (x,y) \in U \times V\} > r$ for all $i \in \{0,\dots,n\}$ and all distinct $U, V \in \mathcal{U}_i$, and
(3) $\sup_{U \in \mathcal{U}_i} \operatorname{diam}(U) < \infty$ for all $i \in \{0,\dots,n\}$.

此时，的渐近维数记作 AsyDim(X)，定义为满足以下条件的最小 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$：$X$ 的渐近维数不超过 n （关于渐近维数的更多内容，请参阅 [NY12] ）。

例 2.9. 考虑

$$X = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ and } Y = \{(2^n, j) \mid n \in \mathbb{N},\ j \in \{0,1,\dots,n\}\}$$

赋予其典范度量。于是，X 和 Y 渐近粗利普希茨等价；但它们并不粗利普希茨等价，事实上，它们甚至不粗等价。确实，映射 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon Y \to X$ 定义如下：

$$f(2^n) = (2^n, 0) \text{ and } g(2^n, j) = 2^n$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及所有 $j \in \{0$、.....、$n\}$，它们显然是 X 与 Y渐近粗 Lipschitz 等价的有力证明。特别是，这意味着度量空间的渐近维数在渐近粗 Lipschitz 等价下并不保持不变。事实上，X 的渐近维数为 0，而 Y 的渐近维数为 1；另一方面，渐近维数在粗 Lipschitz 嵌入下保持不变（[NY12，命题 2.2.4 和定理 2.2.5]）。

注 2.10. 从粗几何的角度来看，$\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是最小的无界度量空间[3], 例 2.9 表明，包含 $(\{0,\dots,n\})_{n=1}^{\infty}$ 的等距副本，对渐近粗 Lipschitz 等价不构成任何限制。另一方面，包含 $\mathbb{N}$ 的粗副本确实会施加一些限制。事实上，由推论 2.5 可立即得出，如果 $\mathbb{N}$ 粗嵌入到 X，且 X 与 Y 渐近粗 Lipschitz 等价，那么就存在一个从 $\mathbb{N}$ 到 Y 的粗映射（因而也是利普希茨映射），其像无界。很容易看出，不存在这样的从 $\mathbb{N}$ 到 $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 的映射。因此，$\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 不可能与任何包含 $\mathbb{N}$ 粗副本的度量空间渐近粗 Lipschitz 等价。

2.3. **一个更有力的例子。** 正如我们在例 2.9 中所见，渐近粗 Lipschitz 等价的概念严格弱于粗 Lipschitz 等价。本小节将对此进行更深入的探讨，并进一步凸显两者之间的差异。事实上，例 2.9 表明，存在度量空间 X 和 Y，它们并不粗 Lipschitz 等价，却渐近粗 Lipschitz 等价。然而，其中所举的空间 Y甚至不能粗嵌入到 X中。此外，很容易看出，对于这类空间，甚至不存在同时满足未塌缩条件的粗映射 $Y \to X$。[4] 本小节将表明，我们可以要求渐近粗 Lipschitz 等价更加

[3]这里使用“最小的”一词是恰当的，因为任何无界度量空间都包含 $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 的粗副本。[4]映射 $f\colon (X,\ d) \to (Y, \partial)$ 若存在 $r > 0$ 使得 $\inf_{d(x,x') \geq r} \partial(f(x)\ f(x')) > 0$，则称为未塌缩 （参见注 2.8）。

刚性，却仍不足以推出这两个度量空间彼此粗等价（见命题 2.3）。

设 (X,d) 和 (Y,∂) 是度量空间，并设 $f\colon X\to Y$是一个映射。对每个$s>0$,

$$\mathrm{Exp}_s(f)=\inf\left\{\frac{d(f(x),f(z))}{d(x,z)}\mid d(x,z)\geq s\right\}$$

（这里我们采用约定 $\inf\emptyset=\infty$），并令

$$\mathrm{Exp}_\infty(f)=\sup_{s>0}\mathrm{Exp}_s(f).$$

注意，由于 Exp_s 随着 s 的增大而增大，因此我们有 $\mathrm{Exp}_\infty(f)=\lim_{s\to\infty}\mathrm{Exp}_s(f)$。

命题 2.11. 设 X 和 Y 是度量空间，且 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to X$ 是粗利普希茨映射。若 $\mathrm{Exp}_\infty(g\circ f)>0$，则 f 是粗 *Lipschitz* 嵌入。[5]

证明。若 f 不是粗 Lipschitz 嵌入，则存在 $(x_n)_n$ 和 $(z_n)_n$ 属于 X，使得

$$\partial(f(x_n),f(z_n))\leq\frac{1}{n}d(x_n,z_n)-n$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$ 都成立。特别地，$\lim_n d(x_n,z_n)=\infty$。由于 g 是粗 Lipschitz 的，存在 $L>0$，使得对所有 $t>0$，$\omega_g(t)\leq Lt+L$。因此，

$$\frac{d(g(f(x_n)),g(f(z_n)))}{d(x_n,z_n)}\leq\frac{Ln^{-1}d(x_n,z_n)+L}{d(x_n,z_n)}\leq\frac{L}{n}+\frac{L}{d(x_n,z_n)}\to 0,$$

这与 $\mathrm{Exp}_\infty(g\circ f)>0$ 矛盾。□

注 2.12. 回顾一下，给定度量空间的渐近维数始终是任何粗嵌入其中的度量空间的渐近维数的上界（[NY12，命题 2.2.4 和定理 2.2.5]）。因此，例 2.9 无法改进为适用于某种同时满足 $\mathrm{Exp}(f\circ g)>0$ 和 $\mathrm{Exp}(g\circ f)>0$ 的渐近粗利普希茨等价。

下一个命题表明，渐近粗利普希茨等价可以具有更强的刚性，却仍不能迫使这些空间粗等价。

命题 2.13. 存在度量空间 X 和 Y，它们并不粗等价，但存在渐近粗 *Lipschitz* 等价 $f:X\to Y$，其渐近粗 *Lipschitz* 逆映射为 $g\colon Y\to X$，使得 $\mathrm{Exp}(f\circ g)>0$ 且$\mathrm{Exp}(g\circ f)>0$。特别地，f和 g均为粗 *Lipschitz* 嵌入，并且$\mathrm{AsyDim}(X)=\mathrm{AsyDim}(Y)$。

证明。设

$$X=\{(x+\log(y+1),y)\mid(x,y)\in[0,\infty)^2\}$$

and

$$Y=X\cup\big(\{0\}\times[0,\infty)\big),$$

并考虑 X 和 Y，其度量继承自 $\mathbb{R}^2$，为标准度量。令 $f:X\to Y$为包含映射，并令 $g:Y\to X$ 由下式给出

$$g(x,y)=(x+\log(y+1),y)$$

[5]完全类似的证明可得，若仅假设 f 和 g 是粗的，则 f 是粗嵌入。

对所有 $(x,y) \in Y$ 均成立。由于 f 是包含映射，因此它是粗 Lipschitz 映射；又因为对数函数在 $[1,\infty)$ 上是粗 Lipschitz 函数，所以 g 也是如此。

现在我们注意到，f 和 g 互为渐近粗 Lipschitz 逆映射。由于

$$\|g \circ f(x,x') - (x,x')\| = \|(\log(x'+1)),0)\| \leq \log(\|(x,x')\|+1)$$

且 $\lim_{s\to\infty} \log(s+1)/s = 0$，因此可得 $g \circ f \sim_\infty \mathrm{Id}_X$。此外，由于

$$\|g \circ f(x,x') - g \circ f(z,z')\| \geq \|(x,x') - (z,z')\| - |\log(x'+1) - \log(z'+1)|,$$

同样可得 $\mathrm{Exp}_\infty(g \circ f) > 0$。类似地，我们有 $f \circ g \sim_\infty \mathrm{Id}_Y$，且 $\mathrm{Exp}_\infty(f \circ g) > 0$。

现在注意到，X 和 Y 并非粗等价。为反证，假设存在粗映射 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to X$，使得 $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$ 且 $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$。给定 $x \in X$ 和 $r > 0$，令 $B(x, r) = \{z \in X \mid d(x, z) \leq r\}$。由于 $g : Y \to X$ 是粗等价，因此对所有 $s > 0$，存在 $r > 0$ 使得

$$\|(y,y') - (z,z')\| > s \text{ implies } \|g(y,y') - g(z,z')\| > r,$$

对所有 $(y,y'),(z,z') \in Y$。因此，我们必须有

$$\lim_{t\to\infty} d(g(0,t) - g(X)) = \infty.$$

因此，我们可以选取一列 $[0,\infty)$ 中的元素 $(y_n)_n$，使得

$$B(g(0,y_n),n) \cap \big(g(Y) \setminus g(\{0\} \times [0,\infty))\big) = \emptyset \tag{2.1}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$。令

$$Z = g(\{0\} \times [0,\infty)) \cup \bigcup_n (B(g(0,y_n),n) \cap X).$$

令 $h = g \restriction \{0\}\times[0,\infty)$；于是，$h$ 是一个粗嵌入。由于 g 是一个粗等价，其像是余有界的，即 $\sup_{x\in X} d(x, g(Y)) < \infty$。因此，由 (2.1) 可得 $h : \{0\} \times [0,\infty) \to Z$ 是一个粗等价。这是矛盾的，因为 $\{0\} \times [0,\infty)$ 的渐近维数为 1，Z 的渐近维数为 2，而粗等价保持渐近维数（[NY12, 定理 2.2.5]）。□

评注 2.14。这里我们介绍另一种方法，以证明在前一个命题中 X 和 Y 不粗等价。我们可以引入以下粗性质：如果一个度量空间 (X,d) 满足如下条件，就称其为在无穷远处粗连通：存在 $s > 0$，使得对任意有界 $A \subset X$，都存在另一个有界 $B \subset X$，使任意 $x, y \in X \setminus B$ 都能由一条离散路径 $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ 连接，其中 $x_i \notin A$ 且对所有 $i \in \{1,\ldots,n\}$，$d(x_i, x_{i-1}) \leq s$。

很容易证明这是一个粗性质，也就是说，它在粗等价下保持不变。不过，虽然上一个例子中的 X 具有这一性质，Y 却没有。

请注意，前一个命题和前一条评注中的两个限制只适用于渐近维数至少为 1 的度量空间（事实上，上述评注中路径的存在意味着 X 有界，或者 X 的渐近维数至少为 1）。此外，例 2.9 也属于同一种情形。这就引出了下面的问题。

问题 2.15. 设 X 和 Y 是渐近维数为零且渐近粗 *Lipschitz* 等价的度量空间。能否由此推出 X 和 Y 粗（利普希茨）等价?

3. 巴拿赫空间及超积下的行为

3.1. **比较渐近粗 Lipschitz 等价与粗 Lipschitz 等价。** 本文主要关注的度量空间是巴拿赫空间。从现在起，我们将研究巴拿赫空间的渐近粗利普希茨几何，并证明粗利普希茨理论中的若干结果在这种较弱的概念下仍然成立。作为热身，我们先介绍一个关于渐近粗 Lipschitz 等价的简单结果，它还满足额外假设：$\mathrm{Exp}(f\circ g)>0$ 和 $\mathrm{Exp}(g\circ f)>0$。

命题 3.1。设 X 和 Y 是巴拿赫空间，且 $f\colon X\to Y$ 是一个渐近粗 *Lipschitz* 等价，其渐近粗 *Lipschitz* 逆映射为 $g\colon Y\to X$。此外，假设 $\mathrm{Exp}(f\circ g)>0$ 和 $\mathrm{Exp}(g\circ f)>0$。则 $\dim(X)=\dim(Y)$，并且，如果 $\dim(X)<\infty$，则 f（以及 g）是粗利普希茨等价。

证明。根据命题 2.11，f 和 g 均为粗 Lipschitz 嵌入，且 $\dim(X)=\dim(Y)$。此外，若 $\dim(X)<\infty$，则结论成立，因为任何粗 Lipschitz 嵌入 $h\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 都自动是余有界的，即 $\sup_{y\in\mathbb{R}^n} d(y,h(\mathbb{R}^n))<\infty$（见 [Kap14，习题 2.27]），因此是粗利普希茨等价。□

正如我们将在下文的推论 3.6 中看到的，前一个命题的第一条结论对于渐近粗 Lipschitz 等价也成立。然而，正如例 2.7 所示，第二条结论并不成立。现在，我们以两个问题结束这个非常简短的小节。

问题 3.2。设 X 和 Y 是渐近粗利普希茨等价的两个巴拿赫空间。它们是否必然粗 *Lipschitz* 等价?

问题 3.3。设 X 和 Y 是巴拿赫空间，且 $f\colon X\to Y$ 如命题 *3.1* 所述。f 必定是粗 *Lipschitz* 等价吗？如果不是，是否可以由存在这样的 f 推出存在一个粗 *Lipschitz* 等价 $X\to Y$?

3.2. **超幂与渐近粗利普希茨等价。** 众所周知，粗等价会在超积之间诱导出利普希茨等价。在下一个引理中，我们证明渐近粗 Lipschitz 等价也有同样的性质。回顾一下，若 X 是一个巴拿赫空间，且 U 是 $\mathbb{N}$ 上的一个超滤子，我们用 $X^{\mathbb{N}}/\mathrm{U}$ 表示 X 关于 U 的超积。关于巴拿赫空间超积理论，请参阅 [AK06, 第 11 节。1]

命题 3.4. 设 X 和 Y 是巴拿赫空间，且 $\mathcal{U}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的非主超滤子。设 $f\colon X\to Y$ 和 $g\colon Y\to X$ 是粗利普希茨映射，满足 $f\circ g\sim_\infty \mathrm{Id}_Y$。定义 $F\colon X^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}\to Y^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ 和 $G\colon Y^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}\to X^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ 如下：

$$F([(x_n)_n])=\Big[\Big(\frac{f(nx_n)}{n}\Big)_n\Big],\quad \textit{for all}\ \ [(x_n)_n]\in X^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$$

$$G([(y_n)_n])=\Big[\Big(\frac{g(ny_n)}{n}\Big)_n\Big],\quad \textit{for all}\ \ [(y_n)_n]\in Y^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}.$$

那么 F 和 G 是 *Lipschitz* 映射，且 $F\circ G=\mathrm{Id}_{Y^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}}$。

特别地，F 是满射；此外，如果 $g\circ f\sim_\infty \mathrm{Id}_X$，那么 F 是利普希茨等价，其利普希茨逆映射为 G。

证明。注意到，由于 f 和 g 是粗利普希茨映射，因此很容易得出 F 和 G 定义良好且满足 Lipschitz 条件。我们只需证明 $F\circ G=\mathrm{Id}_{Y^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}}$,

因为其余部分显然也就成立了。显然， $F \circ G([(y_n)_n]) = 0$。因此，设 $[(y_n)_n] \in Y^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$，使得 $[(y_n)_n] \neq 0$，并固定 $\varepsilon > 0$。

由于 $f \circ g \sim_\infty \mathrm{Id}_Y$，存在 $r > 0$，使得对于所有满足 $\|y\| > r$ 的 $y \in Y$，都有 $\|f(g(y)) - y\| \leq \varepsilon\|y\|$。由于 $\lim_{n,\mathcal{U}} \|y_n\| > 0$，存在 $A \in \mathcal{U}$，使得对于所有 $n \in A$，都有 $\|f(g(ny_n)) - ny_n\| \leq \varepsilon\|ny_n\|$。展开定义，我们得到

$$F(G([(y_n)_n])) - [(y_n)_n] = \Big[\Big(\frac{f(g(ny_n))}{n} - y_n\Big)_n\Big] = \Big[\Big(\frac{f(g(ny_n)) - ny_n}{n}\Big)_n\Big].$$

因此，

$$\Big\|F(G([(y_n)_n])) - [(y_n)_n]\Big\| = \lim_{n,\mathcal{U}} \left\|\frac{f(g(ny_n)) - ny_n}{n}\right\| \leq \varepsilon\|[(y_n)_n]\|.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，这表明 $F \circ G([(y_n)_n]) = [(y_n)_n]$。 □

与粗利普希茨等价不同，渐近粗 Lipschitz 等价的值域不需要对其陪域中的某个 δ 是稠密的，对于某个 $\delta > 0$ 也不必如此（见例 2.9 或命题 2.11）。下面的推论给出了关于渐近粗 Lipschitz 等价的值域必须具有什么性质的一些信息。

推论 3.5。 设 X 和 Y 为巴拿赫空间，且 $f\colon X \to Y$ 是渐近粗 *Lipschitz* 等价。则 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} f(X)$ 在 Y 中稠密。

证明。 设 F 如命题 3.4 中所述。设 $y \in Y$。由于 $F\colon X^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} \to Y^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ 是满射，存在 $[(x_n)_n] \in X^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$，使得 $F([(x_n)_n]) = [(y)_n] \in Y^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$。因此，$\lim_{n,\mathcal{U}} \|\frac{1}{n} f(nx_n) - y\| = 0$。所以，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} f(X)$ 在 Y 中稠密。□

推论 3.6。 设 X 和 Y 为渐近粗利普希茨等价的巴拿赫空间。

(1) 若 $\dim(X) < \infty$，则 $\dim(X) = \dim(Y)$。

(2) 若 $Y = \ell_2$，则 X 与 ℓ_2同构。

证明。 这直接由命题 3.4 得出。事实上，如果 $\dim(X) < \infty$，那么它的所有超积也具有维数 $\dim(X)$，且维数在利普希茨等价下保持不变。因此，(1) 得证。

对于 (2)，回忆一下，ℓ_2 的超幂仍是一个希尔伯特空间，并且与希尔伯特空间同构这一性质在利普希茨等价下保持不变（见 [Enf70，定理 6.3.1]）。□

4. ℓ_p的渐近粗 Lipschitz 结构，$p \in (2, \infty)$。

如推论 3.6 所示，ℓ_2 的渐近粗 Lipschitz 结构完全决定了其同构结构。在本小节中，我们证明对于任意 $p \in (2, \infty)$，ℓ_p 也有同样的结论。这是第 1 节定理 A 尚未证明的部分，下面将以推论 4.6 的形式证明。事实上，对于任意 $p_1, \ldots, p_n \in (2, \infty)$，$\ell_{p_1} \oplus \ldots \oplus \ell_{p_n}$ 也有同样的结论（见定理 4.5 ）。

渐近一致光滑性将在下面定理 4.5 的证明中发挥重要作用。关于渐近一致光滑性（简称 AUS）和 p-渐近一致光滑性（简称 p-AUS）的精确定义，请参见第 1 节。不过，对于本节而言，读者只需知道，对于 $p \in (1, \infty)$，ℓ_p 是 p-AUS。此外，如果 $1 < p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \infty$，那么 $\bigoplus_{i=1}^n \ell_{p_i}$ 是 p_1-AUS。

正如 N. Kalton 和 L. Randrianarivony [KR08], 所证明的，汉明图在研究 p-渐近一致光滑空间时大有裨益。给定一个无限的 $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ 和

$k \in \mathbb{N}$，我们将 $[\mathbb{M}]^k$ 定义为 $\mathbb{M}$ 中所有恰好包含 k 个元素的子集所组成的集合，并将 $[\mathbb{M}]^k$ 中的每个元素表示为按递增顺序排列的元组；也就是说，给定 $\bar{n} \in [\mathbb{M}]^k$，我们写作 $\bar{n} = (n_1, \ldots\ldots, n_k)$，其中 $n_1 < \ldots < n_k$。$[\mathbb{M}]^k$ 的汉明度量是由 d_{H} 给出的度量

$$d_{\mathrm{H}}(\bar{n}, \bar{m}) = |\{i \in \{1, \ldots, k\} \mid n_i \neq m_i\}|$$

对所有 $\bar{n}$，$\bar{m} \in [\mathbb{M}]^k$。

N. Kalton 和 L. Randrianarivony 发现了汉明度量与渐近一致光滑性之间的如下关系：

引理 4.1。([KR08，定理 4。2])。设 $p \in (1, \infty)$ 并假设 Y 是一个自反的p-渐近一致光滑巴拿赫空间。那么存在 $C > 0$，使得对于所有 $k \in \mathbb{N}$ 以及所有 *Lipschitz* 映射 $f : [\mathbb{N}]^k \to Y$，都存在一个无限的 $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$，使得

$$\operatorname{diam}(f([\mathbb{M}]^k)) \leq C\operatorname{Lip}(f)k^{1/p}.$$

定理 4.2。设 $1 \leq r < p_1 < \ldots < p_n < \infty$。若巴拿赫空间 X 与 $\bigoplus_{k=1}^n \ell_{p_k}$ 渐近粗利普希茨等价，则 ℓ_r 不能粗 *Lipschitz* 嵌入 X。

证明。为简化记号，令 $Y = \bigoplus_{k=1}^n \ell_{p_k}$。假设 X 与 Y 渐近粗利普希茨等价，并令 $f : X \to Y$ 为这样的等价映射。反设存在粗利普希茨嵌入 $g : \ell_r \to X$。如有必要，将 g 平移适当的距离后，我们可以假设$g(0) = 0$。此外，由于 g 是粗利普希茨嵌入，如有必要，将 g 替换为 $\alpha g(\beta \cdot)$，其中 $\alpha, \beta > 0$取适当值，我们还可以假设存在 $L > 1$，使得

$$\|z - z'\| \leq \|g(z) - g(z')\| \leq L\|z - z'\| \quad \text{for all} \quad z, z' \in \ell_r \quad \text{with} \quad \|z - z'\| \geq 1.$$

由于 f 是粗利普希茨映射，如有必要，将 L 替换为一个较大的数，我们还可以假设

$$\|f(x) - f(x')\| \leq L\|x - x'\| \quad \text{for all} \quad x, x' \in X \quad \text{with} \quad \|x - x'\| \geq 1.$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$，定义 $\varphi_k : [\mathbb{N}]^k \to \ell_r$ 为

$$\varphi_k(\bar{n}) = \sum_{i=1}^k e_{n_i} \quad \text{for all } \bar{n} \in [\mathbb{N}]^k.$$

注意，φ_k 是 $2^{1/r}$-利普希茨映射，且其像是 1-分离的。因此，根据我们对 L的选取，有

$$\operatorname{Lip}(f \circ g \circ \varphi_k) \leq 2^{1/r}L^2 \quad \text{for all} \quad k \in \mathbb{N}.$$

因此，由于 Y 是 p_1-渐近一致光滑，根据引理 4.1，存在 $C > 0$，使得对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个无限的 $\mathbb{M}_k \subset \mathbb{N}$，使得

$$\operatorname{diam}(f \circ g \circ \varphi_k([\mathbb{M}_k]^k)) \leq C2^{1/r}L^2k^{1/p_1}. \tag{4.1}$$

固定一个 $k \in \mathbb{N}$，取 $\bar{n}$，$\bar{m} \in [\mathbb{M}_k]^k$，其中 $n_k < m_1$。于是

$$\|g(\varphi_k(\bar{n})) - g(\varphi_k(\bar{m}))\| \geq 2^{1/r}k^{1/r}$$

并且，由于我们假设 $g(0) = 0$，

$$\|g(\varphi_k(\bar{n}))\| \leq Lk^{1/r} \quad \text{and} \quad \|g(\varphi_k(\bar{m}))\| \leq Lk^{1/r}.$$

将命题 2.3 应用于 $x_0 = 0$ 和 $\theta = 2^{1/r}/L$，我们得到 $M > 1$ （与 k无关）以及 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得如果 k 先前选得大于 k_0,

$$\|f(g(\varphi(\bar{n}))) - f(g(\varphi(\bar{m})))\| \geq \frac{1}{M}\|g(\varphi(\bar{n})) - g(\varphi(\bar{m}))\| \geq \frac{k^{1/r}}{M} \tag{4.2}$$

于是，由 (4.1) 和 (4.2) 可知，对所有 $k \geq k_0$,

$$\frac{k^{1/r}}{M} \leq C2^{1/r}L^2k^{1/p_1}$$

由于 $r < p_1$，当 $k \in \mathbb{N}$ 取足够大的值时，这就导出了矛盾。 □

注 4.3。 上述结论实际上也可以用“渐近粗 Lipschitz 嵌入”来表述。然而，这类嵌入的恰当定义并不明确：事实上，人们自然会将这类嵌入定义为 X 与 Y 的一个子集之间的渐近粗 Lipschitz 等价。但这个定义存在一个重大缺陷：无法确定这类嵌入的复合仍然是这种嵌入。因此，本文选择只关注等价。

不过，我们指出，定理 4.2 的证明给出了以下更强的结果：若 $1 \leq r < p_1 < \ldots < p_n < \infty$，则不存在粗利普希茨映射$f : \ell_r \to \ell_{p_1} \oplus \ldots \oplus \ell_{p_n}$，使其同时满足命题 2.3 的结论。我们将在一篇后续论文中研究巴拿赫空间之间满足命题 2.3 结论（及其变体）的粗利普希茨映射（见 [BL23]）。

注 4.4. 熟悉巴拿赫空间非线性理论的读者都知道，对于经典的粗利普希茨等价，只要 r 大于所有的 p_i，定理 4.2 也成立。更确切地说，对于所有 $1 \leq p_1 < \ldots < p_n < r$， ℓ_r 都不能粗 Lipschitz 嵌入 $\ell_{p_1} \oplus \ldots \oplus \ell_{p_n}$。这一结果的证明没有使用汉明图，而是采用了所谓的“近似中点技巧”（参见 [KR08, 命题 3.1]）。不过，这在我们的情形下并不成立。事实上，我们将在即将发表的论文中证明（参见 [BL23]），对于 $p > q$， ℓ_p 可以通过一个满足命题 2.3 结论的粗利普希茨映射映入 ℓ_q （剧透一下：马祖尔映射就可以做到这一点）。见下文注 4.7。

现在我们可以陈述并证明 [JLS96，定理 2.2] 和 [KR08，定理 5.3] 关于渐近粗利普希茨等价的推广。

定理 4.5。 设 $2 < p_1 < \ldots < p_n < \infty$。如果巴拿赫空间 X 与 $\bigoplus_{k=1}^n \ell_{p_k}$ 渐近粗利普希茨等价，那么 X 与 $\bigoplus_{k=1}^n \ell_{p_k}$ 线性同构。

证明。 证明通过对 $n \in \mathbb{N}$ 进行归纳得出。事实上，假设 X 与 ℓ_{p_1} 渐近粗利普希茨等价。那么，由命题 3.4 可知，对于任意定义在 $\mathbb{N}$ 上的非主超滤子 U，$X^{\mathbb{N}}$/U 与 $Y^{\mathbb{N}}$/U Lipschitz 等价。特别地，由经典结果可知， X 同构于 L_{p_1} 的一个补子空间（例如，这可由 [HM82、定理 1.3 和 2.3，以及命题 2.1] 得出）。由定理 4.2， X 不包含 ℓ_2 的同构副本。因此， X 必须同构于 ℓ_{p_1} 的一个补子空间（见 [Joh76] 中的主要结果）；而 ℓ_{p_1} 又或者同构于其自身，或者是有限维的（[Peł60，定理 1]）。由于 X 不可能是有限维的，故 $n = 1$ 的情形得证。

令 $n>1$，并假设该结果对任意 $m<n$ 均成立。若 X 与 $\bigoplus_{k=1}^{n}\ell_{p_k}$ 渐近粗利普希茨等价，则完全按照上述论证可得，X 同构于 $\bigoplus_{k=1}^{n}L_{p_k}$ 的一个补子空间。由于 X 不包含 ℓ_2 （定理 4.2），这意味着 X 必须同构于 $\bigoplus_{k=1}^{n}\ell_{p_k}$ 的一个补子空间（同样可由 [Joh76] 的主要结果得出）。由于这是完全不可比的巴拿赫空间的直和，因此可知 X 同构于 $\bigoplus_{k=1}^{n}E_k$，其中每个 E_k 都是 ℓ_{p_i} 的一个补子空间（[EW76，推论 3.7]）；所以，每个 E_k 要么是有限维的，要么同构于其自身 ℓ_{p_k}。为完成证明，我们需要说明每个 E_i 都同构于 ℓ_{p_i}。否则，X 将同构于 $Y=\bigoplus_{i\in I}\ell_{p_i}$，其中某个 $I\subsetneq\{p_1,\ldots\ldots,p_n$，从而 $\bigoplus_{k=1}^{n}\ell_{p_k}$ 将与 Y 渐近粗利普希茨等价，这与我们的归纳假设矛盾。□

以下结论是推论 3.6 和定理 4.5 的直接推论。

推论 4.6 (第 1 节中的定理 A)。 设 $p\in[2,\infty)$。如果一个巴拿赫空间与 ℓ_p渐近粗利普希茨等价，那么 X 与ℓ_p线性同构。

注 4.7。 我们指出，我们不知道推论 4.6 对取值于 $[1,2)$范围内的 p是否成立。我们只知道，如果它成立，其证明就必须采用不同于粗利普希茨等价证明中所用的思路（更多细节见上文注 4.4）。

5. Gorelik 原理及其在渐近结构中的应用

本节中，我们将建立一个适用于渐近粗利普希茨等价的 Gorelik 原理版本。随后，我们将运用它，把关于巴拿赫空间渐近光滑性质在非线性等价下稳定性的若干结果推广到渐近粗利普希茨等价情形。这方面最早的结果见 [GKL01]，其中证明了，具有 p-AUS 性质在利普希茨等价下是稳定的，而对所有 $p'<p$ 均具有 p'-AUS 性质在一致同胚下是稳定的。然而，Kalton 证明了，具有 p-AUS 性质在一致同胚或粗 Lipschitz 等价下并不稳定（[Kal13，定理 5.4 及第 170] 页的注）。为了准确描述我们的结果，我们将先介绍另外几种渐近性质。

5.1. 相关渐近性质。 我们需要定义一个模，它与巴拿赫空间 X 的渐近一致光滑性模互为对偶，即 X^* 的弱*-渐近一致凸性模。首先，将 X^* 中所有有限余维弱*-闭子空间组成的集合记为 cof*(X^*)。于是，我们可以通过以下方式定义 X^* 的弱*-渐近一致凸性模：

$$\bar{\theta}_X(\tau)=\inf_{x^*\in S_{X^*}}\sup_{Y\in\mathrm{cof}^*(X^*)}\inf_{y^*\in S_Y}\|x^*+\tau y^*\|-1$$

对所有 $\tau\geq 0$均成立。若 X^* 是弱*-渐近一致凸的，则简称为w^*-AUC，当且仅当

$$\bar{\theta}_X(\tau)>0\quad\text{for all}\quad\tau>0.$$

¯很容易注意到（我们将在定理 5.12 的证明中使用这一点），$\theta_X(\tau)/\tau$是递增的。这些模彼此相关，具体来说，X 是渐近一致光滑

当且仅当 X^* 是 w^*-AUC。这可由下面的精确定量结果推出，我们也将需要该结果。

命题 5.1. ([DKLR17，命题 2.1])。设 X 是一个巴拿赫空间，且τ，$\sigma \in (0, 1)$。

(1) 若 $\bar{\rho}_X(\sigma) < \sigma\tau$，则 $\theta_X(6\tau) \geq \sigma\tau$
(2) 若 $\theta_X(\tau) > \sigma\tau$，则 $\bar{\rho}_X(\sigma) \leq \sigma\tau$。

这可以用 $\bar{\rho}_X$ 与 θ_X之间的杨氏对偶来重新表述。回忆一下，给定连续函数 $f: [0,1] \to \mathbb{R}$，其对偶杨函数 $f^*:[0,1] \to \mathbb{R}$ 定义为

$$f^*(s) = \sup\{st - f(t) \mid t \in [0,1]\}$$

对所有 $s \in [0,1]$均成立。注意，若 f，g: $[0,1] \to \mathbb{R}$ 满足对所有$t \in [0,1]$ 及某个 $C > 0$都有 $f(t/C) \leq g(t)$，则对所有 $t \in [0,1]$都有 $g^*(t/C) \leq f^*(t)$。于是，以下结论可由命题 5.1 直接推出。

命题 5.2。 ([DL17，推论 6。2])。 给定一个巴拿赫空间 X，我们有

$$\bar{\rho}_X(s/2) \leq (\bar{\theta}_X)^*(s) \quad and \quad (\bar{\theta}_X)^*(s/6) \leq \bar{\rho}_X(s)$$

对所有 $s \in [0,1]$ 均成立。

现在我们转向将要讨论的渐近同构性质。首先，若 D 是一个集合且 $k \in \mathbb{N}$，我们记 $\mathrm{D}^{\leq k} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{D}^i$ 以及 $\mathrm{D}^{<\omega} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{D}^i$。给定一个巴拿赫空间 X 及其弱邻域基 $0 \in X$，记作 D；若一个族 $(x_{\bar{n}})_{\bar{n} \in \mathcal{D}^{\leq k}}$（分别为 $(x_{\bar{n}})_{\bar{n} \in \mathcal{D}^{<\omega}}$）满足：对每个 $\bar{n} \in \{\emptyset\} \cup \mathrm{D}^{\leq k-1}$（分别地，对每个 $\bar{n} \in \{\emptyset\} \cup \mathrm{D}^{<\omega}$），网 $(x_{(\bar{n}, n_k)})_{n_k \in \mathcal{D}}$ 是弱零的，则称其为一个弱零树；这里我们将 D 视为一个带通常反向包含序的有向集。

定义 5.3。 设 $p \in (1, \infty]$ 和 X 是巴拿赫空间。若存在 $c > 0$，使得对于 $0 \in X$ 的任意弱邻域基 D，以及 B_X中的任意弱零树 $(x_{\bar{n}})_{\bar{n} \in \mathcal{D}^{<\omega}}$，都存在 $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_k, \ldots) \in \mathrm{D}^{\mathbb{N}}$，满足

$$\Big\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{(m_1, \ldots, m_i)} \Big\| \leq c\|a\|_p$$

对于所有 $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p$。

R.M. Causey 证明了，当且仅当 X 具有性质 T_p 时，X 是 p-可赋予AUS等价范数的（[Cau18, 定理 1.1(i)]）。我们将重点讨论两种稍弱的性质。

定义 5.4。 设 $p \in (1, \infty]$ 和 X 是巴拿赫空间。若存在 $c > 0$，使得对于 $0 \in X$ 的任意弱邻域基 D、任意 $k \in \mathbb{N}$以及 B_X中的任意弱零树 $(x_{\bar{n}})_{\bar{n} \in \mathcal{D}^{\leq k}}$，都存在 $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathrm{D}^k$，满足

$$\Big\| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{(m_1, \ldots, m_i)} \Big\| \leq c\|a\|_p$$

对所有 $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \ell_p^k$。

定义 5.5. 设 $p \in (1, \infty]$ 和 X 为巴拿赫空间。若存在 $c > 0$，使得对于 $0 \in X$的任意弱邻域基 D，X 都具有性质 N_p，

对于所有 $k \in \mathbb{N}$，以及 B_X中的所有弱零树 $(x_{\bar{n}})_{\bar{n}\in\mathcal{D}^{\leq k}}$，都存在 $\bar{m} = (m_1, \ldots\ldots, m_k) \in \mathbb{D}^k$，使得

$$\Big\| \sum_{i=1}^{k} x_{(m_1,\ldots,m_i)} \Big\| \leq ck^{1/p}$$

（若 $p = \infty$，我们采用约定 $1/\infty = 0$。）

下一个定理汇总了类 T_p、A_p 和 N_p 之间的关系。

定理 5.6。 ([Cau21，定理 1.1]). 设 $p \in (1, \infty)$。那么

$$\mathsf{T}_p \subsetneq \mathsf{A}_p \subsetneq \mathsf{N}_p \subsetneq \bigcap_{p'<p} \mathsf{T}_{p'} \quad and \quad \mathsf{T}_\infty \subsetneq \mathsf{A}_\infty = \mathsf{N}_\infty \subsetneq \bigcap_{p'<\infty} \mathsf{T}_{p'}$$

现在我们可以陈述最精确的结果，它是本节的主要结果，并将推出定理 B。

定理 5.7。 设 $p \in (1, \infty]$。那么，性质 A_p 和 N_p 在渐近粗 *Lipschitz* 等价下保持不变。

5.2. **Gorelik 原理**。 在继续证明定理 5.7 之前，我们需要建立一个适用于此类等价的 Gorelik 原理变体。本小节将处理这一问题。该原理最初是为一致同胚构造的，其名称源自 Gorelik 的开创性工作（[Gor94]）。下面给出适用于连续渐近粗 Lipschitz 等价的版本。

命题 5.8。 设 X 和 Y 为巴拿赫空间，并假设存在连续渐近粗 *Lipschitz* 等价 $f : X \to Y$，且其连续渐近粗 *Lipschitz* 逆映射为 $g : Y \to X$。此外，假设 $f(0) = 0$ 和$g(0) = 0$。那么存在 $M \geq 1$，使得对所有 $\varepsilon > 0$，都存在 $t_0 > 0$，并且对于 X 的任意有限余维子空间 X_0 及任意 $t > t_0$，都存在一个紧子集 $K \subset Y$，使得

$$\frac{t}{M} B_Y \subset K + \varepsilon t B_Y + f(2tB_{X_0}).$$

以下引理将在命题 5.8 的证明中用到。

引理 5.9。 ([BL00，定理 10 的断言 (i)。12])。 设 X 是一个巴拿赫空间，$X_0 \subset X$ 是一个有限余维子空间，且 $t > 0$。存在一个紧$A \subset tB_X$ 满足如下条件：若 φ: $A \to X$ 是连续映射，且$\|\varphi(a) - a\| \leq t/2$ 对所有 $a \in A$ 都成立，则 $\varphi(A) \cap X_0 \neq \emptyset$。

命题 *5.8* 的证明。 设 $L \geq 1$ 满足 $\omega_f(t) \leq Lt+L$ 且 $\omega_g(t) \leq Lt+L$，对所有 $t \in [0, \infty)$ 均成立。我们来证明该命题对 $M = 12L$ 成立。为此，固定$\varepsilon > 0$，并令 $\delta = \min\{\frac{1}{12L^2}, \frac{\varepsilon}{4L^2}\}$。由于 $g \circ f \sim_\infty \mathrm{Id}_X$ 且 $f \circ g \sim_\infty \mathrm{Id}_Y$，存在$t_0 > 0$ 使得

$$\|g(f(x)) - x\| \leq \delta\|x\| \text{ and } \|f(g(y)) - y\| \leq \delta\|y\|$$

对于所有满足 $\|x\| \geq \delta t_0$ 和 $\|y\| \geq \delta t_0$ 的 $x \in X$ 和 $y \in Y$。此外，我们假设 $\delta t_0 \geq 12L^2$。

令 $t \geq t_0$ and $X_0 \subset X$ 为有限余维子空间。根据引理 5.9，存在一个紧子集 $A \subset tB_X$，使得若 $\varphi : A \to X$ 是连续映射，且对所有 $a \in A$，都有 $\|\varphi(a) - a\| \leq \frac{1}{2}t$，则 $\varphi(A) \cap X_0 \neq \emptyset$。

固定 $y \in \frac{t}{12L} B_Y$，并定义映射 $\varphi\colon A \to X$，令 $\varphi(a) = g(y + f(a))$，对所有$a \in A$均成立。由于 g 是连续的， φ也连续。若 $a \in A \cap \delta t B_X$，则有

$$\begin{aligned}\|\varphi(a) - a\| &\leq \|g(y + f(a)) - g(f(a))\| + \|g(f(a))\| + \|a\| \\ &\leq L\|y\| + L + L(L\delta t + L) + L + \delta t \\ &\leq \frac{t}{2}.\end{aligned}$$

另一方面，若 $a \in A \setminus \delta t B_Y$，当 $t \geq t_0$时，根据我们对 t_0 的选择可得

$$\begin{aligned}\|\varphi(a) - a\| &\leq \|g(y + f(a)) - g(f(a))\| + \|g(f(a)) - a\| \\ &\leq L\|y\| + L + \delta\|a\| \\ &\leq \frac{t}{2}.\end{aligned}$$

因此，对所有 $a \in A$，都有 $\|\varphi(a) - a\| \leq \frac{t}{2}$。于是，根据我们对 A 的选择，存在 $a_y \in A$ 使得 $\varphi(a_y) \in X_0$。由于 $\|a_y\| \leq t$ 且 $\|\varphi(a_y) - a_y\| \leq \frac{t}{2}$，我们得到 $\varphi(a_y) \in 2tB_{X_0}$。

现在注意到

$$\|f(g(y + f(a_y))) - (y + f(a_y))\| \leq \varepsilon t.$$

事实上，若 $y + f(a_y) \in \delta t B_Y$，则由于 $f(0) = g(0) = 0$，我们有

$$\begin{aligned}\|f(g(y + f(a_y))) - (y + f(a_y))\| &\leq \|f(g(y + f(a_y)))\| + \|y + f(a_y)\| \\ &\leq L(L\delta t + L) + L + \delta t \\ &\leq \varepsilon t.\end{aligned}$$

另一方面，若 $y + f(a_y) \notin \delta t B_Y$，根据我们对 t_0 的选择以及 $f(0) = 0$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned}\|f(g(y + f(a_y))) - (y + f(a_y))\| &\leq \delta\|y + f(a_y)\| \\ &\leq \delta\|y\| + \delta(Lt + L) \\ &\leq \varepsilon t.\end{aligned}$$

因此，我们得出

$$y \in K + \varepsilon t B_Y + f(2tB_{X_0}),$$

其中 $K = -f(A)$。由于 f 是连续的， K 是紧的。 □

现在，我们说明如何去除命题 5.8 中的连续性假设，从而得到以下适用于渐近粗利普希茨等价的 Gorelik 原理版本。

定理 5.10（渐近粗 Lipschitz 等价的 Gorelik 原理）。设 X 和 Y 是渐近粗 *Lipschitz* 等价的巴拿赫空间。那么存在一个渐近粗 *Lipschitz* 等价映射 f：$X \to Y$，满足以下条件：存在 $M \geq 1$，使得对所有 $\varepsilon > 0$，都存在 $t_0 > 0$，使得对于 X 的任意有限余维子空间 X_0 以及任意 $t > t_0$，都存在一个紧子集 $K \subset Y$，使得

$$\frac{t}{M} B_Y \subset K + \varepsilon t B_Y + f(2tB_{X_0}).$$

证明。设 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon Y \to X$ 证明 X 和 Y 是渐近粗 Lipschitz 等价的。不失一般性，可假设 $f(0) = 0$ 且 $g(0) = 0$。由 [Bra17，定理 1.4]，，存在连续映射 $f\colon X \to Y$ 和 $\tilde{g}\colon Y \to X$，使得

$$\sup_{x\in X} \|f(x) - \tilde{f}(x)\| < \infty \quad \text{and} \quad \sup_{x\in X} \|g(x) - \tilde{g}(x)\| < \infty.$$

不失一般性，我们假设 $f(0) = 0$ 且 $\tilde{g}(0) = 0$。由于 f 与 f 相近，且 g 与 $\tilde{g}$相近，立即可知 f 也是渐近粗 Lipschitz 等价，其渐近粗 Lipschitz 逆映射为 $\tilde{g}$。由此，结论可由命题 5.8 应用于 f 和 $\tilde{g}$而得。□

我们以一则关于上文定理 5.10 的评注结束本小节。为此，回顾如下：若 $L \geq 1$，Y是一个向量空间，且 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}$ 和 $|\cdot|$ 是 Y上的范数，使得

$$\frac{1}{L}\|y\| \leq |y| \leq L\|y\| \quad \text{for all} \quad y \in Y,$$

我们称 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}$ 和 $|\cdot|$ 是 L等价的，并记作 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k} \sim_L |\cdot|$。

注 5.11。注意，在命题 5.8 的证明中得到的常数 M 等于 $12L$，其中 L 只是一个满足以下条件的数：对所有 $t \in [0,\infty)$，均有 $\omega_f(t) \leq Lt+L$ 且 $\omega_g(t) \leq Lt+L$。这特别意味着，若 $L' \geq 1$ 且 $|\cdot|$ 是 X上的一个范数，并且与 X的原范数 L'-等价，那么定理 5.10 对巴拿赫空间 Y和 $(X, |\cdot|)$ 仍成立，其中 $M = 12LL'$。这将在下文中派上用场。

5.3. **技术性重赋范结果**。本小节将介绍对于那些与渐近一致光滑巴拿赫空间渐近粗 Lipschitz 等价的巴拿赫空间而言的关键重赋范结果。其证明沿用了 [GKL01, 定理 5.3]中的思想（另见 [GLZ14, 定理 3.12]以及 [DL17]）。

定理 5.12。设 X 是一个渐近一致光滑巴拿赫空间，Y 是一个与 X渐近粗 *Lipschitz* 等价的巴拿赫空间。存在 L、$C \geq 1$，使得对于所有 $\delta \in (0,1)$，存在 Y上的一个范数 $|\cdot|$，使得 $|\cdot| \sim_L \|\cdot\|_Y$并且

$$\bar{\theta}_{(Y,|\cdot|)}(\tau) \geq \bar{\theta}_X(\tau/C) - \delta \quad \textit{for all} \quad \tau \in (0,1).$$

证明。令 $f\colon X \to Y$ 为定理 5.10 给出的渐近粗 Lipschitz 等价，令 $g\colon Y \to X$ 为 f的渐近粗 Lipschitz 逆映射，并令 $M > 0$ 为定理 5.10 针对 f给出的对象。此外，令 $t_0 > 0$ 为定理 5.10 针对 $\varepsilon = 1/(8M)$给出的对象，即对于所有有限余维子空间 $X_0 \subset X$ 以及所有 $t > t_0$，存在一个紧子集 $K \subset Y$，使得

$$\frac{t}{M}B_Y \subset K + \frac{t}{8M}B_Y + f(2tB_{X_0}).$$

由于 f 和 g 都是粗 Lipschitz 的，我们可以选取足够大的 $L > 0$，使得

- $\|f(x) - f(x')\| \leq L\max\{\|x - x'\|, 1\}$ for all $x, x' \in X$, and
- $\|g(y) - g(y')\| \leq L\max\{\|y - y'\|, 1\}$ for all $y, y' \in Y$.

对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们通过令 $|\cdot|_k$ 来定义 Y^* 上的一个等价范数

$$|y^*|_k = \sup\left\{\frac{|y^*(f(x) - f(x'))|}{\|x - x'\|} \mid x, x' \in X \text{ with } \|x - x'\| \geq 2^k\right\}$$

显然，对于所有 $y^* \in Y^*$ 和所有 $k \in \mathbb{N}$，$|y^*|_{k+1} \leq |y^*|_k$。下一个断言表明，这确实是 Y^*上的一个等价范数。

引理 5.13. 对于所有 $k \in \mathbb{N}$ 和所有 $y^* \in Y^*$，我们有

$$\frac{1}{L}\|y^*\| \leq |y^*|_k \leq L\|y^*\|.$$

证明。固定 $k \in \mathbb{N}$ 和 $y^* \in Y^*$。不等式 $|y^*|_k \leq L\|y^*\|$ 显然成立，因此我们只需证明 $|y^*|_k$的下界。取一个序列 $(y_n)_n$，使得 S_Y 中 $\|y^*\| = \lim_n |y^*(y_n)|$。根据我们对 L的选择，有

$$\|g(ny_n) - g(0)\| \leq L\|ny_n\| \tag{5.1}$$

对所有充分大的 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。因此，对所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\frac{|y^*(f(g(ny_n)) - f(g(0)))|}{\|g(ny_n) - g(0)\|} \\
&\geq \frac{1}{L}\frac{|y^*(f(g(ny_n)) - f(g(0)))|}{\|ny_n\|} \\
&\geq \frac{1}{L}\left(\frac{|y^*(ny_n)|}{\|ny_n\|} - \frac{|y^*(f(g(ny_n)) - ny_n)|}{\|ny_n\|} - \frac{|y^*(f(g(0)))|}{\|ny_n\|}\right).
\end{aligned}$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\|ny_n\| = \infty$，且 f 和 g 互为渐近粗 Lipschitz 逆映射，因此我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|f(g(ny_n)) - ny_n\|}{\|ny_n\|} = 0.$$

因此，我们得出

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|y^*(f(g(ny_n)) - f(g(0)))|}{\|g(ny_n) - g(0)\|} \geq \frac{1}{L}\|y^*\|$$

引理得证。 □

注意到，$|\cdot|_k$显然是弱*下半连续的，并且是 Y 上某个等价范数的对偶范数，其闭单位球是以下集合的闭凸包

$$\left\{\frac{f(x) - f(x')}{\|x - x'\|} \mid x, x' \in X \text{ with } \|x - x'\| \geq 2^k\right\}.$$

引理 5.14. 设 $\delta \in (0,1)$。存在 $C > 0$，使得对所有满足$2^k C\delta^{-1}\bar{\theta}_X(\delta/C) > 2t_0$的 $k \in \mathbb{N}$，以下结论成立：对所有 $\tau \in (\delta, 1)$ 以及所有 $y^* \in LB_Y$，存在 $Z \in \mathcal{cof}^*(Y^*)$，使得

$$|y^* + z^*|_k \geq 2|y^*|_{k+1} - |y^*|_k + \bar{\theta}_X(\tau/C)$$

对所有满足 $\|z^*\| \geq \tau/L$ 的 $z^* \in Z$。

证明。上述引理仅在范数适中较小的元素 z^* 上才有实质内容。也就是说，只需证明存在 $C > 0$，使得对所有上述 $k \in \mathbb{N}$、所有 $\tau \in (\delta,1)$ 以及所有 $y^* \in LB_Y$，都存在 $Z \in \mathrm{cof}^*(Y^*)$，使得

$$|y^* + z^*|_k \geq 2|y^*|_{k+1} - |y^*|_k + \bar{\theta}_X(\tau/C)$$

对所有满足 $\|z^*\| \in (\tau/L, s)$ 的 $z^* \in Z$；其中 $s > \tau/L$ 是一个足够大的数，且仅取决于 L。从现在起，固定这样的 s，并选取某个

$$C > 16ML + 64ML^3 + 32sML^2. \tag{5.2}$$

在证明的其余部分，我们证明 C 具有所需的性质。为此，按要求固定 $k \in \mathbb{N}$、$\tau \in (\delta, 1)$ 和 $y^* \in LB_Y$。在整个证明过程中，我们还固定 $\gamma > 0$ 和某个正的 $\beta < \theta_X(\tau/C)$（这是可行的，因为 X 是渐近一致光滑，且

因此 X^* 是 w^*-AUC）。此外，由于 $\theta_X(t)/t$ 是递增的，我们对 k 的选择使我们可以假设 β 也满足 $2^k\beta C\tau^{-1} > 2t_0$。

根据范数 $|\cdot|_{k+1}$ 的定义，我们可以选取 x，$x' \in X$，使得 $\mathrm{k}x - x'\mathrm{k} \geq 2^{k+1}$，从而

$$y^*(f(x) - f(x')) \geq (1-\gamma)\|x - x'\||y^*|_{k+1}.$$

为简化记号，注意到将 f 替换为 $f(\cdot - x_1) + x_2$，对于适当的 x_1，$x_2 \in X$，我们可以假设 $x = -x'$ 且 $f(x) = -f(x')$。特别地，$\mathrm{k}x\mathrm{k} \geq 2^k$，并且

$$y^*(f(x)) = \frac{1}{2}y^*(f(x) - f(x')) \geq (1-\gamma)|y^*|_{k+1}\|x\|. \tag{5.3}$$

令 $\sigma = \beta C/\tau$，命题 5.1 的第 (2) 项意味着 $\bar{\rho}_X(\sigma) \leq \beta$。因此，存在一个有限余维的 $X_0 \subset X$，使得

$$\|x + z\| \leq (1+2\beta)\|x\| \quad \text{for all} \quad z \in \sigma\|x\|B_{X_0}. \tag{5.4}$$

将 X_0 替换为一个更小的有限余维子空间，我们也可以不失一般性地假设

$$\|x + z\| \geq \|x\| \geq 2^k \quad \text{for all} \quad z \in \sigma\|x\|B_{X_0}. \tag{5.5}$$

由于 $\mathrm{k}x\mathrm{k} \geq 2^k$，由我们对 β 的选择可知 $\sigma\mathrm{k}x\mathrm{k} > 2t_0$。因此，由我们对 t_0 的选择可知，存在一个紧的 $K \subset Y$，使得

$$\frac{\sigma\|x\|}{2M}B_Y \subset K + \frac{\sigma\|x\|}{16M}B_Y + f(\sigma\|x\|B_{X_0}). \tag{5.6}$$

由于 K 是紧的，存在 $Z \in \mathrm{cof}^*(Y^*)$ 使得

$$z^*(f(x)) = 0 \quad \text{and} \quad |z^*(y)| \leq \frac{\sigma\|x\|\|z^*\|}{8M}$$

对所有 $y \in K$ 以及所有 $z^* \in sB_Z$，均有。

现在我们将证明上面选取的 Z 具有所需的性质。为此，固定 $z^* \in Z$，其中 $\mathrm{k}z^*\mathrm{k} \in [\tau/L, s)$，并从下方估计 $|y^* + z^*|_k$。为此，令 $z \in {}^{\sigma}\|x\|_{2M}\, S_Y$ 满足

$$z^*(z) \geq \frac{\sigma\|x\|\|z^*\|}{4M}.$$

于是，对 $-z$ 应用 (5.6)，可得到 $w \in \sigma\mathrm{k}x\mathrm{k}B_{X_0}$ 使得

$$z^*(-f(w)) \geq \frac{\sigma\|x\|\|z^*\|}{16M} \geq \frac{\beta C\|x\|}{16ML}. \tag{5.7}$$

由于 $x = -x'$，$f(x) = -f(x')$，$\mathrm{k}w - x'\mathrm{k} \geq 2^k$（这由 (5.5) 得出），且 $\mathrm{k}x' - w\mathrm{k} \leq (1+2\beta)\mathrm{k}x\mathrm{k}$ (5.4)，因此有

$$y^*(f(w) + f(x)) = y^*(f(w) - f(x')) \leq (1+2\beta)|y^*|_k\|x\|.$$

上面的不等式与 (5.3) 表明

$$y^*(f(w)) \leq \big((1+2\beta)|y^*|_k - (1-\gamma)|y^*|_{k+1}\big)\|x\|. \tag{5.8}$$

因此，当 $z^*(f(x)) = 0$ 时，由 (5.3)、(5.7) 和 (5.8) 可得

$$(y^* + z^*)(f(x) - f(w)) \geq \Big((2-2\gamma)|y^*|_{k+1} - |y^*|_k - 2\beta|y^*|_k + \frac{\beta C}{16ML}\Big)\|x\|$$

由于根据 $|\cdot|_k$ 的定义、(5.4) 和 (5.5)，我们有

$$(y^* + z^*)(f(x) - f(w)) \leq (1+2\beta)|y^* + z^*|_k\|x\|,$$

又由于 $\gamma > 0$ 是任意的，我们得出

$$(1+2\beta)|y^*+z^*|_k \geq 2|y^*|_{k+1} - |y^*|_k - 2\beta|y^*|_k + \frac{\beta C}{16ML}. \tag{5.9}$$

由于 $\mathrm{k}y^*\mathrm{k} \leq L$ 以及 $\mathrm{k}z^*\mathrm{k} \leq s$，我们有 $|y^*|_k \leq L^2$ 和 $|z^*|_k \leq sL$。因此，由 (5.9) 可得

$$|y^*+z^*|_k \geq 2|y^*|_{k+1} - |y^*|_k + \frac{C - 64ML^3 - 32sML^2}{16ML}\beta.$$

根据我们对 C的选择（见 (5.2)），并且由于 β是小于 $\theta_X(\tau/C)$ 的任意正数，引理得证。□

现在我们完成定理的证明。为此，固定 $\delta \in (0,1)$，并令 $C \geq 1$由引理 5.14 给出。由于对于所有 $\tau \in (0,1)$，$\theta_X(\tau/C) \leq \tau/C \leq \tau$，我们只需对 Y进行重新赋范，使得

$$\bar{\theta}_Y(\tau) \geq \bar{\theta}_X(\tau/C) - \delta \quad \text{for all} \quad \tau \in (\delta, 1).$$

固定 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得 $2^{k_0} C\delta^{-1}\bar{\theta}_X(\delta/C) > 2t_0$，并取 $N \in \mathbb{N}$满足 $2L^2 < \delta N$。通过令 $|\cdot|$，在 Y^* 上定义一个范数

$$|y^*| = \frac{1}{N}\sum_{k=k_0+1}^{k_0+N} |y^*|_k \quad \text{for all} \quad y^* \in Y^*.$$

显然，$|\cdot|$是弱* 下半连续的，并且由引理 5.13 可知，它等价于 Y^*的原范数；事实上，

$$\frac{1}{L}\|y^*\| \leq |y^*| \leq L\|y^*\|$$

对所有 $y \in Y^*$均成立。因此，$|\cdot|$是一个对偶范数，也就是说，Y上存在一个范数，它与Y的原范数等价，且其对偶范数为 $|\cdot|$；此外，该范数与Y的原范数 L-等价。为方便起见，我们也将 Y上的这个范数记作 $|\cdot|$。

最后，我们来估计 $\theta_{(Y,|\cdot|)}(\tau)$的下界。为此，取满足 $|y^*| = 1$的 $y^* \in Y^*$；于是 $\mathrm{k}y^*\mathrm{k} \leq L$。给定 $Z \in \mathrm{cof}^*(Y^*)$，由断言 5.14 对 τ 和 y^*可得

$$|y^*+z^*|_k \geq 2|y^*|_{k+1} - |y^*|_k + \bar{\theta}_X(\tau/C)$$

对所有 $k \in \{k_0+1, \ldots\ldots, k_0+N\}$以及所有满足 $\mathrm{k}z^*\mathrm{k} \geq \tau/L$的 $z^* \in Z$均成立。因此，将这些不等式相加可得

$$|y^*+z^*| \geq |y^*| - \frac{2}{N}|y^*|_{k_0+1} + \bar{\theta}_X(\tau/C).$$

由于 $\frac{2}{N}|y^*|_{k_0+1} \leq \frac{2L}{N}\mathrm{k}y^*\mathrm{k} \leq \frac{2L^2}{N} < \delta$，证毕。 □

我们指出定理 5.12 的一个定量强化，后文将用到。具体而言，我们注意到，定理 5.12 的证明允许我们将 X 的范数改变一个固定量，而无需改变常数 L 和 C。

定理 5.15. 设 X 是一个渐近一致光滑巴拿赫空间，且设 Y 是一个与 X渐近粗 *Lipschitz* 等价的巴拿赫空间。对于所有 $K \geq 1$，存在 $L = L(K)$ $C = C(K) \geq 1$ 满足以下条件：若 $|\cdot|_X$ 是 X 上的一个范数，且$|\cdot|_X \sim_K \|\cdot\|_X$并且 $\delta \in (0,1)$，则 Y上存在一个范数 $|\cdot|_Y$，使得 $|\cdot| \sim_L \|\cdot\|_Y$且

$$\bar{\theta}_{(Y,|\cdot|_Y)}(\tau) \geq \bar{\theta}_{(X,|\cdot|_X)}(\tau/C) - \delta \quad \textit{for all} \quad \tau \in (0,1).$$

证明. 设 $f: X \to Y$ 是一个渐近粗 Lipschitz 等价映射，其渐近粗 Lipschitz 逆映射为 $g: Y \to X$。考察定理 5.12 的证明可知， L 仅取决于渐近粗 Lipschitz 等价映射 f 和 g的仿射上界。因此，若我们赋予 X 一个与原范数 K等价的范数，就可以在定理 5.12 的证明中用 LK 替换 L，且结论仍然成立。

对于 C，在定理 5.12 的证明中，这个常数取为满足 (5.2) 的任意常数。注意， s 仅取决于 L，因此 C 仅取决于 L 和 M，其中 M 由定理 5.10 给出。由注 5.11 即得结论。□

现在，我们用渐近光滑性模来表述这一结果。

定理 5.16。 设 X 是一个渐近一致光滑巴拿赫空间， Y 是一个与 X 渐近粗利普希茨等价的巴拿赫空间。对于所有 $K \geq 1$，存在 $L = L(K)$ $C = C(K) \geq 1$，满足如下条件：若 $|\cdot|_X$ 是 X 上的一个范数，且 $|\cdot|_X \sim_K \|\cdot\|_X$，并且 $\delta \in (0, 1)$，则存在 Y 上的一个范数 $|\cdot|_Y$，使得 $|\cdot| \sim_L \|\cdot\|_Y$，并且

$$\bar{\rho}_{(Y,|\cdot|_Y)}(\tau/C) \leq \bar{\rho}_{(X,|\cdot|_X)}(\tau) + \delta \quad \textit{for all} \quad \tau \in (0,1).$$

证明。 设 φ， ψ 在 $[0,1]$ 上连续、单调不减，且 $\varphi(0) = \psi(0) = 0$。若存在 $D \geq 1$ 和 $\delta > 0$，使得对所有 $\tau \in (0, 1)$，都有 $\varphi(\tau) \geq \psi(\tau/D) - \delta$，则容易证明，对所有 $\tau \in (0, 1)$，都有 $\varphi^*(\tau/D) \leq \psi^*(\tau) + \delta$。因此，结论由定理 5.15 和命题 5.2 立即得出。□

5.4. **渐近结构的保持**。 我们几乎已经准备好证明关于渐近结构保持性的结果。为此，我们将利用如下两个关于这些类的重新赋范刻画。

定理 5.17。 ([Cau21，推论 4。15])。 设 X 为一个巴拿赫空间，且 $p \in (1, \infty]$。则 X 具有性质 N_p，当且仅当存在常数 $L \geq 1$ 和常数 $C > 0$，使得对任意 $\tau \in (0, 1]$，都存在 X 上的一个范数 $|\cdot|$，使得 $|\cdot| \sim_L \|\cdot\|_X$ 且

(a) 若 $1 < p < \infty$, $\overline{\rho}_{|\cdot|}(\tau) \leqslant C\tau^p$
(b) 若 $p = \infty$, $\overline{\rho}_{|\cdot|}(C) \leqslant \tau$。

定理 5.18。 ([CFL23，定理 A])。 设 X 是一个巴拿赫空间，且 $p \in (1, \infty)$。那么 X 具有性质 A_p 当且仅当存在常数 $L \geq 1$ 和常数$C > 0$，使得对于任意 $\tau \in (0, 1]$，都存在一个范数 $|\cdot|$ 定义在 X 上，使得 $|\cdot| \sim_L \|\cdot\|_X$并且

$$\forall t \geq \tau, \quad \overline{\rho}_{|\cdot|}(t) \leq Ct^p.$$

现在我们可以给出定理 5.7 的证明。该证明将由定理 5.16 以及上述关于 A_p 和 N_p的重新赋范刻画（适用于 $p \in (1, \infty)$）和 $\mathsf{A}_\infty = \mathsf{N}_\infty$的重新赋范刻画推出。

定理 *5.7* 的证明。我们只详细讨论 A_p 对于 $p \in (1, \infty)$ 的情形。因此假设 X 具有 A_p，且 Y 与 X 渐近粗利普希茨等价。由于 X 具有性质 A_p，由定理 5.18 可得 $L' \geq 1$ 和 $C' > 0$，也就是说，对所有 $\tau \in (0, 1],$，我们都能找到 L'-等价的重新赋范 $|\cdot|_X$，定义在 X 上，使得

$$\bar{\rho}_{(X,|\cdot|_X)}(t) \leq C't^p \quad \text{for all} \quad t \geq \tau. \tag{5.10}$$

由定理 5.16 可得 $L = L(L')$ $C = C(L') \geq 1$，也就是说，若 X 上的 $\delta > 0$· $|_X$ 是一种 L'- 等价的重新赋范，且 $\delta > 0$，则 Y 上存在一个范数 $\nmid |_\delta$，使得$|\cdot|_\delta \sim_L \mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_Y$，并且

$$\bar{\rho}_{(Y,|\cdot|_\delta)}(t/C) \leq \bar{\rho}_{(X,|\cdot|_X)}(t) + \delta \quad \text{for all} \quad t \in (0,1). \tag{5.11}$$

现在我们证明，Y 满足定理 5.18 中的条件，其常数为 L 和 $(C'+1)(12C)^p$。为此，固定 $\tau \in (0,1]$。设 $|\cdot|_X$ 是 X 上满足 (5.10) 的一个 L'-等价范数，且 $\nmid |_\delta$ 是 Y 上满足 (5.11) 的一个范数。于是，

$$\bar{\rho}_{(Y,|\cdot|_\delta)}\Big(\frac{t}{C}\Big) \leq C' t^p + \delta$$

对所有 $\delta > 0$ 和所有 $t \in [\tau, 1]$ 均成立。因此，取 $\delta \in (0, \tau^p)$，可得

$$\bar{\rho}_{(Y,|\cdot|_\delta)}(t) \leq 2C'C^p t^p,$$

对所有 $t \geq \tau C$ 均成立。由于 $\tau > 0$ 是任意的，我们得到 Y 满足定理 5.18 中的条件，即 Y 具有性质 A_p。

N_p 的情形可类似证明，只需将上文中的定理 5.18 换成定理 5.17。□

定理 *B* 的证明。这直接由定理 5.6 和定理 5.7 得出。事实上，设 $p \in (1,\infty)$，并令 X 为一个 p-AUS 巴拿赫空间。于是，根据定理 5.6 X 属于 A_p。接着，若 Y 与 X 渐近粗利普希茨等价，则定理 5.7 蕴含 Y 也属于 A_p。再次应用定理 5.6，我们得出，对所有 $p' \in (1,p)$，Y 都是 p'-可赋予AUS等价范数的。□

参考文献

[AK06] F. Albiac 和 N. Kalton。《巴拿赫空间理论专题》，数学研究生教材第 233 卷。施普林格，纽约，2006 年。[BL00] Y. Benyamini 和 J. Lindenstrauss。《几何非线性泛函分析》。第 1 卷，美国数学会专题讲座出版物第 48 卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2000 年。[BL23] B. M. Braga 和 G. Lancien。渐近粗利普希茨嵌入。预印本，2023 年。[Bra17] B. M. Braga。粗嵌入与一致嵌入。《泛函分析杂志》，272 1875，2017 5 1852( ): – 。[Bra18] B. M. Braga。巴拿赫空间之间较弱的非线性嵌入概念。《泛函分析杂志》，274(11):3149–3169，2018 年。[Cau18] R. M. Causey。幂型渐近一致光滑范数与渐近一致扁平范数。《Positivity》，22(5):1197–1221，2018 年。[Cau21] R. M. Causey。三又二分之一种渐近性质。《数学研究》，257 212，2021 2 155( ): – 。[CFL23] R. M. Causey、A. Fovelle 和 G. Lancien。巴拿赫空间中的渐近光滑性、三空间性质及其应用。《美国数学会汇刊》，376 1928，2023 3 1895( ): – 。[DKLR17] S. Dilworth、D. Kutzarova、G. Lancien 和 N. Randrianarivony。具有 Rolewicz 性质 (β) 的等价范数。《西班牙皇家精确、物理与自然科学学院学报 A辑：数学》，111(1):101–113，2017 年。[DL17] A. Dalet 和 G. Lancien。巴拿赫空间之间粗利普希茨映射的某些性质。《西北欧数学杂志》，3:41–62，i，2017 年。[Enf70] P. Enflo。拓扑群中的一致结构与平方根。I，II。《以色列数学杂志》，8:230–252；同刊 8 (1970)，253–272，1970 年。[EW76] I. S. Edelstein 和 P. Wojtaszczyk。巴拿赫空间直和中的投影与无条件基。《数学研究》，56(3):263–276，1976 年。[GKL01] G. Godefroy、N. J. Kalton 和 G. Lancien。Szlenk 指标与一致同胚。《美国数学会汇刊》，353(10):3895–3918，2001 年。

[GLZ14] G. Godefroy、G. Lancien 和 V. Zizler。Nigel Kalton 之后的巴拿赫空间非线性几何。《洛基山数学杂志》，44(5):1529–1583，2014 年。[Gor94] E. Gorelik。 l_p 与 ℓ_p的一致非等价性。《以色列数学杂志》，87:1–8，1994 年。[HM82] S. Heinrich 和 P. Mankiewicz。超幂在巴拿赫空间的一致分类与 Lipschitz 分类中的应用。《数学研究》，73(3):225–251，1982 年。[JLS96] W. Johnson、J. Lindenstrauss 和 G. Schechtman。由一致结构决定的巴拿赫空间。《几何与泛函分析》，6(3):430–470，1996 年。[Joh76] W. Johnson。映入 L_p 且经过 1_p分解的算子。《伦敦数学学会杂志》（第 2 辑），14(2):333–339，1976 年。[Kal12] N. J. Kalton。巴拿赫空间的一致结构。《数学年刊》，354 1288，2012 4 1247( ): – 。[Kal13] N. J. Kalton。一致同胚巴拿赫空间的例子。《以色列数学杂志》，194:151–182，2013 年。[Kap14] M. Kapovich。拟等距刚性讲义。载于《几何群论》，IAS/Park City 数学丛书第 21 卷，第 127–172 页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2014 年。[KOS99] H. Knaust、E. Odell 和 Th. Schlumprecht。巴拿赫空间中的渐近结构、Szlenk 指数与 UKK 性质。《Positivity》，3(2):173–199，1999 年。[KR08] N. Kalton 和 L. Randrianarivony。 $l_p \oplus l_q$的粗利普希茨几何。《数学年刊》，341(1):223–237，2008 年。[MU32] S. Mazur 和 S. Ulam。关于赋范向量空间的等距变换。《巴黎科学院报告》，194:946–948，1932 年。[NY12] P. Nowak 和 G. Yu。大尺度几何。EMS 数学教科书。欧洲数学会（EMS），苏黎世，2012 年。[Peł60] A. Pełczyński。某些巴拿赫空间中的投影。《数学研究》，19:209–228，1960 年。[Raj13] M. Raja。关于渐近一致光滑巴拿赫空间。《泛函分析杂志》，264(2):479–492，2013 年。[Rib76] M. Ribe。关于一致同胚赋范空间。《Ark. Mat.》，14(2):237–244，1976 年。[Rib84] M. Ribe。可分的一致同胚非同构巴拿赫空间的存在性。《以色列数学杂志》，48(2-3):139–147，1984 年。[Ros17] C. Rosendal。巴拿赫空间与拓扑群的等变几何。《Forum Math. Sigma》，5:论文编号 e22，62，2017 年。

(B. M.Braga) IMPA，多娜·卡斯托丽娜大道 110 号，22460-320，里约热内卢，巴西电子邮箱地址: demendoncabraga@gmail.com 网址： https://sites.google.com/site/demendoncabraga/

(G. Lancien) 弗朗什-孔泰大学，贝桑松数学实验室，法国国家科学研究中心 UMR-6623，格雷路 16 号，25000 贝桑松，法国电子邮箱地址： gilles.lancien@univ-fcomte.fr