arXiv:2302.12035v1 [math.CA] 23 Feb 2023

关于经典正交多项式与一类 Hankel 矩阵的 Cholesky 分解

Misael E. Marriaga*、Guillermo Vera de Salas、Marta Latorre、Rub´EN MU˜NOZ ALC´AZAR

Abstract. 经典矩泛函（Hermite、Laguerre、Jacobi、Bessel）可以刻画为其矩满足二阶线性递推关系的线性泛函。在本文中，我们利用这一刻画，将经典正交多项式理论与 Hankel 矩阵的研究联系起来，其中这类矩阵的元素满足二阶线性递推关系。利用此类 Hankel 矩阵元素的递推特性，我们给出了其 Cholesky 分解中所涉及的三角矩阵和对角矩阵的若干刻画，并将其与经典正交多项式的相应刻画联系起来。

1. Introduction

经典正交多项式（Hermite、Laguerre、Jacobi 和 Bessel）已通过不同的方法加以刻画。例如，可以根据微分方程 [3], 及其导数（ [10, 14]）、结构关系（ [2, 6, 16]）和 Rodrigues公式（ [21]）等对它们进行刻画（参见 [7, 17] 及其中的参考文献）。近年来，P. Maroni（ [18]）提出了一种运用线性泛函和对偶性的方法。在所有这些方法中，出发点都是使用单项式基表示多项式并陈述相关结果。

然而，一种颇有意思（也是最新）的研究思路是从半无限矩阵理论出发。近年来，这一主题的参考文献大幅增加，要全面综述所有文献已变得愈发困难。因此，我们请读者参阅 [22, 23] （及其中的参考文献）：该文运用无限三角矩阵代数和无限 Hessenberg 矩阵代数研究正交多项式的若干方面；另请参阅 [5, 15] （及其中的参考文献），其主要工具是双线性型的 Gram 矩阵的 Cholesky 分解。值得指出的是，Cholesky 分解在研究非标准正交性方面颇有成效，例如多重正交、矩阵正交、Sobolev 正交和多元正交性，以及复平面单位圆上的正交性；此外，它也成功应用于随机矩阵、Toda 晶格、可积系统、Riemann-Hilbert 问题、Painlev´e 方程和 Darboux 变换等领域。

Date: 2023年2月24日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 15A23、15A23、15A63、33C45、33D45。*Key words and phrases.* 正交多项式、Hankel 矩阵、Cholesky 分解。*通讯作者：Misael E. Marriaga。

我们的目标是探讨矩阵分解与正交多项式之间的联系。具体而言，我们研究经典正交多项式的若干种刻画。不过，我们将研究视角从无限矩阵转向有限 Gram 矩阵 G_n，该矩阵与定义在次数至多为 $n \geqslant 0$ 的多项式线性空间上的双线性型相关联。对于标准正交性， G_n 是一个 Hankel 矩阵（其所有反对角线上的元素均为常数）。考虑到与一族经典正交多项式相关联的线性泛函的矩满足二阶线性递推关系（ [16]），我们可以说，本文研究的是具有附加结构的 Hankel 矩阵：G_n 的元素满足上述递推关系。这样，我们便可通过加边，将双线性型扩展到次数至多为 $n+1$ 的多项式线性空间：利用递推关系以及 G_n的元素，构造新的 Gram 矩阵 G_{n+1}，为 G_n 增添一行一列。所得矩阵 G_{n+1} 也将是具有上述附加结构的 Hankel 矩阵。因此，我们可以通过归纳法证明， G_n 所满足的性质也为 G_{n+1}所满足。

从无限矩阵转向随后对有限矩阵进行加边，是由一种对经典结果的替代证明所促成的。该经典结果涉及在 [7] 中发现的连续次数正交多项式的零点交错。该结果指出，若任意两个连续次数多项式的零点交错，则这些多项式属于与某个正定矩泛函相关联的正交多项式序列。该结果可用多项式的欧几里得除法算法证明。然而，也可以利用在 [12, p. 185] 中发现的以下关于厄米矩阵特征值交错的定理推导该结果：

定理 1.1. 设 n 为给定的正整数，且 $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{n}$ 和 $\{x_{n-1,k}\}_{k=1}^{n-1}$ 为给定的两个数列，使得

$$x_{n,1} < x_{n-1,1} < \cdots < x_{n,k} < x_{n-1,k} < x_{n,k+1} < \cdots < x_{n-1,n-1} < x_{n,n}.$$

令 $\Lambda = \mathrm{diag}(x_{n-1,\,1},\ x_{n-1,\,2},\ \cdots, x_{n-1,\,n-1})$。那么存在实数 b 和实向量 $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1})^{\top} \in \mathbb{R}^{n-1}$，使得 $(x_{n,\,k})_{k=1}^{n}$ 是实对称矩阵的特征值集合

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \Lambda & \bar{y} \\ \hline \bar{y}^{\top} & b \end{array}\right).$$

由此看来，对编码多项式序列信息的矩阵进行加边的过程，非常适合用来阐述和推导正交多项式的相关结果。这很可能是因为对所有 $n \geqslant 0$，次数至多为 n 的多项式线性空间都是次数至多为 $n+1$ 的多项式空间的子空间。这样一来，与经典正交多项式相关联的双线性型的 Gram矩阵具有适当的结构，可以据此开始探索我们提出的范式。

本文的组织结构如下。第2节介绍经典正交多项式及其相关线性泛函的基础知识；第3节引入经典实数序列。第4节讨论由给定实数序列构造的 Hankel 矩阵的 Cholesky 分解及其与正交多项式的关系。第5节给出经典实数序列的若干刻画。

2. Orthogonal polynomials and linear functionals

对于 $n \geqslant 0$，令 Π_n 为实变量、实系数且次数至多为 n 的多项式线性空间，并令 $\Pi = \bigcup_{n\geqslant 0} \Pi_n$。

令 Π^* 表示 Π的代数对偶空间。也就是说，Π^* 是定义在 Π上的线性泛函所构成的线性空间，

$$\Pi^* = \{\mathbf{u} : \Pi \to \mathbb{R} \quad : \quad \mathbf{u} \text{ is linear}\}.$$

我们用 $\langle \mathbf{u}\ p\rangle$ 表示多项式 p 在 $\mathbf{u}$ 这个线性泛函下的像。任意线性泛函 $\mathbf{u}$ 都完全由以下取值确定

$$\mu_n := \langle \mathbf{u}, x^n\rangle, \quad n \geqslant 0,$$

并通过线性扩展到所有多项式，其中 μ_n 称为 $\mathbf{u}$ 的第 n 阶矩。因此，我们称 $\mathbf{u}$ 为矩泛函。

如果对于每个非零多项式 $p \in \Pi$，矩泛函 $\mathbf{u}$ 都满足 $\langle \mathbf{u}\ p^2\rangle > 0$，则称 $\mathbf{u}$ 为正定的。

设 $\mathbf{u}$ 为一个矩泛函。如果多项式序列 $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ 满足以下条件，则称其为关于 $\mathbf{u}$ 的正交多项式序列（OPS）：

(1) $\deg P_n = n$,

(2) $\langle \mathbf{u}, P_n\, P_m\rangle = h_n\, \delta_{n,m}$, with $h_n \neq 0$.

这里，$\delta_{n,m}$ 表示克罗内克 δ，其定义为

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

如果存在与 $\mathbf{u}$ 相关联的正交多项式系，则称 $\mathbf{u}$ 为准定的。正定矩泛函是准定的。

注意，正交多项式系 $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ 构成 Π 的一个基。如果对于所有 $n \geqslant 0$，$P_n(x)$ 的首项系数均为 1，则称 $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ 为首一正交多项式序列（MOPS）。

给定一个矩泛函 $\mathbf{u}$ 和一个多项式 $q(x)$，我们将 $\mathbf{u}$ 被 $q(x)$ 左乘定义为矩泛函 $q\mathbf{u}$，使得

$$\langle q\,\mathbf{u}, p\rangle \ = \ \langle \mathbf{u}, q\,p\rangle, \quad \forall p \in \Pi,$$

此外，我们通过下式定义分布导数 $D\mathbf{u}$:

$$\langle D\mathbf{u}, p\rangle \ = \ -\langle \mathbf{u}, p'\rangle, \quad \forall p \in \Pi.$$

此外，满足乘积法则，即

$$D(q\,\mathbf{u}) \ = \ q'\,\mathbf{u} + q\,D\mathbf{u}.$$

定义 2.1. 设 $\mathbf{u}$ 为一个准定矩泛函，且 $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$是关于 $\mathbf{u}$ 的正交多项式系。若存在次数为 $\phi \leqslant 2$ 和 $\psi = 1$ 的非零多项式$\phi(x)$ 和 $\psi(x)$，使得 $\mathbf{u}$ 满足分布型皮尔逊方程，则称 $\mathbf{u}$ 为经典的

$$D(\phi\,\mathbf{u}) \ = \ \psi\,\mathbf{u}. \tag{2.1}$$

序列 $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ 称为经典正交多项式系。

下面关于经典矩泛函和经典正交多项式系的刻画将在后文中发挥核心作用。

定理 2.2. 设 $\mathbf{u}$ 为准定矩泛函，$\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ 是其对应的单项正交多项式系。以下各命题等价:

1. u 是经典矩泛函。
2.（Bochner, *[3]*）存在非零多项式 $\phi(x)$和 $\psi(x)$，其次数分别为 $\phi \leqslant 2$和 $\psi = 1$，使得对于 $n \geqslant 0$, $P_n(x)$满足

$$\phi(x)\, P_n''(x) + \psi(x)\, P_n'(x) \;=\; \lambda_n\, P_n(x), \tag{2.2}$$

其中 $\lambda_n = n\,(\frac{n-1}{2}\phi'' + \psi')$。
3.（Hahn, *[10]*）存在一个非零多项式 $\phi(x)$，其次数为 $\phi \leqslant 2$，使得 $\left\{ \frac{P'_{n+1}}{(n+1)} \right\}_{n\geqslant 0}$ 是与矩泛函 $\mathbf{v} = \phi(x)\mathbf{u}$ 相关的单项正交多项式系。
4.（第一结构关系, *[2]*）存在一个次数为 $\phi \leqslant 2$的非零多项式，以及实数 a_n、b_n、c_n、$n \geqslant 1$，其中 $c_n \neq 0$，使得

$$\phi(x)\, P_n'(x) \;=\; a_n\, P_{n+1}(x) + b_n\, P_n(x) + c_n\, P_{n-1}(x), \quad n \geqslant 1.$$

5.（第二结构关系, *[6,16]*）存在实数 α_n 和 β_n、$n \geqslant 2$，使得

$$P_n(x) \;=\; \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} + \alpha_n\, \frac{P'_n(x)}{n} + \beta_n\, \frac{P'_{n-1}(x)}{n-1}, \quad n \geqslant 2. \tag{2.3}$$

6.（Rodrigues公式, *[21]*）存在一个非零多项式 $\phi(x)$，其次数为 $\phi \leqslant 2$，以及一个非零实数 $k_n \neq 0$，使得

$$D^n(\phi^n(x)\,\mathbf{u}) \;=\; k_n\, P_n(x)\,\mathbf{u}, \quad n \geqslant 0.$$

众所周知（参见 [3] 以及 [13]），对自变量作仿射变换后，正定经典正交多项式仅有 Hermite、Laguerre 和 Jacobi 多项式这几类。相应的矩泛函具有如下积分表示:

$$\langle \mathbf{u}, p\rangle \;=\; \int_I p(x)\, w(x)\, dx, \quad p \in \Pi,$$

其中，在 Hermite 情形下，$I = \mathbb{R}$ 和 $w(x) = e^{-x^2}$；在 Laguerre 情形下，$I = (0, +\infty)$ 和 $w(x) = x^\alpha e^{-x}$，其中 $\alpha > -1$；在 Jacobi 情形下，$I = (-1, 1)$ 和 $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$，其中 α、$\beta > -1$。注意，在每种情形下，$w(x)$在 I 上 > 0，因此我们称 $w(x)$为权函数。

用分布型皮尔逊方程定义经典矩泛函，不仅涵盖与权函数相关的正定矩泛函，也包括非正定情形。考虑非正定情形，可得到满足分布型皮尔逊方程 (2.1) 的 Bessel经典矩泛函，其中 $\phi(x) = x^2$ 且 $\psi(x) = ax + 2$。当 $a \neq -1, -2, \ldots$ 时，Bessel 泛函是准定的。此外，它有如下积分表示

$$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_c p(z)\, w(z)\, dz, \quad p \in \Pi,$$

其中 $w(z) = (2\,\pi\, i)^{-1} z^{a-2} e^{-2/z}$，且 c 是沿逆时针方向定向的单位圆。

注意到，根据定理 2.2，如果 u 是满足（2.1）的经典矩泛函，那么 $\mathbf{v} = \phi(x)$ u 是满足皮尔逊方程的经典矩泛函

$$D(\phi\,\mathbf{v}) \;=\; (\psi + \phi')\,\mathbf{v}.$$

重复这一思路，我们可以得到，经典正交多项式的高阶导数仍然是同类型的经典正交多项式。

定理 2.3（ [10, 13, 14]）。设 u 是满足（2.1）的经典矩泛函， $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ 是其对应的单项正交多项式系。对于 $k \geqslant 0$，令 $\mathbf{v}_k = \phi^k(x)\,\mathbf{u}$ 且$\{Q_{n,k}(x)\}_{n\geqslant 0}$ 为如下给出的多项式序列

$$Q_{n,k}(x) := \frac{1}{(n+1)_k} P_{n+k}^{(k)}(x), \quad n \geqslant 0, \tag{2.4}$$

其中 $p^{(k)}$是 k 阶导数，$(\nu)_k = \nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1)$，$(\nu)_0 = 1$表示 Pochhammer 符号。于是，对于每个 $k \geqslant 0$， $\{Q_{n,k}(x)\}_{n\geqslant 0}$ 是与矩泛函 $\mathbf{v}_k$相关的单项正交多项式系，满足

$$D(\phi\,\mathbf{v}_k) \;=\; \psi_k\,\mathbf{v}_k,$$

其中 $\psi_k(x) = \psi(x) + k\,\phi'(x)$。因此，$\mathbf{v}_k$ 是一个经典矩泛函。

3. Classical sequences of numbers

本节将从另一种途径介绍经典矩泛函的定义。我们首先引入满足二阶递推关系的实数序列，并用它们构造定义在 Π上的线性泛函。

定义 3.1. 设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个满足 $\mu_0 \neq 0$的实数序列。那么，如果存在满足以下条件的实数 a、b、c、d、e，则$\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$是一个前经典序列

$$|a| + |b| + |c| > 0, \quad n\,a + d \neq 0 \quad n \geqslant 0,$$

使得下式成立

$$(n\,a+d)\,\mu_{n+1} + (n\,b+e)\,\mu_n + n\,c\,\mu_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 0. \tag{3.1}$$

按照约定，当 $n < 0$时， $\mu_n = 0$。

设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个前经典实数序列。则可以定义泛函 u 如下

$$\mu_n := \langle \mathbf{u}, x^n\rangle, \quad n \geqslant 0,$$

并通过线性扩张将其定义到所有多项式上，其中 μ_n 称为 u 的第 n 阶矩。因此，我们称 u 为预经典矩泛函。注意，条件 $n\,a+d \neq 0$、 $n \geqslant 0$ 保证了 u 被完全定义，因为每个矩

$$\mu_{n+1} = -\frac{1}{n\,a+d}[(n\,b+e)\,\mu_n + n\,c\,\mu_{n-1}], \quad n \geqslant 0,$$

都有明确的定义。

递推关系 (3.1) 可以传递给与 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 相关联的预经典矩泛函。

定理 3.2. 序列 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是前经典的，当且仅当存在非零多项式 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$，满足 deg $\phi \leqslant 2$、deg $\psi = 1$，且对于$n \geqslant 0$有 $\frac{n}{2}\phi'' + \psi' \neq 0$，使得由 $\mu_n = \langle$u $x^n\rangle$ 定义的矩泛函 u 满足分布型皮尔逊方程

$$D(\phi\,\mathbf{u}) \;=\; \psi\,\mathbf{u}.$$

证明. 假设 u 满足 (2.1)，其中存在非零 $\phi(x) = a\,x^2 + b\,x + c$和$\psi(x) = d\,x + e$，满足 deg $\psi = 1$，使得对于 $n \geqslant 0$有 $0 \neq \frac{n}{2}\phi'' + \psi' = n\,a + d$。那么

$$\langle \mathbf{u}, \phi\,p' + \psi\,p\rangle = 0, \quad \forall p \in \Pi.$$

特别是，

$$0 = \langle \mathbf{u}, n\,\phi\,x^{n-1} + \psi\,x^n\rangle = (n\,a + d)\,\mu_{n+1} + (n\,b + e)\,\mu_n + n\,c\,\mu_{n-1}, \quad n \geqslant 0.$$

因此，$\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个实数的前经典序列，因此，u 是一个预经典矩泛函。容易验证，通过反向执行前述步骤，可以得出反方向的蕴含关系。□

对于任意序列 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$，我们可以定义矩阵序列 $\{G_n\}_{n\geqslant 0}$，其中 G_n 是一个由 $G_0 = \mu_0$ 给出的 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵，并且

$$G_n = \left[\begin{array}{ccc|c} & G_{n-1} & & \begin{matrix}\mu_n\\ \vdots \\ \mu_{2n-1}\end{matrix} \\ \hline \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} & \mu_{2n} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix}, \quad n \geqslant 0. \tag{3.2}$$

特别地，考虑序列 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$，其中 $\mu_0 = 1$，且对 $n \geqslant 1$有 $\mu_n = 0$。注意，这个序列对应于线性泛函 $\boldsymbol{\delta} \in \Pi^*$，称为狄拉克δ函数，其定义为

$$\langle \boldsymbol{\delta}, p\rangle = p(0), \quad \forall p \in \Pi.$$

在这种情况下，我们有 $G_0 = 1$,

$$G_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

并且对 $n \geqslant 1$有 $\det G_n = 0$。在下文中，我们需要排除这种情况及其他类似情况，因此要求对 $n \geqslant 0$有 $\det G_n \neq 0$。由此得到以下定义。

定义 3.3. 若前经典序列 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 满足如下条件，则称其为经典序列：按 (3.2) 定义的矩阵序列 $\{G_n\}_{n\geqslant 0}$ 满足对 $n \geqslant 0$有 $\det G_n \neq 0$。由 $\mu_n = \langle \mathrm{u}\ x^n\rangle$ 定义的矩泛函称为经典矩泛函。

在下文中，与经典数列相关联的一些正交基 $\mathbb{R}^{n+1}$ 将在我们研究此类序列时发挥重要作用。因此，在下一节中，我们将讨论由一般数列诱导的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的正交结构。

4. Sequences of numbers and orthogonality

给定一个整数 $n \geqslant 0$，一个数列在 $\mathbb{R}^{n+1}$上诱导出一个双线性型，其格拉姆矩阵为在（3.2）中定义的 G_n。本节将探讨与一个数列相关联的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的正交基，并利用它构造 Π_n 中的多项式基，使其相对于相应的矩泛函正交。

对于 $n \geqslant 0$，我们用 $\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_n$ 表示单位矩阵 I_{n+1} 的列，也就是说，$I_{n+1} = [\bar{e}_0\ \bar{e}_1\ \ldots\ \bar{e}_n]$。列向量集合 $\mathcal{E}_n = \{\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_n\}$ 称为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的标准基。

定义 4.1. 设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 为一个数列。对于 $n \geqslant 0$, $\mathfrak{B}_n(\cdot,\cdot)$ 表示由下式定义的双线性型

$$\mathfrak{B}_n(\bar{u},\bar{v}) \;=\; \bar{u}^{\top} G_n\, \bar{v}, \quad \forall \bar{u},\bar{v} \in \mathbb{R}^{n+1},$$

并称为与 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 相关的双线性型（相对于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的标准基）。

对于 $n \geqslant 0$，如果 $\det G_n > 0$，那么 $\mathfrak{B}_n(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的内积。在这种情况下，我们可以定义范数

$$\|\bar{u}\|_n = \sqrt{\mathfrak{B}_n(\bar{u},\bar{u})}, \quad \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

当然，对于与 $\mathfrak{B}_n$ 相关的 $\mathbb{R}^{n+1}$，存在许多正交基。然而，我们关注的是通过对 G_n 进行 Cholesky 分解所得到的正交基。回忆一下，如果 $\det G_n \neq 0$，则存在一个（$n+1$）$\times (n+1)$ 单位下三角矩阵（即其主对角线上元素均为 1） S_n^{-1}，以及一个（$n+1$）$\times (n+1)$ 非奇异对角矩阵 H_n，使得

$$G_n = S_n^{-1}\, H_n\, S_n^{-\top},$$

其中 $S_n^{-\top} = (S_n^{-1})^{\top}$（见 [9] 中的定理 4.1.3）。此外，这个矩阵分解是唯一的。我们可以立即观察到，如果将上述恒等式写成

$$S_n\, G_n\, S_n^{\top} \;=\; H_n,$$

那么，我们就得到 $S_n^{\top}$ 各列之间的正交关系，如下面的定理所示。

定理 4.2. 设 $G_n = S_n^{-1}\, H_n\, S_n^{-\top}$ 是 G_n 的 Cholesky 分解。那么，$S_n^{\top}$ 的各列构成 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一组正交基，其中正交性是相对于双线性型 $\mathfrak{B}_n$ 而言的。

证明。若 $\bar{s}_0$、$\bar{s}_1$、.....、$\bar{s}_n$ 是 $S_n^{\top}$ 的各列，则

$$H_n = S_n\, G_n\, S_n^{\top} = \begin{bmatrix} \bar{s}_0^{\top} \\ \bar{s}_1^{\top} \\ \vdots \\ \bar{s}_n^{\top} \end{bmatrix} G_n \begin{bmatrix} \bar{s}_0 & \bar{s}_1 & \dots & \bar{s}_n \end{bmatrix}.$$

由于 H_n 是对角矩阵，且 G_n 是双线性型 $\mathfrak{B}_n$ 的表示，因此

$$\mathfrak{B}_n(\bar{s}_i,\bar{s}_j) = 0 \quad \text{for} \quad i \neq j,$$

and

$$\mathfrak{B}_n(\bar{s}_i,\bar{s}_i) = h_i, \quad i = 0,1,\dots,n,$$

其中 h_i 是 i 个非零项中的第 i 个，即 $H_n = \mathrm{diag}(h_0、\ h_1、\ .....、\ h_n)$ □

以下定理表明，G_n 和 G_{n+1} 的 Cholesky 分解彼此相关。事实上，G_{n+1} 的 Cholesky 分解可通过对 S_n 和H_n 加边，即添加新行和新列而得到。证明在很大程度上依赖于以下关于

G_n^{-1}以及 $\det G_n$ 的余子式表达式。若 $(G_n)_{i,\,j}$是 G_n的 (i,j)-余子式，其中i、$j = 0$、1、.....、n，则

$$\det G_n = \sum_{k=0}^{n} \mu_{i+k}\,(G_n)_{i,k}, \quad G_n^{-1} = \frac{1}{\det G_n} \begin{bmatrix} (G_n)_{0,0} & (G_n)_{1,0} & \dots & (G_n)_{n,0} \\ (G_n)_{0,1} & (G_n)_{1,1} & \dots & (G_n)_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (G_n)_{0,n} & (G_n)_{1,n} & \dots & (G_n)_{n,n} \end{bmatrix}.$$

在下文中，0 表示适当阶数的零矩阵。

定理 4.3。设 $n \geqslant 0$，且令 $S_n^{-1}\,H_n\,S_n^{-\top}$ 为 G_n 的 Cholesky 分解。则 $G_{n+1} = S_{n+1}^{-1}\,H_{n+1}\,S_{n+1}^{-\top}$，其中

$$S_{n+1}^{\top} = \left[\begin{array}{c|c} S_n^{\top} & \hat{s}_{n+1} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right], \quad H_{n+1} = \left[\begin{array}{c|c} H_n & 0 \\ \hline 0 & h_{n+1} \end{array}\right],$$

其中 $[\hat{s}_{n+1}^{\top}\ 1]^{\top}$ 是由以下形式行列式给出的向量

$$\begin{bmatrix} \hat{s}_{n+1} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det G_n} \det \left[\begin{array}{ccc|c} & G_n & & \mu_{n+1} \\ & & & \vdots \\ & & & \mu_{2n+1} \\ \hline \bar{e}_0 & \dots & \bar{e}_n & \bar{e}_{n+1} \end{array}\right], \tag{4.1}$$

and

$$h_{n+1} = \frac{\det G_{n+1}}{\det G_n}. \tag{4.2}$$

证明。注意，$[S_n^{\top}\ 0]^{\top}$ 的列是向量 $\bar{e}_0$，...，$\bar{e}_n \in \mathbb{R}^{n+2}$ 的线性组合（即 I_{n+2}的前 $n+1$ 列）。那么，$H_{n+1} = S_{n+1}\,G_{n+1}\,S_{n+1}^{\top}$ 满足条件，其中 $S_{n+1}^{\top}$ 和 H_{n+1} 如 (4.1) 和 (4.2) 所示，当且仅当

$$\mathfrak{B}_{n+1}([\hat{s}_{n+1}^{\top}\ 1]^{\top}, \bar{e}_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

and

$$\mathfrak{B}_{n+1}([\hat{s}_{n+1}^{\top}\ 1]^{\top}, [\hat{s}_{n+1}^{\top}\ 1]^{\top}) = \frac{\det G_{n+1}}{\det G_n}.$$

上述条件可以写成线性方程组：

$$G_n\,\hat{s}_{n+1} = -\begin{bmatrix} \mu_{n+1} \\ \vdots \\ \mu_{2n+1} \end{bmatrix}.$$

根据克拉默法则，

$$\hat{s}_{n+1} = \frac{1}{\det G_n}\Big((G_{n+1})_{n+1,0}\,\bar{e}_0 + \cdots + (G_{n+1})_{n+1,n}\,\bar{e}_n\Big), \tag{4.3}$$

这就是沿最后一行展开行列式 (4.1) 所得的结果。

此外，我们还有

$$\hat{s}_{n+1} = -G_n^{-1}\begin{bmatrix} \mu_{n+1} \\ \vdots \\ \mu_{2n+1} \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

and

$$S_{n+1}\,G_{n+1}\,S_{n+1}^{\top}=\left[\begin{array}{c|c} S_n & \mathtt{0} \\ \hline \hat{s}_{n+1}^{\top} & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} G_n & \begin{matrix}\mu_{n+1}\\ \vdots \\ \mu_{2n+1}\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}\mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n+1}\end{matrix} & \mu_{2n+2} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} S_n^{\top} & \hat{s}_{n+1} \\ \hline \mathtt{0} & 1 \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{c|c} H_n & S_n\,B_n \\ \hline C_n\,S_n^{\top} & h_{n+1} \end{array}\right],$$

其中

$$B_n=G_n\,\hat{s}_{n+1}+\begin{bmatrix}\mu_{n+1}\\ \vdots \\ \mu_{2n+1}\end{bmatrix},\quad C_n=\hat{s}_{n+1}^{\top}\,G_n+\begin{bmatrix}\mu_{n+1}\\ \vdots \\ \mu_{2n+1}\end{bmatrix}^{\top},\quad h_{n+1}=[\hat{s}_{n+1}^{\top}\,|\,1]\left[\begin{array}{c}\mu_{n+1}\\ \vdots \\ \mu_{2n+1}\\ \hline \mu_{2n+2}\end{array}\right].$$

由 (4.4) 可得 $B_n=\mathtt{0}$ and $C_n=\mathtt{0}$。最后，利用 (4.3) 以及 $(G_{n+1})_{n+1,\ n+1}=$ 行列式 G_n这一事实，我们得到

$$h_{n+1}=\frac{1}{\det G_n}\sum_{j=0}^{n+1}\mu_{n+1+j}(G_{n+1})_{n+1,j}=\frac{\det G_{n+1}}{\det G_n},$$

这证明了 (4.2)。　□

我们可以在 Π_n 的背景下，将上述讨论重新表述如下。给定一个数列 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$，用 u 表示由$\mu_n=\langle \mathbf{u}\ x^n\rangle$定义的矩泛函。若行列式 $G_n\neq 0$，则

$$\langle \mathbf{u}, p\,q\rangle,\quad p,q\in\Pi_n,$$

是定义在 Π_n 上的一个（非退化）双线性型。容易看出，相对于单项式基，其格拉姆矩阵为 G_n。设 $G_n=S_n^{-1}\,H_n\,S_n^{-\top}$ 为 G_n ($\det G_n\neq 0$) 的 Cholesky 分解，并令

$$S_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ s_{1,0} & 1 & 0 & \dots & 0\\ s_{2,0} & s_{2,1} & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ s_{n,0} & s_{n,1} & s_{n,2} & \dots & 1\end{bmatrix}$$

为矩阵 S_n 的显式表达式。由定理 4.2 可知，多项式集合 $\{P_0(x)\ P_1(x)\dots,P_n(x)\}$，其中

$$P_k(x)=s_{k,0}+s_{k,1}x+\cdots+s_{k,k-1}x^{k-1}+x^k,\quad k=0,1,2,\dots,n,$$

关于 u 构成 Π_n 的一个正交基；也就是说，$\deg P_k=k$ 且

$$\langle \mathbf{u}, P_j\,P_i\rangle=h_j\,\delta_{i,j},\quad 0\leqslant i,j\leqslant n,$$

与 $h_j\neq 0$。此外，根据定理 4.3，该多项式

$$P_{n+1}(x)=\frac{1}{\det G_n}\det\left[\begin{array}{ccc|c} & G_n & & \begin{matrix}\mu_{n+1}\\ \vdots \\ \mu_{2n+1}\end{matrix} \\ \hline 1 & \dots & x^n & x^{n+1}\end{array}\right],$$

次数恰好为 $n+1$，且与 Π_n 中的每个多项式正交，并且

$$h_{n+1} = \langle \mathbf{u}, P_{n+1}^2 \rangle = \frac{\det G_{n+1}}{\det G_n}.$$

5. Characterizations of classical sequences

本节的目标是通过将视角从矩泛函 $\mathbf{u}$ 转向与定义在 Π_n 上的双线性型相关联的格拉姆矩阵 G_n，以经典序列的形式重新表述定理 2.2。回想一下，G_n 是一个汉克尔矩阵（其所有反对角线上的元素均为常数）。因此，可以说本节讨论的是具有额外结构的 Hankel 矩阵：G_n 的元素满足递推关系 (3.1)。这样，我们便可以通过加边扩展双线性型，在 G_n 的基础上添加一行一列来构造新的格拉姆矩阵 G_{n+1}，从而得到 Π_{n+1}；新增行列的元素根据 (3.1) 由 G_n 的元素确定。所得矩阵 G_{n+1} 也将是具有上述额外结构的 Hankel 矩阵。因此，可以通过归纳法证明，G_n 所满足的性质同样也由 G_{n+1} 满足。

下列矩阵将在后文中发挥重要作用。

定义 5.1. 设 a、b、c、d 和 e 为实数，使得对于 $n \geqslant 0$，有 $|a|+|b|+|c|>0$ 和 $n\,a+d \neq 0$。对于 $n \geqslant 1$，我们递归定义 $n \times (n+1)$ 矩阵 R_n 如下：

$$R_n = \left[\begin{array}{ccccc|c} & & R_{n-1} & & & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & (n-1)\,c & (n-1)\,b+e & (n-1)\,a+d \end{array}\right], \quad R_1 = \begin{bmatrix} e & d \end{bmatrix}.$$

考虑微分算子 $\mathcal{R}$：$\Pi \to \Pi$，其定义为

$$\mathcal{R}[p] = \phi(x)\,p' + \psi(x)\,p, \quad \forall p \in \Pi,$$

其中 $\phi(x) = a\,x^2 + b\,x + c$，且 $\psi(x) = d\,x + e$。注意到

$$\mathcal{R}[x^n] \;=\; (n\,a+d)\,x^{n+1} + (n\,b+e)\,x^n + n\,c\,x^{n-1}, \quad n \geqslant 0.$$

由此，矩阵 $R_{n+1}^{\top}$ 是相对于 Π_n 上限制的 $\mathcal{R}$ 的单项式基的矩阵表示。

设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 为一个实数序列。定义矩向量

$$\mathtt{M}_n = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \end{bmatrix}^{\top}, \quad n \geqslant 0.$$

如果 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是前经典的，那么关于 $\{\mu_0, \dots, \mu_n\}$ 的方程 (3.1) 可写为

$$R_n\,\mathtt{M}_n = \mathtt{0}.$$

这意味着，若 $\mathbf{u}$ 是定义为 $\mu_n := \langle \mathbf{u}\ x^n \rangle$ 的矩泛函，则由 (3.1) 可得

$$\langle \mathbf{u}, \mathcal{R}[x^n] \rangle = 0, \quad n \geqslant 0.$$

现在，考虑一个向量，其各项为 Π_n 中的单项式：

$$\mathtt{X}_n = \begin{bmatrix} 1 & x & \dots & x^n \end{bmatrix}^{\top}.$$

如果我们定义 $n\times(n+1)$ 矩阵

$$N_n=\left[\begin{array}{c|c} N_{n-1} & \mathtt{0} \\ \hline \mathtt{0} & n \end{array}\right],\quad N_1=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix},\quad N_0=0,$$

then

$$\frac{d}{dx}\mathtt{X}_n \;=\; N_n^{\top}\,\mathtt{X}_{n-1}.$$

5.1. Bochner 型刻画。对于 $n\geqslant 0$，我们引入（$n+1$）$\times$（$n+1$）矩阵 $\mathtt{D}_n$，定义如下

$$\mathtt{D}_0=0,\qquad \mathtt{D}_n:=R_n^{\top}N_n,\quad n\geqslant 1.$$

$\mathtt{D}_n$ 可以递归地表示如下:

$$\mathtt{D}_n=\left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & \mathtt{D}_{n-1} & & 0 \\ & & & n\,(n-1)\,c \\ & & & n\,((n-1)\,b+e) \\ \hline 0 & \dots & 0 & n\,((n-1)\,a+d) \end{array}\right],\quad n\geqslant 1.$$

注意，$\mathtt{D}_n$ 是算子相对于单项式基的矩阵表示

$$\mathcal{D}[p]:=\mathcal{R}\left[\frac{d}{dx}p\right]=\phi(x)\,p''+\psi(x)\,p',\quad \forall p\in\Pi, \tag{5.1}$$

限制在 Π_n 上。

在下述定理中，我们证明 $\mathtt{D}_n$ 是关于定义 4.1 中给出的双线性型 $\mathfrak{B}_n$ 的自伴矩阵。

定理 5.2. 设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是满足 (3.1) 的经典序列，且 $\mathfrak{B}_n$ 是定义 4.1 中定义的算子。则对于 $n\geqslant 0$，矩阵 $\mathtt{D}_n$ 满足

$$\mathfrak{B}_n(\mathtt{D}_n\bar{u},\bar{v})=\mathfrak{B}_n(\bar{u},\mathtt{D}_n\bar{v}),\quad \bar{u},\bar{v}\in\mathbb{R}^{n+1}. \tag{5.2}$$

证明. 注意，证明 (5.2) 等价于证明

$$\mathtt{D}_n^{\top}\,G_n=G_n\,\mathtt{D}_n.$$

我们用归纳法证明 $n\geqslant 0$ 的情形。

显然，$\mathtt{D}_0^{\top}\,G_0=G_0\mathtt{D}_0$。为清楚起见，我们还证明 $n=1$ 的情形，因为这是第一个非平凡情形。我们计算

$$\mathtt{D}_1^{\top}\,G_1=\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline e & d \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \mu_0 & \mu_1 \\ \hline \mu_1 & \mu_2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} \mathtt{D}_0^{\top} & 0 \\ \hline e & d \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} G_0 & \mu_1 \\ \hline \mu_1 & \mu_2 \end{array}\right].$$

再次通过分块相乘，得到

$$\mathtt{D}_1^{\top}\,G_1=\left[\begin{array}{c|c} \mathtt{D}_0^{\top}\,G_0 & \mathtt{D}_0^{\top}\,\mu_1 \\ \hline d\,\mu_1+e\,\mu_0 & e\,\mu_1+d\,\mu_2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} G_0\,\mathtt{D}_0^{\top} & 0 \\ \hline d\,\mu_1+e\,\mu_0 & e\,\mu_1+d\,\mu_2 \end{array}\right].$$

由于 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是经典序列，根据条件 (3.1) 和 $n=0$，我们有

$$\mu_1\,\mathtt{D}_0=0=d\,\mu_1+e\,\mu_0.$$

因此，我们可以写成

$$\mathtt{D}_1^\top G_1 = \left[\begin{array}{c|c} G_0\,\mathtt{D}_0^\top & e\,\mu_0 + d\,\mu_1 \\ \hline \mu_1\,\mathtt{D}_0 & e\,\mu_1 + d\,\mu_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} G_0 & \mu_1 \\ \hline \mu_1 & \mu_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathtt{D}_0 & e \\ \hline 0 & d \end{array}\right] = G_1\,\mathtt{D}_1.$$

这证明了 $\mathbf{D}_1^\top G_1 = G_1\mathbf{D}_1$。

现在，假设对于某个 $k \geqslant 0$，$\mathbf{D}_k^\top G_k = G_k\mathbf{D}_k$ 成立。我们计算

$$\begin{aligned} &\mathtt{D}_{k+1}^\top G_{k+1} \\ &= \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathtt{D}_k^\top & & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 \quad (k+1)\,k\,c \quad (k+1)\,(k\,b+e) & (k+1)\,(k\,a+d) \end{array}\right] \\ &\quad \times \left[\begin{array}{ccc|c} & G_k & & \begin{matrix}\mu_{k+1}\\ \vdots \\ \mu_{2k+1}\end{matrix} \\ \hline \mu_{k+1} & \cdots & \mu_{2k+1} & \mu_{2k+2} \end{array}\right]. \end{aligned}$$

两边乘以分块，得到

$$\mathtt{D}_{k+1}^\top G_{k+1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathtt{D}_k^\top G_k & \bar{x}_k \\ \hline \bar{y}_k^\top & \bar{z}_k \end{array}\right],$$

其中

$$\bar{x}_k = \mathtt{D}_k^\top \begin{bmatrix} \mu_{k+1} \\ \vdots \\ \mu_{2k+1} \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_k^\top = [(k+1)\,k\,c \quad (k+1)\,(k\,b+e) \quad (k+1)\,(k\,a+d)] \left[\begin{array}{ccc} \mu_{k-1} & \cdots & \mu_{2k-1} \\ \mu_k & \dots & \mu_{2k} \\ \hline \mu_{k+1} & \cdots & \mu_{2k+1} \end{array}\right],$$

and

$$\bar{z}_k = (k+1)\,k\,c\,\mu_{2k} + (k+1)\,(k\,b+e)\,\mu_{2k+1} + (k+1)\,(k\,a+d)\,\mu_{2k+2} = \bar{z}_k^\top.$$

由于根据归纳假设，我们有

$$\mathtt{D}_{k+1}^\top G_{k+1} = \left[\begin{array}{c|c} G_k\,\mathtt{D}_k & \bar{x}_k \\ \hline \bar{y}_k^\top & \bar{z}_k^\top \end{array}\right],$$

显然，我们的主要工作应集中于证明 $\bar{x}_k = \bar{y}_k$。注意到

$$\bar{x}_k = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathtt{D}_{k-1}^\top & & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 \quad k\,(k-1)\,c \quad k\,((k-1)\,b+e) & k\,((k-1)\,a+d) \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mu_{k+1} \\ \vdots \\ \mu_{2k+1} \end{bmatrix}.$$

那么，$\bar{x}_k$ 的第 k个元素为

$$k\,(k-1)\,c\,\mu_{2k-1} + k\,((k-1)\,b+e)\,\mu_{2k} + k\,((k-1)\,a+d)\,\mu_{2k+1},$$

而 $\bar{y}_k$ 的第 k个元素为

$$(k+1)\,k\,c\,\mu_{2k-1} + (k+1)\,(k\,b+e)\,\mu_{2k} + (k+1)\,(k\,a+d)\,\mu_{2k+1},$$

这意味着 $\bar{y}_k - \bar{x}_k$ 的第 k 个元素为

$$(2k\,a+d)\,\mu_{2k+1} + (2k\,b+e)\,\mu_{2k} + 2k\,c\,\mu_{2k-1} = 0,$$

其中我们用到了条件 (3.1)。

现在，注意到 $\mathtt{D}_{k-1}^{\top}$ 的最后一行为

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & (k-1)\,(k-2)\,c & (k-1)\,((k-2)\,b+2) & (k-1)\,((k-2)\,a+d) \end{bmatrix},$$

我们有，$\bar{x}_k$ 的第（$k-1$）个元素为

$$(k-1)\,(k-2)\,c\,\mu_{2k-2} + (k-1)\,((k-2)\,b+2)\,\mu_{2k-1} + (k-1)\,((k-2)\,a+d)\,\mu_{2k},$$

而 $\bar{y}_k$ 的第（$k-1$）个元素为

$$(k+1)\,k\,c\,\mu_{2k-2} + (k+1)\,(k\,b+e)\,\mu_{2k-1} + (k+1)\,(k\,a+d)\,\mu_{2k}.$$

于是，$\bar{y}_k - \bar{x}_k$ 的第（$k-1$）个元素为

$$2\Big[((2k-1)\,a+d)\,\mu_{2k} + ((2k-1)\,b+e)\,\mu_{2k-1} + (2k-1)\,c\,\mu_{2k-2}\Big] = 0,$$

这里我们再次使用了带有 $n = k-1$的（3.1）。

如果继续这样推导，那么对于 $i = 0$、1、.....、 k， $\bar{y}_k - \bar{x}_k$的第（$i+1$）个元素为

$$(k+1-i)\Big[((k+i)\,a+d)\mu_{k+1+i} + ((k+i)\,b+e)\,\mu_{k+i} + (k+i)\,c\,\mu_{k-1+i}\Big] = 0.$$

这意味着 $\bar{x}_k = \bar{y}_k$ ，因此，

$$\mathtt{D}_{k+1}^{\top}\,G_{k+1} = \left[\begin{array}{c|c} G_k\,\mathtt{D}_k & \bar{y}_k \\ \hline \bar{x}_k^{\top} & \bar{z}_k^{\top} \end{array}\right] = G_{k+1}\,\mathtt{D}_{k+1},$$

这证明了对于 $n \geqslant 0$， $\mathtt{D}_n^{\top}\,G_n = G_n \mathtt{D}_n$ 成立。 □

现在来考察 $\mathtt{D}_n$ 的特征向量。设 $\bar{u}$、$\bar{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ 分别是对应于不同特征值 λ 和 $\overline{\lambda}$ 的特征向量。那么，

$$\lambda\,\mathfrak{B}_n(\bar{u},\bar{v}) = \mathfrak{B}_n(\lambda\,\bar{u},\bar{v}) = \mathfrak{B}_n(\mathtt{D}_n\bar{u},\bar{v}) = \mathfrak{B}_n(\bar{u},\mathtt{D}_n\bar{v}) = \mathfrak{B}_n(\bar{u},\overline{\lambda}\,\bar{v}) = \overline{\lambda}\,\mathfrak{B}_n(\bar{u},\bar{v}),$$

这意味着

$$(\lambda - \overline{\lambda})\,\mathfrak{B}_n(\bar{u},\bar{v}) = 0.$$

由于 $\lambda \neq \overline{\lambda}$，我们必有 $\mathfrak{B}_n(\bar{u},\bar{v}) = 0$，因此， $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 关于 $\mathfrak{B}_n$ 正交。我们已经见过 $\mathtt{D}_n$ 的特征向量，如下述定理所示。事实上，该定理从 $\mathtt{D}_n$ 的角度刻画了经典序列。

定理 5.3. 对于 $n \geqslant 0$，设 $S_n^{-1}\,H_n\,S_n^{-\top}$ 是 G_n 的 Cholesky 分解，且 $\bar{s}_{n,0}, \bar{s}_{n,1}, \dots, \bar{s}_{n,n}$ 表示 $S_n^{\top}$ 的各列。那么， $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是经典序列，当且仅当

$$\mathtt{D}_n\,\bar{s}_{n,j} \;=\; \lambda_j\,\bar{s}_{n,j}, \quad n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant n,$$

其中 $\lambda_j = j\,[(j-1)\,a+d]$。

证明。假设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个经典序列。对于 $n=0$，则 $\mathtt{D}_0=0$ 和$\bar{s}_{0,\ 0}=1$。因此显然 $\mathtt{D}_{0}\,\bar{s}_{0,\ 0}=\lambda_0\,\bar{s}_{0,\ 0}$。

对于 $n=1$,

$$\mathtt{D}_1=\left[\begin{array}{c|c}\mathtt{D}_0 & e\\ \hline 0 & d\end{array}\right],\quad \bar{s}_{1,0}=\left[\begin{array}{c}\bar{s}_{0,0}\\ \hline 0\end{array}\right].$$

然后，通过分块相乘，可得

$$\mathtt{D}_1\,\bar{s}_{1,0}=\left[\begin{array}{c}\mathtt{D}_0\,\bar{s}_{0,0}\\ \hline 0\end{array}\right]=\lambda_0\left[\begin{array}{c}\bar{s}_{0,0}\\ \hline 0\end{array}\right]=\lambda_0\,\bar{s}_{1,0}.$$

由于 $S_1^{\top}$是对角线上元素均为 1 的上三角矩阵，因此 $\{\bar{s}_{1,0},\bar{s}_{1,1}\}$ 构成了 $\mathbb{R}^2$的一组基。于是我们可以写成

$$\mathtt{D}_1\,\bar{s}_{1,1}=a_{1,1}\,\bar{s}_{1,1}+a_{1,0}\,\bar{s}_{1,0},$$

对于某些常数 $a_{1,\ 1}$ 和 $a_{1,\ 0}$。利用 $S_1^{\top}$关于 $\mathfrak{B}_1$ 的列正交性以及定理 5.2，我们得到

$$a_{1,j}=\frac{\mathfrak{B}_1(\mathtt{D}_1\,\bar{s}_{1,1},\bar{s}_{1,j})}{h_j}=\frac{\mathfrak{B}_1(\bar{s}_{1,1},\mathtt{D}_1\,\bar{s}_{1,j})}{h_j},\quad j=0,1.$$

由此可得 $a_{1,\ 0}=0$ ，因此,

$$\mathtt{D}_1\,\bar{s}_{1,1}=a_{1,1}\,\bar{s}_{1,1}=\begin{bmatrix}*\\ a_{1,1}\end{bmatrix},$$

其中我们考虑到了 $\bar{s}_{1,\ 1}=[*\ 1]^{\top}$ （记作 $*$ 的元素值无关紧要）。如果我们按分块相乘，得到

$$\mathtt{D}_1\,\bar{s}_{1,1}=\begin{bmatrix}*\\ d\end{bmatrix},$$

这意味着 $a_{1,\ 1}=d=\lambda_1$。

现在，假设

$$\mathtt{D}_k\,\bar{s}_{k,j}\ =\ \lambda_j\,\bar{s}_{k,j},\quad 0\leqslant j\leqslant k,$$

对某个 $k\geqslant 0$成立。回想一下,

$$\mathtt{D}_{k+1}=\left[\begin{array}{ccc|c}&&&0\\ &&&\vdots\\ &\mathtt{D}_k&&0\\ &&&(k+1)\,k\,c\\ &&&(k+1)\,(k\,b+e)\\ \hline 0&\dots&0&(k+1)\,(k\,a+d)\end{array}\right],$$

并且根据定理（4.3），

$$\bar{s}_{k+1,j}=\left[\begin{array}{c}\bar{s}_{k,j}\\ \hline 0\end{array}\right],\quad 0\leqslant j\leqslant k,\quad \text{and}\quad \bar{s}_{k+1,k+1}=\left[\begin{array}{c}*\\ \hline 1\end{array}\right],$$

其中，记为 $*$ 的元素值与此处无关。通过分块相乘并利用归纳假设，我们得到

$$\mathtt{D}_{k+1}\,\bar{s}_{k+1,j}=\left[\begin{array}{c}\mathtt{D}_k\,\bar{s}_{k,j}\\ \hline 0\end{array}\right]=\lambda_j\,\bar{s}_{k+1,j},\quad 0\leqslant j\leqslant k.$$

由于 $S_{k+1}^{\top}$ 是一个对角线元素均为 1 的上三角矩阵，其列构成了 $\mathbb{R}^{k+1}$ 的一组基。于是，我们可以写成

$$\mathtt{D}_{k+1}\,\bar{s}_{k+1,k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} a_{k+1,j}\,\bar{s}_{k+1,j},$$

其中，根据 $S_{k+1}^{\top}$ 关于 $\mathfrak{B}_{k+1}$ 的列正交性以及定理 5.2，我们有

$$\begin{aligned} a_{k+1,j} &= \frac{\mathfrak{B}_{k+1}(\mathtt{D}_{k+1}\,\bar{s}_{k+1,k+1}, \bar{s}_{k+1,j})}{h_j} \\ &= \frac{\mathfrak{B}_{k+1}(\bar{s}_{k+1,k+1}, \mathtt{D}_{k+1}\,\bar{s}_{k+1,j})}{h_j}, \quad 0 \leqslant j \leqslant k+1. \end{aligned}$$

由此可得

$$a_{k+1,j} = \lambda_j\,\frac{\mathfrak{B}_{k+1}(\bar{s}_{k+1,k+1}, \bar{s}_{k+1,j})}{h_j} = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant k,$$

因此，

$$\mathtt{D}_{k+1}\,\bar{s}_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1}\,\bar{s}_{k+1,k+1} = \left[\frac{*}{a_{k+1,k+1}}\right].$$

此外，如果我们按分块相乘，便得到

$$\mathtt{D}_{k+1}\,\bar{s}_{k+1,k+1} = \left[\frac{*}{\lambda_{k+1}}\right],$$

这意味着 $a_{k+1,\ k+1} = \lambda_{k+1}$。然后由数学归纳法原理证明充分条件。

反过来，如果 $\mathfrak{B}_n$ 是定义 4.1 中定义的双线性型，那么

$$\mathfrak{B}_n(\mathtt{D}_n\,\bar{s}_{n,j}, \bar{s}_{n,k}) = \mathfrak{B}_n(\bar{s}_{n,j}, \mathtt{D}_n\,\bar{s}_{n,k}), \quad n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant j,k \leqslant n.$$

事实上，

$$\mathfrak{B}_n(\mathtt{D}_n\,\bar{s}_{n,j}, \bar{s}_{n,k}) - \mathfrak{B}_n(\bar{s}_{n,j}, \mathtt{D}_n\,\bar{s}_{n,k}) = (\lambda_j - \lambda_k)\,\mathfrak{B}_n(\bar{s}_{n,j}, \bar{s}_{n,k}) = (\lambda_j - \lambda_k)\,h_j\,\delta_{j,k},$$

它对所有 $0 \leqslant j$、$k \leqslant n$ 都为零。这意味着

$$S_n\,(\mathtt{D}_n^{\top}\,G_n - G_n\,\mathtt{D}_n)\,S_n^{\top} = \mathtt{0}, \quad n \geqslant 0,$$

或者，等价地，

$$\mathtt{D}_n^{\top}\,G_n - G_n\,\mathtt{D}_n = \mathtt{0}.$$

由于 $\mathbf{D}_n = R_n^{\top} N_n$，上述矩阵恒等式的第一列为 $N_n^{\top}\,R_n\,\mathbf{M}_n$ =0，或者，等价地，

$$k\,\left[\big((k-1)\,a + d\big)\,\mu_k + \big((k-1)\,b + e\big)\,\mu_{k-1} + (k-1)\,\mu_{k-2}\right] = 0,$$

对于 $n \geqslant 0$ 和 $0 \leqslant k \leqslant n$。由此可知，$\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 满足 (3.1)；因此，它是预经典的。此外，$\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是经典的，因为否则，对于某个 $n \geqslant 0$，G_n 将不具有 Cholesky 分解。□

上述结果可推广到 (5.1) 中定义的算子 $\mathcal{D}$ 。设$\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 为实数经典序列，且 u 为定义为 $\mu_n = \langle \mathbf{u}\ x^n\rangle$, $n \geqslant 0$ 的矩泛函。则 (5.2) 表明

$$\langle \mathbf{u}, \mathcal{D}[p]\, q\rangle \ = \ \langle \mathbf{u}, p\, \mathcal{D}[q]\rangle\,, \quad \forall p, q \in \Pi.$$

也就是说， $\mathcal{D}$ 是作用于多项式上的自伴算子。此外，对于 $n \geqslant 0$，设 $S_n^{-1}\, H_n\, S_n^{-\top}$是 G_n的 Cholesky 分解，并设$\bar{s}_{n,\ 0}$， $\bar{s}_{n,\ 1}$， ....., $\bar{s}_{n,\ n}$表示 $S_n^{\top}$的列。由定理 5.3 可推知，多项式序列$\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ 满足

$$P_n(x) \ = \ \bar{s}_{n,n}^{\top}\, \mathtt{X}_n, \quad n \geqslant 0,$$

是算子 $\mathcal{D}$的特征函数。也就是说,

$$\mathcal{D}[P_n] \ = \ \lambda_n\, P_n, \quad n \geqslant 0,$$

其中 $\lambda_n \ = \ n\,[(n-1)\,a + d]$。注意， $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$是关于u正交的多项式序列。

5.2. Hahn 型刻画。设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个实数序列，并设 a、 b、 $c \in \mathbb{R}$ 满足 $|a| + |b| + |c| \ > \ 0$。我们可以如下定义一个新序列 $\{\sigma_n\}_{n\geqslant 0}$ ：

$$\sigma_n = a\,\mu_{n+2} + b\,\mu_{n+1} + c\,\mu_n, \quad n \geqslant 0.$$

注意，若 u 是定义为 $\mu_n = \langle \mathbf{u}\ x^n\rangle$ 的矩泛函，则 $\{\sigma_n\}_{n\geqslant 0}$是由 $\mathbf{v} \ = \phi(x)\, \mathbf{u}$ 给出的泛函的矩序列，其中 $\phi(x) \ = a\, x^2 + b\, x + c$。事实上，对于 $n \geqslant 0$,

$$\langle \mathbf{v}, x^n\rangle = \langle \mathbf{u}, \phi\, x^n\rangle = \langle \mathbf{u}, a\, x^{n+2} + b\, x^{n+1} + c\, x^n\rangle = a\mu_{n+2} + b\mu_{n+1} + c\mu_n = \sigma_n.$$

我们将 $\{G_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$ 记为由 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵构成的序列，其中

$$G_0^{(1)} = \sigma_0, \quad \text{and} \quad G_n^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & G_{n-1}^{(1)} & & \sigma_n \\ & & & \vdots \\ & & & \sigma_{2n-1} \\ \hline \sigma_n & \cdots & \sigma_{2n-1} & \sigma_{2n} \end{array}\right], \quad n \geqslant 1. \tag{5.3}$$

下面的定理表明， $\{\sigma_n\}_{n\geqslant 0}$ 继承了前经典性质。

定理 5.4。若 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是满足 (3.1) 的前经典序列，则 $\{\sigma_n\}_{n\geqslant 0}$ 是满足以下条件的前经典序列

$$(n\,a + d_1)\,\sigma_{n+1} + (n\,b + e_1)\,\sigma_n + n\,c\,\sigma_{n-1} \ = \ 0, \quad n \geqslant 0,$$

其中 $d_1 = d + 2\,a$ 和 $e_1 = e + b$。此外,

$$\sigma_n \ = \ -(n\,a + d)\,\mu_{n+2} - (n\,b + e)\,\mu_{n+1} - n\,c\,\mu_n, \quad n \geqslant 0. \tag{5.4}$$

证明。对于 $n \geqslant 0$，我们计算得

$$\begin{aligned}
&(n\,a + d_1)\,\sigma_{n+1} + (n\,b + e_1)\,\sigma_n + n\,c\,\sigma_{n-1} \\
&= a\,\big([(n+2)a + d]\mu_{n+3} + [(n+2)b + e]\mu_{n+2} + (n+2)c\mu_{n+1} - b\,\mu_{n+2} - 2\,c\,\mu_{n+1}\big) \\
&\quad + b\,\big([(n+1)a + d]\mu_{n+2} + [(n+1)b + e]\mu_{n+1} + (n+1)c\,\mu_n + a\,\mu_{n+2} - c\,\mu_n\big) \\
&\quad + c\,\big((n\,a + d)\,\mu_{n+1} + (n\,b + e)\,\mu_n + n\,c\,\mu_{n-1} + 2\,a\,\mu_{n+1} + b\,\mu_n\big),
\end{aligned}$$

其中我们用到了 $\sigma_n = a\,\mu_{n+2} + b\,\mu_{n+1} + c\,\mu_n$。由 (3.1) 可得

$$(n\,a + d_1)\,\sigma_{n+1} + (n\,b + e_1)\,\sigma_n + n\,c\,\sigma_{n-1}$$

$$= -a\,b\,\mu_{n+2} - 2\,a\,c\,\mu_{n+1} + a\,b\,\mu_{n+2} - b\,c\,\mu_n + 2\,a\,c\,\mu_{n+1} + b\,c\,\mu_n = 0.$$

最后，由于 (3.1) 可以写成

$$a\,\mu_{n+2} + b\,\mu_{n+1} + c\,\mu_n \;=\; -(n\,a + d)\,\mu_{n+2} - (n\,b + e)\,\mu_{n+1} - n\,c\,\mu_n.$$

□

当 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是实数的经典序列时，矩阵 $G_n^{(1)}$满足一个涉及矩阵 G_n 和 D_n的有趣且有用的关系。

命题 5.5. 设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是满足 (3.1) 的实数经典序列。那么，对于 $n \geqslant 0$,

$$N_{n+1}^{\top}\, G_n^{(1)}\, N_{n+1} \;=\; -\mathsf{D}_{n+1}^{\top}\, G_{n+1}.$$

证明. 我们用归纳法证明该定理。对于 $n = 0$，一方面有

$$N_1^{\top}\, G_0^{(1)}\, N_1 \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sigma_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}.$$

另一方面，我们有

$$-\mathsf{D}_1^{\top}\, G_1 \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -e & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -e\,\mu_0 - d\,\mu_1 & -e\,\mu_1 - d\,\mu_2 \end{bmatrix}.$$

由于 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$满足 (3.1)，我们有 $-e\,\mu_0 - d\,\mu_1 = 0$，并且根据 (5.4)，$-e\,\mu_1 - d\,\mu_2 = \sigma_0$。因此,

$$-\mathsf{D}_1^{\top}\, G_1 \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{bmatrix},$$

这证明了 $N_1^{\top}\, G_0^{(1)}\, N_1 = -\mathsf{D}_1^{\top}\, G_1$。

现在，假设对于 $k \geqslant 0$，$N_{k+1}^{\top}\, G_k^{(1)}\, N_{k+1} \;=\; -\mathsf{D}_{k+1}^{\top}\, G_{k+1}$ 成立。一方面，我们计算

$$N_{k+2}^{\top}\, G_{k+1}^{(1)}\, N_{k+2}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} N_{k+1}^{\top} & \mathsf{0} \\ \hline \mathsf{0} & k+2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} & G_k^{(1)} & & \sigma_{k+1} \\ & & & \vdots \\ & & & \sigma_{2k+1} \\ \hline \sigma_{k+1} & \cdots & \sigma_{2k+1} & \sigma_{2k+2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} N_{k+1} & \mathsf{0} \\ \hline \mathsf{0} & k+2 \end{array}\right].$$

通过分块相乘并利用归纳假设，我们得到

$$N_{k+2}^{\top}\, G_{k+1}^{(1)}\, N_{k+2} \;=\; \left[\begin{array}{c|c} -\mathsf{D}_{k+1}^{\top}\, G_{k+1} & \bar{x}_k \\ \hline \bar{x}_k^{\top} & (k+2)^2\,\sigma_{2k+2} \end{array}\right],$$

其中

$$\bar{x}_k \;=\; (k+2)\, N_{k+1}^{\top} \begin{bmatrix} \sigma_{k+1} \\ \vdots \\ \sigma_{2k+1} \end{bmatrix}.$$

另一方面,

$$-\,\mathsf{D}_{k+2}^{\top}\, G_{k+2}$$

$$= \left[\begin{array}{ccccc|c} & & -\mathtt{D}_{k+1}^{\top} & & & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & -(k+2)\,(k+1)\,c & -(k+2)\,[(k+1)\,b+e] & -(k+2)\,[(k+1)\,a+d] \end{array}\right]$$

$$\times \left[\begin{array}{ccc|c} & G_{k+1} & & \begin{matrix}\mu_{k+2}\\ \vdots \\ \mu_{2k+3}\end{matrix} \\ \hline \mu_{k+2} & \cdots & \mu_{2k+3} & \mu_{2k+4} \end{array}\right].$$

分块相乘后，我们得到

$$-\mathtt{D}_{k+2}^{\top}\, G_{k+2} \;=\; \left[\begin{array}{c|c} -\mathtt{D}_{k+1}^{\top}\, G_{k+1} & \bar{y}_k \\ \hline \bar{z}_k & w_k \end{array}\right],$$

其中

$$\bar{y}_k = -\mathtt{D}_{k+1}^{\top} \begin{bmatrix}\mu_{k+2}\\ \vdots \\ \mu_{2k+3}\end{bmatrix},$$

$$\bar{z}_k = \begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & -(k+2)\,(k+1)\,c & -(k+2)\,[(k+1)\,b+e]\end{bmatrix}\, G_{k+1} \\ -\,(k+2)\,[(k+1)\,a+d]\, \begin{bmatrix}\mu_{k+2} & \dots & \mu_{2k+3}\end{bmatrix},$$

$$w_k = -(k+2)\Big[(k+1)\,c\,\mu_{2k+2} + [(k+1)\,b+e]\,\mu_{2k+3} + [(k+1)\,a+d]\,\mu_{2k+4}\Big].$$

根据定理 5.2，我们有 $\bar{z}_k = \bar{y}_k^{\top}$。因此，我们应当着重证明 $\bar{x}_k = \bar{y}_k$ 和 $w_k = (k+2)^2\,\sigma_{2k+2}$。我们先证明第二个恒等式。注意到

$$w_k = -\,(k+2)\Big[[(2k+2)\,a+d]\,\mu_{2k+4} + [(2k+2)\,b+e]\,\mu_{2k+3} + (2k+2)\,c\,\mu_{2k+2}\Big] \\ +\,(k+2)\,(k+1)\,(a\,\mu_{2k+4} + b\,\mu_{2k+3} + c\,\mu_{2k+2}).$$

由式 (5.4) 以及 $\sigma_{2k+2} = a\,\mu_{2k+4} + b\,\mu_{2k+3} + c\,\mu_{2k+2}$ 这一事实，我们推得

$$w_k = (k+2)\,\sigma_{2k+2} + (k+2)\,(k+1)\,\sigma_{2k+2} = (k+2)^2\,\sigma_{2k+2}.$$

为了证明 $\bar{x}_k = \bar{y}_k$，我们注意到

$$\bar{x}_k \;=\; (k+2)\, \left[\begin{array}{c|c} N_k^{\top} & \mathtt{0} \\ \hline \mathtt{0} & k+1 \end{array}\right] \begin{bmatrix}\sigma_{k+1}\\ \vdots \\ \sigma_{2k+1}\end{bmatrix},$$

and

$$\bar{y}_k = \left[\begin{array}{ccccc|c} & & -\mathtt{D}_k^{\top} & & & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & -(k+1)\,k\,c & -(k+1)\,(k\,b+e) & -(k+1)\,(k\,a+d) \end{array}\right] \begin{bmatrix}\mu_{k+2}\\ \vdots \\ \mu_{2k+3}\end{bmatrix}.$$

那么，$\bar{x}_k - \bar{y}_k$ 的最后一个元素为

$$(k+2)\,(k+1)\,\sigma_{2k+1} + (k+1)\,[k\,c\,\mu_{2k+1} + (k\,b+e)\,\mu_{2k+2} + (k\,a+d)\,\mu_{2k+3}]$$

$$= (k+2)\,(k+1)\,\sigma_{2k+1} - (k+1)\,\sigma_{2k+1} - (k+1)^2\,\sigma_{2k+1} = 0,$$

这里我们用到了 (5.4) 以及 $\sigma_{2k+1} = a\,\mu_{2k+3} + b\,\mu_{2k+2} + c\,\mu_{2k+1}$ 这一事实。一般而言，$\bar{x}_k - \bar{y}_k$的第 i 个元素（其中 $1 \leqslant i \leqslant k+2$）为

$$(i-1)\left[(k+2)\,\sigma_{k+i-1} + [(i-2)\,c\,\mu_{k+i-1} + [(i-2)\,b + e]\,\mu_{k+i} + [(i-2)\,a + d]\,\mu_{k+1+i}\right]$$

$$= (i-1)\left[(k+2)\,\sigma_{k+i-1} - \sigma_{k+i-1} - (k+1)\,\sigma_{k+i-1}\right] = 0,$$

这里我们用到了 (5.4) 以及 $\sigma_{k+i-1} = a\,\mu_{k+1+i} + b\,\mu_{k+i} + c\,\mu_{k+i-1}$ 这一事实。这证明了 $\bar{x}_k - \bar{y}_k = 0$，进而证明了 $N_{k+2}^{\top}\,G_{k+1}^{(1)}\,N_{k+2} = -\mathbf{D}_{k+2}^{\top}\,G_{k+2}$。

由数学归纳法原理可知，对于 $n \geqslant 0$，$N_{n+1}^{\top}\,G_n^{(1)}\,N_{n+1} = -\mathbf{D}_{n+1}^{\top}\,G_{n+1}$ 成立。□

现在，设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 为一个实数经典序列。对于 $n \geqslant 1$，设 $S_n^{-1}\,H_n\,S_n^{-\top}$ 为 G_n 的 Cholesky 分解，并设 $\bar{s}_{n,0}, \bar{s}_{n,1}, \ldots, \bar{s}_{n,n}$ 表示 $S_n^{\top}$ 的各列。考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中向量的集合 $\{\bar{s}_{n,0}^{(1)}, \ldots, \bar{s}_{n,n}^{(1)}\}$，其中

$$\bar{s}_{n,j}^{(1)} = \frac{1}{j+1}\,N_{n+1}\,\bar{s}_{n+1,j+1}, \quad 0 \leqslant j \leqslant n.$$

注意到，$\{\bar{s}_{n,0}^{(1)}, \ldots, \bar{s}_{n,n}^{(1)}\}$ 构成了 $\mathbb{R}^{n+1}$的一组基。此外，由于 $S_n^{\top}$是单位上三角矩阵，因此定义的$(n+1)\times(n+1)$矩阵$S_{n,\,1}^{\top}$

$$S_{n,1}^{\top} = \left[\bar{s}_{n,0}^{(1)}\ \bar{s}_{n,1}^{(1)}\ \cdots\ \bar{s}_{n,n}^{(1)}\right], \tag{5.5}$$

也是单位上三角矩阵。我们证明，(5.3) 中定义的 $G_n^{(1)}$存在 Cholesky 分解，其中 $S_{n,\,1}^{-1}$ 是其三角矩阵因子。

定理 5.6. 设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是满足 (3.1) 的实数经典序列。对于 $n \geqslant 0$，设 $S_n^{-1}\,H_n\,S_n^{-\top}$ 是 G_n的 Cholesky 分解。则 $G_n^{(1)}$存在如下 Cholesky 分解：

$$G_n^{(1)} = S_{n,1}^{-1}\,H_{n,1}\,S_{n,1}^{-\top},$$

其中，$S_{n,\,1}^{\top}$是 (5.5) 中定义的矩阵，且$H_{n,\,1} = \mathsf{diag}[h_0^{(1)}, \ldots, h_n^{(1)}]$，其中

$$h_j^{(1)} = -\frac{\lambda_{j+1}}{(j+1)^2}\,h_{j+1}, \quad j \geqslant 0,$$

以及 $\lambda_j = j\,[(j-1)\,a + d]$。

证明。对于 $0 \leqslant j$、$k \leqslant n$，我们计算得

$$\left(\bar{s}_{n,j}^{(1)}\right)^{\top}\,G_n^{(1)}\,\bar{s}_{n,k}^{(1)} = \frac{1}{(j+1)\,(k+1)}\,\bar{s}_{n+1,j+1}^{\top}\,N_{n+1}^{\top}\,G_n^{(1)}\,N_{n+1}\,\bar{s}_{n+1,k+1}.$$

利用定理 5.3 和命题 5.5，我们得到

$$\begin{aligned}\left(\bar{s}_{n,j}^{(1)}\right)^{\top}\,G_n^{(1)}\,\bar{s}_{n,k}^{(1)} &= -\frac{1}{(j+1)\,(k+1)}\,\bar{s}_{n+1,j+1}^{\top}\,\mathtt{D}_{n+1}^{\top}\,G_{n+1}\,\bar{s}_{n+1,k+1}\\ &= -\frac{\lambda_{j+1}}{(j+1)\,(k+1)}\,\bar{s}_{n+1,j+1}^{\top}\,G_{n+1}\,\bar{s}_{n+1,k+1}\\ &= -\frac{\lambda_{j+1}}{(j+1)\,(k+1)}\,\mathcal{B}_{n+1}(\bar{s}_{n+1,j+1},\,\bar{s}_{n+1,k+1})\end{aligned}$$

$$= -\frac{\lambda_{j+1}}{(j+1)^2}\, h_{j+1}\, \delta_{j,k}.$$

这意味着 $S_{n,1}\, G_n^{(1)}\, S_{n,1}^{\top} = H_{n,1}$，因此 $G_n^{(1)} = S_{n,1}^{-1}\, H_{n,1}\, S_{n\,1}^{-\top}$。 □

推论 5.7. 若 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是经典序列，则 $\{\sigma_n\}_{n\geqslant 0}$也是。

证明。根据定理（5.4），$\{\sigma_n\}_{n\geqslant 0}$ 是前经典序列。

现在，我们必须证明 $\det G_n^{(1)} \neq 0$ 对于 $n \geqslant 0$ （定义 3.3）。由定理 5.6 可得

$$\det G_n^{(1)} = \det H_{n,1} = h_0^{(1)} \cdots h_n^{(1)}, \quad n \geqslant 0,$$

with

$$h_j^{(1)} = -\frac{\lambda_{j+1}}{(j+1)^2}\, h_{j+1}, \quad j \geqslant 0,$$

并且 $\lambda_j = j\,[(j-1)\,a + d]$。由于 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是经典的，因此有

$$h_n \neq 0 \quad \text{and} \quad n\,a + d \neq 0, \quad n \geqslant 0,$$

（参见等式 (4.2) 和定义 3.1）。这意味着 $h_j^{(1)} \neq 0$ 对于 $j \geqslant 0$。因此，$\det G_n^{(1)} \neq 0$ 对于 $n \geqslant 0$，从而 $\{\sigma_n\}_{n\geqslant 0}$ 是经典的。 □

定理 5.6 表明，对于 $n \geqslant 0$，$S_{n,\,1}^{\top}$ 的列构成了 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一个正交基，其对应的双线性型与 $\{\sigma_n\}_{n\geqslant 0}$ 相关（参见定义 4.1），我们将其记为

$$\mathfrak{B}_n^{(1)}(\bar{u}, \bar{v}) \;=\; \bar{u}^{\top}\, G_n^{(1)}\, \bar{v}, \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

下面给出经典序列的刻画。

定理 5.8. 设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个实数序列，满足对 $n \geqslant 0$ 有 $\det G_n \neq 0$。令 $S_n^{-1}\, H_n\, S_n^{-\top}$ 为 G_n 的 Cholesky 分解，并令 $\bar{s}_{n,0}, \bar{s}_{n,1}, \ldots, \bar{s}_{n,n}$ 表示 $S_n^{\top}$ 的各列。那么 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是经典的，当且仅当存在满足下列条件的实数 a、b、c

$$|a| + |b| + |c| > 0,$$

使得由 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的向量 $\{\bar{s}_{n,0}^{(1)}, \ldots, \bar{s}_{n,n}^{(1)}\}$ 构成的集合满足

$$\bar{s}_{n,j}^{(1)} = \frac{1}{j+1}\, N_{n+1}\, \bar{s}_{n+1,j+1}, \quad 0 \leqslant j \leqslant n,$$

关于与 $\{\sigma_n\}_{n\geqslant 0}$ 相关联的双线性型，构成 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一组正交基，其中

$$\sigma_n \;=\; a\,\mu_{n+2} + b\,\mu_{n+1} + c\,\mu_n, \qquad n \geqslant 0.$$

证明. 若 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是经典的，则由定理 5.6 可知

$$S_{n,1}\, G_n^{(1)}\, S_{n,1}^{\top} \;=\; H_{n,1}, \quad n \geqslant 0,$$

其中

$$S_{n,1}^{\top} = \left[\bar{s}_{n,0}^{(1)}\ \bar{s}_{n,1}^{(1)}\ \ldots\ \bar{s}_{n,n}^{(1)}\right],$$

以及 $H_{n,1} = \mathsf{diag}[h_0^{(1)}, \ldots, h_n^{(1)}]$ 其中

$$h_j^{(1)} = -\frac{\lambda_{j+1}}{(j+1)^2}\, h_{j+1}, \quad j \geqslant 0,$$

以及 $\lambda_j = j\,[(j-1)\,a + d]$。这意味着

$$\mathfrak{B}_n^{(1)}(\bar{s}_{n,i}^{(1)}, \bar{s}_{n,j}^{(1)}) = h_j^{(1)}\,\delta_{i,j}, \quad 0 \leqslant i, j \leqslant n.$$

这证明了必要条件。

反过来，对于 $n \geqslant 0$，一方面我们有

$$\mathfrak{B}_n^{(1)}(\bar{s}_{n,k}^{(1)}, \bar{s}_{n,0}^{(1)}) = h_0^{(1)}\,\delta_{k,0}$$

或者，等价地，

$$\left(\bar{s}_{n,k}^{(1)}\right)^{\top} G_n^{(1)}\,\bar{s}_{n,0}^{(1)} = \frac{1}{k+1}\,\bar{s}_{n+1,k+1}^{\top}\,N_{n+1}^{\top}\,G_n^{(1)}\,\bar{s}_{n,0}^{(1)} = -\lambda_1\,h_1\,\delta_{k,0}.$$

利用 $s_n^{(1)}{}_{,\,0} = \bar{e}_0$ 其中，回想一下，$\bar{e}_0$ 是 $n+1$ 阶单位矩阵的第一列，我们写为

$$\bar{s}_{n+1,k+1}^{\top}\,N_{n+1}^{\top}\begin{bmatrix}\sigma_0\\ \sigma_1\\ \vdots\\ \sigma_n\end{bmatrix} = -(k+1)\,\lambda_1\,h_1\,\delta_{k,0}.$$

另一方面

$$\mathfrak{B}_{n+1}(\bar{s}_{n+1,k+1}, \bar{s}_{n+1,1}) = \bar{s}_{n+1,k+1}^{\top}\,G_{n+1}\,\bar{s}_{n+1,1} = h_1\,\delta_{k,0} = h_1\,(k+1)\,\delta_{k,0}.$$

Therefore,

$$\bar{s}_{n+1,k+1}^{\top}\,N_{n+1}^{\top}\begin{bmatrix}\sigma_0\\ \sigma_1\\ \vdots\\ \sigma_n\end{bmatrix} = -\lambda_1\,\bar{s}_{n+1,k+1}^{\top}\,G_{n+1}\,\bar{s}_{n+1,1},$$

因此，

$$\bar{s}_{n+1,k+1}^{\top}\left(N_{n+1}^{\top}\begin{bmatrix}\sigma_0\\ \sigma_1\\ \vdots\\ \sigma_n\end{bmatrix} + \lambda_1\,G_{n+1}\,\bar{s}_{n+1,1}\right) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

由于 $N_{n+1}^{\top}$ 的第一行是 $[0\ 0 \ldots 0]$ 且 $\bar{s}_{n+1,\,0}^{\top}\,G_{n+1}\,\bar{s}_{n+1,\,1} = 0$，我们有

$$S_{n+1}^{\top}\left(N_{n+1}^{\top}\begin{bmatrix}\sigma_0\\ \sigma_1\\ \vdots\\ \sigma_n\end{bmatrix} + \lambda_1\,G_{n+1}\,\bar{s}_{n+1,1}\right) = \mathtt{0},$$

因此，

$$N_{n+1}^{\top}\begin{bmatrix}\sigma_0\\ \sigma_1\\ \vdots\\ \sigma_n\end{bmatrix} + \lambda_1\,G_{n+1}\,\bar{s}_{n+1,1} = \mathtt{0}, \tag{5.6}$$

其中我们利用了 $S_n^{\top}$ 是可逆矩阵这一事实。如果

$$\bar{s}_{n+1,1} = [s_{1,0}\ 1\ 0 \ldots 0]^{\top},$$

那么令 $d=\lambda_1$ 和 $e=\lambda_1\, s_{1,\,0}$。注意，根据定理 4.3，$s_{1,\,0}$ 与 n 无关。这样，(5.6) 的各项为

$$d\,\mu_1+e\,\mu_0=0,$$

$$k\,\sigma_{k-1}+d\,\mu_{k+1}+e\,\mu_k=(k\,a+d)\,\mu_{k+1}+(k\,b+e)\,\mu_k+k\,c\,\mu_{k-1}=0,\quad 1\leqslant k\leqslant n,$$

这证明 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 满足 (3.1)，因此 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是经典的。 □

推论 5.7 表明，$\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 的经典性质由 $\{\sigma_n\}_{n\geqslant 0}$ 继承，因此我们可以将此前关于经典序列的所有结果应用于 $\{\sigma_n\}_{n\geqslant 0}$ 和 $\{G_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$。因此，我们可以如下定义一个新序列 $\{\sigma_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$：

$$\sigma_n^{(2)}=a\,\sigma_{n+2}+b\,\sigma_{n+1}+c\,\sigma_n,\quad n\geqslant 0.$$

我们将由 $\{G_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$ 构成的 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵序列记为

$$G_0^{(2)}=\sigma_0^{(2)},\quad \text{and}\quad G_n^{(2)}=\left[\begin{array}{ccc|c} & & & \sigma_n^{(2)}\\ & G_{n-1}^{(2)} & & \vdots\\ & & & \sigma_{2n-1}^{(2)}\\ \hline \sigma_n^{(2)} & \cdots & \sigma_{2n-1}^{(2)} & \sigma_{2n}^{(2)}\end{array}\right],\quad n\geqslant 1.$$

根据定理 5.4，$\{\sigma_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$ 是满足以下条件的前经典序列

$$(n\,a+d_2)\,\sigma_{n+1}^{(2)}+(n\,b+e_2)\,\sigma_n^{(2)}+n\,c\,\sigma_{n-1}^{(2)}\;=\;0,\quad n\geqslant 0,$$

其中 $d_2=d+4\,a$ 且 $e_2=e+2\,b$。此外，若对 $n\geqslant 0$ 有 $\det\, G_n^{(2)}\neq 0$，则 $\{\sigma_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$ 是经典的，并且根据定理 5.8，$\mathbb{R}^{n+1}$ 中满足以下条件的向量集合 $\{\bar{s}_{n,0}^{(2)},\ldots,\bar{s}_{n,n}^{(2)}\}$

$$\bar{s}_{n,j}^{(2)}=\frac{1}{j+1}\,N_{n+1}\,\bar{s}_{n+1,j+1}^{(1)},\quad 0\leqslant j\leqslant n,$$

构成关于与 $\{\sigma_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$ 相关联的双线性型 $\mathfrak{B}_n^{(2)}$ 的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 正交基，即

$$\mathfrak{B}_n^{(2)}(\bar{s}_{n,j}^{(2)},\bar{s}_{n,k}^{(2)})=h_j^{(2)}\,\delta_{j,k},\quad 0\leqslant j,k\leqslant n,$$

其中

$$h_j^{(2)}=-\frac{\lambda_{j+1}^{(1)}}{(j+1)^2}\,h_{j+1}^{(2)},\quad j\geqslant 0,$$

且 $\lambda_j^{(1)}=j\,[(j-1)\,a+d_1]$。

重复这一思路，我们得到以下结果。

推论 5.9. 设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 为一个经典的实数序列。设 $S_n^{-1}\,H_n\,S_n^{-\top}$ 为 G_n 的 Cholesky 分解，并令 $\bar{s}_{n,0},\bar{s}_{n,1},\ldots,\bar{s}_{n,n}$ 表示 $S_n^{\top}$ 的各列。对于每个 $k\geqslant 1$，定义实数序列 $\{\sigma_n^{(k)}\}_{n\geqslant 0}$ 为

$$\sigma_n^{(k)}\;=\;a\,\sigma_{n+2}^{(k-1)}+b\,\sigma_{n+1}^{(k-1)}+c\,\sigma_n^{(k-1)},\quad n\geqslant 0,$$

其中，当 $n\geqslant 0$ 时，$\sigma_n^{(0)}=\mu_n$。则 $\{\sigma_n^{(k)}\}_{n\geqslant 0}$ 是满足以下条件的经典的

$$(n\,a+d_k)\,\sigma_{n+1}^{(k)}+(n\,b+e_k)\,\sigma_n^{(k)}+n\,c\,\sigma_{n-1}^{(k)}\;=\;0,\quad n\geqslant 0,$$

其中 $d_k = d + 2\,k\,a$ 且 $e_k = e + k\,b$。此外，$\{\bar{s}_{n,0}^{(k)}, \ldots, \bar{s}_{n,n}^{(k)}\}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中满足以下条件的向量集合

$$\bar{s}_{n,j}^{(k)} = \frac{1}{j+1}\, N_{n+1}\, \bar{s}_{n+1,j+1}^{(k-1)}, \quad 0 \leqslant j \leqslant n,$$

其中 $s_n^{(0)}{}_{,\,j} = \bar{s}_{n,\,j}$ 构成了 $\mathbb{R}^{n+1}$ 关于与 $\{\sigma_n^{(k)}\}_{n\geqslant 0}$ 相关联的双线性型的正交基。

注意，推论 5.9 中的向量 $\{\bar{s}_{n,0}^{(k)}, \ldots, \bar{s}_{n,n}^{(k)}\}$ 可以用向量 $\bar{s}_{n,\,0}$、$\bar{s}_{n,\,1}$、.....、$\bar{s}_{n,\,n}$ 表示如下：对于每个 $k \geqslant 1$,

$$\bar{s}_{n,j}^{(k)} = \frac{1}{(j+1)_k} N_{n+1}\, N_{n+2} \cdots N_{n+k}\, \bar{s}_{n+k,j+k}, \quad 0 \leqslant j \leqslant n, \tag{5.7}$$

其中 $(\nu)_k = \nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1)$、$(\nu)_0 = 1$ 表示 Pochhammer 符号。如果 $\{G_n^{(k)}\}_{n\geqslant 0}$ 表示由 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵构成的序列，且

$$G_0^{(k)} = \sigma_0^{(k)}, \quad \text{and} \quad G_n^{(k)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \sigma_n^{(k)} \\ & G_{n-1}^{(k)} & & \vdots \\ & & & \sigma_{2n-1}^{(k)} \\ \hline \sigma_n^{(k)} & \cdots & \sigma_{2n-1}^{(k)} & \sigma_{2n}^{(k)} \end{array}\right], \quad n \geqslant 1, \tag{5.8}$$

于是，$\{\bar{s}_{n,0}^{(k)}, \ldots, \bar{s}_{n,n}^{(k)}\}$ 关于与 $\{\sigma_n^{(k)}\}_{n\geqslant 0}$ 相关联的双线性型 $\mathfrak{B}_n^{(k)}$的正交性由下式给出

$$\mathfrak{B}_n^{(k)}(\bar{s}_{n,j}^{(k)}, \bar{s}_{n,i}^{(k)}) = (\bar{s}_{n,j}^{(k)})^{\top}\, G_n^{(k)}\, \bar{s}_{n,i}^{(k)} = h_j^{(k)}\, \delta_{j,i}, \quad 0 \leqslant i,j \leqslant n, \tag{5.9}$$

其中

$$h_j^{(k)} = -\frac{\lambda_{j+1}^{(k-1)}}{(j+1)^2}\, h_{j+1}^{(k-1)}, \quad j \geqslant 0,$$

且 $\lambda_j^{(k)} = j\,[(j-1)\,a + d_k]$。注意，我们可以写成

$$h_j^{(k)} = (-1)^k \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \lambda_{j+k-i}^{(i)}}{[(j+1)_k]^2}\, h_{j+k}, \quad j \geqslant 0.$$

此外，(5.9)蕴含了 $G_n^{(k)}$的 Cholesky 分解：

$$S_{n,k}\, G_n^{(k)}\, S_{n,k}^{\top} = H_{n,k}, \quad n \geqslant 0,$$

其中

$$S_{n,k}^{\top} = \left[\bar{s}_{n,0}^{(k)}\ \bar{s}_{n,1}^{(k)}\ \ldots\ \bar{s}_{n,n}^{(k)}\right],$$

以及 $H_{n,\,k}$ = 对角$[h_0^{(k)}, \ldots, h_n^{(k)}]$。

让我们用多项式和矩泛函来重新表述上述结果。设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 为满足 (3.1) 的一个经典实数序列，并设 $\mathbf{u}$ 为定义为 $\mu_n = \langle \mathbf{u},\ x^n\rangle$, $n \geqslant 0$ 的矩泛函。对于每个 $k \geqslant 1$，由下式定义的实数序列 $\{\sigma_n^{(k)}\}_{n\geqslant 0}$

$$\sigma_n^{(k)} = a\,\sigma_{n+2}^{(k-1)} + b\,\sigma_{n+1}^{(k-1)} + c\,\sigma_n^{(k-1)}, \quad n \geqslant 0,$$

其中，对于 $n \geqslant 0$, $\sigma_n^{(0)} = \mu_n$ 是由 $\mathbf{v}_k = \phi^k \mathbf{u}$ 给出的泛函的矩序列，其中 $\phi(x) = a\,x^2 + b\,x + c$。此外，对于 $n \geqslant 0$，设 $S_n^{-1}\, H_n\, S_n^{-\top}$是 G_n 的 Cholesky 分解，并令 $\bar{s}_{n,0}$, $\bar{s}_{n,1}, \ldots, \bar{s}_{n,n}$ 表示 $S_n^{\top}$的各列。

对于 $n \geqslant 0$，推论 5.9 表明，多项式 $\{Q_{0,k}(x)\, Q_{1,k}(x)\, ..\, ., Q_{n,k}(x)\}$由下式给出

$$Q_{j,k}(x) \;=\; (\bar{s}_{n,j}^{(k)})^{\top}\, \mathtt{X}_n, \quad 0 \leqslant j \leqslant n,$$

满足 $\langle \mathtt{v}_k, Q_{i,k}\, Q_{j,k}\rangle \;=\; h_j^{(k)}\, \delta_{i,j}$。因此， $\{Q_{0,k}(x)\, Q_{1,k}(x) \ldots, Q_{n,k}(x)\}$ 构成了关于 $\mathtt{v}_k$ 的 Π_n 正交基。此外，定理 4.3 使我们能够写出

$$Q_{n,k}(x) \;=\; (\bar{s}_{n,n}^{(k)})^{\top}\, \mathtt{X}_n, \quad n \geqslant 0,$$

这样， $\{Q_{n,k}(x)\}_{n\geqslant 0}$ 就是与 $\mathtt{v}_k$ 相关联的单项正交多项式系。我们注意到，如果

$$P_n(x) \;=\; \bar{s}_{n,n}^{\top}\, \mathtt{X}_n, \quad n \geqslant 0,$$

于是，由 (5.7) 得

$$Q_{n,k}(x) \;=\; \frac{P_{n+k}^{(k)}(x)}{(n+1)_k}, \quad n \geqslant 0,$$

其中， $P_n^{(k)}(x)$ 表示 $P_n(x)$ 的 k 阶导数。

5.3. 第一结构关系。对于 $n \geqslant 1$ ，给定实数 a、b 和 c，我们定义 $(n+3)\times(n+1)$ 矩阵

$$\Phi_n = \left[\begin{array}{c|c} \Phi_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ c \\ b \end{matrix} \\ \hline 0 & a \end{array}\right], \quad \Phi_0 = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}. \tag{5.10}$$

引理 5.10。设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 和 $\{\sigma_n\}_{n\geqslant 0}$ 是满足下列条件的实数序列

$$\sigma_n = a\,\mu_{n+2} + b\,\mu_{n+1} + c\,\mu_n, \quad n \geqslant 0,$$

其中 a、b、$c \in \mathbb{R}$。那么，对于 $n \geqslant 2$,

$$G_n^{(1)} \begin{bmatrix} \bar{v} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;=\; G_n\, \Phi_{n-2}\, \bar{v}, \quad \forall\, \bar{v} \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{5.11}$$

证明。我们用归纳法证明这一结果。对于 $n = 2$，注意到，对所有 $v \in \mathbb{R}$,

$$G_2^{(1)} \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} v = a\, v \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix} + b\, v \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} + c\, v \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = G_2\, \Phi_0\, v.$$

这证明了基本情形。

假设对于某个 $k \geqslant 2$，式 (5.11) 成立。令

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k.$$

我们计算

$$G_{k+1}^{(1)}\begin{bmatrix}\bar{v}\\0\\0\end{bmatrix}=G_{k+1}^{(1)}\left(\begin{bmatrix}\nu_1\\\vdots\\\nu_{k-1}\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\\nu_k\\0\\0\end{bmatrix}\right).$$

对分块进行乘法运算，并使用归纳假设，可得

$$\begin{aligned}G_{k+1}^{(1)}\begin{bmatrix}\bar{v}\\0\\0\end{bmatrix}&=\left[\begin{array}{ccc|c}&G_k^{(1)}&&\begin{matrix}\sigma_{k+1}\\\vdots\\\sigma_{2k+1}\end{matrix}\\\hline\sigma_{k+1}&\cdots&\sigma_{2k+1}&\sigma_{2k+2}\end{array}\right]\begin{bmatrix}\nu_1\\\vdots\\\nu_{k-1}\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\nu_k\begin{bmatrix}\sigma_{k-1}\\\vdots\\\sigma_{2k-1}\\\sigma_{2k}\end{bmatrix}\\&=\left[\begin{array}{ccc}&G_k\,\Phi_{k-2}&\\\hline\sigma_{k+1}&\cdots&\sigma_{2k-1}\end{array}\right]\begin{bmatrix}\nu_1\\\vdots\\\nu_{k-1}\end{bmatrix}+\nu_k\begin{bmatrix}\sigma_{k-1}\\\vdots\\\sigma_{2k-1}\\\sigma_{2k}\end{bmatrix}\\&=\left[\begin{array}{ccc|c}&G_k\,\Phi_{k-2}&&\begin{matrix}\sigma_{k-1}\\\vdots\\\sigma_{2k-1}\end{matrix}\\\hline\sigma_{k-1}&\cdots&\sigma_{2k-1}&\sigma_{2k}\end{array}\right]\bar{v}.\end{aligned}$$

然后，不难验证

$$\left[\begin{array}{ccc|c}&G_k\,\Phi_{k-2}&&\begin{matrix}\sigma_{k-1}\\\vdots\\\sigma_{2k-1}\end{matrix}\\\hline\sigma_{k-1}&\cdots&\sigma_{2k-1}&\sigma_{2k}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}&G_k&&\begin{matrix}\mu_{k+1}\\\vdots\\\mu_{2k+1}\end{matrix}\\\hline\mu_{k+1}&\cdots&\mu_{2k+1}&\mu_{2k+2}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}\Phi_{k-2}&\begin{matrix}0\\c\\b\end{matrix}\\\hline 0&a\end{array}\right].$$

这证明了

$$G_{k+1}^{(1)}\begin{bmatrix}\bar{v}\\0\\0\end{bmatrix}=G_{k+1}\,\Phi_{k-1}\,\bar{v},$$

因此，(5.11) 对 $n\geqslant 2$ 成立。 □

我们有以下关于经典实数序列的刻画。

定理 5.11. 设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个实数序列，满足对 $n\geqslant 0$ 有 $\det G_n\neq 0$。设 $S_n^{-1}H_nS_n^{-\top}$ 是 G_n 的 Cholesky 分解，并设 $\bar{s}_{n,\,0}$，$\bar{s}_{n,\,1}$，…，$\bar{s}_{n,\,n}$ 表示 $S_n^{\top}$ 的列。则 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是经典的，当且仅当存在满足以下条件的实数 a、b、c

$$|a|+|b|+|c|>0,$$

以及实数 a_j、b_j、c_j、$j \geqslant 0$，其中 $c_j \neq 0$，使得 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中由向量组成的集合 $\{\bar{s}^{(1)}_{n,0}, \ldots, \bar{s}^{(1)}_{n,n}\}$ 满足

$$\bar{s}^{(1)}_{n,j} = \frac{1}{j+1}\, N_{n+1}\, \bar{s}_{n+1,j+1}, \quad 0 \leqslant j \leqslant n,$$

满足

$$\Phi_{n-2}\, \bar{s}^{(1)}_{n-2,j} = a_j\, \bar{s}_{n,j+2} + b_j\, \bar{s}_{n,j+1} + c_j\, \bar{s}_{n,j}, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-2, \tag{5.12}$$

其中 Φ_n 如 (5.10) 中所定义

证明。我们将用到以下事实:

$$S^{\top}_{n,1} = \left[\bar{s}^{(1)}_{n,0}\ \bar{s}^{(1)}_{n,1}\ \cdots\ \bar{s}^{(1)}_{n,n}\right],$$

是一个单位上三角矩阵。

设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是满足 (3.1) 的经典序列。由于 $\Phi_{n-2}\, \bar{s}^{(1)}_{n-2,\,j} \in \mathbb{R}^{n+1}$ 和 $\{\bar{s}_{n,0}, \bar{s}_{n,1}, \ldots, \bar{s}_{n,n}\}$ 构成 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的正交基，我们可以写成

$$\Phi_{n-2}\, \bar{s}^{(1)}_{n-2,j} = \sum_{k=0}^{n} a_{j,k}\, \bar{s}_{n,k},$$

with

$$a_{j,k}\, h_k \;=\; \bar{s}^{\top}_{n,k}\, G_n\, \Phi_{n-2}\, \bar{s}^{(1)}_{n-2,j}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

根据定理 4.3 和定理 5.6，省略表示对 n 的某种依赖关系的下标是合理的，因为这两个定理表明，$\bar{s}_{n,\,k}$ 和 $\bar{s}^{(1)}_{n-2,\,j}$ 的表达式与 n 无关。

由 (5.11)，并且由于

$$S^{\top}_{n,1} = \left[\begin{array}{c|cc} S^{\top}_{n-2,1} & \multicolumn{2}{c}{*} \\ \hline 0 & 1 & * \\ & 0 & 1 \end{array}\right],$$

我们有

$$a_{j,k}\, h_k \;=\; \bar{s}^{\top}_{n,k}\, G^{(1)}_n \begin{bmatrix} \bar{s}^{(1)}_{n-2,j} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{s}^{\top}_{n,k}\, G^{(1)}_n\, \bar{s}^{(1)}_{n,j}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-2.$$

一方面，根据推论 5.9，集合 $\{\bar{s}^{(1)}_{n,0}, \ldots, \bar{s}^{(1)}_{n,n}\}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的正交基，并且由于 $\bar{s}_{n,\,k} = \bar{s}^{(1)}_{n\,,\,k} + \alpha_{k,\,k-1}\, \bar{s}^{(1)}_{n\,,\,k-1} + \cdots + \alpha_{k,\,0}\, \bar{s}^{(1)}_{n\,0,}$，我们得到 $a_{j,\,k} = 0$ 对于 $0 \leqslant k \leqslant j-1$，并且

$$a_{j,j}\, h_j = \bar{s}^{\top}_{n,j}\, G^{(1)}_n\, \bar{s}^{(1)}_{n,j} = (\bar{s}^{(1)}_{n,j})^{\top}\, G^{(1)}_n\, \bar{s}^{(1)}_{n,j} = h^{(1)}_j.$$

因此,

$$a_{j,j} = \frac{h^{(1)}_j}{h_j} = -\frac{\lambda_{j+1}}{(j+1)^2} \neq 0.$$

另一方面，由于 $S^{\top}_{n-2,\,1}$ 是上三角的，我们有

$$\Phi_{n-2}\, \bar{s}^{(1)}_{n-2,j} = \begin{bmatrix} * \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-2,$$

其中最后的 $n-j-2$ 个条目为零。这意味着 $a_{j,\,k} = 0$ 对于 $k \geqslant j+3$。因此，(5.12) 成立，其中 $a_j = a_{j,\,j+2}$, $b_j = a_{j,\,j+1}$ 以及 $c_j = a_{j,\,j} \neq 0$。

反过来，假设 (5.12) 成立，且 Φ_{n-2} 的条目为实数a, b, c，满足 $|a|+|b|+|c|>0$。一方面，将 (5.12) 两边乘以 $\bar{s}_{n,\,0}^{\top}\,G_n$，对于 $0\leqslant j\leqslant n-2$，可得

$$\bar{s}_{n,0}^{\top}\,G_n\,(a_j\,\bar{s}_{n,j+2}+b_j\,\bar{s}_{n,j+1}+c_j\,\bar{s}_{n,j})=\bar{s}_{n,0}^{\top}\,G_n\Phi_{n-2}\,\bar{s}_{n-2,j}^{(1)}.$$

根据 $\{\bar{s}_{n,0},\bar{s}_{n,1},\dots,\bar{s}_{n,n}\}$的正交性，我们有

$$\bar{s}_{n,0}^{\top}\,G_n\Phi_{n-2}\,N_{n-1}\,\bar{s}_{n-1,j+1}\;=\;(j+1)\,c_0\,h_0\,\delta_{j,0}.$$

另一方面，我们有

$$\bar{s}_{n-1,1}^{\top}\,G_{n-1}\,\bar{s}_{n-1,j+1}\;=\;h_1\,\delta_{j,0}=(j+1)\,h_1\,\delta_{j,0},\quad 0\leqslant j\leqslant n-2.$$

因此，

$$\bar{s}_{n,0}^{\top}\,G_n\Phi_{n-2}\,N_{n-1}\,\bar{s}_{n-1,j+1}\;=\;c_0\,\frac{h_0}{h_1}\,\bar{s}_{n-1,1}^{\top}\,G_{n-1}\,\bar{s}_{n-1,j+1},$$

或者，等价地，

$$\left(\bar{s}_{n,0}^{\top}\,G_n\,\Phi_{n-2}\,N_{n-1}-c_0\,\frac{h_0}{h_1}\,\bar{s}_{n-1,1}^{\top}\,G_{n-1}\right)\,\bar{s}_{n-1,j+1}=0,\quad 0\leqslant j\leqslant n-2.$$

由于$N_{n-1}\bar{s}_{n-1,0}=0$ 和$\bar{s}_{n-1,1}^{\top}\,G_{n-1}\,\bar{s}_{n-1,0}=0$，我们有

$$\left(\bar{s}_{n,0}^{\top}\,G_n\,\Phi_{n-2}\,N_{n-1}-c_0\,\frac{h_0}{h_1}\,\bar{s}_{n-1,1}^{\top}\,G_{n-1}\right)\,S_{n-1}^{\top}=0,$$

因此，

$$\bar{s}_{n,0}^{\top}\,G_n\,\Phi_{n-2}\,N_{n-1}-c_0\,\frac{h_0}{h_1}\,\bar{s}_{n-1,1}^{\top}\,G_{n-1}=0,\tag{5.13}$$

其中我们利用了 $S_{n-1}^{\top}$ 是一个可逆矩阵这一事实。如果

$$\bar{s}_{n-1,1}^{\top}=[s_{1,0}\;1\;0\dots 0],$$

那么令 $d=-c_0\frac{h_0}{h_1}$和 $e=d\,s_{1,0}$。这样，(5.13) 的各项为

$$\begin{aligned}&d\,\mu_1+e\,\mu_0=0,\\&(k\,a+d)\,\mu_{k+1}+(k\,b+e)\,\mu_k+k\,c\,\mu_{k-1}=0,\quad 1\leqslant k\leqslant n-1,\end{aligned}$$

这证明了 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 满足 (3.1)，因此，$\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是经典的。 □

我们简要地用多项式的术语重新表述定理 5.11。设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个实数经典序列，并令 $\mathbf{u}$ 为定义为 $\mu_n=\langle\mathbf{u}\;x^n\rangle$、$n\geqslant 0$的矩泛函。令 $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ 和 $\{Q_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ 为满足以下条件的多项式序列

$$P_n(x)\;=\;\bar{s}_{n,n}^{\top}\,\mathtt{X}_n\quad\text{and}\quad Q_n(x)\;=\;(\bar{s}_{n,n}^{(1)})^{\top}\,\mathtt{X}_n\quad n\geqslant 0.$$

则 $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ 是与 $\mathbf{u}$ 相关的正交多项式系，并且

$$Q_j(x)\;=\;\frac{P_{j+1}'(x)}{j+1},\quad 0\leqslant j\leqslant n.$$

对于满足 $|a|+|b|+|c|>0$ 的 a、b、$c\in\mathbb{R}$，以及 $n\geqslant 0$，矩阵 Φ_n 是从 Π_n 到 Π_{n+2} 的线性映射的矩阵表示，该映射由 $p(x)\mapsto\phi(x)\,p(x)$ 定义，其中 $\phi(x)=a\,x^2+b\,x+c$。因此，

$$(\Phi_n\,\bar{s}_{n,n}^{(1)})^{\top}\,\mathtt{X}_{n+2}=\phi(x)\,Q_n(x).$$

由此，根据定理 5.11，u 是经典矩泛函，当且仅当存在一个非零多项式 $\phi(x)$，满足 deg $\phi(x)$ 6 2，以及实数 a_n、 b_n、 c_n、$n \geqslant 0$，使得 $c_n \neq 0$,

$$\phi(x)\, Q_n(x) = a_n\, p_{n+2}(x) + b_n\, p_{n+2}(x) + c_n\, p_n(x), \quad n \geqslant 0.$$

5.4. 第二结构关系。下面的刻画与 (5.12) 类似，但其对偶性体现在 $\{\bar{s}_{n,j}\}_{j=0}^{n}$ 和 $\{\bar{s}_{n,j}^{(1)}\}_{j=0}^{n}$ 的角色互换。

定理 5.12。设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个实数序列，满足对于 $n \geqslant 0$，$\det G_n \neq 0$。设 $S_n^{-1}\, H_n\, S_n^{-\top}$ 是 G_n 的 Cholesky 分解，并令 $\bar{s}_{n,\,0}$， $\bar{s}_{n,\,1}$， $\ldots$， $\bar{s}_{n,\,n}$ 表示 $S_n^{\top}$ 的列。那么， $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是经典的，当且仅当存在实数 κ_j、 ξ_j、 $j \geqslant 0$，使得

$$\bar{s}_{n,j} \;=\; \bar{s}_{n,j}^{(1)} + \kappa_j\, \bar{s}_{n,j-1}^{(1)} + \xi_j\, \bar{s}_{n,j-2}^{(1)}, \quad 0 \leqslant j \leqslant n, \tag{5.14}$$

其中，按照惯例，我们设 $\bar{s}_{n}^{(1)}{}_{,\,-2} = \bar{s}_{n}^{(1)}{}_{,\,-1} = 0$。

证明。我们将用到以下事实:

$$S_{n,1}^{\top} = \left[\bar{s}_{n,0}^{(1)}\ \bar{s}_{n,1}^{(1)}\ \ldots\ \bar{s}_{n,n}^{(1)}\right],$$

是一个单位上三角矩阵。

设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$是一个经典序列。根据推论 5.9， $\{\bar{s}_{n,0}^{(1)}, \ldots, \bar{s}_{n,n}^{(1)}\}$是 $\mathbb{R}^{n+1}$的一个正交基。由于 $S_{n,\,1}^{\top}$ 是一个单位上三角矩阵，因此我们可以写成

$$\bar{s}_{n,j} \;=\; \bar{s}_{n,j}^{(1)} + \sum_{k=0}^{j-1} a_{j,k}\, \bar{s}_{n,k}^{(1)}, \quad 0 \leqslant j \leqslant n,$$

其中

$$a_{j,k}\, h_k^{(1)} \;=\; (\bar{s}_{n,k}^{(1)})^{\top}\, G_n^{(1)}\, \bar{s}_{n,j}, \quad 0 \leqslant k \leqslant j-1.$$

与前面一样，定理 4.3 和定理 5.6 表明，$\bar{s}_{n,\,k}$ 和$\bar{s}_{n-2,\,j}^{(1)}$ 的表达式与 n无关，因此省略表示依赖于 n 的下标是合理的。利用 (5.11) 和定理 5.11，我们得到

$$a_{j,k}\, h_k^{(1)} \;=\; \left(a_k\, \bar{s}_{n,k+2} + b_k\, \bar{s}_{n,k+1} + c_k\, \bar{s}_{n,k}\right)^{\top} G_n\, \bar{s}_{n,j}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-2.$$

由 $\{\bar{s}_{n,0}, \ldots, \bar{s}_{n,n}\}$ 的正交性，我们得到 $a_{j,\,k} \;=\; 0$ 其中 $k \leqslant j-3$。因此，(5.14) 在 $\kappa_j = a_{j,\,j-1}$ 且 $\xi_j = a_{j,\,j-2}$ 的情况下成立。

反过来，设存在实数 κ_j、 ξ_j、 $j \geqslant 0$，使得 (5.14) 成立。对于 $n \geqslant 0$，定义 $(n+1) \times (n+1)$ 单位上三角矩阵

$$U_0 = 1, \quad U_1 = \begin{bmatrix} 1 & \kappa_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U_n = \left[\begin{array}{c|c} U_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ \xi_n \\ \kappa_n \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right], \quad n \geqslant 2.$$

那么 (5.14) 可写为

$$S_n^{\top} \;=\; S_{n,1}^{\top}\, U_n.$$

利用 $H_n = S_n\, G_n\, S_n^{\top}$，我们得到

$$U_n \;=\; U_n\, H_n^{-1}\, S_n\, G_n\, S_n^{\top} \;=\; U_n\, H_n^{-1}\, S_n\, G_n\, S_{n,1}^{\top}\, U_n,$$

这意味着

$$I_{n+1} \,=\, U_n\, H_n^{-1}\, S_n\, G_n\, S_{n,1}^{\top}.$$

由这个等式可得

$$S_{n,1}^{-\top} \,=\, U_n\, H_n^{-1}\, S_n\, G_n. \tag{5.15}$$

一方面，注意到

$$\begin{aligned} N_{n+1}\, S_{n+1}^{\top} &= \begin{bmatrix} 0 & N_{n+1}\,\bar{s}_{n+1,1} & N_{n+1}\,\bar{s}_{n+1,2} & \dots & N_{n+1}\,\bar{s}_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \bar{s}_{n,0}^{(1)} & 2\,\bar{s}_{n,1}^{(1)} & \dots & (n+1)\,\bar{s}_{n,n}^{(1)} \end{bmatrix} \\ &= S_{n,1}^{\top}\, N_{n+1}, \end{aligned} \tag{5.16}$$

结合 (5.15) 和 (5.16)，可得

$$N_{n+1} \,=\, U_n\, H_n^{-1}\, S_n\, G_n\, N_{n+1}\, S_{n+1}^{\top}.$$

另一方面，我们有

$$\frac{1}{h_1}\,\bar{s}_{n+1,1}^{\top}\, G_{n+1}\, S_{n+1}^{\top} \,=\, \bar{s}_{n,0}^{\top}\, N_{n+1}.$$

因此，

$$\frac{1}{h_1}\,\bar{s}_{n+1,1}^{\top}\, G_{n+1} \,=\, \bar{s}_{n,0}^{\top}\, U_n\, H_n^{-1}\, S_n\, G_n\, N_{n+1}. \tag{5.17}$$

若令

$$\begin{bmatrix} c \\ b \\ a \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\xi_2}{h_2}\,\bar{s}_{n,2} + \frac{\kappa_1}{h_1}\,\bar{s}_{n,1} + \frac{1}{h_0}\,\bar{s}_{n,0}, \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} e \\ d \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{h_1}\,\bar{s}_{n+1,1}, \tag{5.18}$$

则 (5.17) 的各项为

$$\begin{aligned} -e\,\mu_0 - d\,\mu_1 &= 0, \\ -e\,\mu_k - d\,\mu_{k+1} &= k\,c\,\mu_{k-1} + k\,b\,\mu_k + k\,a\,\mu_{k+1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n+1, \end{aligned}$$

这证明了 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 满足 (3.1)，因此 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是经典序列。 □

对于经典序列 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$，令 $\mathbf{u}$ 为矩泛函，定义为$\mu_n \,=\, \langle \mathbf{u},\, x^n\rangle$，$n \,\geqslant\, 0$，并令 $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ 和 $\{Q_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ 为多项式序列，满足

$$P_n(x) \,=\, \bar{s}_{n,n}^{\top}\, \mathtt{x}_n \quad \text{and} \quad Q_n(x) \,=\, (\bar{s}_{n,n}^{(1)})^{\top}\, \mathtt{x}_n \quad n \geqslant 0.$$

定理 5.12 意味着存在实数 κ_n, ξ_n, $n \geqslant 0$，使得

$$P_n(x) \,=\, Q_n(x) + \kappa_n\, Q_{n-1}(x) + \xi_n\, Q_{n-2}(x), \quad n \geqslant 0,$$

其中，按惯例，$Q_{-2}(x) \,=\, Q_{-1}(x) \,=\, 0$。此外，由 (5.18) 和定理 3.2 可推得 $\mathbf{u}$ 满足 $D(\phi\mathbf{u}) \,=\, \psi\,\mathbf{u}$，其中

$$\phi(x) = \frac{\xi_2}{h_2}P_2(x) + \frac{\kappa_1}{h_1}P_1(x) + \frac{1}{h_0}P_0(x) \quad \text{and} \quad \psi(x) = -\frac{1}{h_1}P_1(x).$$

5.5. Rodrigues 型公式。回顾一下，经典实数序列$\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ satsisfy 满足三项递推关系 (3.1)，该关系可写成矩阵形式：

$$N_{n+1}^{\top}\, G_n^{(1)} \bar{s}_{n,0} + G_n \begin{bmatrix} e \\ d \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad n \geqslant 1,$$

其中 $G_n^{(1)}$如 (5.3) 中所定义。以下刻画表明，经典序列满足高阶递推关系，也可以将其写成矩阵形式。

定理 5.13. 设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个实数序列，满足 $\det G_n \neq 0, n \geqslant 0$。设 $S_n^{-1}\, H_n\, S_n^{-\top}$ 是 G_n 的 Cholesky 分解，并令 $\bar{s}_{n,0}, \bar{s}_{n,1}, \ldots, \bar{s}_{n,n}$ 表示 $S_n^{\top}$ 的列。那么，$\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是经典的，当且仅当存在 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 使得 $|a| + |b| + |c| > 0$，以及非零实数 ϖ_k, $k \geqslant 1$，使得

$$N_{n+k}^{\top} \cdots N_{n+1}^{\top}\, G_n^{(k)}\, \bar{s}_{n,0} = \varpi_k\, G_{n+k}\, \bar{s}_{n+k,k}, \quad n \geqslant 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{5.19}$$

其中 $G_n^{(k)}$如 (5.8) 中所定义。

证明。假设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是满足 (3.1) 的经典序列。对于 $k \geqslant 0$，根据推论 5.9，$\mathbb{R}^{n+1}$ 中满足以下条件的向量集合 $\{\bar{s}_{n,0}^{(k)}, \ldots, \bar{s}_{n,n}^{(k)}\}$

$$\bar{s}_{n,j}^{(k)} = \frac{1}{j+1}\, N_{n+1}\, \bar{s}_{n+1,j+1}^{(k-1)}, \quad 0 \leqslant j \leqslant n,$$

其中 $s_n^{(0)}{}_{,\,j} = \bar{s}_{n,\,j}$ 构成了关于与 $\{\sigma_n^{(k)}\}_{n\geqslant 0}$ 相关联的双线性型的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的正交基。令

$$S_{n,k}^{\top} = \left[\bar{s}_{n,0}^{(k)}\ \bar{s}_{n,1}^{(k)}\ \ldots\ \bar{s}_{n,n}^{(k)}\right].$$

一方面，注意到对于 $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} N_{n+1}\, S_{n+1,k-1}^{\top} &= \left[0 \quad N_{n+1}\, \bar{s}_{n+1,1}^{(k-1)} \quad N_{n+1}\, \bar{s}_{n+1,2}^{(k-1)} \quad \ldots \quad N_{n+1}\, \bar{s}_{n+1,n+1}^{(k-1)}\right] \\ &= \left[0 \quad \bar{s}_{n,0}^{(k)} \quad 2\,\bar{s}_{n,1}^{(k)} \quad \ldots \quad (n+1)\,\bar{s}_{n,n}^{(k)}\right] \\ &= S_{n,k}^{\top}\, N_{n+1}, \end{aligned}$$

于是，由于对于 $k \geqslant 1$ 有 $\bar{s}_n^{(k)}{}_{,\,0} = \bar{s}_{n,\,0}$，

$$\begin{aligned} S_{n+k}\, N_{n+k}^{\top} \cdots N_{n+1}^{\top}\, G_n^{(k)}\, \bar{s}_{n,0} &= N_{n+k}^{\top} \cdots N_{n+1}^{\top}\, S_{n,k}\, G_n^{(k)}\, \bar{s}_{n,0}^{(k)} \\ &= k!\, h_0^{(k)}\, \bar{e}_k \in \mathbb{R}^{n+k+1}, \end{aligned}$$

其中 $\bar{e}_k$ 表示单位矩阵 I_{n+k+1} 的第 $k+1$ 列。另一方面 r

手，

$$\frac{1}{h_k}\, S_{n+k}\, G_{n+k}\, \bar{s}_{n+k,k} = \bar{e}_k.$$

由于 S_{n+k} 可逆，因此

$$N_{n+k}^{\top} \cdots N_{n+1}^{\top}\, G_n^{(k)}\, \bar{s}_{n,0} = k!\, \frac{h_0^{(k)}}{h_k}\, G_{n+k}\, \bar{s}_{n+k,k}, \quad k \geqslant 1.$$

因此，(5.19) 在 $\varpi_k = k!\ \frac{h_0^{(k)}}{h_k}$ 的条件下成立。

反过来，假设存在 $a, b, c \in \mathbb{R}$，使得 $|a| + |b| + |c| > 0$，且存在非零实数 ϖ_k，$k \geqslant 1$，使得 (5.19) 成立。特别地，对于 $k = 1$，我们有

$$N_{n+1}^{\top}\, G_n^{(1)}\, \bar{s}_{n,0} \;=\; \varpi_1\; G_{n+1}\, \bar{s}_{n+1,1}, \quad n \geqslant 0. \tag{5.20}$$

若令

$$\begin{bmatrix} e \\ d \end{bmatrix} = -\varpi_1\, \bar{s}_{1,1},$$

并且由于 $\bar{s}_{n+1,\,1} = \begin{bmatrix} \bar{s}_1 & 1 \\ \cdot & \\ 0 & \end{bmatrix}$，那么 (5.20) 的各项为

$$\begin{aligned} -e\,\mu_0 - d\,\mu_1 &= 0, \\ -e\,\mu_k - d\,\mu_{k+1} &= k\,c\,\mu_{k-1} + k\,b\,\mu_k + k\,a\,\mu_{k+1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n+2, \end{aligned}$$

这证明了 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 满足 (3.1)，因此 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是经典的。 □

我们指出，若 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个实数经典序列，且 $\mathbf{u}$ 为由 $\mu_n = \langle \mathbf{u},\, x^n \rangle$，$n \geqslant 0$ 定义的矩泛函，则 (5.20) 的各项可写为

$$\langle D(\phi\,\mathbf{u}), x^k \rangle \;=\; \langle \psi\,\mathbf{u}, x^k \rangle, \quad 0 \leqslant k \leqslant n+2,$$

其中 $\phi(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ 且 $\psi(x) = d\,x + e$，这对所有 $n \geqslant 0$ 都成立。因此，$\mathbf{u}$ 满足 (2.1)。此外，验证 (5.19) 的各项可写为这一点很直接，但过程繁琐

$$\langle D^k(\phi^k\,\mathbf{u}), x^j \rangle \;=\; \langle \varpi_k\, P_k\,\mathbf{u}, x^j \rangle, \quad 0 \leqslant j \leqslant n+k+1,$$

其中 $P_k(x) = \bar{s}_{n+k,\,k}^{\top}\mathbf{X}_{n+k}$，$k \geqslant 1$，这对 $n \geqslant 1$ 成立。因此，$\mathbf{u}$ 满足 $D^k(\phi^k\,\mathbf{u}) = \varpi_k\, P_k\,\mathbf{u}$，对于 $k \geqslant 1$（并且当 $\varpi_0 = 1$ 时，对 $k = 0$ 也成立）。

References

[1] R. ´Alvarez-Nodarse, *On characterizations of classical polynomials*, 《计算与应用数学杂志》196（2006），320–337。[2] W. Al Salam，T. S. Chihara，*Another characterization of the classical orthogonal polynomials*，SIAM 数学分析杂志 3(1)，（1972），65-70。[3] S. Bochner，*Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme*，数学杂志 29（1929），第 1 期，730–736。[4] F. A. Costabile，M. I. Gualtieri，A. Napoli，*Matrix Calculus-Based Approach to Orthogonal Polynomial Sequences* **17** 118 2020，地中海数学杂志（）（）。[5] D. Dominici，*Matrix factorizations and orthogonal polynomials*，《随机矩阵理论》9（2020），2040003，33 页。[6] J. Geronimus，*On polynomials orthogonal with regard to a given sequence of numbers*，《哈尔科夫大学数学力学研究所通报》[《数学力学研究所纪要》] **17**（4）（1940），3–18（俄文）。[7] J. C. Garcia-Ardila，F. Marcell´an，M. E. Marriaga，*Orthogonal Polynomials and Linear Functionals. An Algebraic Approach and Applications*，欧洲数学会（EMS），Z¨urich，2021。[8] J. C. Garcia-Ardila，M. E. Marriaga，*On Sobolev bilinear forms and polynomial solutions of second-order differential equations*，西班牙皇家精确、物理与自然科学学会杂志 A 辑：数学（2021）。[9] G. H. Golub，C. F. Van Loan，*Matrix computations*，约翰斯·霍普金斯数学科学研究，约翰斯·霍普金斯大学出版社，巴尔的摩，马里兰州，第 4 版，2013。[10] W. Hahn，*Über die Jacobischen Polynome und Zwei Verwandte Polynomklassen*，数学杂志 39（1935），634–638。[11] W. Hahn。*Über Differentialgleichunqen für Orthoqonalpolynome.* 月刊数学 95，（1983），第 269–274 页。[12] R. A. Horn，C. R. Johnson，*Matrix Analysis*，第二版，剑桥大学出版社，剑桥，2013。

[13] H. L. Krall, *On derivatives of orthogonal polynomials II*, 《美国数学会通报》47（1941），261–264。[14] H. L. Krall, *On higher derivatives orthogonal polynomials*, 《美国数学会通报》42（1936），423–428。[15] M. Ma˜nas, *Revisiting Biorthogonal Polynomials: An LU Factorization Discussion*, 载于：Mar- cell´an，F.，Huertas，E.J.（编），《正交多项式：当前趋势与应用》。SEMA SIMAI Springer 系列，第 22 卷。施普林格，尚贝里。[16] F. Marcell

´ *Classical orthogonal polynomials: a functional* an，A. *approach* **34** 1994 283 303
Branquinho，J. Petronilho，，《应用数学学报》（），-。[17] F. Marcell

´ *On the solution of some distributional differential equations:* an，J. *existence and characterizations of the classical moment functionals*
Petronilho，，《积分变换与特殊函数》2（3）（1994），185–218。[18] P. Maroni，
Prolégomènes à l'étude des polynômes semiclassiques，《纯粹与应用数学年刊》（4）149（1987），165–184。[19] M. Pi

˜ ´ *Matrix interpretation of formal orthogonal polynomials for non-* nar，V. *definite functionals* **18** 1987 265 277
Ramırez，，《计算与应用数学杂志》（）–。[20] G. Szeg˝o，*Orthogonal polynomials*，第 4 版，第 23 卷。美国数学会讨论会出版物，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1975。[21] F. Tricomi，
Vorlesungen über orthogonalreihen，第 2 版，施普林格出版社，柏林，1970。[22] L. Verde-Star，
Characterization and conservation of classical orthogonal polynomials using a matrix approach **438** 2013 3635 3648 ，《线性代数及其应用》（）–。[23] L. Verde-Star，
Infinite Matrices in the Theory of Orthogonal Polynomials，载于：Marcell´an，F.，Huertas，E.J.（编），《正交多项式：当前趋势与应用》。SEMA SIMAI Springer 系列，第 22 卷。施普林格，尚贝里。

（M. E. Marriaga）Departamento de Matemática Aplicada，Ciencia e Ingeniería de Materiales y Tecnología Electrónica，Universidad Rey Juan Carlos (Spain)*Email address*：misael.marriaga@urjc.es（G. Vera de Salas）Departamento de Matemática Aplicada，Ciencia e Ingeniería deMateriales y Tecnología Electrónica，Universidad Rey Juan Carlos (Spain)*Email address*：guillermo.vera@urjc.es（M. Latorre）Departamento de Matemática Aplicada，Ciencia e Ingeniería de Materiales y Tecnología Electrónica，Universidad Rey Juan Carlos (Spain)*Email address*：marta.latorre@urjc.es（R. Mu˜noz Alc´azar）Departamento de Álgebra，Geometría y Topología，Universidadde Málaga (Spain)*Email address*：rubenm.alcazar@uma.es