arXiv:2302.12051v1 [math.CA] 23 Feb 2023

关于有界复雅可比矩阵及相关矩问题。

Sergey M. Zagorodnyuk

摘要。本文研究与有界复雅可比矩阵 J 相关联的复多项式上的线性泛函 S。本文考察相应的矩问题：在满足条件 $\int z^n d\mu = s_n$ 的情况下，求复平面 $\mathbb{C}$ 上的正 Borel 测度 μ，其中 s_n 是给定的复数（矩）。这一矩问题可视为将斯蒂尔切斯矩问题和汉堡矩问题推广到复平面。本文给出了该矩问题可解的充分条件。作为推论，我们得到存在积分表示 $S(p) = \int_{\mathbb{C}} p(z) d\mu$ 的条件，其中 μ 是正 Borel 测度。本文还讨论了与复雅可比矩阵算子 A_0 相关的算子：该算子作用于 l^2 中的有限向量；并讨论了在 L^2_μ 中的乘以 z 算子。关键词：复 Jacobi 矩阵、矩问题、正交多项式、线性泛函。

MSC 2020：44A60。

1 引言。

实雅可比矩阵理论是一门广为人知的经典学科，在数学的诸多领域及其他科学中有着广泛应用，参见 Akhiezer 和 Berezanskii 的著作 [1],[4]。复雅可比矩阵或 J-矩阵出现在 J-连分式的背景下，参见 Wall 的著作 [12]。与其实矩阵版本相比，它们受到的关注要少得多。近年来，Beckermann 于 2001 年对复雅可比矩阵进行了重要研究，汇集并以清晰的形式整理了这一主题的基本事实，参见 [2]。Beckermann 的论文发表后，复雅可比矩阵的研究明显活跃起来。我们可以提及以下研究方向：扰动与谱分析（参见 [10] 及其中的参考文献）；求积公式（[8]）；特征值问题（[7]）；确定性问题（[3]）。双边雅可比矩阵也得到了深入研究：实数情形可参见 [4], ，最新进展则参见 [9],[5] 及其中的参考文献。

复 Jacobi 矩阵是指具有以下形式的半无限三对角复矩阵：

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 $a_k, b_k \in \mathbb{C}:\ a_k \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}_+$. 我们先回顾一些关于复雅可比矩阵的基本已知事实，后文将会用到。通过矩阵乘法，矩阵 J 生成作用于 l^2_{fin}上的线性算子 A_0 。如果

$$|a_k| \leq M, \quad |b_k| \leq M, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{for some } M > 0, \tag{2}$$

那么 A_0 是有界的。在这种情况下，由连续性可将其延拓到整个空间 l_2 上，得到一个有界算子 A [2]。

对于复 Jacobi 矩阵 J，可与之对应一个多项式系$\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$, $p_0(\lambda) = 1$, 使得

$$a_{n-1}p_{n-1}(\lambda) + b_n p_n(\lambda) + a_n p_{n+1}(\lambda) = \lambda p_n(\lambda), \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3}$$

其中 $a_{-1} := 0,\ p_{-1}(\lambda) := 0$。关于两个变量均为线性的泛函 $\sigma(u, v)$, $u, v \in \mathbb{P}$, 满足

$$\sigma(p_n(\lambda), p_m(\lambda)) = \delta_{n,m}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{4}$$

称为差分方程的谱函数

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{5}$$

见 [13]。差分方程 (5)（因此复 Jacobi 矩阵 J）可由其谱函数和一个符号序列重构，详细说明见 [13] 。

定理 1（*[13,* 定理 *1]*）关于两个变量均为线性的泛函 $\sigma(u, v)$, $u, v \in \mathbb{P}$, 是某个 (5) 型差分方程的谱函数，当且仅当：

1) $\sigma(\lambda u(\lambda), v(\lambda)) = \sigma(u(\lambda), \lambda v(\lambda)), \qquad u, v \in \mathbb{P};$

2) $\sigma(1, 1) =; 1$

3) 对于任意次数为 k 的多项式 $u_k(\lambda)$，存在一个次数为 k 的多项式 $\widehat{u}_k(\lambda)$, 使得：

$$\sigma(u_k(\lambda), \widehat{u}_k(\lambda)) \neq 0.$$

由性质 1) 可知

$$\sigma(u(\lambda), v(\lambda)) = \sigma(u(\lambda)v(\lambda), 1), \qquad u, v \in \mathbb{P}. \tag{6}$$

考虑如下线性泛函 S，称其与复 Jacobi 矩阵 J 相关联：

$$S(u) = \sigma(u, 1), \qquad u \in \mathbb{P}. \tag{7}$$

根据 (4)，它具有如下性质：

$$S(p_n p_m) = \delta_{n,m}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{8}$$

记

$$\mathbf{s}_n := S(\lambda^n), \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{9}$$

数 $\{\mathbf{s}_n\}_{n=0}$ 称为 S 的矩。本文的主要目标是给出矩 $\mathbf{s}_n$ 的条件，这些条件蕴含 S 存在如下形式的积分表示：

$$S(p) = \int_{\mathbb{C}} p(z) d\mu, \tag{10}$$

其中 μ 是一个（非负）Borel 测度。我们将研究如下矩问题：求定义在 $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ 上的（非负）测度 μ，使得

$$\int_{\mathbb{C}} z^k d\mu(z) = s_k, \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{11}$$

这里 $\{s_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 是给定的一组复数（矩）。这一矩问题最近在 [16] 中提出。定理 2 将给出矩问题 (11) 可解的充分条件。因此，推论 1 将给出存在由正 Borel 测度 μ 表示的积分表示 (10) 的一些条件。作为另一项应用，我们将证明算子 A_0 可表示为在 L^2_μ 中与 z 算子相乘，见推论 2。

最后，我们指出，算子 A 是复对称的（定义参见例如 [6]），并且当 $H = l^2$ 时，它属于类 $C_+(H)$，参见 [14]。

记号。与通常一样，我们分别用 $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Z}_+$ 表示实数集、复数集、正整数集、整数集和非负整数集。$\mathbb{Z}_{k,l}$ 表示满足以下不等式的所有整数 r：$k \le r \le l$。$\mathbb{P}$ 表示所有复多项式组成的集合。用 $\mathfrak{B}(M)$ 表示集合 $M \subseteq \mathbb{C}$ 的所有 Borel 子集组成的集合。对于一个测度

μ 在 $\mathfrak{B}(M)$ 上，我们用 $L^2_\mu = L^2_\mu(M)$ 表示由所有（等价类意义下的）Borel 可测复值函数 f 构成的通常空间，这些函数定义在 M 上，且满足 $\int_M |f|^2 d\mu < +\infty$。包含函数 f 的等价类记为 $[f]$。用 l^2 表示平方可和复数序列 $\vec{u} = (u_k)_{k=0}^{\infty}$、$u_k \in \mathbb{C}$ 构成的通常空间，而 l^2_{fin} 表示 l^2 中所有有限向量组成的子集。此外，$\vec{e}_k$ 表示 l^2 中在 k 的位置取值为 1、在其他位置取值为 0 的向量（$k \in \mathbb{Z}_+$）。

若 H 是希尔伯特空间，则 $(\cdot,\cdot)_H$ 和 $\|\cdot\|_H$ 分别表示 H中的内积和范数。在显然的情况下可以省略指标。对于 H中的线性算子 A，我们用 $D(A)$表示其定义域，用 $R(A)$表示其值域；A^* 表示其伴随算子（若存在）。若 A 可逆，则A^{-1} 表示其逆算子。若算子可闭，则 $\overline{A}$ 表示该算子的闭包。若 A 有界，则 $\|A\|$ 表示其范数。我们用 E_H 表示 H中的恒等算子，即 $E_H x = x, x \in H$。在显然的情况下，可以省略指标 H。若 H_1 是 H的子空间，则 $P_{H_1} = P^H_{H_1}$ 表示从 H 到 H_1的正交投影。$A|_{H_1}$ 表示 A在子空间 H_1上的限制。

2 $\mathbb{C}$上的矩问题与复 Jacobi 矩阵。

首先，我们将研究矩问题 (11)，它可视为斯蒂尔切斯矩问题 (SMP) 和汉堡矩问题 (HMP) 的推广。虽然这种推广

$$\text{SMP} \ \to \text{HMP}$$

广为人知，但将其推广到复平面通常需要在积分号下添加额外的单项式以及相应的矩（复矩问题）。

定理 2 给定带有某些复矩 $\{s_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, $s_0 = 1$ 的矩问题 (11)。若满足以下条件:

$$|s_n| \le R^n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{12}$$

对于某个 $R > 0$，矩问题 (11) 可解。此外，在这种情况下，它有一个具有紧支撑的解 μ。

证明。首先，我们考虑矩为 $\{s_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$、 $s_0=1$ 的矩问题 (11)，它们满足以下条件：

$$\sum_{n=0}^{\infty}|s_n|^2<\infty. \tag{13}$$

引入以下向量：

$$\vec{g}:=\begin{pmatrix}0\\ \overline{s_1}\\ \overline{s_2}\\ \overline{s_3}\\ \vdots\end{pmatrix},\quad \vec{f}:=\begin{pmatrix}\overline{s_1}\\ \overline{s_2}-\overline{s_1}^2\\ \overline{s_3}-\overline{s_2s_1}\\ \overline{s_4}-\overline{s_3s_1}\\ \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{s_1}\\ \overline{s_2}\\ \overline{s_3}\\ \overline{s_4}\\ \vdots\end{pmatrix}-\overline{s_1}\begin{pmatrix}0\\ \overline{s_1}\\ \overline{s_2}\\ \overline{s_3}\\ \vdots\end{pmatrix}. \tag{14}$$

由条件 (13) 可知 $\vec{f},\vec{g}\in l^2$。令 S为 l^2上的右移算子：

$$S\vec{u}=(0,u_0,u_1,...),\qquad \vec{u}=(u_0,u_1,...)\in l^2.$$

考虑以下算子 B，它定义在整个 l^2上：

$$B=S+(\cdot,\vec{f})_{l^2}\vec{e}_0-(\cdot,\vec{g})_{l^2}\vec{e}_1. \tag{15}$$

有界算子 B 关于基 $\{\vec{e}_k\}_{k=0}^{\infty}$的矩阵 $\mathcal{M}$ 具有如下形式：

$$\mathcal{M}=\begin{pmatrix}s_1 & s_2-s_1^2 & s_3-s_2s_1 & s_4-s_3s_1 & \cdots & s_{n+1}-s_ns_1 & \cdots\\ 1 & -s_1 & -s_2 & -s_3 & \cdots & -s_n & \cdots\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}. \tag{16}$$

考虑 l^2 中的以下向量（ [15]中使用了类似的构造）：

$$x_0=\vec{e}_0,\quad x_j=\vec{e}_j+s_j\vec{e}_0,\qquad j\in\mathbb{N}, \tag{17}$$

以及 l^2_{fin}上的以下算子：

$$M\sum_{k=0}^{d}\alpha_kx_k=\sum_{k=0}^{d}\alpha_kx_{k+1},\qquad \alpha_k\in\mathbb{C},\ d\in\mathbb{Z}_+. \tag{18}$$

通过归纳法，我们得出

$$x_n = M^n x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{19}$$

因此

$$s_n = (x_n, x_0)_{l^2} = (M^n x_0, x_0)_{l^2}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{20}$$

由于

$$\vec{e}_0 = x_0, \quad \vec{e}_j = x_j - s_j x_0, \qquad j \in \mathbb{N},$$

then

$$M\vec{e}_0 = \vec{e}_1 + s_1\vec{e}_0,$$

$$M\vec{e}_j = \vec{e}_{j+1} - s_j\vec{e}_1 + (s_{j+1} - s_j s_1)\vec{e}_0, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

通过直接计算可验证， M 关于基 $\{\vec{e}_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的矩阵恰好是矩阵 $\mathcal{M}$。因此，算子 M 是有界的，并且可延拓到整个空间 l^2 上，成为有界算子 B。记 $\rho := \|B\|$。则算子 $\widetilde{B} := \frac{1}{\rho}B$ 是一个压缩算子。它在希尔伯特空间 $\widehat{H} \supseteq l^2$ 中有一个酉扩张 U （例如参见 [11]）：

$$P_{l^2}^{\widehat{H}} U^k|_{l^2} = \widetilde{B}^k, \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{21}$$

由 (20)、(21) 可写为：

$$s_n = \rho^n(\widetilde{B}^n x_0, x_0)_{l^2} = \rho^n(U^n x_0, x_0)_{\widetilde{H}} = ((\rho U)^n x_0, x_0)_{\widetilde{H}}, \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{22}$$

由于 ρU 是一个有界正规算子，其谱分解 $E(\delta)$， $\delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ 给出了矩问题的一个解 $\mu = (E(\delta)x_0, x_0)$。

现在考虑定理假设中的矩问题。任取一个 $\tau > R$，并令

$$\widetilde{s}_n := \frac{s_n}{\tau^n}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Then

$$|s_n| \le \left(\frac{R}{\tau}\right)^n,$$

因此，条件 (13) 对 $\widetilde{s}_n$ 成立。由此，根据已证明的结果，我们可以从 (22) 得出

$$\widetilde{s}_n = (N^n x_0, x_0)_{\widetilde{H}}, \ n \in \mathbb{Z}_+,$$

对于希尔伯特空间 $\widetilde{H} \supseteq l^2$ 中的有界正规算子 N。因此

$$s_n = ((\tau N)^n x_0, x_0)_{\widetilde{H}},\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

由有界正规算子 τN 的谱定理，即可得到所需结果。 □

推论 1 设 J 是复 Jacobi 矩阵 (1)。假设条件 (2) 成立。对于与 J 相关的线性泛函 S，有如下积分表示:

$$S(p) = \int_{\mathbb{C}} p(\lambda) d\mu, \qquad p \in \mathbb{P}, \tag{23}$$

其中， $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ 上的测度 μ 为非负测度，且 μ 具有紧支撑。

证明。事实上，对于复 Jacobi 矩阵，可以写成（见 [2]）：

$$\vec{e}_n = p_n(A)\vec{e}_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{24}$$

因此

$$(p_m(A)\vec{e}_0, p_n(A)\vec{e}_0) = \delta_{m,n}, \qquad m, n \in \mathbb{Z}_+, \tag{25}$$

and

$$S(u) = (u(A)\vec{e}_0, \vec{e}_0), \qquad u \in \mathbb{P}. \tag{26}$$

因此，对于 S 的矩 $\mathbf{s}_n$，有如下估计:

$$|\mathbf{s}_n| \leq |(A^n\vec{e}_0, \vec{e}_0)| \leq \|A\|^n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{27}$$

由定理 2 可知，存在一个紧支撑的 Borel 测度 μ在 $\mathbb{C}$ 上，使得

$$S(z^n) = \mathbf{s}_n = \int z^n d\mu, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

由线性性可得关系式 (23)。 □

对于支撑紧的测度 μ 在 $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ 上，我们将 Λ_μ记为在 L^2_μ 中乘以自变量的乘法算子，并且 $\mathcal{P} := \{[p],\ p \in \mathbb{P}\}$。

推论 2 设 J 为复 Jacobi 矩阵 (1)，且 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, $p_0 = 1$ 是满足 (3) 的多项式系。假设条件 (2) 成立。令 A_0 为与 J 相关联的 l^2_{fin} 上的算子，并且

$$T\sum_{k=0}^{d}\xi_k\vec{e}_k = \left[\sum_{k=0}^{d}\xi_k p_k(z)\right], \qquad \xi_k \in \mathbb{C},\ d \in \mathbb{Z}_+, \tag{28}$$

将 l^2_{fin} 映射到 L^2_μ，而 μ 是推论 1 给出的正测度。于是线性算子 T 可逆，并且

$$TA_0T^{-1} = \Lambda_0, \tag{29}$$

其中 $\Lambda_0 = \Lambda_\mu|_{\mathcal{P}}$。

证明。注意到

$$TA_0\vec{e}_k = T(b_{k-1}\vec{e}_{k-1}+a_k\vec{e}_k+b_k\vec{e}_{k+1}) = [b_{k-1}p_{k-1}(z) + a_kp_k(z) + b_kp_{k+1}(z)] =$$

$$= [zp_k(z)] = \Lambda_0[p_k] = \Lambda_0T\vec{e}_k, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

由线性性可得

$$TA_0 = \Lambda_0T. \tag{30}$$

剩下只需验证 T 可逆。反设存在一个非零向量

$$\vec{u} = \sum_{k=0}^{r}\eta_k\vec{e}_k \in l^2_{fin}, \qquad \eta_k \in \mathbb{C},\ \eta_r \neq 0,\ r \in \mathbb{Z}_+,$$

使得

$$T\vec{u} = 0.$$

Then

$$0 = \|T\vec{u}\|^2 = \int\left|\sum_{k=0}^{r}\eta_kp_k(z)\right|^2 d\mu.$$

这意味着测度 μ 是有限原子的，其原子位于多项式 $u_r(z) := \sum_{k=0}^{r}\eta_kp_k(z)$, $\deg u_r = r$的零点之中。根据定理 1 的性质 3)，存在一个次数为 r 的多项式 $\widehat{u}_r(\lambda)$，使得:

$$\int u_r(z)\widehat{u}_r(z)d\mu = \sigma(u_r, \widehat{u}_r) \neq 0.$$

然而，左侧的积分等于零，这就产生了矛盾。推论的证明至此完成。 □

当然，若能为算子 A 得到类似于推论 2 中关于算子 A_0 的结果，将会很有价值。然而，除了实矩阵的情形外，目前尚不清楚 T 何时有界且具有有界逆算子。这个问题将另行研究。

参考文献

[1] N.I. Akhiezer，经典矩问题及分析中的一些相关问题，Hafner Publishing Co.，纽约，1965。[2] B. Beckermann，复雅可比矩阵，数值分析2000，第V卷：求积与正交多项式。计算与应用数学杂志 127，第1–2期（2001），17–65。[3] B. Beckermann, M. Castro Smirnova，关于复雅可比矩阵的确定性，斯堪的纳维亚数学杂志 95，第2期（2004），285–298。[4] Ju.M. Berezanskii，自伴算子的特征函数展开，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1968。[5] J.S. Christiansen, M. Zinchenko，复有限带隙雅可比矩阵的Lieb-Thirring不等式，数学物理快报 107，第9期（2017），1769–1780。[6] S.R. Garcia, E. Prodan, M. Putinar，复对称算子的数学与物理方面，物理学杂志 A 47，第35期（2014），353001，共54页。[7] Y. Ikebe, N. Asai, Y. Miyazaki, D. Cai，无限复对称三对角矩阵的特征值问题及其应用，国际线性代数学会第四届会议论文集（鹿特丹，1994），线性代数及其应用 241/243（1996），599–618。[8] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković，复雅可比矩阵与求积公式，Filomat 第17期（2003），117–134。[9] F. Štampach，复双无限雅可比矩阵的特征函数，积分方程与算子理论 88，第4期（2017），501–534。

[10] G. Świderski，某些复雅可比矩阵的谱性质，积分方程与算子理论 92，第2期（2020），论文第11号，共24页。[11] B.Sz.-Nagy, C. Foias, H. Bercovici, L. Kérchy，《希尔伯特空间上算子的调和分析》，第二版，修订增补版。Universitext。施普林格，纽约，2010。
[12] H.S. Wall，《连分数解析理论》，D. Van Nostrand Company, Inc.，纽约，纽约州，1948。[13] S.M. Zagorodnyuk，关于（2N+1）对角复对称非厄米矩阵的正向与逆向谱问题，Serdica Math. J. 30，第4期（2004），471–482。[14] S.M. Zagorodnyuk，关于具有简单谱的复对称算子和斜对称算子，SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 7（2011），论文016号，共9页。[15] S. Zagorodnyuk，关于 $\mathbb{C}^n$中的截断多维矩问题，Axioms 11，第1期（2022），20。
[16] S.M. Zagorodnyuk，关于复对称算子与正规算子限制的扰动之间的相似性，算子与矩阵 16，第1期（2022），101–112。
地址：V. N. Karazin Kharkiv National University 数学与计算机科学学院 高等数学与信息学系 乌克兰哈尔科夫自由广场4号，61022
Sergey.M.Zagorodnyuk@gmail.com；zagorodnyuk@karazin.ua