arXiv:2302.12062v1 [math.QA] 23 Feb 2023

野性量子对数恒等式

Markus Reineke

Abstract. 我们展示并讨论五项量子二对数恒等式的“野性”类比。我们利用动机墙穿越、动机 Donaldson–Thomas 不变量的几何性以及 Kronecker 模空间的特殊性质，从箭图表示论推导出这些类比。

1. Introduction

量子二对数是一个 q级数，具有许多引人注目的性质 [16], ，其中包括著名的五项恒等式 [2]。簇代数理论和箭图动机不变量的墙穿越理论，促成了此类二对数恒等式的大量推广 [4]。

在本文中，我们通过研究源自野性箭图的“野性”二对数恒等式，探索这一系列思想的边界。为此，我们再次运用动机墙穿越，将所得级数诠释为动机 Donaldson–Thomas 不变量，并利用后者以箭图模空间的交叉同调为基础的几何解释 [7] ，确立非常强的正性性质。在源自广义克罗内克箭图的秩二情形中，关于 Kronecker 模空间已有深入研究且极为特殊的对称性，赋予了我们这些高度无限的二对数恒等式各个项许多额外的显式性质；见定理 2.6。

为推导这一恒等式，我们在第 3 节汇集有关动机不变量墙穿越的现有材料（入门介绍见 [8] ），并在第 4 节将其调整为适用于本文记号和特殊情形的形式。尽管类似的方法也用于例如热带顶点 [3, 12], 的研究，但最好尽可能明确地阐述这类野性恒等式的性质。

致谢：作者谨此感谢 Daping Weng 就这些野性恒等式进行的多次讨论，感谢 Bernhard Keller 提供在其研讨会上介绍这些恒等式的机会，感谢 Vladimir Fock 和 Sergey Mozgovoy 提出的宝贵意见，并感谢 Timm Peerenboom 仔细阅读本文草稿并提出多项改进建议。

2. 量子二对数恒等式

我们首先定义量子二对数，并陈述经典五项恒等式。系数环 $\mathbb{Q}(q^{1/2})[[x]]$，尤其是对 q 的半次幂进行扭曲，在动机唐纳森–托马斯不变量的背景下将显得自然而然。

定义2.1. 我们将量子二对数 $\Phi(x) \in \mathbb{Q}(q^{1/2})[[x]]$ 定义为

$$\Phi(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n/2} x^n}{(1-q) \cdot \ldots \cdot (1-q^n)} =$$

$$= \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n\cdot(q^{-n/2}-q^{n/2})}\right) = \prod_{n\geq 0}\frac{1}{1-q^{n+1/2}\cdot x}.$$

备注：从当前定义转换为文献中的定义非常直接。例如，[2, 14] 使用定义 $(x;q)_\infty = \Phi(q^{-1/2}x)^{-1}$，而[4] 使用 $\mathbb{E}(x) = \Phi(-qx)$。经典欧拉二对数 [16] 可由以下极限得到：

$$(q^{-1/2}-q^{1/2})\log\Phi(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{x^n\cdot(q^{-1/2}-q^{1/2})}{n\cdot(q^{-n/2}-q^{n/2})} \xrightarrow{q\to 1} \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n^2} = \mathrm{Li}_2(x)$$

定义 2.2. 对于正整数 m，我们将 $\mathbb{Q}(q^{1/2})_{q^m}[[x,y]]$ 定义为满足斜交换关系 $xy = q^m yx$ 的斜形式幂级数环。

现在我们可以表述五项量子二对数恒等式：

定理 2.3（Sch¨utzenberger、Fadeev、Kashaev、Volkov）。在 $\mathbb{Q}(q^{1/2})_q[[x,y]]$ 中，有

$$\Phi(x)\Phi(y) = \Phi(y)\Phi(-q^{-1/2}xy)\Phi(x)$$

对于 $m = 2$，我们将得到以下恒等式，作为定理 2.6 的一个特例。

定理 2.4. 在 $\mathbb{Q}(q^{1/2})_{q^2}[[x,y]]$ 中，有

$$\begin{aligned}\Phi(x)\Phi(y) = \Phi(y)\Phi(q^{-2}xy^2)\Phi(q^{-6}x^2y^3)\Phi(q^{-12}x^3y^4)\ldots\cdot\\ \cdot\Phi(q^{-1/2}xy)^{-1}\Phi(q^{-3/2}xy)^{-1}\cdot\\ \cdot\ldots\Phi(q^{-12}x^4y^3)\Phi(q^{-6}x^3y^2)\Phi(q^{-2}x^2y)\Phi(x).\end{aligned}$$

为了让这类恒等式更易读，我们现在引入一种简写记号；稍后我们还会在 Donaldson–Thomas 不变量的框架下说明其动机：

定义 2.5。对于 a、$b \geq 0$，定义

$$\Phi_{(a,b)} = \Phi((-1)^{mab}q^{(a^2+b^2-2mab-1)/2}x^a y^b)^{(-1)^{a^2+b^2-mab-1}}.$$

更一般地，对于 Laurent 多项式 $P(q) = \sum_k c_k(-q^{1/2})^k \in \mathbb{Q}[q^{\pm 1/2}]$，定义

$$\Phi_{(a,b)}^{\circ P} = \prod_k \Phi((-1)^{mab}q^{(a^2+b^2-2mab-1+k)/2}x^a y^b)^{(-1)^{a^2+b^2-mab-1+k}\cdot c_k}.$$

于是，前面的恒等式可简化为

$$\Phi_{(1,0)}\Phi_{(0,1)} = \Phi_{(0,1)}\Phi_{(1,1)}\Phi_{(1,0)} \text{ for } m = 1,$$

$$\Phi_{(1,0)}\Phi_{(0,1)} = \Phi_{(0,1)}\Phi_{(1,2)}\Phi_{(2,3)}\ldots\cdot\Phi_{(1,1)}^{\circ(q+1)}\cdot\ldots\Phi_{(3,2)}\Phi_{(2,1)}\Phi_{(1,0)}$$

对于 $m = 2$。

在 $m \geq 3$ 的情形下，我们无法再给出显式恒等式，但可以对其作出相当完整的定性描述。

为了表述这一主要结果，我们还需要两个定义。我们将 σ 记为 $\mathbb{Z}^2$ 上的算子，由 $\sigma(a,b) = (b, mb-a)$ 给出；它与对合 $(a,b) \mapsto (b,a)$ 一起生成一个无限二面体群。我们还定义 $\mu_\pm = (m \pm \sqrt{m^2-4})/2$，即二次方程 $x^2 - mx + 1 = 0$ 的两个根。

定理 2.6。在 $\mathbb{Q}(q^{1/2})_{q^m}[[x,y]]$ 中，对 $m \geq 3$，有

$$\Phi_{(1,0)}\Phi_{(0,1)} = \Phi_{(0,1)}\Phi_{\sigma(0,1)}\Phi_{\sigma^2(0,1)}\Phi_{\sigma^3(0,1)} \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot \prod_{\substack{\mu_- \leq a/b \leq \mu_+ \\ increasing}}^{\rightarrow} \Phi_{(a,b)}^{\circ P_{(a,b)}} \cdot$$

$$\cdot \ldots \Phi_{\sigma^{-3}(1,0)}\Phi_{\sigma^{-2}(1,0)}\Phi_{\sigma^{-1}(1,0)}\Phi_{(1,0)},$$

其中 $P_{(a,b)}$ 满足以下性质：

(1) “狂野性”/完备性：我们具有非消失性

$$P_{(a,b)} \neq 0 \ for \ all \ \mu_- \leq a/b \leq \mu_+.$$

(2) 二面体对称性：我们具有以下对称性

$$P_{(b,a)} = P_{(a,b)}, \quad P_{\sigma(a,b)} = P_{(a,b)}.$$

(3) 正性：我们有

$$P_{(a,b)} \in \mathbb{N}[q], \ of \ degree \ d = mab - a^2 - b^2 + 1 > 0.$$

(4) 单峰性：多项式 $P_{(a,b)} = \sum_k c_k q^k$ 是回文且单峰的：

$$c_{d-k} = c_k \ and \ 1 = c_0 \leq c_1 \leq \ldots \geq c_{d-1} \geq c_d = 1.$$

(5) 最低阶项：

$$P_{(1,k)} = \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q.$$

(6) 特殊值：

$$P_{(k,k)}(1) = \frac{1}{(m-2)k^2} \sum_{d|k} \mu(\frac{k}{d})(-1)^{md+1} \binom{(m-1)^2 d - 1}{d}.$$

作为二面体对称性这一性质的推论，我们看到所有 $P_{(a,b)}$ 都由 $a \leq b \leq \frac{m}{2}a$的情形确定。所有性质都将由以下解释得出：将 $P_{(a,b)}$ 视为 Kronecker 模空间的交叉同调中的 Poincar´e 多项式；Kronecker 模空间[1], 是一类参数化某些矩阵组（在基变换意义下）的射影簇。

3. Quiver setup

本节中，我们回顾有关箭图表示及其模空间的必要术语，并阐述一般箭图二对数恒等式的主要要素，即动机墙穿越公式，以及动机唐纳森–托马斯不变量的定义与几何性。有关箭图动机墙穿越的详细介绍，请参阅 [8]；简要概述请参阅 [11] 。

设 Q 为有限无圈箭图。我们对顶点集 $Q_0 = \{i_1, \ldots, i_n\}$ 排序，使得若 $i_k \to i_l$ 则有 $k > l$。 Q 的欧拉形式是定义在 $\mathbb{Z}Q_0$ 上的（一般而言非对称）双线性形式，定义为 $\langle \mathsf{d}, \mathsf{e} \rangle = \sum_{i \in Q_0} d_i e_i - \sum_{\alpha:\ i \to j} d_i e_j$ 对于 $\mathsf{d}, \mathsf{e} \in \mathbb{Z}Q_0$。

我们将形式量子仿射空间 $\mathbb{Q}(q^{1/2})_q[[Q_0]]$ 定义为斜形式幂

级数环，其拓扑基为 $t^{\mathbf{d}}$，其中 $\mathbf{d} \in \mathbb{N}Q_0$，乘法则由反对称化欧拉形式扭曲

$$t^{\mathbf{d}} \cdot t^{\mathbf{e}} = (-q^{1/2})^{\langle \mathbf{d},\mathbf{e}\rangle - \langle \mathbf{e},\mathbf{d}\rangle} t^{\mathbf{d}+\mathbf{e}}.$$

我们固定线性函数 $\Theta, \kappa \in (\mathbb{Z}Q_0)^*$ 在 Q 上，使得 $\kappa(\mathbf{d}) > 0$ 对 $\mathbf{d} \in \mathbb{N}Q_0 \setminus 0$成立，并考虑相应的斜率函数 $\mu(\mathbf{d}) = \frac{\Theta(\mathbf{d})}{\kappa(\mathbf{d})}$ 对 $\mathbf{d} \in \mathbb{N}Q_0 \setminus 0$成立。我们用 Λ_a 表示所有斜率为 $a \in \mathbb{Q}$的 $\mathbf{d} \in \mathbb{N}Q_0 \setminus 0$ 的集合。

我们将簇的格罗滕迪克环 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$定义为由复代数簇 X 的同构类生成的自由阿贝尔群，并对“切割与粘贴”关系 $[X] = [A] + [U]$ 取商：若 $A \subset X$ 闭，$U = X \setminus A$，则成立；乘法定义为$[X] \cdot [Y] = [X \times Y]$。我们将勒夫谢茨动机 $[\mathbb{A}^1]$ =简记为：q。

我们考虑局部化 $R = K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})[q^{\pm 1/2}, (1-q^n)^{-1} : n \geq 1]$，并像上文一样定义形式动机仿射空间 $R_q[[Q_0]]$，其中以 R 替代系数环 $\mathbb{Q}(q^{1/2})$。事实上，我们的所有计算都将在更小的动机系数环中进行，其中的元素是关于 q的有理函数。注意，虚拟霍奇多项式等动机测度的存在表明，这个子环同构于 $\mathbb{Q}(q^{1/2})$的一个子环。

给定维数向量 $\mathbf{d} \in \mathbb{N}Q_0$，我们为$i \in Q_0$固定维数为 d_i 的 $\mathbb{C}$-向量空间 V_i。我们考虑基变换作用

$$\prod_{i \in Q_0} \mathrm{GL}(V_i) = G_{\mathbf{d}} \curvearrowright R_{\mathbf{d}}(Q) = \bigoplus_{\alpha: i \to j} \mathrm{Hom}(V_i, V_j)$$

定义如下：

$$(g_i)_i \cdot (f_\alpha)_\alpha = (g_j f_\alpha g_i^{-1})_{\alpha: i \to j},$$

根据定义，其轨道与维数向量为 $\mathbf{d}$ 的 Q 的复表示的同构类一一对应。

我们用 $R^{\mu-\mathrm{sst}}{}_{\mathbf{d}}(Q) \subset R_{\mathbf{d}}(Q)$ 表示 μ-半稳定点构成的开子集。利用这一记号，我们可以表述动机墙穿越公式。该公式在形式上等价于 Harder–Narasimhan滤过 [9] 的存在性：

定理 3.1（动机墙穿越公式）。在 $R_q[[Q_0]]$ 中，有如下恒等式：

$$\Phi(t_1) \cdot \ldots \cdot \Phi(t_n) = \sum_{\mathbf{d}} (-q^{1/2})^{\langle \mathbf{d},\mathbf{d}\rangle} \frac{[R_{\mathbf{d}}(Q)]}{[G_{\mathbf{d}}]} t^{\mathbf{d}} =$$

$$= \prod_{a \in \mathbb{Q}}^{\rightarrow}{}_{decreasing} \left(1 + \sum_{\mathbf{d} \in \Lambda_a} (-q^{1/2})^{\langle \mathbf{d},\mathbf{d}\rangle} \frac{[R^{\mu-\mathrm{sst}}_{\mathbf{d}}(Q)]}{[G_{\mathbf{d}}]} t^{\mathbf{d}} \right).$$

接下来，我们可以定义动机唐纳森–托马斯不变量。我们将上一节的简写记号推广为

$$\Phi(x)^{\circ P(q)} = \prod_k \Phi(q^{k/2} x)^{(-1)^k c_k}$$

对于 $P(q) = \sum_k c_k (-q^{1/2})^k$。

定义 3.2。 [6] 假设 $\langle -, - \rangle$ 在 Λ_a 上是对称的。通过在 $R_q[[Q_0]]$ 中分解，定义 $\mathrm{DT}^{\mu}{}_{\mathbf{d}}(q) \in \mathbb{Q}[q^{\pm 1/2}]$:

$$1 + \sum_{\mathbf{d} \in \Lambda_a} (-q^{1/2})^{\langle \mathbf{d},\mathbf{d}\rangle} \frac{[R^{\mu-\mathrm{sst}}_{\mathbf{d}}(Q)]}{[G_{\mathbf{d}}]} t^{\mathbf{d}} = \prod_{\mathbf{d} \in \Lambda_a} \Phi(t^{\mathbf{d}})^{\circ \mathrm{DT}^{\mu}_{\mathbf{d}}(q)}.$$

$\mathrm{DT}^{\mu}_{\mathbf{d}}(q)$ 称为带有稳定性 μ 的箭图 Q 的动机唐纳森–托马斯不变量。

我们指出，使用多重对称指数 Exp 的更常见定义与此定义等价，因为根据定义，$\Phi(x) = \mathrm{Exp}(\frac{x}{q^{-1/2}-q^{1/2}})$.
动机唐纳森–托马斯不变量可以通过模空间的交叉同调得到几何解释。具体来说，我们考虑几何不变量理论商

$$R^{\mu-\mathrm{sst}}_{\mathbf{d}}(Q)//G_{\mathbf{d}} = M^{\mu-\mathrm{sst}}_{\mathbf{d}}(Q),$$

Q 的维数向量为 $\mathbf{d}$ 的 μ-半稳定表示的模空间。
它是一个不可约的射影正规（通常是奇异的）复代数簇。若 $\mathbf{d}$ 是 μ-稳定的，也就是说，若存在一个维数向量为 $\mathbf{d}$ 的 μ-稳定表示，则 $\dim M^{\mu-\mathrm{sst}}_{\mathbf{d}}(Q) = 1 - \langle \mathbf{d}, \mathbf{d}\rangle$。借助这个模空间，我们可以得到动机唐纳森–托马斯不变量 [7] 的如下几何解释：

定理 3.3（DT 不变量的几何性）。我们有

$$\mathrm{DT}^{\mu}_{\mathbf{d}}(q) = (-q^{1/2})^{\langle \mathbf{d},\mathbf{d}\rangle-1}\sum_{k\geq 0}\dim \mathrm{IH}^k(M^{\mu-\mathrm{sst}}_{\mathbf{d}}(Q),\mathbb{Q})(-q^{1/2})^k$$

如果 $\mathbf{d}$ 是 μ-稳定的，并且 $\mathrm{DT}^{\mu}_{\mathbf{d}}(q) = 0$ 否则。

4. Quantum dilogarithm identity for quivers

为结合上一节中准备的方法，我们考虑满足以下条件的箭图与稳定性：$\langle -, - \rangle$ 在所有 Λ_a 上是对称的。特别地，如果 Q 的反对称化欧拉形式由稳定性函数确定，即

$$\langle \mathbf{d}, \mathbf{e}\rangle - \langle \mathbf{e}, \mathbf{d}\rangle = \kappa(\mathbf{d})\Theta(\mathbf{e}) - \kappa(\mathbf{e})\Theta(\mathbf{d}) \text{ for all } \mathbf{d}, \mathbf{e} \in \mathbb{Z}Q_0,$$

参见 [11, 命题 5.2]。除广义克罗内克箭图外，完全二部箭图也具有这一性质。

定理 4.1。假设 $\langle -, - \rangle$在所有 Λ_a 上是对称的。那么我们有如下因子分解

$$\Phi(t_1)\cdot \ldots \cdot \Phi(t_n) = \prod_{\mu(\mathbf{d}) \ decreasing}^{\rightarrow} \Phi(t^{\mathbf{d}})^{\circ(-q^{1/2})^{\langle \mathbf{d},\mathbf{d}\rangle-1}\cdot P_{\mathbf{d}}(q)}$$

在 $R_q[[Q_0]]$中，对于具有以下性质的多项式 $P_{\mathbf{d}}(q)$：

(1) 非消失性：当且仅当 $\mathbf{d}$ 是 μ-稳定的，我们有 $P_{\mathbf{d}}(q) \neq 0$；(2) 正性：我们有 $P_{\mathbf{d}} \in \mathbb{N}[q]$，其次数为 $\deg P_{\mathbf{d}}(q) = 1 - \langle \mathbf{d}, \mathbf{d}\rangle$；(3) 单峰性：$P_{\mathbf{d}}(q)$ 是回文且单峰的；(4) 简单性：此外，若 $\langle \mathbf{d}, \mathbf{d}\rangle = 1$，我们有 $P_{\mathbf{d}}(q) = 1$。

现在很容易证明这一点：结合定理 3.1、定义 3.2 和定理 3.3，我们看到，在 $\mathbf{d}$ 为 μ-稳定的情况下，$P_{\mathbf{d}}(q)$ 恰好是 $M^{\mu-\mathrm{sst}}_{\mathbf{d}}(Q)$ 的交叉同调中的 Poincar´e 多项式，从而证明了非消失性。正性和单峰性已在 [7, 推论 1.2] 中得到证明。次数结论由模空间的维数公式得出，因此简单性结论也随之成立。

为推导定理 2.6，我们考虑 m-箭头克罗内克箭图 $K_m = 1 \overset{(m)}{\leftarrow} 2$,

其稳定性函数定义为 $\Theta(\mathbf{d}) = m \cdot (d_2 - d_1)$ 和 $\kappa(\mathbf{d}) = d_1 + d_2$。
我们将变量 $t_1 = x$ 和 $t_2 = y$视为相同，从而将$\mathbb{Q}(q^{1/2})_q[[(K_m)_0]]$与 $\mathbb{Q}(q^{1/2})_{q^m}[[x,y]]$等同起来，使得 $t^{\mathbf{d}} = (-q^{1/2})^{md_1d_2}x^{d_1}y^{d_2}$并且

$$\Phi(t^{\mathbf{d}})^{\circ(-q^{1/2})^{\langle \mathbf{d},\mathbf{d}\rangle -1}\cdot P(q)} = \Phi_{(a,b)}^{\circ P(q)}$$

对于 $\mathbf{d} = (a,b)$。
于是，定理 4.1 给出了 $\mathbb{Q}(q^{1/2})_{q^m}[[x,y]]$ 中的如下分解：

$$\Phi_{(1,0)}\Phi_{(0,1)} = \prod_{a/b \text{ increasing}}^{\rightarrow} \Phi_{(a,b)}^{\circ P_{(a,b)}},$$

使得

$$P_{(a,b)}(q) = \sum_{k\geq 0} \dim \mathrm{IH}^{2k}(K_{(a,b)},\mathbb{Q})q^k,$$

其中

$$K_{(a,b)} = M_{a\times b}(\mathbb{C})^m_{\mathrm{sst}}//\mathrm{GL}_a(\mathbb{C})\times \mathrm{GL}_b(\mathbb{C})$$

是 [1] 的 Kronecker 模空间。
定理 2.6 中其余所有性质现在都可由这些 Kronecker 模空间的性质推出。根据 [13, 第 4], 节的分析，我们看到，维数向量 (a,b) 是 μ-稳定的，当且仅当 $\langle (a,b),(a,b)\rangle \leq 1$。若 $\langle (a,b),(a,b)\rangle = 1$，则该维数向量是实根，且模空间 $K_{(a,b)}$ 退化为一点，因此 $P_{(a,b)} = 1$。否则，我们有 $\langle (a,b),(a,b)\rangle \leq 0$，这等价于 $\mu_- \leq a/b \leq \mu_+$。由此证明了该定理的完备性结论。由线性对偶性，我们有 $K_{(a,b)} \simeq K_{(b,a)}$。此外，反射函子根据 [15, 命题 4.3]诱导出同构 $K_{(a,b)} \simeq K_{(b,mb-a)}$。这确立了二面体对称性。Kronecker 模空间 $K_{(1,k)}$ 与格拉斯曼流形 Gr_k^m相对应，从而确定了因式分解中的最低阶项。最后，特殊值$P_{(k,k)}(1)$由 [10, 定理 5.2]计算得出。

References

[1] J.-M. Drezet, *Cohomologie des variétés de modules de hauteur nulle*, 《数学年鉴》281 (1988), 第 1 期，43–85 页。[2] L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, *Q*uantum dilogarithm, 《现代物理快报 A》9 (1994), 第 5 期，427–434 页。[3] M. Gross, R. Pandharipande, *Quivers curves and the tropical vertex* 67, , , , 《葡萄牙数学》– ( )。211 259 2010
[4] B. Keller, *On cluster theory and quantum dilogarithm identities*, 代数表示及相关主题，85–116 页，EMS 系列大会报告，欧洲数学会，Z¨urich，2011。[5] M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Stability structures motivic Donaldson–Thomas invariants* , , arXiv: 。[6] M. *and cluster transformations* 0811 2435
Kontsevich, Y. Soibelman, *Cohomological Hall algebra exponential Hodge structures and* , , 《数论与物理通讯》*motivic Donaldson–Thomas invariants* 5 2011
( ), 第 2 期，231 352– 页。[7] S. Meinhardt, M. Reineke, *Donaldson–Thomas invariants versus intersection cohomology of quiver moduli* 754 2019 143 178 , 《纯粹与应用数学杂志》( )，– 页。[8] S. Mozgovoy, *Introduction to Donaldson–Thomas invariants*, 代数表示理论进展，195–210 页，EMS 系列大会报告，欧洲数学会，Z¨urich，2013。[9] M. Reineke, *The Harder-Narasimhan system in quantum groups and cohomology of quiver moduli* 152 2003 2, 349 368 , Invent. Math. ( )，第 – 期。[10] M. Reineke, *Cohomology of quiver moduli functional equations and integrality of Donald* , , , 《组合数学》( ), *son–Thomas type invariants* 147 2011 3, 943 964
第 – 期。

[11] M. Reineke, *Quiver moduli and small desingularizations of some GIT quotients*, 表示论——当前趋势与展望，613–635 页，EMS 系列大会报告，欧洲数学会，Z¨urich，2017。[12] M. Reineke, T. Weist, *Refined GW/Kronecker correspondence*,《数学年鉴》355 (2013), 第 1 期，17–56 页。[13] A. Schofield, *Birational classification of moduli spaces of representations of quivers*, Indag. Math. (N.S.) 12 (2001), 第 3 期，407–432 页。[14] A.Volkov, *Pentagon identity revisited*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2012，第 20 期，4619–4624 页。[15] T. Weist, *Localization in quiver moduli spaces* Represent. Theory 17 (2013), 382–425。[16] D. Zagier, *The dilogarithm function*, 数论、物理学与几何学前沿 II，3–65 页，Springer，柏林，2007。