在每个菱形子移位上，多米诺问题都是不可判定的

Benjamin Hellouin de Menibus ! 巴黎萨克雷大学、法国国家科学研究中心、数字科学跨学科实验室，91400，奥赛，法国

Victor H. Lutfalla ! GREYC，卡昂大学

Camille

Noûs大学

arXiv:2302.12086v1 [cs.DM] 23 Feb 2023

摘要

我们将经典多米诺问题扩展到任意由菱形瓷砖构成的铺砌。对于任意边对边菱形铺砌的子移位 X（例如彭罗斯子移位），我们证明其相关的 X多米诺问题是 Π^0_1困难的，因此是不可判定的。当该子移位 X 由一个可计算的禁用图案序列给出时，它是 Π^0_1完备的。

2012年美国计算机协会主题分类 计算数学 → 离散数学；计算理论 → 可计算性

关键词与短语 菱形铺砌、可判定性、多米诺问题

资助 ANRC_SyDySi

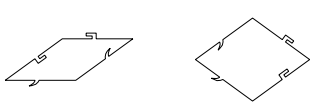
1 引言

粗略来说，铺砌分为两类。几何铺砌是用几何瓦片覆盖某个空间（通常是欧几里得平面），且瓦片之间没有重叠；其约束来自瓦片的几何形状。几何铺砌的一个著名例子是彭罗斯铺砌[12]。符号铺砌是对离散结构进行着色，通常是 $\mathbb{Z}^d$，针对某个 d，其约束由禁用图案给出。

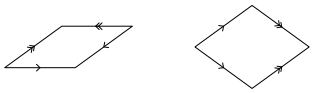
这两类铺砌因其动力学和组合性质而受到广泛关注。几何铺砌的特点是具有对称性，并且与数学晶体学有联系 [3]。另一方面，符号铺砌与可计算性和可判定性理论的联系更为紧密。其典范性例子是多米诺问题：给定一组颜色和一组禁用图案，是否存在一种满足这些约束的 $\mathbb{Z}^2$ 着色？Berger [5] 证明了这个问题不可判定，这一结果塑造了整个研究领域。

人们已经开展了大量工作，将多米诺问题扩展到能够推广 $\mathbb{Z}^2$上经典符号结果的结构中。一项活跃的研究领域是在群上研究多米诺问题，以便联系群的性质与铺砌空间的性质；综述请参见 [1] 。其他研究方向包括在自相似结构中研究多米诺问题，以理解一维与 2 [4]之间的界限，或在 $\mathbb{Z}^2$-子移位中研究多米诺问题，以理解动态限制的影响 [2]。

回到几何铺砌，彭罗斯铺砌等复杂实例最初是用边缘带有凹口的拼图式瓦片定义的（见图 1）。也可以将其重新表述为边缘带有符号的简单多边形瓦片 [6] ，并要求符号必须匹配。从本质上说，这些铺砌兼具符号性和几何性。



(a) 带有切口和凹槽的彭罗斯瓦片的原始定义 [12]with 切口和凹槽。



(b) 在边上标有箭头的另一种定义 [6]。箭头的类型和方向必须匹配相邻瓦片之间。

图 1 彭罗斯瓦片的定义：在瓦片的边上添加符号，即可得到简单的菱形形状。

同样，给定一组形状，我们通过在这些形状的边上添加颜色来定义相应的符号瓦片，并研究由此产生的符号-几何铺砌。考虑图 2 中的符号-几何瓦片集 $\mathbf{T}$ 。由于这些形状是彭罗斯菱形，关于这个瓦片集自然会产生两个问题：

1. 是否存在一个无限的合法铺砌 $\mathbb{R}^2$ ，其瓦片来自 $\mathbf{T}$ ，并且只考虑平移等价？2. 是否存在一个无限的合法铺砌 $\mathbb{R}^2$ ，其瓦片来自 $\mathbf{T}$ ，并且只考虑平移等价，同时投影为彭罗斯几何铺砌（即去除瓦片上的颜色后）？

不难看出，第一个问题至少与经典多米诺问题一样困难（事实上二者等价）；经典多米诺问题对应于输入瓦片全都是同一种菱形的情形。这促使我们研究第二个问题，在该问题中，几何（彭罗斯）子移位强制使用不同的菱形。

这些都是几何子移位中的多米诺问题实例，这正是本文研究的对象。对于任意一组菱形$\mathcal{T}$以及由这些菱形构成的几何子移位 X， X-Domino 问题定义如下：给定一组瓦片作为输入，即来自$\mathcal{T}$的菱形，且每条边上都带有一种颜色，判断是否可以按照以下方式铺砌平面：

1. 具有公共边的瓦片在公共边上的颜色相同，且2. 几何铺砌（去掉颜色后）对 X有效。我们的主要结果如下：

▶**定理 1.** 设 X 是一个由可计算的禁用图案列表给出的几何子移位。 X-*Domino* 与 $\mathbb{Z}^2$上的经典多米诺问题多对一等价，也就是说，它是余递归可枚举完全的，因此不可判定。

2 定义

2.1 几何铺砌空间

▶ **定义 2** (形状与拼片)。 我们称由一对向量 $(\vec{u}, \vec{v})$ 和一个位置 p给出的几何菱形为形状 。

我们将形状集 称为在平移意义下等价的形状所组成的有限集合，见图 *3a*。

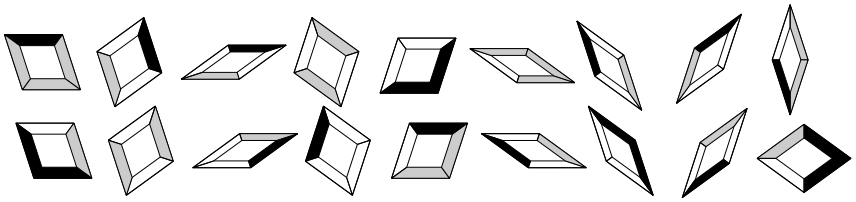


图 2 彭罗斯菱形上的符号—几何瓦片示例。

我们将拼块称为由形状构成的边对边单连通有限集合，即任意两个瓦片要么互不相交，要么共享一个顶点或一整条公共边，并且拼块中没有空洞。我们将拼块的支撑集 称为其形状的并集。我们将图案 称为在平移意义下等价的拼块。

请注意，形状不视为在旋转下等价。

▶ **定义3**（铺砌、全移位与子移位）。 给定一个形状集 T，我们将由 T 中形状的平移像构成的、无重叠地覆盖欧几里得平面的边对边覆盖称为 T-铺砌：参见图*3b*。

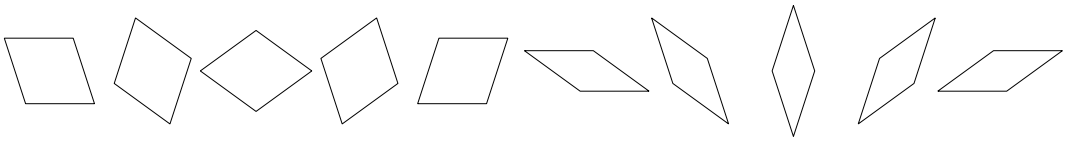
我们将 T 上的全移位记作 X_T，它是所有 T-铺砌的集合。
我们将 X_T 的子移位称为满足平移不变且在铺砌拓扑 *[13]* 下闭合的 X_T 的任意子集 X 。

具有有限种平移等价形状的边对边菱形铺砌具有有限局部复杂度 （FLC）：也就是说，对于任意紧集 $C \subseteq \mathbb{R}^2$，支撑集包含于 C 中的图案只有有限种。FLC 假设在几何铺砌和 Delone 集的研究中经常出现；参见 [3]。特别是，FLC 确保铺砌空间与标准的 $\mathbb{Z}^d$ 铺砌空间具有大多数相同的性质，例如在通常的铺砌拓扑 [13, 10]下是紧的。

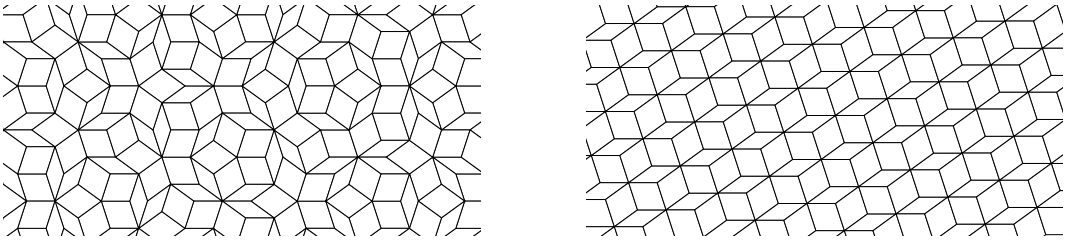
子移位 X 总可以用一个可数（可能是无限的）禁用图案集合来刻画，我们将其记为序列 $\mathcal{F} := (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$。换句话说， X 是所有不含 $\mathcal{F}$ 中任何图案的铺砌所构成的集合。当 $\mathcal{F}$ 可计算时，我们称子移位 X 是有效的。

如果一个图案（或拼块）的支撑集包含一个以图案的某个顶点为圆心、半径为 r 的圆盘，且从拼块中移除任何形状都会破坏这一性质，那么我们称该图案具有最小半径 r 。

固定禁用图案序列 $\mathcal{F}$ 后，我们将局部允许图案 $\mathcal{A}(X)$称为不含任何禁用图案的有限图案集合；将秩为r 的局部允许图案 $\mathcal{A}_r(X)$称为最小半径为 r 且不含前 r个禁用图案中任何一个的图案集合。注意，当 X 是有限局部复杂性子移位时，对所有 r，$\mathcal{A}_r(X)$都是有限的：事实上，存在一个常数 d （形状的最大直径），使得任何最小半径为 r 的图案的支撑集都包含在一个 $r + d$ 圆盘内。

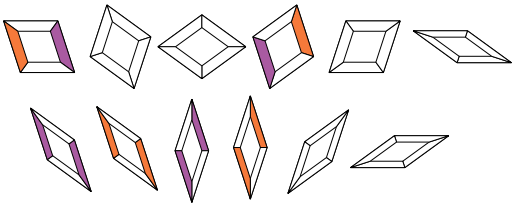


(a) 一个形状集示例：由平移得到的彭罗斯菱形组成的集合。

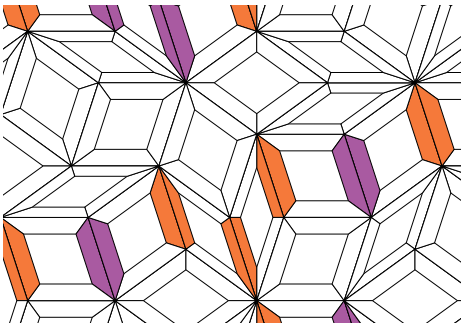


(b) 两个彭罗斯几何$\mathcal{T}_{pen}$铺砌示例：左侧是彭罗斯几何铺砌，右侧是“立方体”铺砌。

图 3 形状与几何铺砌。



(a) 一个$\mathcal{T}_{pen}$-瓦片集的示例。



(b) 有效拼片的示例。

图 4 菱形王砖。

请注意，$\mathcal{A}(X)$中的图案可能并非全局允许，即在 X 中不存在任何无限铺砌（在 X中不出现）。如果图案包含几何上的不可能性，它们甚至可能不会出现在全移位 $X_{\mathcal{T}}$ 的任何铺砌中。此类图案称为欺骗图案 [7]。

局部允许图案的意义在于，正如下文引理 15 所示，它们可以根据禁用图案列表计算得出，而全局允许图案则并非如此。

2.2 符号—几何铺砌空间

▶ **定义 4** (符号、瓦片和瓦片集)。 瓦片是每条边都赋有一种颜色的形状，如图 *4(a)* 所示。

形式上，给定一个有限集合 C，其元素称为颜色，以及一个菱形形状 r，我们将五元组 (r, a_0, a_1, a_2, a_3) 称为 r-Wang 瓦片，或简称为 r-瓦片，其中 $a_i \in C$。具体地，设有 $r = (\vec{u}, \vec{v}, p)$，边 $(p, p + \vec{u})$ 的颜色为 a_0，边 $(p + \vec{u}, p + \vec{u} + \vec{v})$ 的颜色为 a_1，依此类推。

给定一个形状集 *T*，若某个 $r \in$ 属于 *T*，则称 *T*-瓦片 为一个 r-瓦片。我们将 *T*-瓦片集 称为由有限个 *T*-瓦片组成的集合，并视平移后的形状为等价；其中每种形状至少有一个瓦片。

▶ **定义 5** (颜色擦除算子 π)。 我们将颜色擦除算子 π 定义如下：

- 对于任意 r-瓦片 t, $\pi(t)$: $= r$对于一个铺砌 x （或由瓦片
- 组成的有限拼块），$\pi(x)$: $=\{\pi(t) \quad t \in x\}$ 对于一组铺砌 X,
- $\pi(X)$: $=\{\pi(x) \quad x \in X\}$

▶ **定义 6** (铺砌)。给定一个有限颜色集 C 和一个 *T*-瓦片集 **T**，我们称满足以下条件的铺砌 x 为 **T**-铺砌： $\pi(x) \in X_{\mathcal{T}}$，并且其中任意两块共用一条边的瓦片在其公共边上的颜色相同。参见图 *4(b)*。

我们用 $X_{\mathbf{T}}$ 表示所有 **T**-铺砌组成的子移位。

符号-几何子移位 X 由一组形状（几何约束）、一组禁用图案（几何子移位）以及瓦片上的着色（符号约束）给出。即使几何子移位是全移位，几何约束和符号约束也可能以有趣的方式相互作用。例如，可以为彭罗斯菱形选择一组瓦片，使得所有合法铺砌在去除颜色后都对应于一个彭罗斯几何铺砌（特别是，没有合法铺砌只使用一种形状）；参见附录 A。

最小半径 r 图案和局部允许图案的定义自然地扩展到符号-几何铺砌。

2.3 可计算性与可判定性

▶ **定义 7.** 判定问题是一个函数 $A:\ dom(A) \to \{0,1\}$，其中 $dom(A)$ 称为 A 的输入域。

▶**定义 8**。 如果存在一个算法（或图灵机），对于任意给定的输入 $x \in dom(A)$，都能终止并输出 $A(x)$，则称判定问题 A 是可判定的。

对于判定问题，一种较弱的可计算性概念如下：

▶ **定义 9** (余可计算可枚举，Π_1^0)。 如果存在一个全可计算函数 $f:\ dom(A) \times \mathbb{N} \to \{0,1\}$，满足以下条件，则称判定问题 A 为余可计算可枚举，也称为余递归可枚举：

$$\forall x \in dom(A),\quad A(x) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f(x,n)$$

或者，如果存在一个算法，对于输入 x，当且仅当 $A(x)$ 为假时终止，则称判定问题 A 是余可计算可枚举的。

我们用 Π_1^0 表示余可计算可枚举问题的类。

Π_1^0 是算术层级中的一个类；参见 [9, 11]。

▶ **定义 10** (多对一归约)。 给定两个判定问题 A 和 B，若存在一个全可计算函数 f：$dom(A) \to dom(B)$，使得 $A = B \circ f$，则称A 可多对一归约 到 B，记作 $A \preccurlyeq_m B$。

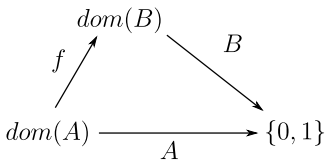


图 5 多对一归约的示意图，$A \preccurlyeq_m B$ 其中 f 可计算且该图交换。

▶**定义 11** (Π_1^0-困难性和 Π_1^0-完备性)。 若问题 A 满足对任意属于 Π_1^0 的问题 B，都有 $B \preccurlyeq_m A$，则称问题 A 为 Π_1^0-困难。

若问题 A 同时属于 Π_1^0 且为 Π_1^0-困难，则称其为 Π_1^0-完备。

请注意，Π_1^0-困难问题是不可判定的。Π_1^0-完全问题的典型例子是反停机问题，即判定图灵机是否不会在有限时间内停机的问题。

多对一归约是图灵归约的一种限制形式，适用于研究诸如 Π_1^0 这样的判定问题类别，正如以下引理所示：

▶ **引理 12** (Π_1^0-困难性)。 给定两个问题 A 和 B，使得 $A \preccurlyeq_m B$，

- 如果 B 是 Π_1^0，那么 A 是 Π_1^0。如果 A
- 是 Π_1^0-困难的，那么 B 是 Π_1^0-困难的。

2.4 多米诺问题

本文旨在证明经典多米诺问题的一种推广是 Π_1^0-困难的；众所周知，该问题是 Π_1^0-完备的。

经典多米诺问题提出如下问题：给定有限个 Wang 瓦片作为输入，即每条边上都带有一种颜色的正方形瓦片，是否存在由这些瓦片构成的无限合法铺砌：见图 6。

▶ **定理 13** (Berger66 [5])。 经典多米诺问题是 Π_1^0-完备的。

Berger 的论文给出了到反停机问题的多对一归约。我们将这个经典问题推广到菱形王氏砖块。

▶ **定义 14** (X-Domino)。 给定 T 上的子移位 X， X 上的 *Domino* 问题定义如下：

输入 有限集合 $\mathbf{T}$ 中的 $\mathcal{T}$-瓦片
输出 是否存在一个 $\mathbf{T}$-铺砌 $x \in X_{\mathbf{T}}$ 使得 $\pi(x) \in X$?
经典的 Domino 问题是 $X_{\{\square\}}$-Domino，也就是说，在只有一种形状（通常是正方形，但任何一种菱形也可以）的全移位上讨论多米诺问题。 $Penrose$-Domino是指给定一个由彭罗斯菱形上的瓦片构成的集合（如图 4 所示），寻找一个边匹配的彭罗斯铺砌。

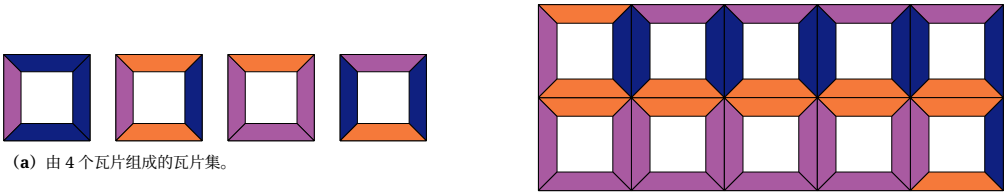
3 菱形子移位上的多米诺问题的复杂性

3.1 有效菱形子移位上的多米诺问题是 Π_1^0

▶**引理 15**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个有限的菱形形状集合。以下问题是可计算的：输入 一个整数 n、一个禁用图案有限列表 $\mathcal{F}$以及一个由 $\mathbf{T}$ 中的 $\mathcal{T}$-瓦片构成的瓦片集输出 所有最小半径为 n 的 $\mathbf{T}$-瓦片图案列表，这些图案避开了 $\mathcal{F}$中的所有图案

证明。 算法如下：
1. 通过组合探索，尝试所有可能性，并列出所有 $\mathbf{T}$-图案，其最小半径为 n。2. 消除所有列出的图案 x， 使得去颜色图案 $\pi(x)$ 包含 $\mathcal{F}$ 中的某个图案。3. 输出剩余的图案。在第 1 点中，请记住，在固定的有限菱形瓦片集上进行的边对边铺砌集合具有有限局部复杂度，因此该过程会在有限时间内终止。◀

▶**命题 16** （X-Domino $\in \Pi_1^0$）。 对于任意形状集 T，以及 T 上由禁用图案 F 的可计算枚举所定义的任意子移位 X， X-*Domino* 是余可计算可枚举的 .



（**a**）由 4 个瓦片组成的瓦片集。

（**b**）由这些瓦片组成的一个有效拼片。

图 6 瓦片与铺砌：如果任意两个相邻瓦片在其公共边上的颜色相同，则称拼块或铺砌有效。

注意，如果 X 不是有效的，那么在获得$\mathcal{F}$ 的枚举作为预言机后， X-Domino 就是 Π_1^0 。

这本质上与经典多米诺问题的证明相同。

证明。 以下称为圆盘铺砌X的问题是可判定的：**输入** 有限集合 $\mathbf{T}$ 个 $\mathcal{T}$瓦片，以及一个整数 n**O**

输出 是否存在一个有效的（有限）拼块 x ，其瓦片属于 $\mathbf{T}$ ，使得 $\pi(x)$ 是 n 的一个秩为 locally allowed pattern （局部允许图案） X，也就是说， $\pi(x) \in \mathcal{A}_n(X)$?

只需计算第一个 n 禁用图案$\mathcal{F}_n$，由于 X 是有效的，这一步可以完成；然后对 $(n, \mathcal{F}_n, \mathbf{T})$ 应用引理 15。对于任意输入瓦片集 $\mathbf{T}$，几何子移位X 和符号全移位 $X_{\mathbf{T}}$ 都具有有限局部复杂度，因此它们是紧的 [13],并且

X-Domino$(\mathbf{T}) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$，圆盘铺砌$X(\mathbf{T}\ n)$.

注意，当存在一个秩为 n 的局部允许图案时，圆盘铺砌-$X(\mathbf{T}\ n) = 1$ ，也就是说，存在一个最小半径为 n 、避开前 n 个禁用图案 $\mathcal{F}$ 的图案，其中X 的瓦片集为 $\mathbf{T}$。如果 $\forall n \in \mathbb{N}$，圆盘铺砌-$X(\mathbf{T}\ n)$，则存在一个序列 $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ，满足$\pi(p_n) \in \mathcal{A}_n(X)$。由于拼块的半径趋于无穷大，根据紧致性，存在一个极限铺砌 x ，使得某个子列收敛于它。现在注意，$\pi(x) \in X$ ，因为它避开了$\mathcal{F}$中的所有禁用图案。事实上，对于任意 k，第 k 个禁用图案都不会出现在任何 $\pi(p_n)$ 中（ $n \geq k$），因此也不会出现在 $\pi(x)$ 中。由于圆盘铺砌-X 是可计算的，我们确实有多米诺问题-X $\in \Pi_1^0$。◀

如果 X 是某个形状集 $\mathcal{T}$上的全移位，很容易看出，相应的多米诺问题是 Π_1^0-困难的，因为它可归约到经典版本：给定一个由有限多个方形 Wang 瓦片组成的集合 $\mathbf{T}$ ，任选形状集$\mathcal{T}$中的一个形状，并将其着色为 $\mathbf{T}$，再用四种不同的新颜色为其他每个形状着色（这样任何合法铺砌都只能使用第一个形状）。在本文余下部分，我们将这一思路推广到任意子移位 X。

3.2 多米诺问题在形状一致复现子移位上是Π_1^0-困难的

关键概念是菱形链 [8]（也称为带状链 [14]）。

▶ **定义 17** （菱形链）。我们将菱形链称为一列双向无限的菱形，它们共享同一个边方向；参见图 7。

菱形链由其法向量 $\vec{v}$表征：即公共边的方向。

▶ **引理 18** （菱形的出现次数， [8]）。 在边对边菱形铺砌中，边方向为 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 的菱形恰好对应于法向量为 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$的两条链的交点。此外，两条链至多相交一次。参见图 7。

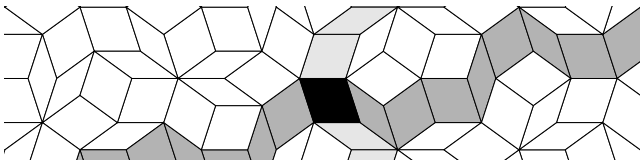


图 7 在边对边菱形铺砌中，一个菱形（黑色）位于两条菱形链（不同深浅的灰色）的交点处。

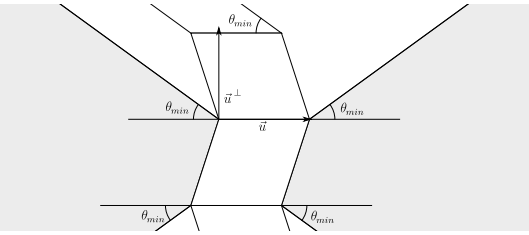


图 8 一个菱形 r 和链 c。链 c 位于菱形 r左右两侧的灰色锥之外。

因此，法向量相同的两条链不能相交，否则交点处就会出现不可能存在的平菱形。这样的链因此称为平行链。

▶ **引理 19**（一致单调性）。给定一个有限形状集 T，令 θ_{min} 为 T 中菱形的最小角。对于任意 T-铺砌 x，以及出现在法向量为 $\vec{u}$的链 c 中的任意菱形 r，链 c 位于以 r 为中心、半角为 θ_{min} 且沿 $\vec{u}$方向的锥之外；见图 8。

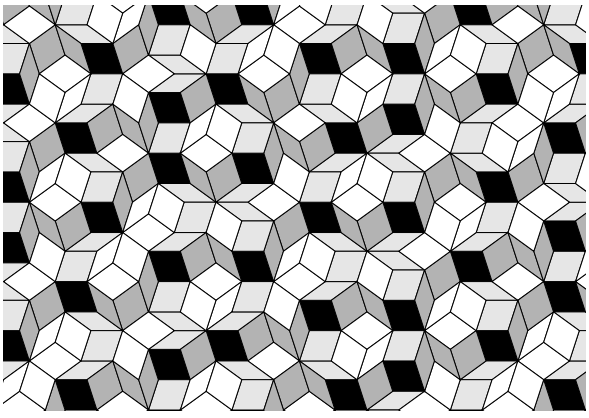
总体而言，边对边菱形铺砌可以分解为 d 组彼此平行的菱形链，其中 d 是边方向的数量。给定一个边方向 $\vec{u}$，这些 $\vec{u}$ 条链可以按 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{N}$、$-\mathbb{N}$ 或一个有限整数区间进行编号，使得从任意位置出发沿 $\vec{u}$ 移动时，依次穿过编号递增的 $\vec{u}$ 条链。

▶ **定义 20**（形状一致复现）。给定一个菱形形状 r 和一个铺砌 x，若 r 在 x中的任意一个半径为 R 的圆盘内都会出现（其中 R），则称 r 在 x中一致复现，或称 x 是 r-一致复现的。

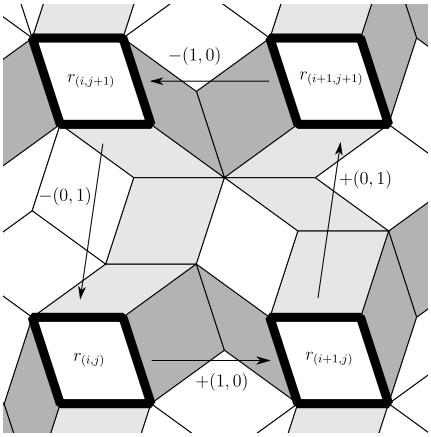
若铺砌 x 对于出现在 x中的每个形状 r 都是 r-一致复现的，则称其为形状一致复现。

若对于出现在某个铺砌 $y \in X$ 中的每个形状 r，每个铺砌 $x \in X$ 都是 r-一致复现的，则称子移位 X 为形状一致复现。

请注意，这比通常的一致复现性弱得多；通常的一致复现性要求每个图案都满足这一性质，而不仅仅是单个形状。



（a）彭罗斯铺砌中 r （黑色）的出现位置。连接 r 各出现位置的链以中灰色和浅灰色突出显示。



（b） r出现位置的编号。

图 9 铺砌中一致复现的菱形 r 的出现。

▶**引理 21**。 设 x 是一个边对边菱形铺砌， r 是一个在 x中一致复现的形状。可以用 $\mathbb{Z}^2$ 中的坐标为 x 中 r 的各次出现编索引，使得沿一条链相邻的两次 r 出现具有相邻的 $\mathbb{Z}^2$ 坐标；见图 *9b*。

证明。 令 x 为 X 中的一个铺砌，且 r 为 x中的一个一致复现形状。记 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$为菱形 r 的两种边方向。如引理 18 所述， r的出现恰好是一个 $\vec{u}$ 链与一个 $\vec{v}$ 链的交点。

如上所见， $\vec{u}$ 链可以用 $\mathbb{Z}$、 $\mathbb{N}$、 $-\mathbb{N}$ 或一个有限整数区间来编号。由于 r 是一致复现的，因此只有 $\mathbb{Z}$ 的情况可能成立。实际上，由于 r具有一致复现性，存在 R ，使得 x 中的任意半径为 R 的圆盘都包含 r的一次出现，因而特别会与一条 $\vec{u}$ 链相交。因此，从任意位置出发，都能在 $\vec{u}$ 和 $-\vec{u}$ 两个方向上找到任意多个 $\vec{u}$链。 $\vec{v}$也同样如此。

记$r_{(i,j)}$ 为位于第 i条 $\vec{u}$ 链与第 j条 $\vec{v}$ 链交点处的 r 。根据链的编号定义，从图 9b 可见，从出现$r_{(i,j)}$处出发并沿着一条 $\vec{u}$ 链前进， r 的下一次出现是$r_{(i+1,j)}$。◀

▶**命题 22.** 设 X 是一个非空的边对边菱形铺砌子移位，且形状一致复现。 X*-Domino* 是 Π_1^0-困难的。

证明。 我们通过多对一归约到经典多米诺问题来证明，众所周知，该问题是 Π_1^0-完全的 [5]。

设 $\mathcal{T}$ 为定义 X 所用的形状集，并任取一个形状 $r \in \mathcal{T}$。归约 φ_r 定义如下。输入为颜色集合 S_{wang}上的一个有限正方形瓦片集 $\mathbf{T}^{wang}$。定义颜色为 $S_{rhombus} := S_{wang} \cup \{\text{空白}\}$ 的瓦片集 $\mathbf{T}_{rhombus} = \varphi_r(\mathbf{T}^{wang})$，其中空白是一种新颜色，定义为 $\mathbf{T}_{rhombus} := \mathbf{T}_{coding} \cup \mathbf{T}_{link} \cup \mathbf{T}_{neutral}$，其中:

1. T_{coding} 是 T_{wang} 在形状 r上的一个副本。形式上，对于每个瓦片 $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathrm{T}_{wang}$，$\mathrm{T}_{coding}$ 都包含一个瓦片 (r, a_0, a_1, a_2, a_3)。见图 10。2. T_{link} 是一组菱形瓦片，用于连接 r 的出现位置并传递颜色。形式上，对于每个形状 $r' \neq r$ ，若 r 和 r' 恰好共享一个边方向，记作 $\vec{u}$；对于每种颜色 $a \in S_{wang}$ ，T_{link} 都包含一个形状为 r' 的瓦片，其沿$\vec{u}$ 边的两条边均为颜色 a ，其他边则为颜色空白。见图 10。3. $\mathrm{T}_{neutral}$ 以空白颜色补全瓦片集。形式上，对于每个与 r不共享任何边方向的形状 r' ，$\mathrm{T}_{neutral}$ 都包含一个形状为 r' 的瓦片，且每条边均为颜色空白。见图 10。

我们证明，$\mathbf{T}^{wang}$ 存在 $\mathbb{Z}^2$ 的合法铺砌，当且仅当 $\varphi_r(\mathbf{T}^{wang})$ 存在一个满足 $\pi(x) \in X$ 的合法铺砌 x 。

假设$\mathbf{T}^{wang}$ 存在一个有效的 x_{wang} $\mathbb{Z}^2$铺砌。我们选取 $x \in X$。根据假设，r 在 X中一致复现。我们按如下方式给 x 着色（见图11）：

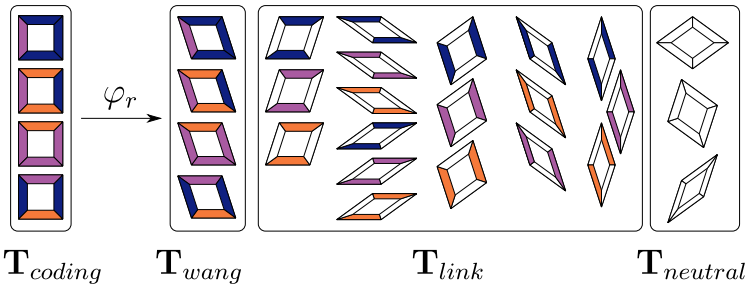


图10 归约 φ_r。

编码瓦片：按照引理 21 中的说明，将 r 的出现位置编入索引，记为$\{r_{(i,j)} | (i,j) \in \mathbb{Z}^2\}$。将 x_{wang} 中的瓦片复制到 r的出现位置；也就是说，如果在 x_{wang} 中位置（i，j）处有一个（a_0，a_1，a_2，a_3）瓦片，那么就将$r_{(i,j)}$着色为编码瓦片（$r_{(i,j)}$，a_0，a_1，a_2，a_3）。

连接瓦片：根据构造，$r_{(i,j)}$ 的北侧颜色等于$r_{(i,j+1)}$的南侧颜色，因此可以沿着链的那一段放置颜色相同的连接瓦片，东西方向的连接也同理。

中性瓦片：其余瓦片与 r没有共同的边方向，因此必定是中性瓦片。反过来也成立：如果存在一个合法铺砌 x 在 $\varphi_r(\mathbf{T}^{wang})$上，因为 r 是一致复现的，其出现位置可以用 $\mathbb{Z}^2$ 编索引（引理 21）。根据连接瓦片的构造，编码瓦片的颜色$r_{(i,j)}$ 对应于一个合法的$\mathbf{T}^{wang}$ 铺砌，它位于 $\mathbb{Z}^2$中。◀

3.3 任意菱形子移位上的多米诺问题是 Π^0_1-困难的

在本节中，对于任意子移位 X，我们构造一个子移位 X'，它具有一致复现的形状，并且满足 X'-Domino $\preccurlyeq_m$ X-Domino。

▶ **定义 23**（限制）。给定形状集 T 上的任意菱形子移位 X，以及 T 的一个子集 $T' \subset T$，定义 $\rho_{T'}(X)$ 为 X 对仅包含 T' 中形状的构型所作的限制，即 $\rho_{T'}(X) := X \cap X_{T'}$。

▶ **引理 24**。设 X 是形状集 T 上的非空子移位。对于任意 $r \in T$，要么 r 在每个 $x \in X$中都是一致复现的，要么限制 $\rho_{T\setminus\{r\}}(X)$ 非空。

证明。这个证明再次源于有限局部复杂度以及边对边菱形铺砌的紧致性。

如果 r 在每个 $x \in X$中都不是一致复现的，按照定义，X 中存在任意大的图案不包含 r。由紧致性可知，存在 X中的一个无限铺砌，其中不包含 r。因此 $\rho_{T\setminus\{r\}}(X)$ 非空。◀

▶ **引理 25.** 设 X 是有限菱形集合 T 上的非空子移位。存在一个子集 $T' \subseteq T$，使得 $\rho_{T'}(X) \neq \emptyset$，并且存在 $r \in T'$，它在每个构型 $x \in \rho_{T'}(X)$ 中都是一致复现的。

证明。我们通过对形状数量进行归纳来证明，即，对 $\#T$。

如果 $T = \{r\}$，取 $T' = T$，则 r 在任意铺砌 $x \in X$中都是一致复现的。

假设对于至多 n 个形状且 $\#T = n + 1$，结论成立。任选一个 $r \in T$：根据引理 24，要么 r 在所有铺砌 $x \in X$ 中一致复现，要么 $\rho_{T\setminus\{r\}}(X)$ 非空。

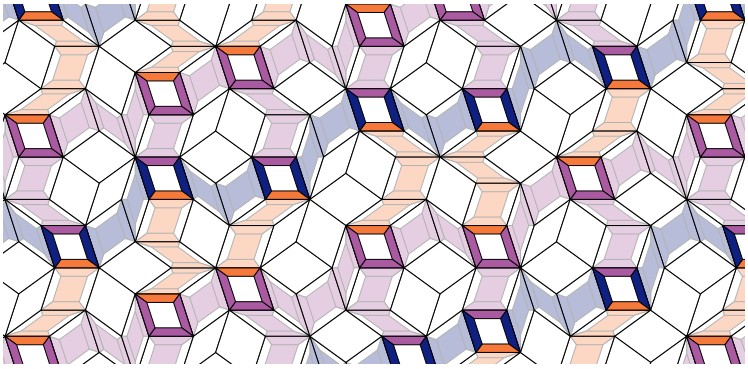


图11 一个使用瓦片集 $\varphi_r(\mathbf{T}^{wang})$的合法铺砌 x。为提高可读性，连接砖和中性瓦片在图中经过了视觉调整。

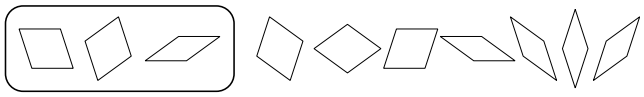


图12 一个形状集$\mathcal{T}$，以及左侧方框中的子集$\mathcal{T}'$。

在第一种情况下，我们由 $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$ 得出结论。在第二种情况下，我们对 $\rho_{\mathcal{T}\setminus\{r\}}(X)$ 应用归纳假设，得到某个 $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}\setminus\{r\}$ 以及一个瓦片 $r' \in \mathcal{T}'$，使得 r' 在 $\rho_{\mathcal{T}'}(X)$ 中一致复现。◀

▶**定理26**。 设 X 是一个非空的边对边菱形铺砌子移位。 X-*Domino* 是 Π^0_1-困难的。

这一结果与命题 16 一起表明， X-Domino 对有效子移位X而言是 Π^0_1-完备的。

证明。 根据引理 25，存在形状集$\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$的一个子集，使得子移位$X' := \rho_{\mathcal{T}'}(X)$ 具有一个一致复现的瓦片 t。

根据命题 22， X'-Domino 是 Π^0_1-困难的。现在我们证明 X'-Domino $\preccurlyeq_m$ X-Domino，从而 X-Domino 也是 Π^0_1-困难的。

多对一归约 $\varphi_{\mathcal{T}'}$ 从 X'-Domino 到 X-Domino 定义如下：给定一个 $\mathcal{T}'$-王氏瓦片集 $\mathbf{T}'$，我们定义 $\varphi_{\mathcal{T}'}(\mathbf{T}') := \mathbf{T}' \cup \mathbf{T}^{fresh}$，其中 $\mathbf{T}^{fresh}$ 对 $\mathcal{T}\setminus\mathcal{T}'$中的每一种形状都包含一个瓦片，且每条边上都有一个新的颜色；见图 13。

请注意，给定 $\mathcal{T}$和 X （作为禁用图案的枚举），选择合适的 $\mathcal{T}'$ 并不一定能以可计算的方式完成。重要的是，对于固定的 $\mathcal{T}'$， $\varphi_{\mathcal{T}'}$ 是可计算的，这从上述定义很容易看出。

这个归约 $\varphi_{\mathcal{T}'}$ 定义良好，因为我们有

$$X'\text{-Domino}(\mathbf{T}') \Leftrightarrow X\text{-Domino}(\varphi_{\mathcal{T}'}(\mathbf{T}')).$$

该蕴含成立，因为 $X' \subset X$ 且 $\mathbf{T}' \subset \varphi_{\mathcal{T}'}(\mathbf{T}')$，所以，将 X' 中的颜色擦除后得到投影的 $\mathbf{T}'$-铺砌，也是一个投影到 X中的 $\varphi_{\mathcal{T}'}(\mathbf{T}')$-铺砌。

反向结论成立，因为 $\mathbf{T}^{fresh}$ 中的瓦片无法出现在 $\varphi_{\mathcal{T}'}(\mathbf{T}')$-铺砌中，因为它们每一侧都有一种新颜色，因此没有瓦片可以放在它旁边。因此， $\varphi_{\mathcal{T}'}(\mathbf{T}')$-铺砌$x$ 实际上是一个 $\mathbf{T}'$-铺砌。由于 x 仅包含 $\mathbf{T}'$中的瓦片， $\pi(x)$ 仅包含 $\mathcal{T}'$ 中的形状，所以$\pi(x) \in \rho_{\mathcal{T}'}(X) = X'$。◀

▶ 备注 27（新颜色）。注意，如果我们去掉这样的条件：形状集 $\mathcal{T}$上的瓦片集必须对每个形状 $r \in \mathcal{T}$至少包含一块瓦片，那么我们可以取 $\varphi(\mathbf{T}') := \mathbf{T}'$。本质上，采用新颜色这一做法模拟了这一点。

▶ 注 28（限制）。我们可以考虑不将 X' 视为一种限制 $\rho_{\mathcal{T}'}(X)$，而是取任意极小子移位 $X'' \subset X$ （其中所有图案都一致复现）。然而，目前还没有从 X''-Domino 到 X-Domino 的明确归约。

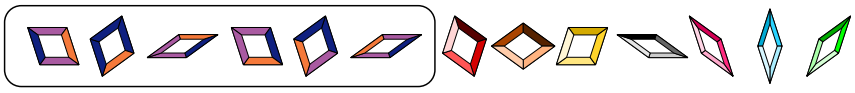


图 13 从 $\mathcal{T}'$-瓦片集到 $\mathcal{T}$-瓦片集的归约：左侧方框中是原始的 $\mathcal{T}'$-瓦片集，右侧是带有新颜色 $\mathbf{T}^{fresh}$的瓦片。

▶ 注 29（超越 Π^0_1）。如果 X 不是由禁用图案的可计算枚举$\mathcal{F}$给出，而是将 $\mathcal{F}$ 作为预言机给出，我们此前已经指出，相对于预言机$\mathcal{F}$，X-Domino 是 Π^0_1。然而，我们只证明了 X-Domino 是 Π^0_1-难的，但并未证明其相对于$\mathcal{F}$具有这一性质。特别是，我们尚未证明 X-Domino 相对于预言机 $\mathcal{F}$ 是 Π^0_1-完备的。

参考文献

1 N. Aubrun、S. Barbieri 和 E. Jeandel。群上子移位的多米诺问题。载于《序列、群与数论》，第 331–389 页，2018 年。2 N. Aubrun、M. Sablik 和 J. Esnay。水平约束下的多米诺问题。载于 STACS 2020：第 37 届理论计算机科学方面国际研讨会，2020 年。3 M. Baake 和 U. Grimm。《非周期序：数学入门》。剑桥大学出版社，2013 年。4 S. Barbieri 和 M. Sablik。自相似结构的多米诺问题。载于《追寻普适性：第 12 届欧洲可计算性会议 CiE 2016》，法国巴黎，2016 年 6 月 27 日至 7 月 1 日，论文集 12，第 205–214 页。Springer，2016 年。5 R. Berger。《多米诺问题的不可判定性》。美国数学学会，1966 年。6 N. G. de Bruijn。平面上彭罗斯非周期铺砌的代数理论 I。《数学研究》（会议录），1981 年 1 月。 doi:10.1016/1385-7258(81)90016-0。7 S. Dworkin 和 J.-I. Shieh。准晶生长中的欺骗图案。《数学物理通讯》，1995 年 3 月。 doi:10.1007/BF02101553。8 R. Kenyon。用平行四边形铺砌多边形。《算法学》，1993 年 4 月。 doi:10.1007/BF01228510。9 D. C. Kozen。《计算理论》。Springer，2006 年 5 月。 doi:10.1007/1-84628-477-5。10 V. H. Lutfalla。《几何铺砌：距离、拓扑学、紧致性与完备性》，2022 年。11 B. Monin 和 L. Patey。《可计算性》。Calvage et Mounet，2022 年。12 R. Penrose。美学在纯数学与应用数学研究中的作用。《数学应用研究所公报》，1974 年。13 E. A. Robinson。rrd 的符号动力学与铺砌。载于《应用数学研讨会论文集》，2004 年。14 M. Senechal。《准晶与几何》。CUP Archive，1996 年。

一种用于定义彭罗斯铺砌的菱形王砖

菱形彭罗斯铺砌最初被定义为边缘带有凹口的拼图式瓦片 [12]，随后被重新表述为边缘带有箭头标记的菱形瓦片[6]。借助箭头标记，相邻砖块在公共边上必须具有相同类型且方向一致的箭头。在最初和现代的定义中，瓦片都被视为在等距变换下等价。

严格来说，这些箭头标记并不完全等同于像旺瓦片那样在每条边上设置单一颜色。不过，如果我们将瓦片集定义为在平移下等价，而不是在等距变换下等价，就可以将这些箭头标记转换为单一颜色，见图14。



图14 给定一个边方向，每种类型的箭头都被转换为两种颜色。将该图旋转 $\frac{2\pi}{5}$ 的整数倍之一，即可得到所有方向上的箭头—颜色平移对应关系。

这一过程为我们得到图 15 所示的瓦片集，它定义了彭罗斯铺砌的子移位。该瓦片集在平移意义下包含 20 个瓦片；与经典定义中在等距变换意义下的 2 个瓦片相比，这或许显得不够优雅。不过请注意，如果我们使用王砖型

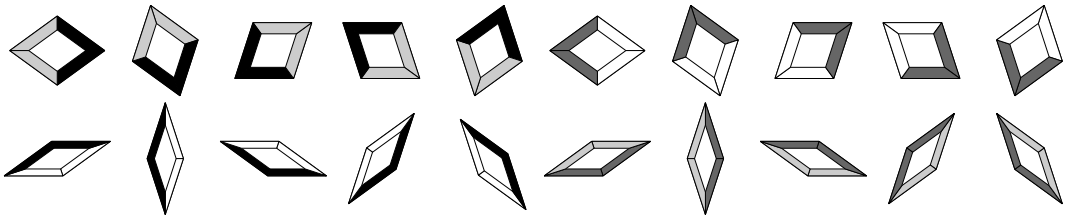


图15 用于定义彭罗斯铺砌的菱形王砖瓦片集。

边上的颜色，则不存在在等距变换意义下的非周期瓦片集；事实上，单个在等距变换意义下的瓦片总能以周期方式铺满平面（见图 16）。这意味着，如果我们想用王氏菱形瓦片定义彭罗斯铺砌，就不能使用在等距变换意义下或在旋转意义下的瓦片集。

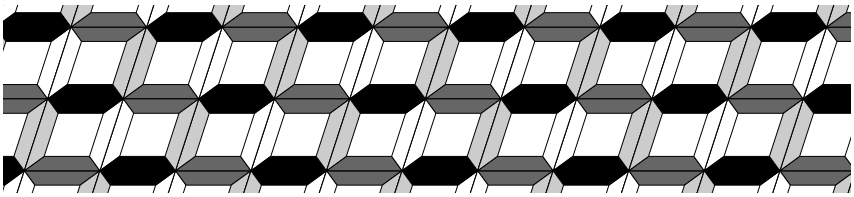


图16 给定一个四条边颜色各不相同的菱形 Wang 瓦片，存在一种平面的周期铺砌，仅使用该瓦片，并允许平移和旋转（角度为 π）。

然而，若将图15中的彭罗斯瓦片集视为在 $\frac{2\pi}{5}$ 旋转下等价，我们便得到一个缩减后的瓦片集，其中包含图17所示的4块瓦片。请注意，在此定义中，瓦片只能旋转 $\frac{2\pi}{5}$ 的整数倍，因此图16中的反例并不适用，因为该反例需要旋转角度为 π。

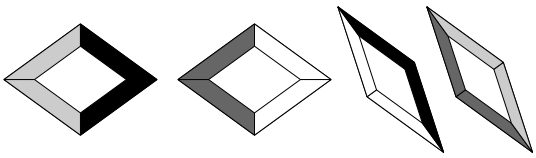


图17 在平移和 $\frac{2\pi}{5}$ 旋转下定义彭罗斯铺砌的菱形王砖瓦片集。—