arXiv:2302.12112v1 [cs.LO] 23 Feb 2023

无法解释某个有限对象的结构的对称性

Libor Barto Bertalan Bodor Marcin Kozik Antoine Mottet Michael Pinsker 查理大学 查理大学 雅盖隆大学 汉堡工业大学¨维也纳工业大学¨

摘要——我们研究这样一个条件所带来的结构性含义：给定的有向图无法通过带参数或轨道的原始正解释来解释每个有限结构。我们的结果推广了文献中的若干定理，并得出每个此类图都必须满足的其他代数不变性。此类代数性质与约束满足问题的可处理性密切相关；即便对于无限的可数范畴图，我们也得到了新的此类性质。与这些正面结果相对应，我们还展示了一个可数范畴超图的存在性：它无法解释某个有限结构，同时又缺少一些已知对有限结构成立的最基本代数不变性。

I. 引言

A. 故事

约束满足问题（CSP）理论中的一个重要里程碑，是 Hell 和 Neˇsetˇril 提出的定理 [1]，该定理确立了无向图 H-着色这一计算问题的 P/NP 完全性复杂度二分。将近二十年后，Barto、Kozik 和 Niven [2]将这一二分结果扩展到了无源点且无汇点的有限有向图。Bulatov 和 Zhuk 证明的 CSP 二分性定理 [3], [4],涵盖了上述两个结果，并表明同样的二分性适用于任意有限有向图，或者等价地，适用于任意有限结构。

前两个结果不仅给出了相应图类的复杂度二分，还给出了结构二分，并将计算结果作为直接推论导出。对于 Hell 和 Neˇsetˇril 的定理，结构性结果可以表述如下：任意有限的无向无环图要么是二部的，在这种情况下，其对应的 H-着色问题本质上只是 2-着色问题；要么它通过原始正构造（依照 [5] 的含义）构造出三元团 K_3，而 H-着色问题与 3-着色一样困难。如果该图是一个核，即其 H-着色问题的最小模板，那么它要么是一条单独的边，并且恰好定义了 2-着色问题；要么它 pp-解释K_3，因而能够解释任意带参数的有限结构，为困难性提供了一个切实的见证。

根据 Siggers 的一项观察，[6]，后者关于图的结构二分也意味着：对于任何无法通过带参数的 pp-解释K_3 的有限核结构，都具有代数不变性；类似地，Barto、Kozik 和 Niven 的结果及其各种扩展还提供了其他此类不变性，其中尤为重要的是所谓的弱近一致（WNU）多态运算在 Zhuk 对约束满足问题二分定理的证明中发挥着关键作用。

Hell 和 Neˇsetˇril 的证明本质上纯属组合论，而 Barto、Kozik 和 Niven 的推广则依赖于在约束满足问题代数方法背景下发展起来的工具。看来，这种方法的优雅是以难以将其推广到无限可数范畴图为代价的。事实上，在将约束满足问题二分定理推广到由有限有界齐性结构的一阶约化所定义的 CSP 类（这是 [7], [8] 所述的 ω-范畴结构类中的一个重要自然子类）的漫长研究过程中，迄今为止，唯一成功尝试为 ω-范畴图建立与上述类似的结构性二分定理，是 Barto 和 Pinsker [9] 所作出的。他们的方法建立在 Bulatov [10]，提出的 Hell 和 Neˇsetˇril 证明的精简版本之上，并证明任何包含 K_3 、且其自同构群的某个轨道内不存在边（即伪自环）的 ω-范畴图，与该群的轨道及参数一起 pp-解释团 K_3。

这一结果为任何满足 ω-范畴性、属于模型完备核且无法通过 pp-解释 K_3 （包括使用参数）的结构，导出了一个非平凡的代数不变性；根据 Bodirsky 和 Pinsker 的猜想 [11]，在有限有界齐性结构的一阶约化范围内，这一性质恰好区分可处理与难处理的 CSP。然而，所有试图将 Barto、Kozik 和 Niven 提出的更一般的代数证明推广开来的努力——更不用说推广适用于一般有限结构的更高级代数结果——都失败了。原因似乎非常简单：相比于推广为有限代数量身定制的代数概念，扩展即便十分复杂的组合构造也容易得多。因此，除了 Barto 和 Pinsker 得到的那一项之外，对于那些据猜想具有可处理 CSP 的模板，目前尚无其他已知的代数不变性。

为克服这一障碍，以下两步策略是自然的：（i）为已知的有限结构二分定理提供组合证明；（ii）将这些证明推广到可数范畴的情形。

仔细考察步骤 (ii)，便会发现有限结构与无限结构之间显而易见的区别。在前者中，可以将结构中的所有元素都作为单个原始正解释中的参数，这是贯穿整个理论的一种标准技巧

。另一方面，可数范畴结构中，固定有限长度的元组在自同构作用下只有有限多个（即其自同构群作用于元组时，轨道的数量有限）。因此，与其将元素作为参数，使用轨道作为参数来推广结果似乎更为自然。然而，即便对于有限结构，这方面也没有已知结果，因此计划中还需要增加另一个必要步骤：

(iii) 提供更强的有限二分定理，在解释中使用置换群的轨道而非元素作为参数。

B. 我们的贡献

我们在这三个方向上都取得了组合结果；此外，我们还将这些结果与有力证据相对照，表明有限情形中的代数方法无法推广到一般的可数范畴结构。

1) 重新审视 Barto、Kozik 和 Niven：我们的第一项贡献是为没有源点和汇点的有限有向图二分定理给出一种全新的纯组合证明，从而以与上述 (i) 相同的思路重新证明了 Barto、Kozik 和 Niven 的结果。事实上，我们针对有限有向图给出了该结果的两种推广。在第一种推广中，我们得到一种原始正解释，其参数是该有向图自同构群某个子群的轨道，从而为 Barto、Kozik 和 Niven 的定理实现了 (iii)。

定理 1. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个有限光滑有向图，$\mathcal{G}$ 是其自同构群 Aut($\mathfrak{A}$) 的一个子群。若 $\mathfrak{A}$ 连通且无环，则 $\mathfrak{A}$ 按 $\mathcal{G}$ 的轨道扩展后 pp-解释 K_3，因而也能 pp-解释 EVERYTHING，即每个有限结构。

作为该定理的直接推论，我们首次为任何满足任意非平凡代数不变性的有限核结构，得到了一个特定的代数不变性，见定理 9。这一结果推广了 Sigger 在[6] 中的结果；该结果要求结构包含所有单点关系。

在对 Barto、Kozik 和 Niven 结果的第二个推广中，我们能够将有向图上的一些假设替换为“伪假设”，即对其自同构群某个子群的轨道因子化后所得图的假设，从而使证明适用于无限情形。

定理 2. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个有限光滑有向图，且 $\mathcal{G}$ 是其自同构群 Aut($\mathfrak{A}$) 的一个子群。如果因子图 $\mathfrak{A}/\mathcal{G}$ 的代数长度为 1 且无环，那么 $\mathfrak{A}$ pp- 解释 EVERYTHING（带参数）。

我们指出，这两个定理都是我们所证明的一个更一般定理定理 7的推论。

2）重新探讨 Hell 和 Ne$\check{}$set$\check{}$ril：我们的第二项主要贡献是将 Hell 和 Ne$\check{}$set$\check{}$ril 的结果推广到可数范畴的情形：我们证明，若一个没有源点和汇点的图，其自同构群的某个子群在轨道上诱导出的因子图满足 Hell 和 Ne$\check{}$set$\check{}$ril 定理中的假设，那么该图就能借助参数和该群的轨道 pp-解释所有有限结构。由此便得到了上述定理的（ii）。

定理 3. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个光滑有向图，$\mathcal{G}$ 是其自同构群 Aut($\mathfrak{A}$) 的一个子群。假设 $\mathcal{G}$ 在其对有序对的作用中只有有限多个轨道。如果 $\mathfrak{A}/\mathcal{G}$ 是对称的、无自环且非二部的，那么将 $\mathcal{G}$ 的轨道添加到 $\mathfrak{A}$ 后，便可用参数 pp-解释 EVERYTHING。

将这一结果应用于有限图和$\mathcal{G}$平凡群，可得到 Hell 和 Ne$\check{}$set$\check{}$ril 定理的一个全新且纯粹关系型的证明。该结果还意味着，任何一个模型完备核的 ω-范畴结构，只要无法用参数 pp-解释 K_3，便具有多种代数不变性，从而解决了 [12, 第 5 节中的3],一个开放问题，大幅推广了 Barto 和 Pinsker 的结果，并结束了他们的结果长期以来独一无二的局面——参见定理 25。

*3)Mar´*oti 和 McKenzie，再探： 在第三项主要贡献中，我们超越了图的范畴，研究超图。上述代数不变性表现为多态函数，即定义在结构论域上的多元函数，它们使结构保持不变，并满足非平凡的恒等式。对于相应约束满足问题的计算复杂性问题，已证明最直接适用的恒等式通常源自超图而非图；尤其是，Zhuk 在证明约束满足问题二分定理时所用的弱近一致（WNU）多态运算便是如此。借助有限代数的工具，Mar K_3 oti 和 McKenzie 证明，任何无法用参数 pp-解释´的有限核结构都存在这类运算 [13]；Barto 和 Kozik [14]以及 Zhuk [15]也给出了进一步的代数证明。

我们证明，在相同条件下，类似的多态函数未必存在于 ω-范畴结构中。事实上，我们得到了一个更一般的结果，定理 40：任何一种代数不变性，只要它是由可数无穷析取构成的，其中各项断言多态函数满足恒等式，并且没有任何单独一项能由那些不能通过带参数的 pp-解释解释 K_3 的有限核结构所蕴含，就可以通过一个不能通过带参数的 pp-解释解释 ω的 K_3 -范畴超图来规避。存在弱近一致性（WNU）多态函数就是这样一种条件，因为尽管任何不能通过带参数的 pp-解释解释 K_3 的有限核结构都有一个 WNU 多态函数，但不同有限结构的 WNU 多态函数的元数各不相同。

我们的定理特别解决了 [7, 问题 14.2.6 (21)]。这表明，适用于有限结构的全集代数工具无法推广到 ω-范畴情形，并指出，为了在一阶约化这一更狭窄的背景下，对有限边界的齐次结构获得与有限情形相同的代数不变性，必须采用更精细的方法，例如 [16] 中所介绍的方法。

定理 4。存在一个超图 $\mathfrak{A}$，具有以下性质：

- $\mathfrak{A}$ 是 ω-范畴的；
- $\mathfrak{A}$ 没有伪 WNU 多态；
- $\mathfrak{A}$ 由其自同构群的轨道扩张后，不能带参数 pp-解释一切。

II. 预备知识

A. 关系

我们关于关系结构的术语相当标准，而且常常直接称其为结构。我们滥用记号，将关系符号及其在结构中的解释称为同一个名字；$R(a_1,\dots,a_n)$通常表示$(a_1,\dots,a_n)$属于给定结构中 R 的解释（具体含义应始终可由上下文判断），而 $R(x_1,\dots,x_n)$则是一个以$x_1,\dots,x_n$为自由变量的原子公式。有向图是只有一个二元关系的结构，我们通常将其记为 $\to$，其逆关系记为$\leftarrow$。图是对称的有向图，即 $\to = \leftarrow$。超图是只有一个关系的结构。结构 $\mathfrak{A}$ 在子集 B 上的诱导子结构记为 $\mathfrak{A}|_B$，论域上模等价关系 $\sim$ 所得的商结构记为$\mathfrak{A}/\sim$。例如，有向图$(A;\to)$的商是有向图$(A/\sim, \{([a]_\sim,[b]_\sim) : a \to b\})$。

如果一阶公式 φ 只由存在量词、合取和原子公式构成，则称它为原始正公式（简称 pp 公式）。如果 $\mathfrak{A}$ pp-定义 $\mathfrak{B}$（或者说，$\mathfrak{B}$ 可在 $\mathfrak{A}$中 pp-定义），则表示 $\mathfrak{B}$ 中的每个关系都可以由一个原始正公式定义。对于关系集，也使用相同的术语。

结构 $\mathfrak{B}$ 在 $\mathfrak{A}$ 中的原始正解释由一个部分满射 h: $A^d \to B$ 构成，其中 $d \geq 1$，并且对于每个 $R \subseteq B^n$（它可以是 B、B上的等号关系，或 $\mathfrak{B}$中的一个关系），其原像 $h^{-1}(R)$作为 A 上元数为 nd 的关系，在 $\mathfrak{A}$中都有一个 pp-定义。整数 d 称为该解释的维数。

如果$\mathfrak{A}$ 通过添加一元关系 $\{a\}$（其中 a 属于 $\mathfrak{A}$的论域）而扩充后，pp-解释/pp-定义 $\mathfrak{B}$，则称 $\mathfrak{A}$ 带参数 pp-解释/pp-定义 $\mathfrak{B}$。一个经典事实是，三元团 K_3 带参数 pp-解释每个有限结构。

若关系 $R \subseteq A^n$ 是 A 上的 n 元关系，且其在任意坐标上的投影都等于 A，则称其为次直积。对于 A 上的两个二元关系 R 和 S，我们将 $R+S$ 记作 R 与 S 的复合，其 pp- 定义为

$$(R+S)(x,z) \equiv \exists y\ R(x,y) \wedge R(y,z).$$

相应地，我们将 R 与自身复合 n 次记作 nR。对于 A 上的二元关系 R 和一元关系 B，我们也使用 $B+R$，其 pp-定义为

$$(B+R)(y) \equiv \exists x\ B(x) \wedge R(x,y).$$

对于有向图的二元关系 $\to$，为了便于阅读，我们用 $B^\to$ 代替 $B+\to$。

对于定义在 A 上、元数分别为 n 和 m 的两个关系 R、S，我们定义一个（$n+m$）元关系 OR(R,S) 其定义为：当且仅当 $R(a_1,\dots,a_n)$ 或 $S(b_1,\dots,b_m)$ 时，OR(R,S)($a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m$) 成立。请注意，这不是从 R 和 S 得到的 pp-定义。

在证明 定理 1 和 定理 2时，我们将为一个非平凡等价关系 α系 α，构造 OR(α) 的 pp-定义。以下广为人知的观察（见 附录 A）将完成证明。

命题 5. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个有限核结构，包含某个 $B \subseteq A$ 上真等价关系 α 的 OR(α,α)。那么，$\mathfrak{A}$ pp-解释每个有限结构。

B. 有向图的连通性概念

设 $\mathfrak{A} = (A;\to)$ 是一个有向图。若 $\mathfrak{A}$ 是光滑的，则称之为光滑，即 $\to$ 是 A 上的次直积关系，也就是说，$A^\to = A^\leftarrow = A$。

$\mathfrak{A}$ 中的游走是一个序列 $a_1\ \epsilon_1\ a_2\ \epsilon_2 \dots \epsilon_{n-1}\ a_n$，其中 $a_i \in A$，且每个 ϵ_i 要么是 $\to$，要么是 $\leftarrow$。此类游走的代数长度等于正向箭头的数量减去反向箭头的数量。若存在一个代数长度为 1 的闭游走（即 $a_1 = a_n$），则称 $\mathfrak{A}$ 的代数长度为 1。

若任意两个顶点之间都存在游走，则称有向图为弱连通。弱连通分支相应地定义为极大的、弱连通的导出子有向图（或者，滥用记号，指 A 的相应子集）。

k 重的 $\to$ 与自身的复合可由 pp-定义

$$x(k\to)y \equiv \exists z_1,\dots,z_{k-1}\ x \to z_1 \to \dots \to z_{k-1} \to y.$$

注意，如果 $\to$ 是 A 的次直积，那么对于任意 k，$k\to$ 也是如此。$\mathfrak{A}$（或 $\to$）的关联关系定义为 $L_\to(x,\ y) \equiv \exists z$（$x \to z \wedge y \to z$）。注意，$L_\to$ 总是对称的；如果 $\to$是次直积，那么它也是自反的。$L_\to$ 的传递闭包称为与 $\to$相关联的关联等价关系。如果 $\mathfrak{A}$ 的关联等价关系等于 A^2，我们称 $\mathfrak{A}$ 是连通的。$\mathfrak{A}$ 的 k-关联关系是 $L_{(k\to)}$，其传递闭包是 k-关联等价关系；如果 $k\to$ 是连通的，则称 $\mathfrak{A}$ 是 k-连通的。由于对于光滑的 $\mathfrak{A}$，关联关系是自反的，因此当 A 有限时，其传递闭包可以通过 pp-定义得到，即由公式

$$\exists z_1,\dots,z_{|A|}\ L_\to(x,z_1) \wedge L_\to(z_1,z_2) \wedge \dots \wedge L_\to(z_{|A|},y)\ .$$

同一个公式也适用于$(k\to)$ 来代替 $\to$。注意，有限有向图 $\mathfrak{A}$ 对于某个 k是 k -连通的，当且仅当它是弱连通的，并且具有代数长度 1（例如参见 [14,断言 3。8]）。此外，代数长度为 1 的弱连通分支可以用来自 $\to$的参数进行 pp-定义。图是 k-连通的，当且仅当它是（弱）连通的且非二部的。

C. 群、轨道、 ω-范畴性、模型完备核

设 $\mathcal{G}$ 是作用于集合 A 上的置换群。对于 $n \geq 1$，在 A^n 上定义等价关系 $\sim_\mathcal{G}$：当且仅当存在一个 $\alpha \in \mathcal{G}$ 使得 $\alpha(x) = y$。$\sim_\mathcal{G}$ 在 A^n 上的等价类称为群 $\mathcal{G}$ 的 n-轨道。若对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\mathcal{G}$ 都只有有限个 n-轨道，则称 $\mathcal{G}$ 是寡轨道的。若可数结构 $\mathfrak{A}$ 的自同构群 Aut($\mathfrak{A}$) 是寡轨道的，则称其为 ω-范畴的，或称可数范畴的。

对于有向图 $\mathfrak{A} = (A, \to)$ 以及作用于 A 上的群 $\mathcal{G}$，我们记作 $\mathfrak{A}/\mathcal{G}$，而不记作 $\mathfrak{A}/\sim_{\mathcal{G}}$（其中等价关系针对 $n = 1$）。

一个 ω-范畴结构 $\mathfrak{A}$ 是一个 模型完备核，如果对于每个自同态 e，存在于 $\mathfrak{A}$ 中的有限子集 F，存在 A的一个自同构 α，使得 $\mathfrak{A}$ 满足 e 与 α 在F上一致。有限的模型完备核简称为 核。每个ω-范畴结构 $\mathfrak{A}$ 都有一个诱导子结构，它是一个模型完备核，并且存在一个从 $\mathfrak{A}$ [17]到该子结构的同态。该结构在同构意义下唯一，其同构类型称为 的模型完备核 $\mathfrak{A}$。

D. 多态函数与恒等式

关系 $R \subseteq A^n$ 在 A 上关于运算 f不变：$A^m \to A$ 如果对于所有 r_1、……、$r_m \in R$，逐分量地将 f应用于r_1、……、r_m所得到的 n-元组$f(r_1$、……、$r_m)$也属于 R。如果一个运算 f作用于 A上，并且 $\mathfrak{A}$ 是一个论域为 A 的结构，那么当 $\mathfrak{A}$ 的每个关系都关于 f不变时，我们称 f为 $\mathfrak{A}$ 的一个多态函数。$\mathfrak{A}$ 的所有多态函数的集合记为 Pol($\mathfrak{A}$)。多态函数的集合称为克隆，结构的多态克隆与其 pp-可定义性和 pp-可解释性强度之间存在密切联系；不过，本文不展开讨论这些内容，详见 [18], [19], [20], [9]。

等式条件是一个恒等式系统——即形如 $s \approx t$ 的形式表达式，其中 s 和 t 是基于一组公共函数符号的项。如果函数符号可以被解释为 Pol($\mathfrak{A}$) 中的成员，使得对于 Σ 中的每个 $s \approx t$，等式 $s = t$ 对变量的任意赋值都成立，则称 $\mathfrak{A}$ 或 Pol($\mathfrak{A}$)（或公共论域上的某个运算集合）满足等式条件 Σ。

一个例子是元数为 n 的弱近一致性（WNU）条件：$w(x, \ldots, x, y) \approx w(x, \ldots, x, y, x) \approx \cdots \approx w(y, x, \ldots, x)$，其中符号 w 的元数为 n。如果 $\mathfrak{A}$ 具有一个 n 元多态 w，使得对于论域中的所有 x、y，$w(x, \ldots, x, y) = \ldots = w(y, x, \ldots, x)$，则该条件在 Pol($\mathfrak{A}$) 中得到满足；这样的多态称为 WNU 多态。类似地，伪 WNU 条件由 $u_1(w(x, \ldots, x, y)) \approx u_2(w(x, \ldots, x, y, x)) \approx \cdots \approx u_n(w(y, x, \ldots, x))$，其中 u_i 是一元符号。另一个例子是 Siggers 条件 $s(x, y, x, z, y, z) \approx s(y, x, z, x, z, y)$，以及它的伪版本 $u(s(x, y, x, z, y, z)) \approx v(s(y, x, z, x, z, y))$。

若一个等式条件 Σ 中的每个恒等式 $s \approx t$ 里，s 和 t 都恰好包含一个函数符号的出现，则称该条件为子条件。例如，WNU 条件是子条件，而伪 WNU 不是。若在每个 $s \approx t$中，恒等式两边出现的变量相同，则称等式条件是平衡的；上面的例子都具有这一性质。最后，若一个等式条件蕴含对于每个函数符号 t都有 $t(x, \ldots, x) \approx x$，则称它是幂等的。例如，幂等 WNU 条件$w(x, \ldots, x, y) = \ldots = w(y, x, \ldots, x)$ $w(x, x, \ldots, x) \approx x$ 是幂等的，但不是子条件。

如果每个多态克隆都满足某个等式条件，则该等式条件是平凡的。一个众所周知的事实是，如果一个结构 pp-解释 K_3，那么它所满足的任何等式条件都是平凡的；如果它带参数 pp-解释 K_3，那么它所满足的任何幂等条件都是平凡的。

III。有限有向图中的环与伪环 APHS

本节证明定理 1和2 的精细版本及其推论。这两个定理均由一个结果推导而来，即定理 7，我们在此仅陈述该定理。其证明见第 IV 节。

A. 带秩关系与主定理

证明定理 2中所述有限伪自环结果的关键思路，是改变有向图关系$\to$：该关系仅在轨道模意义下具有代数长度 1；通过附加适当自同构 g的图，将其改为真正具有代数长度 1 的关系$\to + g$。这一新关系不一定能从结构 $\mathfrak{A}$作 pp-定义 $\to + g$，因此，从 $\to$作 pp-定义通常不会对从引理 6作 pp-定义产生任何推论。然而，正如我们将要指出的，如果只使用受限的 pp-公式，仍可得到有用的推论。这便是下列定义的缘由。

关系或关系符号 R（其元数为 n）的排序是一个映射 $r : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}$。于是，二元组（$R$，$r$）称为带秩关系；对于任意坐标 $i \in \{1, \ldots, n\}$（或者在关系符号的情况下为变量），我们将其在 r 下的值称为该坐标的秩。带秩关系（R，r）的平移是任意带秩关系（R，$r + k$），其中 $k \in \mathbb{Z}$。带秩关系结构相应地定义。

如果 $\to$ 是一个二元关系，那么 $\to_{01}$ 就是该关系以及相应的排序：为第一个坐标指定秩 0，为第二个坐标指定秩 1。

带秩原始正合取公式，简称 rpp-公式，是在一组 $\mathcal{R}$ 带秩关系上定义的 pp-公式，即使用来自 $\mathcal{R}$ 的带秩关系，并且对变量进行排序；这种排序是一个映射 r：$V \to \mathbb{Z}$，具有以下性质：

- 如果公式中出现 $R(x_1, \ldots, x_n)$，那么 R连同排序 $i \mapsto r(x_i)$ 是 $\mathcal{R}$ 中某个带秩关系的平移；
- 如果公式中出现 $x = y$，那么 r 在 $\{x, y\}$ 上是常数。

注意，如果带秩原始正合取公式的自由变量为 $y_1, \ldots, y_n$，那么该公式定义了一个带秩关系$R(y_1, \ldots, y_n)$，其排序为 $i \mapsto r(y_i)$。

如果一个关系中所有坐标的秩都是 0，那么我们称该关系为 0-有秩。如果所有自由变量的秩都是 0，那么 rpp-公式称为 -有秩0。一个重要的例子是定义 0-关联等价关系的 $\to_{01}$ 上的 rpp-公式，以及在 k 上定义 $\to_{01}$ 弱连通分支（其代数长度为 1）的带参数 rpp-公式，相关讨论见 II-B节。

设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是具有相同签名的带秩关系结构，其论域分别为 A 和 B。函数序列 $(f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $f_i : A \to B$是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的带秩同态，当且仅当对于 $\mathfrak{A}$中带秩关系的任意平移 (R, r)，设其元数为 n，若 $R(a_1, \ldots, a_n)$ 属于 $\mathfrak{A}$，则

$R(f_{r(1)}(a_1)..., f_{r(n)}(a_n))$ 属于 $\mathfrak{B}$。注意，这一性质也适用于 rpp-可定义关系；这正是以下引理成立的根本原因。证明见 附录 A。

引理 6. 设 $\mathfrak{A} = (A; \to)$ 是一个有向图，$g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$，且$S$ 是 A 上的一个关系。设 $\to' = \to + g$。如果 $\to'_{01}$ 以带参数的方式 rpp-定义了 0-秩 S，那么 $\to$ 就以带参数的方式 pp-定义了S。

注意，分级同态的集合在平移下封闭；也就是说，若 $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的带秩同态，那么对任意 $k \in \mathbb{Z}$，$(f_{i+k})_{i\in\mathbb{Z}}$ 也是带秩同态。此外，分级同态在复合下封闭；也就是说，若 $(g_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是从 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{C}$ 的带秩同态，那么 $(g_i \circ f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 就是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{C}$ 的带秩同态。特别地，$\mathfrak{A}$ 的分级自同构（即从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}$ 的可逆带秩同态）构成一个群，称为 $\mathfrak{A}$ 的分级自同构群。我们将分级自同构群$\mathcal{H}$ 的投影定义为群 $\{f_0 : (f_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{H}\}$。对于任意 j，它都等于$\{f_j : (f_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{H}\}$。

现在可以陈述有限有向图的主要结果了。

定理 7. 设 $\mathfrak{A} = (A; \to)$ 是一个有限光滑有向图，设 $\mathcal{H}$ 是 $(A; \to_{01})$ 的分级自同构群的一个子群，设 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{H}$ 的投影，并设 $k \geq 1$。若 $\to$ 是 k-连通的，且 $(k\to) \neq A^2$，则 $\to_{01}$ 与 $\mathcal{G}$ 的 0-秩轨道一起 rpp-定义

1) $B \subsetneq A$，使得 $\mathfrak{A}|_B$ 光滑且 k-连通；或 2) 对某个子集 $C \subseteq A$ 上的真等价关系 α，有 0-秩 OR(α, α)。

B. 无参数的环

以下 定理 1 的精化版本是 定理 7的一个简单推论。对于这一结果，不需要排序。

定理 8. 设 $\mathfrak{A} = (A; \to)$ 是一个有限光滑有向图，并设 $\mathcal{G}$ 是 Aut$(\mathfrak{A})$ 的一个子群。若 $\mathfrak{A}$ 是连通的，则 $\to$ 与 $\mathcal{G}$ 的轨道 pp-定义

- 某个非空 $B \subseteq A$ 使得 $B^2 \subseteq \to$，或者

对于某个子集 $C \subseteq A$ 上的真等价关系 α，有 OR(α, α)。

证明。我们将定理 7 应用于 $k = 1$、同一个 $\mathfrak{A}$，以及 $\mathcal{H} = \{(g)_{i\in\mathbb{Z}} : g \in \mathcal{G}\}$。假设不成立（$k\to$）$\neq A^2$ 和条目 2 都给出了所需结论；如果条目 1 成立，那么我们将 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathcal{G}$ 限制到 B，并再次应用定理 7。最终，我们要么得到某个 $C \subseteq A$ 上的真等价关系 α 所对应的 OR(α, α)，要么得到 $\mathfrak{A}$ 的一个满子有向图，正如所需。 □

注意，定理1 是由上一个定理和 命题 5直接推出的。

从定理 8 等结构性结果中导出恒等式的标准方法定理 8 给出了以下推论。证明见附录 B-A，相关结果将在第七节中进一步讨论。

定理 9。设 $\mathfrak{A}$ 是一个有限核结构，且 m 大于或等于自同构群 Aut$(\mathfrak{A})$ 的元素个数。那么，以下命题等价：

- $\mathfrak{A}$ 不能 pp-解释所有有限结构；换句话说，$\mathfrak{A}$ 具有满足某个非平凡恒等式系统的多态函数，
- Pol$(\mathfrak{A})$ 满足

$$h(\alpha_1(x), \ldots, \alpha_m(x), x, y, x, z, y, z) \approx h(\ y\ , \ldots, \ y\ , y, x, z, x, z, y).$$

C. 带有伪假设的伪环

定理 2 的一个改进版本可由定理 7运用第三节 A中提到的技巧得到。我们陈述一个“稍微无限”的版本，这将在第 V 节中用到。我们给出证明概要；完整证明见附录 B-B。

定理 10. 设 $\mathfrak{A} = (A; \to)$ 是一个光滑有向图，且 $\mathcal{G}$ 是 Aut$(\mathfrak{A})$ 的一个子群。若 $\mathfrak{A}$ 的所有弱连通分支均为有限集，且 $\mathfrak{A}/\mathcal{G}$ 的代数长度为 1，则

- $\mathfrak{A}/\mathcal{G}$ 有一个环，或者
- $\to$ 通过参数 pp-定义 OR(α, α)，其中 α 是有限 $C \subseteq A$ 上的一个真等价关系。

证明思路。闭游走的代表元，位于 $\mathfrak{A}/\mathcal{G}$ 且代数长度为 1，可利用来自 $\mathcal{G}$的自同构平移为一条代数长度为 1 的游走，其起点是某个 a，终点是 b，且二者处于同一轨道。取 $g \in \mathcal{G}$ 使得 $g(b) = a$，定义 $\to' = \to + g$，并注意到 a 关于 $\to'$ 的连通分支代数长度为 1，且是有限的。已知这类连通分支可由带参数的 pp 公式定义。现在我们可以像定理 24 的证明中那样，继续应用定理 10，但需要注意，情形$(k\to) = A^2$ 需要单独处理（不过可借助[14]中的一个结果解决）。应用引理 6即可完成证明。 □

我们给出两个例子来说明主要定理。第一个例子是文献中反复得到证明的一个观察：无向 6-圈在任何幂等弱近一致性运算下都不是不变的。现在，这一结果可由我们的一般定理推出：取 g，即图 1 中红色箭头所示的 6-圈自同构，并将定理 2 应用于该图和$\mathcal{G} = \{$恒等映射 $g\}$。由此可知，带参数的该图 pp-解释了每个有限结构；因此，其多态函数不满足任何非平凡的幂等方程条件。

第二个例子表明，我们结果中的某些假设不可省略。我们考虑图 $\mathfrak{T}_{3,\ 3}$见图 2 以及 $\mathcal{G} = \{$恒等映射 $g\}$，其中 g 用红色表示。一方面，定理 2 仍然表明，多态函数不满足任何非平凡的幂等的恒等式。另一方面，$\mathfrak{T}_{3,\ 3}/\mathcal{G}$是连通的且无环，但$\mathfrak{T}_{3,\ 3}$ 满足某些非平凡恒等式，见 [21, 例 6。3]。例如，这表明在定理 1 中不能将“$\mathfrak{A}$ 连通”替换为“$\mathfrak{A}/\mathcal{G}$ 连通”或“$\mathfrak{A}$对称非二分”，而且定理 2中的参数不可或缺。

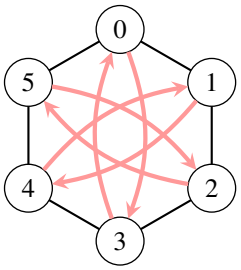

图 1. 第一个例子

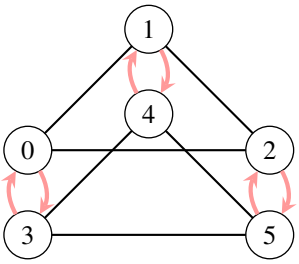

图 2. 第二个例子

IV. 定理的证明 定理 7

整节内容都是对定理 7的证明。我们固定一个有限光滑有向图 $\mathfrak{A} = (A;\ \to)$ 以及其分级自同构群的一个子群 $\mathcal{H}$，该群作用于$(A;\ \to_{01})$ 的投影为 $\mathcal{G}$。我们假设 $\mathfrak{A}$ 是 k-连通的，但$(k \to) \neq A^2$。

由于本节中我们讨论的所有关系都定义在 A 上，因此通常不明确说明这一点。例如，“R 是次直积”意为 R 是 A 中的次直积。为方便起见，我们有时假设 $A = \{1, 2, \ldots, |A|\}$。令 O 为元组 (1, 2, . . ., $|A|$) 的 0-秩 $\mathcal{G}$-轨道。注意，对于任意 g: $A \to A$，元组 (g(1) g(2) . . ., g($|A|$)) 属于 O 当且仅当 $g \in \mathcal{G}$。

我们将分三步证明 $\to_{01}$ 和 O rpp-定义一个真一元 B 使得 $\mathfrak{A}|_B$ 是光滑的，并且 k-连通（条目 1）或为 0-秩 OR(α, α) 对于真等价关系 α 在 $C \subseteq A$（条目 2）。

A. 构造中心关系或 Q-中心关系

我们先给出定义，接着介绍一些辅助事实，并以证明定理 7的第一部分作结，结束本小节。

我们现在引入的概念在 Rosenberg 的极大克隆分类中发挥着重要作用[22]；我们采用 Pinsker 在 [23] 中对 Quackenbush 分类证明的表述 [24]。关系 R 是全对称的，如果对于每个$(a_1, \ldots, a_n) \in R$ 以及 σ 上的每个置换 $\{1, 2, \ldots, n\}$，元组$(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$ 都属于 R。类似地，关系 R 是全自反的，如果来自 A^n 的任何至少有两个重复项的元组都属于 R。全对称且全自反的关系称为TSR-关系。

下一个概念——中心——在 CSP 理论中也非常有用，例如见 Zhuk 的二分性证明 [4] 或吸收理论 [25]（参见 [26]）。我们指出，在一些提及的文献中，术语略有不同。

定义 11（中心）。设 $n \geq 2$。我们称关系 $R \subseteq A^n$ 为 P-中心关系，若它是次直积，且集合

$$\{a \in A : \forall a_2, \ldots, a_n \ (a, a_2, \ldots, a_n) \in R\}$$

是非空的。在这种情况下，上述集合称为 P-中心。P 代表“幂”；对于 $n = 2$，我们将 P-中心关系称为中心关系，并将 P-中心称为中心。

定义 12（中心等价关系）。如果关系 $R \subseteq A^n$ (n >2) 在任意两个坐标上的投影都是全集，并且二元关系

$$\alpha = \{(a, a') \in A^2 : \forall a_3, \ldots, a_n \ (a, a', a_3, \ldots, a_n) \in R\}$$

是一个等价关系。上述等价关系于是称为 P-中心关系。对于 $n = 3$，我们讨论 Q-中心关系和中心等价关系。

第一个事实是一个简单的观察，其证明推迟到 附录 C-A。

引理 13。每个次直积且连通、但非中心的带秩关系，都 rpp-定义一个真 0-秩 TSR 关系。此外，如果新关系是二元的，那么它也连通。

我们将用到 [23] 中陈述的以下事实；证明见 附录 C-A。在这个引理中，我们无需顾虑关系的排序，因为所有应用都只使用 0-秩关系（因此 pp 定义会自动产生 0-秩 rpp 定义）。

引理 14。每个元数至少为 3 的真 TSR 关系，以及每个元数为 2 的真链接 TSR 关系，都 pp-定义一个 P-中心或 PQ-中心的真 TSR 关系。

接下来要做的是消去幂。这可以通过使用任何只包含“满射”元组的关系来实现，例如 O。

引理 15. 带秩 TSR P-中心关系 R 和 O 对 R 的中心作 rpp-定义，并定义一个具有相同中心的 TSR 中心（二元）R'（R' 的排序继承自 R 的前两个坐标）。

证明. 设 n 为 R 的元数。关系

$$R^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \exists y_1, \ldots, y_{|A|} \ O(y_1, \ldots, y_{|A|}) \wedge \bigwedge_i R(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_i)$$

是一个元数为 $n - 1$、且与 R 具有相同中心的带秩 TSR P-中心关系，只要 $n \geq 3$。重复这一构造（用 R^{n-1} 替换 R），我们可以将其降至 R^2，并可将其取作 R'；再降至 R^1，它是中心的一个 rpp-定义。 □

关于 PQ-中心关系也有类似结果。在这种情况下，我们同样无需担心关系的排序。证明几乎与引理 15的证明完全相同，因此略去。

引理 16。TSR PQ-中心关系 R 和 O pp-定义了 R 的中心等价关系，以及具有相同中心等价关系的 TSR Q-中心（三元）关系 R'。

我们可以开始定理 7的证明的第一步了。

引理 17（第一步）。有秩关系 $\to_{01}$ 和 O rpp- 定义了适当的有秩中心关系或适当的 0-分级 Q-中心关系。

证明。 如果 $k \to$ 是中心关系，我们就已经达成目标。否则，我们应用 引理 13 得到一个 TSR 关系，然后应用 引理 14 得到一个 0-分级 TSR 关系，该关系是 P-中心或 PQ-中心。最后，根据具体情况应用 引理 15或 引理 16 ，从而得到所需的中心关系或 0-分级 Q-中心关系。 □

B. 构造 OR 关系

本小节的计划是，对于真 TSR T，要么 rpp-定义 0-秩 $\mathrm{OR}(T,T)$，要么 B如定理 7的第1项所述。证明分为两部分，具体取决于第一步得到的关系。以下引理处理 0-秩 Q-中心关系的情形（同样，我们不必考虑排序）。

引理 18（第二步，Q-中心情形）。一个在 $\mathcal{G}$ 和 O 下不变的真 Q-中心关系 R，pp-定义了真 TSR T 的 $\mathrm{OR}(T,T)$。

证明。假设 $A=\{1,\dots,n\}$，令 R和 O如陈述所述。将 R 的中心等价关系记为 α ，并注意，根据引理 16 α ，它在 R 和 O中是 pp-可定义的。

我们选择 $a,b\in A$ 使得

- $(a,b)\notin\alpha$ 并且
- 集合 $I=\{i:(a,b,i)\in R\}$ 在为其他 $(a,b)\notin\alpha$定义的类似集合中（按包含关系）是极大的。

我们假设 $a=1$ 和 $b=2$ （这可以通过重命名 A中的元素得到）。

接下来，我们找出满足下述条件的最小数目 k

- A 的每个 $(k-1)$ 元素子集都包含在某个 $g\in\mathcal{G}$ 对应的 $g(I)$ 中，并且
- A 的某个 k 元素子集对任意 $g\in\mathcal{G}$都不包含在 $g(I)$ 中。

我们总能找到这样的 k ，且它满足 $1\le k\le|I|+1\le n$；这是 $(a,b)\notin\alpha$的推论。

我们的 T将由满足以下条件的元组 $(c_1,\dots,c_k)$ 组成：对于某个来自 $\mathcal{G}$ 的 g，$\{c_1,\dots,c_k\}\subseteq g(I)$。注意，根据定义，$T$ 是全对称的；根据 k 的选取，它也是全自反的。同时，选择 k 可确保 $T\neq A^k$。

我们的公式将包含自由变量 $x_1^1,\dots,x_k^1$ 和 $x_1^2,\dots,x_k^2$。该公式为

$$\begin{aligned}&\exists y_0,y_1,y_2,z_1,\dots,z_n\\&y_0=z_1\wedge y_2=z_2\wedge O(z_1,\dots,z_n)\wedge\\&\bigwedge_{j=1}^{2}\left(\bigwedge_{i=1}^{k}R(y_{j-1},y_j,x_i^j)\wedge\bigwedge_{i\in I}R(y_{j-1},y_j,z_i)\right).\end{aligned}$$

接下来需要验证该公式确实有效。首先，取 $(a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_k)\in\mathrm{OR}(T,T)$。假设 $\{a_1,\dots,a_k\}\subseteq g(I)$ 对某个 $g\in\mathcal{G}$ 成立（$\{b_1,\dots,b_k\}\subseteq g(I)$ 的情形是对称的）。我们如下选取量化变量的见证赋值：$y_0\mapsto g(1)$、y_1、$y_2\mapsto g(2)$，以及从 z_i 到 $g(i)$。

前三个（简单的）合取项由构造可知成立。我们来关注复杂的合取项。对于 $j=2$，R 的前两个参数相同，因此属于 α；而 α 是中心，所以 x_i^2 可以任意取值。对于 $j=1$，我们回想对每个 $i\in I$ 都有 $R(1,2,i)$，并且由于 g 是自同构，我们得到 $R(g(1)\ g(2)\ g(i))$，正如所需。

反过来，设 val 是变量 x_i^j,y_j,z_i 的一个赋值，使无量词部分为真。第三个合取项保证 $g:i\mapsto\mathrm{val}(z_i)$ 属于 $\mathcal{G}$。因此，我们可以定义一个新的有效变量赋值：$\mathrm{val}'(x)=g^{-1}(\mathrm{val}(x))$。新赋值满足 $\mathrm{val}'(z_i)=i$、$\mathrm{val}'(y_0)=1$ 以及 $\mathrm{val}'(y_2)=2$。如果对于 $j=1$ 或 $j=2$，$\{\mathrm{val}'(x_1^j)\dots,\mathrm{val}'(x_k^j)\}\subseteq I$，那么我们就达成了目标。

令 j 满足 $(\mathrm{val}'(y_{j-1}),\mathrm{val}'(y_j))\notin\alpha$，并注意到，对于每个 $i\in I$，$R(\mathrm{val}'(y_{j-1}),\mathrm{val}'(y_j),\mathrm{val}'(z_i))=i$ 都成立。但若存在 i 使得 $\mathrm{val}'(x_j^i)\notin I$，就会与 I 的极大性相矛盾（因为该公式保证 $R(\mathrm{val}'(y_{j-1}),\mathrm{val}'(y_j),\mathrm{val}'(x_i^j))$）。因此不存在这样的 i，证明完毕。 □

分秩中心关系的情形更为复杂。我们从一个分秩中心关系开始，并将其与$\to_{01}$结合起来，以构造另一个子集 B，使其具有 $\mathfrak{A}|_B$ 光滑性；例如，[14]中就出现了这种构造。证明见附录 C-B。

引理 19。一个非空的 $C\subsetneq A$ 和 $\to_{01}$ rpp-定义一个非空的 $B\subsetneq A$，使得 $\mathfrak{A}|_B$ 是光滑的。

我们注意到，对于一元 C 和$\to_{01}$中的任意 rpp-公式 ϕ，删除所有合取项 $C(x)$后得到的公式定义了 A。这是因为 $\to$ 是次直积：对于量化变量，可以通过从给定顶点出发、向前和向后的无限游走获得见证（将秩为 r 的所有变量赋值为该双向无限游走中的第 r个顶点）。

引理 20（第二步，中心情形）。设 R 为在 $\mathcal{H}$下不变的分秩中心关系。则 R、O和 $\to_{01}$ rpp-定义

- $\emptyset\neq B\subsetneq A$，使得 $\mathfrak{A}|_B$ 是光滑且与 k连通的，或者
- 0-秩的 $\mathrm{OR}(T,T)$，其中某个真 TSR 为 T。

证明开始。令 C 为 R 的中心，且 ψ 为定义 B 的 rpp-公式，该公式来自 引理 19，即 B 是 A 的真非空子集，且 $\mathfrak{A}|_B$ 是光滑的。我们假设 $\mathfrak{A}|_B$不是 k-连通的；令 α 为 k在 B上的 -关联等价关系。我们的目标是为真 TSR T rpp-定义 $\mathrm{OR}(T,T)$。

取一个具有两个自由变量的 0-秩 rpp-公式 φ，该公式定义 k-关联关系（具有 $|A|$-多个连通）。由于 $\mathfrak{A}$ 是连通的，它定义了 A^2。令 φ' 由 φ 得到：对每个变量（即量化变量和自由变量）添加一个合取项 $B(x)$。现在，φ' 表示“在 B 上限制于 $\to$ 的 k-连通”，因此它是 α 的 0-秩 pp-定义。

接下来，我们通过将 φ' 中量化变量 x 上的每个合取项 $B(x)$替换为公式 $\psi(x)$，来定义 φ''。显然，公式 φ'' 仍然定义 α。另请注意，如果我们移除所有合取项 $C(x)$（它们都来自量化变量），那么 φ' 的原量化变量上的所有限制都会被移除（见引理前的说明），因此所得公式定义了 B^2。

在 φ'' 中，我们逐一移除合取项 $C(x)$。某个时刻，我们得到一个含有选定量化变量的公式

x 它定义了一个严格大于 α的 B^2 子集，但如果我们将合取项 $C(x)$ 加回去，它就会定义 α。将x 设为自由变量后，我们得到一个 rpp-定义（使用 B、 C、 $\to_{01}$），定义了一个三元关系 S，使得

- $\exists x\ S(y,y',x)$ 是 B^2 的子集，且大于 α，并且
- $\exists x\ S(y,y',x) \wedge C(x)$ 是 α。

有了这个三元关系，接下来的推理与引理 18中的做法有些相似。完整证明见附录 C-B

□

C. 第三步

本节的安排如下。首先，我们针对一个 TSR 关系 T，给出0-秩 $\mathrm{OR}(T,\ T)$，接着将 T改进为 P-中心或 PQ-中心的 TSR，然后得到 $\mathrm{OR}(C,\ C)$，适用于 $C \subseteq A$；或者得到$\mathrm{OR}(\alpha,\ \alpha)$，适用于上的一个等价关系 A。第二种情况已经属于定理 7的第 2 项。在第一种情况下，我们还需要继续处理 $\to_{01}$，最终归入第 1 项或第 2 项。除了最后一个引理之外，所有关系和公式都是 0-秩的。

第一个引理在附录 C-C中证明。

引理 21。设 T 是一个真 TSR 关系。关系 $\mathrm{OR}(T,T)$ pp-定义 $\mathrm{OR}(S,S)$，且满足以下条件之一： S 非空且为真，其中 S 是一元的；或者 S 是 A 上的等价关系；或者 S 是 TSR 且为 P-中心；或者 S 是 TSR 且为 PQ- 中心。

引理 22。设 R 为 PQ-中心，且具有 P-中心等价关系 α。那么 $\mathrm{OR}(R,R)$ 和 O pp-定义 $\mathrm{OR}(\alpha,\alpha)$。

设 R 为 P-中心，且其 P-中心为 C。那么 $\mathrm{OR}(R,R)$ 和 O pp-定义 $\mathrm{OR}(C,C)$。

证明。我们只处理 PQ-中心的情形；P-中心关系的证明类似。设 $n>2$ 是 R 的元数。我们定义

$$\mathrm{OR}(\alpha,R)(x_1,x_2,y_1,\dots,y_n) \equiv \exists z_1,\dots,z_{|A|}\ O(z_1,\dots,z_{|A|}) \wedge \bigwedge_{f:\{3,\dots,n\}\to|A|} \mathrm{OR}(R,R)(x_1,x_2,z_{f(3)},\dots,z_{f(n)},y_1,\dots,y_n)$$

我们用 $\mathrm{OR}(R,\alpha)$ 替换 $\mathrm{OR}(R,R)$，并适当置换坐标，重复这一构造，从而得到 $\mathrm{OR}(\alpha,\alpha)$。

□

最终证明见附录 C-C，其开头采用了与引理 20 的证明类似的过程，以获得一个合适的三元关系；该关系与$\mathrm{OR}(C,\ C)$ 结合后，很容易得到 $\mathrm{OR}(\alpha,\ \alpha)$。

引理 23。设 C 是一个非空真一元关系。则 0-秩 $\mathrm{OR}(C,\ C)$ 和 $\to_{01}$ rpp- 定义

- $\emptyset \neq B \subsetneq A$，使得 $\mathfrak{A}|_B$ 是光滑的并且是 k-连通的，或者
- 0-秩 $\mathrm{OR}(\alpha,\ \alpha)$，其中 α 是 $B \subseteq A$ 上的某个真等价关系。

这个引理完成了定理 7的证明。总结如下，引理 17 与引理 18 或引理 20 共同构造出一个 0-秩$\mathrm{OR}(T,\ T)$，除非我们已经完成证明；这里的真 TSR 为 T。引理 21 改进了 T 而引理 22 则在必要时进一步将其改进为一个非平凡的一元 T 或 $T=\alpha$ 这是一个等价关系。在后一种情况下，我们的证明已经完成；而在前一种情况下，引理 23 完成证明。

V. 无限有向图中的伪自环

在本节中，我们陈述并证明定理 24 （如下），它是定理 3的一个精化版本。

定理 24。设 $\mathfrak{A}=(A,\to)$ 是一个光滑有向图，且 $\mathcal{G}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的自同构群的子群。若 $\mathfrak{A}/\mathcal{G}$ 是对称的、非二分的，并且 $\mathcal{G}$ 有有限多个 2-轨道，那么

- $\mathfrak{A}/\mathcal{G}$ 有一个环，或者
- $\to$ 与 $\mathcal{G}$ 1 的 1-轨道可通过参数对某个有限 C 上的真等价关系 α 作 $\mathcal{G}$ 1 维 pp-解释，或者 $\mathrm{OR}(\alpha,\alpha)$。

与定理 10 类似，最后一个定理也有一个关于恒等式的推论，该推论在附录 D-C 中证明。给定一个有限有向图 $\mathfrak{B}=(\{1,2,\dots,n\};\{(i_1,j_1),(i_2,j_2)\dots,(i_m,j_m)\})$，$\mathfrak{B}$-伪自环条件是 $u(s(x_{i_1},\dots,x_{i_m})) \approx v(s(x_{j_1},\dots,x_{j_m}))$。例如，伪 Siggers 条件就是 K_3-伪自环条件。

定理 25。设 $\mathfrak{A}$ 是一个 ω-范畴模型完备核结构。那么以下条件等价。

1) $\mathfrak{A}$ 不能用参数 pp-解释所有有限结构；2) $\mathrm{Pol}(\mathfrak{A})$ 满足某个非平凡的伪自环条件；3) 对每个对称的非二分 $\mathfrak{B}$，$\mathrm{Pol}(\mathfrak{A})$ 都满足 $\mathfrak{B}$-伪自环条件。

A. 三角形配置

本节通过将其归约到定理 24 来证明定理 10。我们的证明（详见附录 D-A）使用三角形构型这一关键概念（定义如下），并分为两部分：第一部分证明命题 26，第二部分则改编 [9] 中命题 3.8 的证明来完成论证。本节包含第一部分：我们在定理 24的假设下，pp-定义一个由三个子集构成的特殊构型，现将其引入。

$\mathfrak{A}=(A;\to)$ 与 $\mathcal{G}$ 的三角形构型是由 A 的子集组成的四元组 (P,P_0,P_1,P_2)，满足

(i) $P=\bigcup P_i$ 与 P_0、P_1和 P_2 两两不相交。(ii) 对于 $i=0,$ $P_i^{\to}\cap P_i=\emptyset$，1、2，即 P_i是独立的。(iii) 对所有满足 $i\neq j$的 i、$j=0,$ $P_i^{\to}\supseteq P_j$和 $P_i^{\leftarrow}\supseteq P_j$，1、2。(iv) $\mathfrak{A}|_P/\mathcal{G}$ 是非二分的

如果一组关系 pp-定义了一个三角形构型，即 pp-定义了全部四个子集，我们就称其 pp-定义了一个三角形构型。下一节将证明以下命题：

命题 26。设 $\mathfrak{A}=(A;\to)$ 是一个光滑有向图，且 $\mathcal{G}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的自同构群的子群。若 $\mathfrak{A}/\mathcal{G}$ 是对称的、无环且非二分的，并且 $\mathcal{G}$ 具有有限多个 1-轨道，则对于某个 k， $\to$ 和 $\mathcal{G}$ 的 1-轨道 pp-定义了一个关于 $(A;k\to)$ 和 $\mathcal{G}$ 的三角形构型。

B. 命题 26 的证明

我们固定一个光滑有向图 $\mathfrak{A} = (A;\ \to)$ 以及一个 $\mathcal{G}$ 的子群自同构群$(\mathfrak{A})$，其满足命题 26的假设。大部分工作是在 1-轨道图 $\mathfrak{U} = \mathfrak{A}/\mathcal{G}$上进行的。根据这些假设，它确实是一个图，并且是有限的、非二分的且无环。 $\mathfrak{U}$的论域 U记为，是 1-轨道的集合。我们使用 $\leftrightarrow$表示其关系，顶点 $u \leftrightarrow v$称为相邻的或邻点。

目标是证明，对于某个 k， $\to$ 和 $\mathcal{G}$ 的 1-轨道可以通过 pp-定义，为 $(A, k\to)$ 和 $\mathcal{G}$ 构造一个三角形构型。证明采用反证法；我们假设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathcal{G}$ 是具有尽可能小 $|U|$ 的反例。

证明的策略是在轨道图 $\mathfrak{U}$ 中通过 pp-定义得到一个三角形构型。为了能够将 pp-可定义性提升回去，我们需要如下限制允许使用的 pp 定义。

定义 27. 如果 S 包含于 U 的子集的最小族 $\mathcal{S}$ 中，则称子集 $S \subseteq U$ 是树可定义的[1]，其中该族满足 1) $\mathcal{S}$ 包含 U 和所有单元素集；2) 若 B_1、$B_2 \in \mathcal{S}$，则 $B_1^{\leftrightarrow} \in \mathcal{S}$ 和 $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{S}$。

容易用归纳法证明，若 $S \subseteq U$ 是树可定义的，则 $\bigcup S \subseteq A$ 可以由 $\to$ 和 $\mathcal{G}$ 的 1-轨道通过 pp-定义得到。

第一步，我们将 $\to$ 替换为 $(k-2)\to$，其中 k 是 $\mathfrak{U}$中最短奇圈的长度。这个新的有向图 $\mathfrak{A}$仍然是该命题的一个反例，因为新的 $\mathfrak{U}$是非二分的且没有环。此外，它包含一个三角形。

接下来，我们推导出关于这个反例极小性的一些推论。

引理 28. 如果 $S \subsetneq U$ 是树可定义的，那么 $\mathfrak{U}|_S$ 是二部的。

证明。 假设 $\mathfrak{U}|_S$ 不是二部的。由于 S 是树可定义的，集合 $B = \bigcup S \subsetneq A$ 可由 $\to$ 和 $\mathcal{G}$的 1-轨道 pp-可定义，特别地，它是 $\mathcal{G}$的 1-轨道的并集。此外，有向图 $\mathfrak{A}|_S$ 与 $\mathcal{G}|_S$ 满足命题 26 的假设，且其轨道数严格更少。由于我们的反例是极小的，我们得到这个受限有向图的一个 pp-可定义三角形构型，而它也是 $\mathfrak{A}$的三角形构型，矛盾。 □

引理 29. U 的任意两个顶点都有一个公共邻点。

证明。 任取顶点 u、$u' \in U$ 以及三角形中的一个顶点 u_1。由于 $\{u_1\}^{\leftrightarrow\leftrightarrow}$ 包含该三角形，因此可得$\{u_1\}^{\leftrightarrow\leftrightarrow} = U$，由引理 28。特别地， $u_1 \leftrightarrow u_2 \leftrightarrow u$ 对某个 u_2成立，进而 $u_1 \leftrightarrow u_3 \leftrightarrow u_2$ 对某个 u_3也成立。现在u_2 属于一个三角形（即 u_1、 u_2、 u_3），我们可以用相同的推理证明 u 属于一个三角形。再应用一次这一论证，可得 u_4使得 $u \leftrightarrow u_4 \leftrightarrow u'$——这就是所需的公共邻点。 □

如果子集 (U_0, U_1, U_2) 是 U 的一个强配置，则称其为强配置。

(a) 每个 U_i 都是树可定义的；(b) 每个 U_i 都是独立的（即 $U_i^{\leftrightarrow} \cap U_i = \emptyset$）；(c) 对所有 i， j均有 $i \neq j$，以及 (d) $\mathfrak{U}|_{U_0 \cup U_1}$ 和 $\mathfrak{U}|_{U_0 \cup U_2}$ 都是（弱）连通的。

我们从一个强配置 (U_0, U_1, U_2) =$(\{u_0\}, \{u_1\}, \{u_2\})$ 出发，其中 u_0、 u_1和 u_2 构成一个三角形。现在的策略是逐步扩大集合 U_i （同时保持条件 (a)–(d) 成立），使得最终 $U_0 \cup U_1 \cup U_2 = U$。如果做到这一点，那么 $(\bigcup U_0, \bigcup U_1, \bigcup U_2, \bigcup U = A)$ 显然构成 $\to$ 的一个三角形构型（注意，由于其他条件， U_i 两两不相交），并且这四个集合都可由 $\to$ 和 $\mathcal{G}$ 的 1-轨道 pp-定义——由此便得到矛盾。

我们通过应用 引理 30 或 引理 36来扩张这些集合；更具体地说，只要 引理 30 能够扩大集合，我们就应用它。如果 引理 30 无法扩大构型，我们就应用 引理 36。如果这两种运算都无法扩大构型$\bigcup U = A$，那么我们就达成了目标。

我们假设
- (U_0, U_1, U_2) 是一个强配置，
- 某些 $u_i \in U_i$ 构成一个三角形，并且
- $U_0 \cup U_1 \cup U_2$ 是 U的真子集，

并给出第一个引理:

引理 30。令 $i \in \{0, 1, 2\}$，并令 $U_i' = U_{i-1}^{\leftrightarrow} \cap U_{i+1}^{\leftrightarrow}$和$U_j'$:$= U_j$ 对于 $j \neq i$（指标模 3 计算）。那么 (U_0', U_1', U_2') 是一个强配置，并且对每个j， $U_j \subseteq U_j'$。

证明。令 j, k 满足 $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$ 和 $k \neq 0$。因此 $U_i' = U_j^{\leftrightarrow} \cap U_k^{\leftrightarrow}$, $U_j' = U_j$, $U_k' = U_k$，并且 $\mathfrak{U}_{U_i \cup U_j}$ 是连通的。

这些集合 $U_j^{\leftrightarrow}$和 $U_k^{\leftrightarrow}$都包含 U_i，因此U_i'也包含它。此外，$(U_i')^{\leftrightarrow} \supseteq U_i^{\leftrightarrow} \supseteq U_j$， U_k以及 $U_j^{\leftrightarrow}$， $U_k^{\leftrightarrow} \supseteq U_j^{\leftrightarrow} \cap U_k^{\leftrightarrow} = U_i'$。由于 U_i'是树可定义的，条件(a)、(c) 以及陈述中的包含关系均得到验证。

由于 $\mathfrak{U}_{U_i \cup U_j}$ 是连通的，且 U_i、 U_j 是独立的， U_j 中任意两个顶点都由 $U_i \cup U_j$ 中的偶数长度游走连接。注意，$U_i' \subseteq U_j^{\leftrightarrow}$的每个顶点都与 U_j中的一个顶点相邻。因此，$\mathfrak{U}_{U_i' \cup U_j}$ 是连通的，而且 U_i' 是独立的。事实上，否则我们便会在 $U_k^{\leftrightarrow} \supseteq U_i' \cup U_j$中得到一条奇数长度的游走，而它是 U 的真子集（因为 U_k 是独立的），这与引理 28矛盾。

我们已经验证了条件 (b)以及 (d)的一半；(d) 的另一半显然成立。 □

如果 引理 30 中的某个包含关系是真包含，我们就成功扩展了构型。因此，假设

$$U_i = U_{i-1}^{\leftrightarrow} \cap U_{i+1}^{\leftrightarrow} \quad \text{for each } i\ .$$

Set

$$V_i \coloneqq U_i^{\leftrightarrow} \setminus (U_{i-1} \cup U_{i+1}) \quad \text{for } i \in \{0, 1, 2\}$$

并注意，我们并未声称 V_i 是树可定义的（或 pp 可定义的）。

现在该图具有以下结构。所有 U_i 和 V_i 两两不相交，每个 $u \in U_i$ 都有一条边连接到 U_{i-1}和 U_{i+1}，且不与 V_{i-1} 或 V_{i+1} 连接。每个 $v \in V_i$

[1]该术语源于这样一个事实：树可定义性与带参数的树公式可定义性相同，但这与本文无关。

有一条边连接到 U_i （且不与 U_{i-1} 或 U_{i+1}连接）。下一个引理表明， $v \in V_i$ 有一条边连接到 V_{i-1} ，并且有一条边连接到 V_{i+1}。其证明见附录 D-B，其特殊之处在于使用了原始有向图 $\mathfrak{A}$，不同于其他所有引理。从某种意义上说，这是必要的，因为蝴蝶结图中的三角形无法通过树定义得到适当扩展，这一点是可以证明的。

Lemma 31. *If $i \neq j$, then $V_j^{\leftrightarrow} \supseteq V_i$.*

引理 32. 每个 V_i 都是非空的。

证明。 某个 V_i 必须是非空的，否则 $U_i^{\leftrightarrow} = U_{i-1} \cup U_{i+1}$对于每个 i，于是 $U_1^{\leftrightarrow\leftrightarrow} = U_1 \cup U_2 \cup U_3$是 U 的一个真树可定义子集，且包含一个三角形，这与 引理 28矛盾。根据 引理 31， V_i 中的每个顶点在 V_j 中都有一个邻点，对任意 $j \neq i$均如此；特别地， V_j 是非空的。 □

虽然每个 U_i 都是独立的，但我们现在观察到， V_i截然不同。

引理 33. $v \in V_i$ 和 $u \in U_i$ 的每个公共邻点都属于 V_i。特别地，每个 $v \in V_i$ 在 V_i中都有一个邻点。

证明。 该公共邻点属于 $U_i^{\leftrightarrow} = U_{i-1} \cup U_{i+1} \cup V_i$。但是 V_i 与 $U_{i-1} \cup U_{i+1}$之间没有边。第二部分由引理 29得出。 □

我们已经拥有扩展该构型所需的全部结构信息。根据 引理 32，存在一个顶点 $v_1 \in V_1$。我们固定这样一个顶点，并归纳定义

$$W = \{v_1\}^{\leftrightarrow} \cap U_1^{\leftrightarrow},\ S_0 := W^{\leftrightarrow} \cap U_0^{\leftrightarrow},\ S_{n+1} := S_n^{\leftrightarrow} \cap U_0^{\leftrightarrow}$$

对于 $n = 1$、2、.....。我们将证明，对于足够大的偶数 n，(U_0, S_n, S_{n+1}) 是一个适当地扩展 (U_0, U_1, U_2) 的强配置。首先注意到，每个 S_n 都是树可定义的，接下来讨论一些更有趣的事实。

引理 34。以下包含关系成立。

$$U_1 \subsetneq S_0 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S_{2n} \subseteq \cdots \subseteq U_1 \cup V_0$$
$$U_2 \subsetneq S_1 \subseteq S_3 \subseteq \cdots \subseteq S_{2n+1} \subseteq \cdots \subseteq U_2 \cup V_0$$

证明。 我们首先证明 $U_1 \subsetneq S_0 \subseteq U_1 \cup V_0$：中的每个顶点 W 都与 $v_1 \in V_1$ 以及 U_1中的一个顶点相邻，因此根据 引理 33，它必属于 V_1。由于 $U_0^{\leftrightarrow} = U_1 \cup U_2 \cup V_0$ 与 U_2 之间没有边，且 V_1，我们得到 $S_0 \subseteq U_1 \cup V_0$。

根据引理 29， v_1 和每个 $u_1 \in U_1$ 都有一个公共邻点，它属于 W，因此 $u_1 \in W^{\leftrightarrow}$。由于$u_1 \in U_0^{\leftrightarrow}$，我们已证明 $U_1 \subseteq S_0$。此外，这个包含关系是严格的，因为 $W \subseteq V_1$ 中的每个顶点在 V_0 中都有一个邻点，这是由引理 31得出的；该邻点属于 S_0。

通过归纳法即可完成证明：例如，对于偶数 n， $S_{n+1} \subseteq S_n^{\leftrightarrow} \cap U_0^{\leftrightarrow} \subseteq (U_1 \cup V_0)^{\leftrightarrow} \cap U_0^{\leftrightarrow} \subseteq U_2 \cup V_0$，并且 S_n 中的每个顶点在 S_{n+1} 中都有一个邻点（对中的顶点使用引理 33 ）V_0），因此 $S_n \subseteq S_{n+2}$。 □

引理 35。每个 S_n 都是独立的。

证明。 我们知道 $S_n \subseteq U_i \cup V$ （其中 $i \in \{1, 2\}$）根据 引理 34， U_i 是独立的，并且存在 V_0 与 U_i之间没有边。因此，只需验证 $S_n \cap V_0$中没有边。反设 v、 v' 相邻且 $\{v, v'\} \subseteq S_n \cap V_0$；显然 $\{v, v'\} \subseteq S_{n+1} \cap V_0$。一方面， $(S_n \cap S_{n+1})^{\leftrightarrow}$根据 引理 29 包含一个三角形。另一方面， $S_n \cap S_{n+1} \subseteq V_0$，因此 $(S_n \cap S_{n+1})^{\leftrightarrow} \cap U_1 = \emptyset$，这与 引理 28矛盾。 □

引理 34 表明，三元组 (U_0, S_n, S_{n+1}) 严格扩展了 (U_0, U_1, U_2) ，对任意偶数 n均成立。因此，下一个引理完成证明。

引理 36. 对于每个充分大的偶数 n， 三元组 (U_0, S_n, S_{n+1}) 都是一个强配置。

证明。我们已经注意到，每个 S_n 都可以由树定义，因此条件 (a) 成立。

由引理 34 中的包含关系可知，对于每个充分大的 n， $S_n = S_{n+2}$。取这样一个偶数 n。根据引理 35， S_n 和 S_{n+1} 独立，因此条件 (b) 成立。至于条件 (c) 中的包含关系，根据定义， $U_0^{\leftrightarrow}$ 同时包含 S_n 和 S_{n+1} ； $S_n^{\leftrightarrow}$ 包含 U_0 （因为根据引理 34，它包含 $U_1^{\leftrightarrow}$） ，并且根据 S_{n+1} 的定义，包含 S_{n+1} ；而 $S_{n+1}^{\leftrightarrow}$ 包含 U_0 和 S_{n+2}，后者等于 S_n。剩下的连通性条件 (d) 也很简单： $\mathfrak{U}_{U_0 \cup S_n}$ 是连通的，因为 S_n 的每个顶点都与 U_0 的一个顶点相邻（根据定义， $U_0^{\leftrightarrow} \supseteq S_n$） ， S_n 包含 U_1，且 $\mathfrak{U}_{U_0 \cup U_1}$ 是连通的。理由类似， $\mathfrak{U}_{U_0 \cup S_{n+1}}$ 也连通，证明完毕。 □

C. 最弱的伪自环条件

VI. 没有伪 WNU 多态的可数范畴结构

在本节中，我们构造一个 ω-范畴的模型完备核结构 $\mathfrak{A}$ ，它不通过带参数的 pp-解释 K_3 ，并且其多态克隆不包含任何具有任意元数的伪 WNU 运算。这为 [7, 问题 14.2.6（21）]提供了一个反例。事实上，我们证明以下更强的结果：设 Σ 为一个平衡小条件，设 $\bigvee_{i \in \omega} \Delta_i$ 为一个弱等式条件，即等式条件的析取 Δ_i。我们证明，如果对于每个固定的 $i \in \omega$，在有限幂等多态克隆上，满足 Σ 并不蕴含满足 Δ_i ，那么存在一个 ω-范畴的模型完备核结构 $\mathfrak{A}$ ，使得 Pol($\mathfrak{A}$)满足 $\overline{\Sigma}$ ，同时不满足任何Δ_i；也就是说，Pol($\mathfrak{A}$)不满足这些 Δ_i的析取，即使这一析取在有限幂等多态克隆上很可能由 Σ 蕴含。

此外，轨道增长，即随着 n 增大，n-轨道数量的增长，可以小于双指数级。[27], [28] 证明了，如果 $\mathfrak{A}$ 是一个轨道增长小于 2^{2^n} 的 ω-分类模型完备核，那么当且仅当存在 A 的一个有限子集，使得 Pol($\mathfrak{A}$) 不满足任何非平凡次条件时， $\mathfrak{A}$ 才能通过参数 pp-解释 K_3。因此，我们的结构

在定理4 局部具有满足非平凡次条件的多态函数，同时仍然不具有伪 WNU 多态。

我们现在定义一些从模型论中借用的基本概念。若对每个有限集合 $B \subseteq A$ 以及每个嵌入 $f\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$，其中 $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ 是由 $\mathfrak{A}$ 在 B上诱导的结构$\mathfrak{B}$，都存在一个自同构 α，使得 $\alpha|_B = f$，则称结构 $\mathfrak{A}$ 是齐次的。齐性结构由其有限子结构组成的类唯一确定，该类称为它们的年龄。此外，Fra¨ıss´e 的一项经典结果指出，一个可数的有限关系结构类 $\mathcal{C}$ 是某个齐次结构 $\mathfrak{C}$ 的年龄，当且仅当 $\mathcal{C}$ 在取子结构时封闭，并满足所谓的 amalgamation 性质：对于所有结构 $\mathfrak{B}$、$\mathfrak{C}_1$、$\mathfrak{C}_2 \in \mathcal{C}$以及所有嵌入$f_i\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}_i$，都存在一个结构 $\mathfrak{D} \in \mathcal{C}$ 和嵌入$e_i\colon \mathfrak{C}_i \to \mathfrak{D}$，使得 $e_1 \circ f_1 = e_2 \circ f_2$。结构 $\mathfrak{C}$ 称为 $\mathcal{C}$的 Fra¨ıss´e 极限。如果嵌入 e_1、e_2总能选取得满足 $e_1(C_1) \cap e_2(C_2) = e_1(f_1(B))$，那么我们称 $\mathcal{C}$ 具有强 amalgamation 性质（SAP）。

固定一个论域为 $\{1,\dots,n\}$ 的有限关系结构 $\mathfrak{A}$，并令 $k \geq 2$。对于任意集合 B，令 $[B]^k$ 为由元组 $(b_1,\dots,b_k) \in B^k$ 组成的集合，其中各项两两不同。令 σ 为一个关系签名，其中对 $\mathfrak{A}$ 的每个元数为 r 的关系 R，都包含一个元数为 kr 的符号 R^k；此外还包含一个元数为 $2k$ 的符号 $\sim$，以及元数为 k 的符号 $P_1,\dots,P_n$。令 $\mathcal{C}(\mathfrak{A},k)$ 表示满足以下条件的 σ-结构 $\mathfrak{B}$ 的所有有限子结构组成的类：

- $\sim$ 是 $[B]^k$ 上的等价关系，其 n 个等价类为 $P_1,\dots,P_n$；
- 将 P_i 与 i 等同，并将每个 $x \in [B]^k$ 的 x 的等价类记为 $[x]_\sim$。我们有：对于 $\mathfrak{A}$ 的任意关系 R，设其元数为 r；对于任意 $b^1,\dots,b^r \in B^k$，当且仅当 $b^1,\dots,b^r \in [B]^k$ 且 $([b^1]_\sim,\dots,[b^r]_\sim) \in R$ 时，$(b^1,\dots,b^r) \in R^k$。

注意，$\mathcal{C}(\mathfrak{A},k)$中的任意结构都由$P_1,\dots,P_n$唯一确定。可以看出，$\mathcal{C}(\mathfrak{A},k)$非空且具有 SAP，因此其 Fra¨ıss´e 极限 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$ 是一个没有代数性的齐次结构。注意，与 $\sim$ 对应的因子映射是 $\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$ 中的一个原始正解释（与下文中常做的一样，将 P_i 与 i视为相同）；这里，我们利用了 $\neq$ 在 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$ 中是 pp-可定义的，因为它是$\sim$的一个投影，因此该因子映射的论域在 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$中是 pp-可定义的。此外，若 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$ 中的两个 m元组 a、b 在其分量之间满足相同的等式，并且对于 a、b到相同 k 个坐标上的所有单射投影 a'、b'，都有 $[a']_\sim = [b']_\sim$，则 a 和b 在自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}^{\otimes k})$ 对k元组的作用下属于同一轨道。特别地，$\mathfrak{A}^{\otimes k}$ 是 ω-范畴的。以下命题的证明见附录 E。

命题 37. 如果 $\mathfrak{A}$ 是一个核，那么 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$ 是一个模型完备核。

命题 38. 设 Σ 是一个平衡小条件，并且 $\mathfrak{A}$ 中的幂等运算满足该条件。那么 $\mathrm{Pol}(\mathfrak{A}^{\otimes k})$ 包含满足 $\overline{\Sigma}$ 的单射函数。

证明. 如前所述，设 $\{1,\dots,n\}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的论域，设 B 是 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$ 的论域，并且对于所有 $i \in \{1,\dots,n\}$，将 $\sim$ 的每个等价类 P_i 与 i 视为同一对象。对于出现在 Σ 中的每个符号 s，我们设 $C_s := B^r$，其中 r 是 s 的元数。我们还使用 s 表示 $\mathrm{Pol}(\mathfrak{A})$ 中的一个幂等运算，它见证了 $\mathrm{Pol}(\mathfrak{A})$ 满足 Σ 这一事实。我们的目标是为 C_s 的每个元素在 B 中指定一个值，从而得到一个函数 $s'\colon B^r \to B$；这样得到的函数连同新一元符号的嵌入，将见证 $\overline{\Sigma}$ 的满足性。

为此，我们先定义一个部分映射 $q_s\colon [C_s]^k \to \{1,\dots,n\}$，方法是：对于任意一组两两不同的元组 $c^1,\dots,c^k \in C_s = B^r$，只要元组 $(c^1_i,\dots,c^k_i)$ 对所有 $i \in \{1,\dots,r\}$ 都是单射的，

$$q_s(c^1,\dots,c^k) := s([(c^1_1,\dots,c^k_1)]_\sim,\dots,[(c^1_r,\dots,c^k_r)]_\sim).$$

接着，我们将 q_s 延拓为 $[C_s]^k$ 上的一个全函数，并将其在其他位置的取值设为 1。将其核的各类与集合 $\{1,\dots,n\}$ 中的元素对应起来，可以看出 q_s 在 C_s 上诱导出一个结构 $\mathfrak{C}_s$，其有限子结构属于 $\mathcal{C}(\mathfrak{A},k)$。由于 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$ 是 ω-范畴的，我们得到存在一个嵌入 $s'\colon \mathfrak{C}_s \to \mathfrak{A}^{\otimes k}$。由于 s 是 $\mathfrak{A}$ 的一个幂等多态，$B^r = C_s$ 上的恒等映射是从 $(\mathfrak{A}^{\otimes k})^r$ 到 $\mathfrak{C}_s$ 的同态。因此，将 s' 看作一个嵌入与该恒等映射的复合，它是 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$ 的一个多态；此外，它还是单射。

设 s,t 是出现在 Σ 中、元数分别为 r_s,r_t 的符号，并设 $\sigma\colon [r_s] \to [r]$ 和 $\tau\colon [r_t] \to [r]$，其中 $r \geq 1$。我们证明，若 $s^\sigma \approx t^\tau$ 是 Σ 中的一个恒等式，则对于某些 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$ 的嵌入 u,v，有 $u \circ s'^\sigma = v \circ t'^\tau$ 成立。设 $m \geq k$，并令 $b_1,\dots,b_r$ 为 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$ 中元素构成的 m 元组。注意，由于 Σ 是平衡的，且 s' 和 t' 均为单射，m 元组 $(s')^\sigma(b_1,\dots,b_r)$ 与 $(t')^\tau(b_1,\dots,b_r)$ 满足相同的等式。设 $i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,m\}$ 两两不同，并令 c_j 为将 b_j 投影到 $i_1,\dots,i_k$ 所得到的 k 元组，其中 $j \in \{1,\dots,r\}$ 任意。我们断言，若 $(s')^\sigma(c_1,\dots,c_r)$ 是单射，则 $(s')^\sigma(c_1,\dots,c_r)$ 与 $(t')^\tau(c_1,\dots,c_r)$ 属于同一个 $\sim$ 类。若确实如此，根据 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$ 的定义及其齐性，$(s')^\sigma(b_1,\dots,b_r)$ 与 $(t')^\tau(b_1,\dots,b_r)$ 在 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}^{\otimes k})$ 的作用下属于同一轨道。鉴于此，且 $m \geq k$ 是任意的，标准的紧致性论证（例如参见 [29，引理 3]）可得存在 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$ 的嵌入 u,v，满足 $u \circ (s')^\sigma = v \circ (t')^\tau$。这证明了 $\overline{\Sigma}$ 在 $\mathrm{Pol}(\mathfrak{A}^{\otimes k})$ 中可满足。

对于尚待证明的断言，令 q_s,q_t 如 s,t中 s',t' 的定义所述。注意，根据 q_s 的定义，只要元组 $c_1,\dots,c_r$ 中至少有一个不是单射，就有 $q_s(c_{\sigma(1)},\dots,c_{\sigma(r_s)})$ 等于 1；对于 t 和 τ，类似结论也成立。另一方面，如果 $c_1,\dots,c_r$ 全都是单射，那么 $q_s(c_{\sigma(1)},\dots,c_{\sigma(r_s)})$ 等于 $s([(c^1_{\sigma(1)},\dots,c^k_{\sigma(1)})]_\sim,\dots,[(c^1_{\sigma(r_s)}\cdots,c^k_{\sigma(r_s)})]_\sim)$，也就是 $s^\sigma([(c^1_1,\dots,c^k_1)]_\sim,\dots,[(c^1_r,\dots,c^k_r)]_\sim)$。根据 Σ 中的恒等式，这又等于 $t^\tau([(c^1_1,\dots,c^k_1)]_\sim,\dots,[(c^1_r,\dots,c^k_r)]_\sim)$。用 t 和 τ 重复同样的论证，可知 $q_s(c_{\sigma(1)},\dots,c_{\sigma(r_s)})$ 与 $q_t(c_{\tau(1)},\dots,c_{\tau(r_t)})$ 相等，这与非单射的情形相同。但 s',t' 保持 $\sim$-类，因此可得 $\sim$-类 $s'(c_{\sigma(1)},\dots,c_{\sigma(r_s)})$

以及 $t'(c_{\tau(1)},\dots,c_{\tau(r_t)})$ 相同。由于 $(s')^\sigma(c_1,\dots,c_r) = s'(c_{\sigma(1)},\dots,c_{\sigma(r_s)})$，且对于 t 和 τ，类似结论也成立，因此断言得证。□

设 $(\mathfrak{A}_i)_{i\in\omega}$ 是一个结构序列，$(k_i)_{i\in\omega}$ 是一个正自然数序列。设 σ_i 是构造 $\mathcal{C}(\mathfrak{A}_i,k_i)$ 时使用的签名，并且不失一般性地假设各签名 $(\sigma_i)_{i\in\omega}$ 两两不相交。类 $\mathcal{C}(\mathfrak{A}_i,k_i)$ 的叠加是签名 $\bigcup\sigma_i$ 下所有满足以下条件的结构$\mathfrak{B}$ 所成的类：对于所有 $i\in\omega$，其 σ_i-约化结构属于 $\mathcal{C}(\mathfrak{A}_i,k_i)$。一个标准结论是，具有 SAP 的类的叠加本身也具有 SAP。对命题 38 的证明作直接修改可知，类 $\mathcal{C}(\mathfrak{A}_i,k_i)$ 的叠加的 Fra¨ıss´e 极限也具有满足 $\overline{\Sigma}$ 的单射多态函数。为方便读者，证明见附录 E。

命题 39. 设 $(\mathfrak{A}_i)_{i\in\omega}$ 是一个结构序列，其中每个结构都具有满足 Σ 的幂等多态。设 $(k_i)_{i\in\omega}$ 是一个正自然数序列。所有类 $\mathcal{C}(\mathfrak{A}_i,k_i)$ 叠加后的 Fra¨ıss´e 极限具有满足 $\overline{\Sigma}$ 的单射多态函数。

定理 40. 设 Σ 是一个平衡小条件，$\bigvee_{i\in\omega}\Delta_i$ 是一个弱等式条件，并且对于每个 $i\in\omega$，都存在一个满足 Σ 但不满足 Δ_i 的有限幂等多态函数克隆。那么存在一个具有小轨道增长的 ω-范畴齐次模型完备核结构 $\mathfrak{A}$，使得 Pol($\mathfrak{A}$) 满足 $\overline{\Sigma}$，且对任何 $i\in\omega$ 都不满足 Δ_i。

证明. 设 $(\mathfrak{A}_i)_{i\in\omega}$ 是一个有限结构序列，使得 Pol($\mathfrak{A}_i$) 是一个满足 Σ 但不满足 Δ_i 的有限幂等克隆。设 $k\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一个增长得足够快的函数。设 $\mathfrak{A}$ 是所有类 $\mathcal{C}(\mathfrak{A}_i,k(i))$ 叠加后的 Fra¨ıss´e 极限。那么 $\mathfrak{A}$ 是 ω-范畴的，甚至具有小轨道增长（参见 [21]，或 [30] 中的引理 5.6）。根据定义，它是齐次的；并且如命题 37 所示，它是模型完备核，因为每个叠加类的 Fra¨ıss´e 极限都是模型完备核。根据命题 38 和命题 39，$\mathfrak{A}$ 满足 $\overline{\Sigma}$。

现在，对于任意 $i\in\omega$，由于 Pol($\mathfrak{A}$) pp-解释了 $\mathfrak{A}_i$，我们可以借助 [31] 得出结论：Pol($\mathfrak{A}$) 不满足 Δ_i。□

定理 4 的证明*Theorem 4*。对于任意固定的 $n\geq 3$，规定存在一个 n 元伪 WNU 函数的恒等式集合，并不能由有限幂等多态克隆中包含一个伪 Siggers 函数这一子条件所蕴含。应用 $\mathfrak{A}$ 定理 40 得到的结构无法带参数 pp-解释 K_3，因为其多态函数满足的伪 Siggers 恒等式阻止了这种解释 [9]；这里我们利用了它是一个模型完备核这一事实。

该例可以通过使用来自 [32], [33] 的 Hrushovski 编码而具有有限签名：该编码是一个结构 $\mathfrak{B}$，具有有限关系签名，使得 Pol($\mathfrak{B}$) 满足 Pol($\mathfrak{A}$) 中由单射 [32，满足的任意子条件的每个伪变体，见命题3.16]，尤其是伪 Siggers 条件。另一方面，根据命题 3.13]，结合 [31]，，存在 $\mathfrak{B}$ 中对 $\mathfrak{A}$ 的原始正解释 [32，，这导致 Pol($\mathfrak{B}$) 中不存在伪 WNU 运算。结构 $\mathfrak{B}$ 仍具有缓慢轨道增长，见命题 3.12]。由于结构 $\mathfrak{A}$ 是一个齐次模型完备核，其编码 $\mathfrak{B}$ 也可以构造为模型完备核：其本身的齐次性 $\mathfrak{A}$ 无需为编码而进行齐次化，并且编码中使用的新关系可以通过加入其补关系的关系来扩充（ [32，中关于 SAP 的证明，见引理 3.5]，仍然有效）。于是，$\mathfrak{B}$ 的所有自同态都是嵌入，而 $\mathfrak{B}$ 的解码膨胀是一个由 pp-可定义关系构成的齐次扩张；因此，$\mathfrak{B}$ 是一个模型完备核。因而，与编码之前的情况一样，它不可能通过带参数的 K_3 对 [9] 进行 pp-解释。这种情况对于按轨道扩张 $\mathfrak{B}$ 也不会改变，因为 $\mathfrak{B}$ 是一个模型完备核，并且所有轨道本来就是 pp-可定义的。通过将其关系（设为 R_1、.....、R_k）替换为 $R_1\times\cdots\times R_k$，还可以进一步将 $\mathfrak{B}$ 的签名缩减为单个关系，从而得到定理 4 中的超图。□

七、结论

最后，我们提出一些开放问题，这些问题与我们的目标有关，即进一步发展一种适用于无限结构的结构理论。

1）有向图：定理 1 和 定理 2 适用于有向图，但仅限有限情形。另一方面，定理 3适用于无限图，但因子图必须是对称的。一个令人期待的方向是将后一个定理推广到代数长度为 1 的非对称因子有向图。我们的结果表明，实现这一目标有三种途径：改进我们为有限定理提出的新型关系方法，进一步运用我们在 命题 26中采用的无限到有限的约化技巧；最后，从我们的证明中发展出一种替代性的代数方法。最后一种成果最为理想，因为在有限情形中极为强大的代数技巧（且在很大程度上受到非对称推广 [14] 的 [1]影响），在无限情形中仍相对薄弱。

2) 一个统一的恒等式：定理 9 表明，对于每个有限域，都存在一个恒等式，任何定义在该域上的核结构的多态克隆只要不能 pp-解释所有有限结构，就满足该恒等式。理想情况下，我们希望能找到一个适用于所有有限域、与域的大小无关的统一恒等式。这或许能为以下开放问题的肯定答案铺平道路：[9] 和 [11] 对于 $\mathfrak{A}$，不存在任何非平凡代数不变量是否意味着 K_3 [31]存在原始正解释。事实上，这或许能为 ω-范畴的模型完备核提供一个统一的代数不变量，以见证其无法通过原始正解释（不带参数！）解释一切。

3）伪 WNU：尽管定理 4中的否定性结果可能会让 Barto 和 Pinsker 的研究成果所激发的、关于[9] -范畴结构的多态克隆代数理论的希望落空，ω但对于更小的子类——有限有界齐性结构的一阶约化（人们曾猜想该子类具有 CSP 复杂性二分）——而言，并非一切希望都已破灭。该类中的所有复杂性分类

都显示出可处理情形中存在伪 WNU（例如参见 [7], [8] 其中对相关结果的最新综述），而且最近还为这些分类发展出了更为一般的代数方法 [16]。一个主要的开放问题是，这种情况是否能推广到整个类。

参考文献

[1] P. Hell 和 J. Ne˘set˘ril，“关于 H-着色的复杂性”，组合理论杂志，B 系列，第 48 卷，第 92–110 页，1990 年。[2] L. Barto、M. Kozik 和 T. Niven，“无源点且无汇点的有向图满足 CSP 二分性（对 Bang-Jensen 和 Hell 猜想的肯定回答）”，SIAM 计算杂志，第 38 卷，第 5 期，2009 年。[3] A. A. Bulatov，“3 元素集上约束满足问题的二分性定理”，ACM 杂志，第 53 卷，第 1 期，第 66–120 页，2006 年。[4] D. Zhuk，“CSP 二分性猜想的证明”，载于第 58 届 IEEE 计算机科学基础年会（FOCS 2017），美国加利福尼亚州伯克利，2017 年 10 月 15—17 日，2017 年，第 331–342 页，https://arxiv.org/abs/1704.01914。[5] L. Barto、J. Opr˘sal 和 M. Pinsker，“反射的奇境”，以色列数学杂志，第 223 卷，第 1 期，第 363–398 页，2018 年。[6] M. H. Siggers，“关于省略一元类型的簇的强 Mal’cev 条件”，普适代数，第 64 卷，第 1 期，第 15–20 页，2010 年。[7] M. Bodirsky，“无限域约束满足的复杂性”，2020 年，已提交至剑桥大学出版社 LNL 系列出版。[8] M. Pinsker，“无限域约束满足中的当前挑战：无限羊的困境”，载于 2022 年 IEEE 第 52 届国际多值逻辑研讨会（ISMVL）。美国加利福尼亚州洛斯阿拉米托斯：IEEE 计算机学会，2022 年，第 80–87 页。 [在线]。可访问：https://doi.ieeecomputersociety.org/10 1109 52857 2022 00019 。/ [9] ISMVL。L. Barto 和 M. Pinsker，“拓扑无关紧要”，SIAM 计算杂志，即将出版。预印本 arXiv:1602.04353v3；扩展摘要曾以《无限域约束满足问题的代数二分性猜想》为题，发表于 LICS’16 会议论文集。[10] A. A. Bulatov，“H-着色二分性再探”，理论计算机科学，第 349 卷，第 1 期，第 31–39 页，2005 年。[11] M. Bodirsky、M. Pinsker 和 A. Pongr´acz，“射影克隆同态”，2014 年，已被符号逻辑杂志接收，预印本 arXiv:1409.4601。[12] P. Gillibert、J. Jonu˘sas 和 M. Pinsker，“伪环条件”，伦敦数学学会通报，第 51 卷，第 5 期，第 917–936 页，2019 年。[13] M. Mar´oti 和 R. McKenzie，“弱对称运算的存在性定理”，普适代数，第 59 卷，第 3 期，2008 年。[14] L. Barto 和 M. Kozik，“吸收子代数、循环项与约束满足问题”，计算机科学中的逻辑方法，第 8/1 卷，第 07 期，第 1–26 页，2012 年。[15] D. Zhuk，“强子代数与约束满足问题”，CoRR，第 abs/2005.00593 卷，2020 年。 [在线]。可访问：https://arxiv.org/abs/2005 00593 。A. Mottet 和 M. Pinsker，“有限有界 [16] 齐性结构上的光滑逼近与 CSP”，载于 LICS 论文集，2022， [ ] 2011 *22*, 即将出版。在线。可访问：https://arxiv.org/abs/。03978 [17] M. Bodirsky，“可数范畴结构的核”，计算机科学中的逻辑方法（LMCS），第 3 卷，第 1 期，第 1–16 页，2007 年。[18] V. G. Bodnar˘cuk、L. A. Kalu˘znin、V. N. Kotov 和 B. A. Romov，“Post 代数的伽罗瓦理论，第一和第二部分”，控制论，第 5 卷，第 243–539 页，1969 年。[19] A. A. Bulatov、P. Jeavons 和 A. A. Krokhin，“约束满足的复杂性：一种代数方法（综述论文）”，载于《自动机、半群与普适代数的结构理论》（蒙特利尔，2003），北约科学系列 II：数学、物理与化学，第 207 卷，第 181–213 页，2005 年。[20] M. Bodirsky 和 J. Ne˘set˘ril，“具有可数齐性模板的约束满足”，逻辑与计算杂志，第 16 卷，第 3 期，第 359–373 页，2006 年。

[21] M. Bodirsky、A. Mottet、M. Ol˘s´ak、J. Opr˘sal、M. Pinsker 和 R. Willard，“拓扑具有相关性（在约束满足问题的无限域二分猜想中）”，载于《计算机科学逻辑研讨会论文集——LICS’19》，2019年。[22] I. G. Rosenberg，“¨多值逻辑中的函数完备性”，《捷克斯洛伐克科学院数学与自然科学系列论丛》，第80卷，第3–93页，1970年。[23] M. Pinsker，“Rosenberg对极大克隆的刻画”，学位论文，维也纳工业大学，2002年，arXiv:0211420。[24] R. W. Quackenbush，“Rosenberg原始代数刻画定理的新证明”，《János Bolyai数学学会论文集》，第28卷，第603–634页，1971年。[25] L. Barto 和 M. Kozik，“泛代数与约束满足问题中的吸收”，载于《约束满足问题：复杂性与可近似性》，Dagstuhl后续丛书，第7卷，2017年，第45–77页。[26] L. Barto、Z. Brady、A. Bulatov、M. Kozik 和 D. Zhuk，“作为约束满足问题三种代数方法共同框架的极小Taylor代数”，载于第36届年度ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会（LICS 2021），罗马，意大利，2021年6月29日至7月2日。IEEE，2021年，第1–13页。[27] L. Barto、M. Kompatscher、M. Ol˘s´ak、T. V. Pham 和 M. Pinsker，“无限域约束满足问题的两个二分猜想的等价性”，载于第32届年度ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会论文集——LICS’17，2017年，预印本 arXiv:1612.07551。[28] ——，“寡形克隆中的方程与ω-范畴结构的约束满足问题”，《数学逻辑杂志》，第19卷，第2期，文章编号#1950010，2019年；扩展摘要曾发表于第32届年度ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会论文集——LICS’17。[29] M. Bodirsky 和 M. Pinsker，“典范函数：通过拓扑动力系统给出的证明”，《齐性结构：纪念Norbert Sauer七十华诞研讨会》，《离散数学贡献》，第16卷，第2期，第36–45页，2021年。[30] M. Bodirsky、A. Mottet、M. Ol˘s´ak、J. Opr˘sal、M. Pinsker 和 R. Willard，“避开高度1恒等式的ω-范畴结构”，《美国数学会汇刊》，第374卷，第327–350页，2021年。[31] M. Bodirsky 和 M. Pinsker，“拓扑Birkhoff定理”，《美国数学会汇刊》，第367卷，第2527–2549页，2015年。[32] P. Gillibert、J. Jonusas、M. Kompatscher、A. Mottet 和 M. Pinsker，“当对称性不足以解决问题时：困难约束满足问题的层级”，《SIAM计算杂志》，第 51, 2, 175 213, 卷，期，2022 [ ] 10 1137 20 页码–。在线。可访问：https://doi.org/。/ m 1383471 [33] P. Gillibert、J. Jonu˘sas、M. Kompatscher、A. Mottet 和 M. Pinsker，“Hrushovski编码与ω-范畴约束满足问题怪兽”，载于第47届自动机、语言与编程国际研讨会（ICALP 2020），2020年7月8日至11日，德国萨尔布吕肯（线上会议），LIPIcs丛书，第168卷。Schloss Dagstuhl - Leibniz信息学中心，2020年，第131:1–131:17页。

附录 A 若干辅助结果

A. 命题 5的证明（第二节）

命题 5。设 $\mathfrak{A}$ 是一个有限核结构，其中包含针对某个 $B \subseteq A$ 上的真等价关系 α 的 OR(α, α)。则 $\mathfrak{A}$ 对每个有限结构都作 pp-解释。

证明。注意， α 和 B 都可以分别通过 OR(α, α)(x, y, x, y) 和 $\alpha(x, x)$从 $\mathfrak{A}$进行 pp-定义。因此， B 上的因子映射给出了论域 $C = A/\alpha$ 中关系 OR($=_C, =_C$) 的一个（一维）原始正解释。由于 $\mathfrak{A}$ 是一个核，同一个映射甚至可以在论域 C 上 pp-解释一个包含 OR($=_C, =_C$) 的结构$\mathfrak{C}$，且 $\mathfrak{C}$ 是一个核。注意，由于 α 是本原的， C 至少有两个元素。

我们声称， $\mathfrak{C}$ 的每个多态都恰好依赖于一个坐标。首先注意，由于 $\mathfrak{C}$ 是一个核，每个多态都至少依赖于一个坐标。任何保持关系 OR($=_C, =_C$) 的函数至多依赖于一个变量，这一点众所周知，例如[7, 引理 6.117]中就给出了证明；为方便读者，我们在此给出论证。令$n \geq 2$，并假设 f 是一个元数为 n 、保持 OR($=_C, =_C$)且依赖于两个不同坐标的函数，不妨设为前两个坐标。于是存在元素 $a'_1, a_1, \ldots, a_n \in C$和 $b'_2, b_1, \ldots, b_n \in C$，使得 $a' = f(a'_1, a_2, \ldots, a_n) \neq f(a_1, \ldots, a_n) = a$，并且使得 $b = f(b_1, \ldots, b_n) \neq f(b_1, b'_2, b_3, \ldots, b_n) = b'$。显然，对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，都有$(a_i, a'_i, b_i, b'_i) \in$ OR($=_C, =_C$)；然而$(a, a', b, b') \notin$ OR($=_C, =_C$)，矛盾。

如果 $\mathfrak{D}$ 是任意有限结构，那么将 $\mathfrak{C}$ 的每个多态 f 映射为同元数、投影到 D 上且对应于 f 所依赖的唯一坐标的映射，是一个克隆同态。因此， $\mathfrak{C}$ pp-解释 $\mathfrak{D}$，从而 $\mathfrak{A}$ 也如此。 □

B. 引理 6 的证明（出自第三节）

引理 6。设 $\mathfrak{A} = (A; \to)$ 是一个有向图， $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$，且 S 是 A 上的一个关系。设 $\to' = \to + g$。如果 $\to'_{01}$ 带参数 rpp-定义了 0-秩 S，那么 $\to$ 带参数 pp-定义 S。

我们转而证明一个更一般的版本。

引理 41。设 $\mathfrak{A} = (A; \to)$ 是一个有向图， $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$， $\mathcal{R}$ 是 A 上的关系集合，且 S 是 A 上的一个关系。设 $\to' = \to + g$。如果 $\to'_{01}$ 和来自 $\mathcal{R}$ 的 0 秩关系 rpp-定义了 0-秩 S，那么 $\to$ 和 $\{g^i(R)\colon\ R \in \mathcal{R}, i \in \mathbb{Z}\}$ pp-定义 S。

证明。设 $\phi'(x_1, \ldots, x_n)$ 是关于$\to'_{01}$且使用来自 $\mathcal{R}$ 的 0 秩关系的 0-秩 rpp-公式，它定义了 S。设 r 为 ϕ'的排序。对于每个带有$R' \in \mathcal{R}$ 的合取项 $R'(x_1, \ldots, x_k)$，我们将其替换为 $R(x_1, \ldots, x_k)$，其中 $R = g^{-r(x_1)}(R')$（注意，由于 $\mathcal{R}$ 中的关系都是 0 秩的，因此$r(x_1) = \cdots = r(x_k)$），并断言这个新公式 ϕ 是$\mathfrak{A}$中 S 的 pp-定义。

假设 $\phi'(a_1, \ldots, a_n)$。考虑 ϕ' 中所有变量的一个见证赋值，并对其应用有秩映射 $(g^{-i})_{i \in \mathbb{Z}}$。所得的 ϕ 中变量赋值满足（在 $\mathfrak{A}$）每个涉及 $\to$ 的合取项，因为 $(g^{-i})_{i \in \mathbb{Z}}$ 是从 $(A; \to'_{01})$ 到 $(A; \to_{01})$ 的有秩同态；根据 ϕ 的定义，它也满足其他每个合取项。因此，这是 ϕ' 的一个有效赋值，由此可得 $\phi(g^{-r(x_1)}(a_1) \ldots, g^{-r(x_n)}(a_n))$。但是 $r(x_1) = \cdots = r(x_n) = 0$，所以 $\phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$。

反向蕴含 $\phi(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \phi'(a_1, \ldots, a_n)$ 可用从 $(A; \to_{01})$ 到 $(A; \to'_{01})$ 的带秩同态 $(g^i)_{i \in \mathbb{Z}}$， 以类似方式证明。

□

附录 B 第三节中缺失的证明第三节

A. 有限非幂等克隆的恒等式

定理 9. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个有限核结构，并且 m 大于或等于 Aut($\mathfrak{A}$) 的元素个数。那么以下条件等价：

- $\mathfrak{A}$ 不能 pp-解释所有有限结构；换言之， $\mathfrak{A}$ 有满足某个非平凡恒等式系统的多态函数，
- Pol($\mathfrak{A}$) 满足

$$h(\alpha_1(x), \ldots, \alpha_m(x), x, y, x, z, y, z) \approx$$
$$h(\ y\ , \ldots, \ y\ , y, x, z, x, z, y).$$

证明. 由于该恒等式是非平凡的（它不被 K_3 的幂等多态函数——投影——满足），因此向上的蕴含显然成立。

对于反方向，我们假设 $\mathfrak{A}$ 不能 pp-解释某个有限结构。令 M 为 A^{A^3} 中由 Pol($\mathfrak{A}$) 的所有三元元素组成的子集；注意，三个投影 π^3_1、π^3_2、π^3_3 属于 M，并且 Pol($\mathfrak{A}$) 在 M 上自然地（逐坐标地）作用。克隆的一元部分是一个群（因为 $\mathfrak{A}$ 是核），并且作为 Pol($\mathfrak{A}$) 的一部分，它也在 M 上逐坐标地作用。令 $\mathcal{G}$ 为该作用在 M 的变换群中的像。

接下来，我们在 M 上定义一个有向图 $\to$ ：对所有 $i \neq j$，添加 $\pi^3_i \to \pi^3_j$；然后，对于 Pol($\mathfrak{A}$) 中的每个一元α，添加 $\alpha(\pi^3_1) \to \pi^3_2$；最后，在 Pol($\mathfrak{A}$) 对来自 M 的元素有序对的作用下，将关系 $\to$ 闭包化。

我们计划将定理 8应用于$(M, \to)$ 和 $\mathcal{G}$，但需要先验证这些假设。有向图$(M, \to)$ 是光滑的，因为它包含了在 PolPol($\mathfrak{A}$) 作用下，将三条投影上的三角形闭包化后得到的图；而这个图根据构造是光滑的。显然，群 $\mathcal{G}$ 由$(M, \to)$的自同构组成。最后，为了证明该有向图是连通的，我们从任意一个 $f \in M$开始。注意到 $f = f(\pi^3_1, \pi^3_2, \pi^3_3)$，并且有

$$f(\pi^3_1, \pi^3_2, \pi^3_3) \to f(\pi^3_2, \pi^3_3, \pi^3_2) \leftarrow f(\pi^3_1, \pi^3_1, \pi^3_1).$$

最后一个元素指向 π^3_2（这条边是生成元之一，因为 $f(\pi^3_1, \pi^3_1, \pi^3_1) = \alpha(\pi^3_1)$，其中 $\alpha \in \mathcal{G}$ 取适当值），最后 $\pi^3_1 \to \pi^3_2$。因此，每个元素都与 π^3_1 连通，整个有向图也是连通的；定理 8定理 8的假设成立。

定理 8 无法通过 OR(α, α)满足。事实上，在这种情况下，$(M, \to)$ 与 $\mathcal{G}$的轨道一起，通过 命题 5，将 pp-解释每个有限结构。由于 $\mathfrak{A}$ 是一个核，

$\mathfrak{A}$ 的自同构群的轨道在 $\mathfrak{A}$ 中是 pp-可定义的，因此 $\mathcal{G}$ 的轨道也同样是 pp-可定义的。综合这些结果，我们就能在 $\mathfrak{A}$ 中 pp-解释每个有限结构——这直接与我们的假设矛盾。

因此，定理 8 成立，因为 $(M, \to)$中有一个环，而该环是将 $\mathrm{Pol}(\mathfrak{A})$ 中的一个运算应用于 $(M, \to)$的生成元而得到的。这个运算（经过标准的表面调整后）满足我们定理陈述中的恒等式，证明至此完成。 □

B. 带有伪假设的伪环

定理 10. 设 $\mathfrak{A} = (A; \to)$ 是一个光滑有向图，且 $\mathcal{G}$ 是 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ 的一个子群。若 $\mathfrak{A}$ 的所有弱连通分支都是有限的，且 $\mathfrak{A}/\mathcal{G}$ 的代数长度为 1，则

- $\mathfrak{A}/\mathcal{G}$ 有一个环，或者
- $\to$ 对某个有限 $C \subseteq A$ 上的真等价关系 α，带参数 pp-定义 $\mathrm{OR}(\alpha, \alpha)$。

证明。设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathcal{G}$ 如陈述所述，并令 $\sim$ 为 $\mathcal{G}$ 的 1-轨道等价关系。我们假设 $\mathfrak{A}/\mathcal{G}$ 没有环，并旨在证明陈述中的第二项。

在 $\mathfrak{A}/\mathcal{G}$ 中取一个代数长度为 1 的闭游走：

$$[a_0]_\sim \ \epsilon_0 \ [a_1]_\sim \ \epsilon_1 \ \ldots \ \epsilon_{n-1} \ [a_n]_\sim, \quad [a_0]_\sim = [a_n]_\sim \ .$$

由于 $\to$ 在 $\mathcal{G}$ 下不变，可以选择代表元 a_i，使得在 $\mathfrak{A}$ 中我们有如下游走

$$a_0 \ \epsilon_0 \ a_1 \ \epsilon_1 \ \ldots \ \epsilon_{n-1} \ a_n, \quad a_0 \sim a_n \ ,$$

该游走不一定是闭的。选取 $g \in \mathcal{G}$ 使得 $g(a_n) = a_0$，并定义 $\to' = \to + g$ 和 $\mathfrak{A}' = (A; \to')$。令 D（分别为 D'）表示 $\mathfrak{A}$（分别为 $\mathfrak{A}'$）中包含 a_0 的弱连通分支。我们证明 $\mathfrak{A}'|_{D'}$ 是有限的，且代数长度为 1。

为证明 D' 是有限的，注意到根据假设，D 是有限的；而且 a_n 与 $\mathfrak{A}$ 属于同一弱连通分支，因为 $g(a_n) = a_0$。因此 D 在 g 下不变，由 $\to'$ 的定义可知，$D' \subseteq D$。

为证明代数长度为 1，我们取排序 $\to_{01}$，并将 $x_0 \ \epsilon_0 \ x_1 \ \ldots \ x_n$ 视为 $\to_{01}$ 上的分级公式。由于该游走的代数长度为 1，变量的排序 r 可以选择为使得 $r(x_0) = 0$ 且 $r(x_n) = 1$。将带秩同态 $(g^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 应用于上述游走，该同态将 $(A; \to_{01})$ 映射到 $(A; \to'_{01})$（已在引理 6中使用过），由此我们得到 $\mathfrak{A}'$ 中一条代数长度为 1 的游走，从 $g^{r(x_0)}(a_0) = a_0$ 到 $g^{r(x_n)}(a_n) = g(a_n) = a_0$，如所需。

现在 $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}'|_{D'}$ 是有限的、光滑的，k-连通的，存在某个 k（见II-B节最后一段），且没有环，因为在 $\mathfrak{A}'$ 中的环意味着 $a \to g^{-1}(a)$ 在 $\mathfrak{A}$ 中——即 $\mathfrak{A}/\mathcal{G}$中的一个环。此外，回顾第三节 A 可知，D' 可由 $\to_{01}$中的参数 rpp-定义。

如果 $k \to = (D')^2$, [14, 断言 3。11] 表明 $\to_{01}$ rpp-可定义带参数的真子集 D'，在该子集上 $\mathfrak{A}_0$具有一个代数长度为 1 的光滑弱连通分支。这样的连通分支，记作 D''，可由 $\to_{01}$中的参数 rpp-可定义。该有向图 $\mathfrak{A}'|_{D''}$ 是有限、光滑的，且 k-连通，并且不含环。我们用 $\mathfrak{B}$ 替换为这个严格更小的有向图，并继续。

另一方面，若 $k \to \neq (D')^2$, 我们将定理 7 应用于 $\mathfrak{B}$ 以及只包含恒等映射的平凡分级自同构群 $\mathcal{H}$，则 $\mathcal{H}$ 的投影的轨道可由单元素一元关系 pp-定义，因此定理表明，$\to_{01}$ 可通过参数 rpp- 定义以下对象之一：$D'' \subsetneq D'$，使得 $\mathfrak{A}'|_{D''}$ 仍然有限、光滑、k-连通（且没有环）；或者在 A的某个子集上，针对某个真等价关系 α，rpp-定义 0-秩 $\mathrm{OR}(\alpha, \alpha)$。在前一种情况下，我们将 $\mathfrak{B}$ 替换为 $\mathfrak{A}'|_{D''}$ 并继续。在后一种情况下，引理 6 完成证明。 □

附录 C：第 IV 节中遗漏的证明 第 IV 节

A. 得到 P-中心或 PQ-中心关系

本节旨在证明 引理 13和 引理 14。这两个证明都基于同一个构造。我们取一个定义在有限 $R \subseteq A^n$ 上的关系 A，并定义

$$R^{[k]}(x_1, \ldots, x_k) = \exists y \bigwedge_{1 \le i_1 < \ldots < i_{n-1} \le k} R(y, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}).$$

我们将陈述这些构造的若干性质，其证明显而易见，故略去。首先注意，如果 R 是全对称的，那么 $R^{[k]}$ 也是全对称的。

对于 $n = 2$，我们有以下性质。

- $R^{[k]}$ 是“有公共入邻点”。
- 如果 R 是连通的，那么 $R^{[2]}$也是。
- $R^{[k]}$ 是全对称的，
- 如果 R 是次直积，那么 $R^{[2]}$ 是自反的（对于元数为 2 的情况，这与全自反相同），
- 如果 $R^{[k]}$ 是全集，那么 $R^{[k+1]}$ 是全自反的。
- 对于 R的任意排序，$R^{[k]}$ 都由 R中的一个 0-秩公式定义。

如果 R 是任意元数 n的全自反关系，那么

- $R^{[n-1]} = A^{n-1}$,
- $R \subseteq R^{[n]}$（用元组的第一个分量作为y的见证），并且
- 如果 $R^{[k]} = A^k$，那么 $R^{[k+1]}$ 是全自反的。

引理 13. 每个次直积且连通但非中心的带秩关系都 rpp-定义一个真 0-秩 TSR 关系。此外，如果新关系是二元的，那么它也连通。

证明. 证明是直接应用上一小节中带有 $n = 2$ 的构造。设 R 是二元、次直积、连通但非中心的。我们找到最小的 $k \ge 2$，使得$R^{[k]} \neq A^k$，并取 $R^{[k]}$ 作为我们的 TSR 关系。根据上述性质，我们知道这确实是一个 TSR 关系，并且该 pp-公式是 0-秩的。此外，如果 $k = 2$，那么$R^{[2]}$ 是连通的。

我们需要证明，对于某个 k，有 $R^{[k]} \neq A^k$。事实上，$R^{[|A|]} \neq A^{|A|}$，否则我们将有 $(R^{[|A|]}$ $a_1, \ldots, a_{|A|} \in A$，，）（其中该元组列出了 的所有元素）。因此，所有顶点都有一个公共入邻点，而 R 是中心的，这就产生了矛盾。 □

引理 14. 每个元数至少为 3 的真 TSR 关系，以及每个元数为 2 的真链接 TSR 关系，都 pp-定义一个 P-中心或 PQ-中心的真 TSR 关系。

证明。设 R 是一个元数为 n 的真 TSR 关系；如果 $n = 2$，则它还具有连通性。为了证明该陈述，我们反复应用上一小节中的构造。在每一步中，如果 $R^{[n]} = R$，我们就停止。否则，我们找到最小的 $k \geq n$，使得 $R^{[k]} \neq A^k$；如果不存在这样的 k，我们就停止。在剩余情况下，我们用 $R^{[k]}$ 替换 R（因此 n 变为 k），然后重复此过程。

首先注意，起始的 R 是真 TSR 关系，因此每次替换后得到的新 R 也是如此。这由上一小节中构造的性质可知。

接下来要注意，这个过程必定会停止。确实，如果 $k = n$，那么我们至少会向关系中添加一个元组；否则，我们就会增加元数。由于 A 是有限的，过程必定会停止，因为 A 上任意元数为 $> |A|$ 的全自反关系都是全集。

假设过程在元数为 n 的 R 处停止。我们先考虑每个 $R^{[k]}$ 都是全集的情形。此时 $R^{[|A|]}$ 是全集，特别是包含枚举 A 中各元素的元组 $(a_1, \ldots, a_{|A|})$。该元组的见证（即 $R^{[k]}$ 的 pp-定义中的 y 的取值），记作 a，属于 R 的 P-中心，因此 R 是 P-中心的。事实上，只要对 $i \neq j$ 有 $a_i = a_j$，元组 $(a, a_1, \ldots, a_{n-1})$ 就属于 R，因为 R 是全自反的。如果所有 a_i 互不相同，该元组就属于 R，因为 a 是一个见证，而且 R 是全对称的。

在剩下的情形中，我们有 $R^{[n]} = R$。如果 $n = 2$，那么 R 是一个等价关系。但这是不可能的，因为原关系是连通且真包含的，并且迭代过程会一直保持这些性质，直到元数增加。

现在我们有 $n > 2$。我们证明 R 是 PQ-中心的。按照定义 12，令 α 由 R 定义。由于 R 是全对称的，α 是对称的；又由于 R 是全自反的，α 是自反的。剩下要证明 α 是传递的。取 (a, b)、$(b, c) \in \alpha$。我们将证明，对于任意 a_1、…、a_{n-2}，$(a, c, a_1, \ldots, a_{n-2}) \in R^{[n]}$；由于 $R^{[n]} = R$，这就完成了证明。我们令 y 的取值为 b。由全对称性，只需证明：如果将一个元素 $(a, c, a_1, \ldots, a_{n-2})$ 换成 b，所得元组属于 R。但这显然成立，因为所得元组总是同时包含 b 和 c，或同时包含 b 和 a，而 (a, b)、$(b, c) \in \alpha$。 □

B. 第二步，中心情形

引理 19. 一个非空 $C \subsetneq A$ 和 $\to_{01}$ rpp-定义一个非空的 $B \subsetneq A$，使得 $\mathfrak{A}|_B$ 是光滑的。

证明。我们首先注意到，对于任意 $B' \subseteq A$，都可以 rpp-定义最大的子集 $B \subseteq B'$，使得 $\mathfrak{A}|_B$ 是光滑的，即 B的光滑部分。事实上，B 由 B'中所有具有无限出向游走和无限入向游走的元素组成。由于 B' 是有限的，长度为 $|B'|$ 的游走就足够了，因此我们可以使用以下带自由变量 x的分级公式。

$$\exists x_1, \ldots, x_{|B'|}, x'_1, \ldots, x'_{|B'|}$$
$$B'(x) \wedge \bigwedge_i B'(x_i) \wedge \bigwedge_i B'(x'_i) \wedge$$
$$x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_{|B'|} \to x \to x'_1 \to \cdots \to x'_{|B'|}$$

因此，只需 rpp-定义一个光滑部分非空的真 B'。设 φ 是 $\to$ 中的一个分级公式，它为 $|A|$元有向图定义了 k-关联等价关系（回顾 II-B 节和 III-A 节）。由于 $\mathfrak{A}$ 是连通的，它等于 A^2。我们将变量命名为 x_0、……、x_n，使得 x_0 和 x_n 是自由变量，并且对每个 i，$x_i \to x_{i+1}$或 $x_{i+1} \to x_i$ 是一个合取项。令 ψ_i 为由 φ 得到的分级公式：只保留变量 x_0、x_1、……、x_i（删除其他合取项），令 x_i 为自由变量，并添加合取项 $C(x_0)$。令 C_i 为由 ψ_i定义的 A 的子集。显然，$C_0 = C$且 $C_n = A$。由此可知，对某个 i，$C_i^{\to} = C_{i+1} = A$ 或$C_i^{\leftarrow} = C_{i+1} = A$成立，而 C_i 是适当的。

我们令 $B' = C_i$，并注意到 B'的光滑部分非空。事实上，若 $(B')^{\to} = A$，则 B'中存在一条无限向后游走，这意味着 $\mathfrak{A}|_{B'}$中至少有一个有向环。该环的每个元素都在光滑部分中。注意到情形 $(B')^{\leftarrow} = A$ 与此类似，证明得证。 □

引理 20（第二步，中心情形）。设 R 是一个在 $\mathcal{H}$下不变的分秩中心关系。那么 R、O和 $\to_{01}$ rpp-定义

- $\emptyset \neq B \subsetneq A$，使得 $\mathfrak{A}|_B$ 是光滑且 k-连通的，或者
- 0-有秩 OR(T, T)，其中某个 T是真 TSR。

证明。设 C 是 R 的中心，且 ψ 是根据 B 定义 引理 19中的 rpp-公式，即 B 是 A 的真非空子集，且 $\mathfrak{A}|_B$ 是光滑的。我们假设 $\mathfrak{A}|_B$ 不是k-连通的；设 α 为 k上的 B-连通性等价关系。我们的目标是对真 TSR OR(T, T) 进行 rpp-定义 T。

取一个 0-秩 rpp-公式 φ，它有两个自由变量，并定义 k-连通关系。由于 $\mathfrak{A}$ 是连通的，它定义了A^2。令 φ' 由 φ 得到：对每个变量（即量化变量和自由变量），都添加合取项 $B(x)$。现在，φ' 表示“在限制于 B的范围内与 $\to$ k连通”，因此它是 α的一个 0-秩 pp-定义。

接下来，我们通过将 φ' 中的每个作用于量化变量 x 的合取项 $B(x)$替换为公式 $\psi(x)$，来定义 φ''。显然，公式 φ'' 仍然定义 α。另请注意，如果移除所有合取项 $C(x)$（它们都来自量化变量），那么原公式 φ' 中对量化变量的所有限制都会被去除（见引理前的注释），因此得到的公式定义了 B^2。

在 φ'' 中，我们逐个移除合取项 $C(x)$。某个时候，我们得到一个公式，其中有一个选定的量化变量x，它定义了一个严格大于 α 的 B^2 子集；但如果我们把合取项 $C(x)$加回来，它就会定义 α。令x 为自由变量，我们便得到一个三元关系 S 的 rpp-定义（使用 B、C、$\to_{01}$），使得

- $\exists x\ S(y, y', x)$ 是严格大于 α 的 B^2 子集，并且
- $\exists x\ S(y, y', x) \wedge C(x)$ 是 α。

如有必要，对排序 r 进行平移后，我们可以假设$r(1) = r(2) = 0$，而 $r(3)$可以不同。

其余推理与 引理 18中的做法有些相似。我们选择 a, $b \in B$ 使得:

- $(a,b) \notin \alpha$ 以及
- 存在 d 使得 $S(a,b,d)$，并且 $I = d + R$ 在为其他 $(a,b) \notin \alpha$ 和 d定义的类似集合中，按包含关系是极大的。

注意，由 S 的第二个性质可知，对于 (a,b)， $S(a,b,d)$ 要求 d 位于 C 之外。我们假设 $A = \{1,2,\dots,n\}$、 $a = 1$ 和 $b = 2$。

我们完全按照处理 PQ-中心时的做法来选择 k 和 T。数目 k 满足: A 的每个（$k-1$）元子集都包含于某个 $g \in \mathcal{G}$ 对应的 $g(I)$ 中; 并且 A 的某个 k 元子集不包含于任何 $g \in \mathcal{G}$ 对应的 $g(I)$ 中。我们的 T 将由满足以下条件的元组 $(c_1,\dots,c_k)$ 构成: 对于某个来自 $\mathcal{G}$ 的 g， $\{c_1,\dots,c_k\} \subseteq g(I)$。关系 T 是 TSR，且 $T \neq A^k$。

我们的 rpp-公式（其自由变量为 $x_1^1,\dots,x_k^1,x_1^2,\dots,x_k^2$）定义如下。

$$\exists y_0,y_1,y_2,X_1,X_2,z_1,\dots,z_n,z'_1,\dots,z'_n$$
$$y_0 = z_1 \wedge y_2 = z_2 \wedge O(z_1,\dots,z_n) \wedge O(z'_1,\dots,x'_n) \wedge$$
$$\bigwedge_{j=1}^{2} \left(S(y_{j-1},y_j,X_j) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} R(X_j,x_i^j) \wedge \bigwedge_{i\in I} R(X_j,z'_i)\right).$$

必要时对排序 r $= 0$ r $= r$ $= l$ r y_i $=$ l 进行平移，我们有 ( ) (z_i) and (x_i^j) (z'_i) （对于某个适当选取的 ）。

剩下的就是验证该公式有效。首先取 $(a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_k)$, 使得 $(a_1,\dots,a_k)$ 的所有项都属于 $g(I)$，其中某个 $g \in \mathcal{G}$ 满足这一点（ b_i' 的情形完全类似）。取满足 $g_l = g$ 的 $\{g_i\}_i \in \mathcal{H}$。

我们将 $y_0 \mapsto g_0(1)$, $y_1,y_2 \mapsto g_0(2)$, $X_1 \mapsto g_{r(X_1)}(d)$,$X_2$ 赋值为 d'，它是 C 的一个元素，且满足 $S(g_0(2)\ g_0(2)\ d')$。最后，我们计算 $z_i \mapsto g_0(i)$ 和 $z'_i \mapsto g_l(i)$。

前四个合取项根据构造即可成立。我们重点关注最后一个复杂的合取项。对于 $j = 2$，我们将 X_2 赋值为 d'，使得 S-合取项成立，并且 d' 位于 R 的中心，因此对于任意 b_i 以及 z'_i 的任意取值，整个合取项都成立。对于 $j = 1$，注意到 $S(1,2,d) \wedge R(d,i)$，因此 $S(g_0(1)\ g_0(2)\ f_{r(X_1)}(d)) \wedge R(g_{r(X_1)}(d)\ g_l(i))$ 对每个 $i \in I$ 都成立，故该合取项也成立。

对于反向蕴含，令 val 表示一个满足条件的变量赋值。定义 g_l: $i \mapsto z'_i$，并将其扩展到 $\{g_i\}_i \in \mathcal{H}$。将原赋值与 $\{g_i\}_i$ 的逆关系复合，可得到一个新的变量赋值: $\mathrm{val}'(x) = g_r^{-1}{}_x{}_{()}(\mathrm{val}(x))$。映射 val′ 满足公式中的所有合取项，此外，对于所有 $1 \le i \le n$， $\mathrm{val}'(z'_i) = i$。

注意，$(\mathrm{val}'(y_0),\mathrm{val}'(y_2)) \notin \alpha$。事实上，我们有$O(\mathrm{val}'(y_0),\mathrm{val}'(y_2),\mathrm{val}'(z_3)\dots,\mathrm{val}'(z_n))$，也就是说，存在一个 $\mathcal{G}$ 中的元素，使得 $1 \mapsto \mathrm{val}'(y_0)$ 且 $2 \mapsto \mathrm{val}'(y_2)$。该函数的逆关系也属于 $\mathcal{G}$，但这样一来，$(\mathrm{val}'(y_0),\mathrm{val}'(y_2)) \in \alpha$ 就会推出 $(1,2) \in \alpha$，而我们知道事实并非如此。

因此，当 j 等于 1 或 2 时，我们有 $(\mathrm{val}'(y_{j-1}),\mathrm{val}'(y_j)) \notin \alpha$，并且由于

$$S(\mathrm{val}'(y_{j-1}),\mathrm{val}'(y_j),\mathrm{val}'(X_j)) \wedge R(\mathrm{val}'(X_j),\mathrm{val}'(z'_i) = i)$$

对每个 $i \in I$ 都成立，因此我们得出

- $\mathrm{val}'(X_j)$ 不属于 C，且对于每个 $i \in \{1,\dots,k\}$，
- $\mathrm{val}'(x_i^j) \in I$，否则 $(\mathrm{val}'(y_{j-1}),\mathrm{val}'(y_j))$ 与 $\mathrm{val}'(X_j)$ 一起，将比 (a,b) 和 d 是更优的选择。

由于 $\mathrm{val}(x_i^j) = g_l(\mathrm{val}'(x_i^j))$，我们证明了第二个包含关系，引理得证。 □

C. 改进 OR

我们先证明21。证明基于以下辅助结果。

引理 42。设 R、S、R' 是满足以下条件的关系： R' 在 R 中有一个无等式原始正合取定义。那么 $\mathrm{OR}(R,S)$ pp-定义 $\mathrm{OR}(R',S)$。

证明。设 ϕ 是一个无等式公式，它从 R 定义 R'。为了得到 $\mathrm{OR}(R',S)$ 的 pp-定义，我们重写 ϕ。设 R 的元数为 n, R' 的元数为 n'， S 的元数为 k。我们从 ϕ 开始，然后

- 添加 k 个新的自由变量 y_i，并且
- 将每个 $R(z_1,\dots,z_n)$ 的出现替换为 $\mathrm{OR}(R,S)(z_1,\dots,z_n,y_1,\dots,y_k)$

设新公式定义关系 T。我们通过验证两个包含关系来证明 T =OR(R',S)。

如果 $T(a_1,\dots,a_{n'},b_1,\dots,b_k)$，则分两种情况。如果 $S(b_1,\dots,b_k)$，那么结论成立（因为较长的元组显然属于 $\mathrm{OR}(R,S)$）。另一方面，如果不属于，那么每次出现 $\mathrm{OR}(R,S)(z_1,\dots,z_n,y_1,\dots,y_k)$ 都会迫使 $R(z_1,\dots,z_n)$ 成立；由于 $R'(a_1,\dots,a_{n'})$，我们便得到 $\mathrm{OR}(R',S)(a_1,\dots,b_k)$。

令 $\mathrm{OR}(R',S)(a_1,\dots,a_{n'},b_1\dots,b_k)$。若这是由 $R'(a_1,\dots,a_{n'})$ 导致的，我们就根据 ϕ 来取量化变量，其中 R' 由 R 定义。于是，新公式中的每个合取项都由 R 成立。另一方面，若 $\mathrm{OR}(R',S)(a_1,\dots,a_{n'},b_1,\dots,b_k)$ 是由 $S(b_1,\dots,b_k)$ 成立的，那么无论前 n 个变量取什么值，新关系中的每个合取项都成立。 □

引理 21. 设 T 是一个真 TSR 关系。关系 $\mathrm{OR}(T,T)$ pp-定义 $\mathrm{OR}(S,S)$，其中 S 是一个非空真关系，并且满足以下条件之一： S 是一元关系； S 是 A 上的等价关系； S 是 TSR 且为 P-中心; 或 S 是 TSR 且为 PQ-中心。

证明。设 n 是 T 的元数; 若 $n = 1$，则对于一元 $S = T$，我们已经有 $\mathrm{OR}(S,S)$。

如果 $n = 2$ 我们分两种情况: 我们知道 T 是自反且对称的，但不知道它是否连通。如果它不连通，我们令 α 为 T的传递闭包; 显然 α 是 A 上的等价关系，并且可以从T中不使用等号定义。我们两次应用引理 42 （一次应用于第一个 T，然后交换坐标后应用于第二个 T），得到$\mathrm{OR}(\alpha,\ \alpha)$——问题得证。

在最后一种情形下， $n = 2$ 和 T 是连通的，或者 $n > 2$; 在这种情形下，无等式公式由 引理 14给出，再两次应用 引理 42 即可得到 $\mathrm{OR}(S,S)$，其中 TSR P-中心或 TSR PQ-中心 S。 □

在证明的最后一个引理之前，我们观察到，OR(C,C)（其中 C 是一元的）通过公式$C(x,x)$ pp-定义了 C，并且对任意 k，公式也 pp-定义了 OR(C^k,C^k)

$$\mathrm{OR}(C^k,C^k)(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_k)\equiv \bigwedge_{i=1}^{k}\bigwedge_{j=1}^{k}\mathrm{OR}(C,C)(x_i,y_j).$$

引理 23. 设 C 是一个非空真一元关系。那么 0-秩 OR(C,C) 和 $\to_{01}$ rpp-定义

- $\emptyset\neq B\subsetneq A$ 使得 $\mathfrak{A}|_B$ 光滑且 k-连通，或者
对于某个定义在 $B\subseteq A$ 上的真等价关系 α，存在 -秩 OR(α,α)。

证明。 我们如同引理 20的证明中那样开始。取一个 rpp-公式 ψ，由引理 19给出，并使用C（定义为 $\mathrm{OR}(C,\ C)(x,\ x)$）和 $\to_{01}$来定义 $\emptyset\neq B\subsetneq A$，使得 $\mathfrak{A}|_B$ 是光滑的。假设 $\mathfrak{A}|_B$ 不是 k-连通的，并记 α' 为 k上由 B诱导的连通性等价关系。

我们像之前一样定义公式 φ''，并开始释放针对量化变量 x 的合取项 $C(x)$。不过，这次采用不同的终止标准：当我们的二元关系变为连通时，就停止。将关键变量设为自由变量后，我们得到一个三元关系 S，使得

- $\exists X\ S(y,y',X)\wedge C(X)$ 包含于 B 上的一个非平凡等价关系中，并且
- $\exists X\ S(y,y',X)$ 不包含于 B 上的任何真等价关系中。

新公式是有秩的，前两个变量的秩为 0（必要时经过平移）。

由于二元关系 $\exists X\ S(y,y',X)\wedge C(X)$ 和 $\exists X\ S(y,y',X)$ 都包含 α'，因此它们在 B 上都是自反的；而包含一个自反关系的最小等价关系可由该关系 pp-可定义。事实上，我们可以找到一个二元符号 Q 上的公式，它能同时定义这两个二元关系的对称传递闭包（具体取决于符号 Q 的解释）。我们将 $Q(y,y')$ 的每个二元合取项替换为 $S(y,y',X_i)$，其中 X_i 是一个新变量，由此得到关系 U 的一个 rpp-定义，使得 $\exists X_1,\dots,X_p\ U(y,y',X_1,\dots,X_p)$ 定义 B^2，而 $\exists X_1,\dots,X_p\ U(y,y',X_1,\dots,X_p)\wedge\bigwedge_i C(X_i)$ 定义 B 上的一个真等价关系，记作 α。U 中前两个变量的秩为 0，所有 X_i 的秩都相等。

回想一下，OR(C,C) pp-定义了 OR(C^p,C^p)。现在我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{OR}(\alpha,\alpha)\equiv&\exists X_1,\dots,X_p,Y_1,\dots,Y_p\\&\mathrm{OR}(C^p,C^p)(X_1,\dots,X_p,Y_1,\dots,Y_p)\wedge\\&U(y,y',X_1,\dots,X_p)\wedge U(z,z',Y_1\dots,Y_p).\end{aligned}$$

且该关系是 0-秩的——我们就完成了。 □

附录 D：缺失的证明（出自 第 V 节

A. 无限伪自环引理

定理 24. 设 $\mathfrak{A}=(A,\to)$ 是一个光滑有向图，且 $\mathcal{G}$ 是 Aut$(\mathfrak{A})$ 的一个子群。如果 $\mathfrak{A}/\mathcal{G}$ 是对称的、非二分的，并且 $\mathcal{G}$ 有有限多个 2-轨道，那么

- $\mathfrak{A}/\mathcal{G}$ 有一个环，或者
- $\to$ 与 $\mathcal{G}$ 1的 1-轨道在维数为 $\mathcal{G}$ 1的意义下通过参数 pp-解释 OR(α,α)，其中 α 是有限 C 上的某个真等价关系。

设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathcal{G}$ 如陈述中所述，并进一步假设 $\mathfrak{A}/\mathcal{G}$ 没有环。我们将证明，$\to$ 以及 $\mathcal{G}$ 1的轨道在维数为 $\mathcal{G}$ 1的意义下 pp-解释有向图 $\mathfrak{B}$，使得 $\mathfrak{B}$，并且该有向图在宇宙上的自然作用（称为 $\mathcal{H}$）满足以下条件。

- $\mathfrak{B}$是光滑的，
- $\mathfrak{B}/\mathcal{H}$ 的代数长度为 1，
- $\mathfrak{B}/\mathcal{H}$ 没有环，且
- $\mathfrak{B}$ 的所有弱连通分量都是有限的。

在这种情况下，定理 10 完成证明。

为了构造 $\mathfrak{B}$，我们首先应用命题 26，得到 k 以及关于 $(A;\ k\to)$ 和 $\mathcal{G}$ 的一个三角形构型 (P,P_0,P_1,P_2)。令 $\sim$ 为 P 上一个极大等价关系，它可由 $k\to$ 和这四个集合 pp-定义，并且包含于 $P_0^2\cup P_1^2\cup P_2^2$ 中（该等价关系的等价类为 P_0, P_1, P_2；遗憾的是，它未必是 pp-可定义的）。这样的等价关系确实存在，因为每个（pp）-可定义等价关系都是 $\mathcal{G}$ 的 2- 轨道的并集，而根据我们的假设，$\mathfrak{A}$ 有有限多个 2-轨道。我们令 $\mathfrak{B}=(\mathfrak{A}|_P)/\sim$，并注意到 $\mathfrak{B}$ 确实是光滑的（因为 $P^{\to}$ 和 $P^{\leftarrow}$ 都包含 P），$\mathfrak{B}/\mathcal{H}$ 的代数长度为 1（因为 $\mathfrak{A}|_P/\mathcal{G}$ 是非二分的），且 $\mathfrak{B}/\mathcal{H}$ 没有环（因为 $\sim$ 包含于 $P_0^2\cup P_1^2\cup P_2^2$ 中，且 P_i 是独立的）。因此，只需验证第四个条件，即 $\mathfrak{B}$ 的所有弱连通分量都是有限的。

为此，我们首先作出若干简化假设。首先，显然可以假设 $k=1$（只需重新命名该关系），$A=P$（使用 $\mathfrak{A}|_P$ 而不是 $\mathfrak{A}$），并且 $\sim$ 是平凡等价关系（使用 $\mathfrak{A}/\sim$ 而不是 $\mathfrak{A}$）。现在我们处于以下情形。

- （A；$\to$）是光滑的，A 是 P_i的不交并，
- $\mathcal{H}$ 是 Aut（A；$\to$，P_1，P_2，P_3）的一个子群，且只有有限多个 2-轨道，
- $P_i^{\to}=P_{i-1}\cup P_{i+1}$ 对每个 i都成立，并且
  - 不存在非平凡等价关系 $\sim$，它既能由 P_i 和 $\to$通过 pp 定义，又包含于$P_0^2\cup P_1^2\cup P_2^2$中。关键事实如下。

引理 43. 若 v，则对于某个 i，$v'\in P_i$，且它们有共同入邻点或共同出邻点，那么 $v=v'$。

证明。我们假设 v、$v'\in P_1$ 和 $u\in P_0$ 满足 $v\leftarrow u\to v'$，并旨在证明 $v=v'$。关于不同位置和共同出邻点的情形

可用类似的方法证明。

我们将 $\overline{P_i}$ 记作 $A \setminus P_i$。注意到 $\overline{P_i} = P_{i-1} \cup P_{i+1} = P_i^+$，特别是，子集 $\overline{P_i}$ 可由 $\to$ 和 P_i pp-可定义。

我们考虑以下二元关系：S_j、$j = 1$、2、3。

$$S_j(x,y) \equiv \exists z_1, z_2, z_3 \;\; x \leftarrow z_1 \to z_2 \leftarrow z_3 \to y \\ \wedge \;\; z_1 \in \overline{P_j} \wedge z_2 \in \overline{P_j} \wedge z_3 \in \overline{P_{j+1}} \;\; .$$

我们断言，对于所有 j，以下结论均成立。(a) 关系 S_j 是自反的。(b) $S_j(v, v')$ 和 $S_j(v', v)$。(c) $S_j \cap (P_{j-1} \times P_j) = \emptyset$。

为证明 (a)，任取 $a \in A$。见证 $S_j(a,a)$ 的赋值可如下求得。

- 若 $a \in P_j$，我们选取 $z_1 \in P_{j-1}$ 和 $z_2 \in P_{j+1}$ 使得 $a \leftarrow z_1 \to z_2$，并令 $z_3 = z_1$。根据 $P_{j-1}^{\to} \supseteq P_j \ni a$ 和 $P_{j+1}^{\leftarrow} \supseteq P_{j-1} \ni z_1$，这些选择是可行的。
- 如果 $a \in P_{j+1}$ 我们选取 $z_1 \in P_{j-1}$ 使得 $a \leftarrow z_1$，并令 $z_2 = a$ 和 $z_3 = z_1$。
- 如果 $a \in P_{j-1}$ 我们选取 $z_1 \in P_{j+1}$ 和 $z_3 \in P_j$ 使得 $a \leftarrow z_1 \to a$ 和 $a \leftarrow z_3 \to a$，并令 $z_2 = a$。

为了证明条目 (b)，首先注意到 v 和 v' 的作用是对称的，因此只需证明 $S_j(v, v')$。这一次，我们分两种情况讨论。

- 如果 $j = 0$ 或 $j = 2$，那么我们选取 $z_1 = u, z_2 = v'$ 和 $z_3 \in P_2$ 使得 $v' \leftarrow z_3$。
- 如果 $j = 1$，那么我们选取 $z_1 = z_3 = u$ 和 $z_2 \in P_2$ 使得 $u \to z_2$。

为了证明 (c)，设 $a \in P_{j-1}$ 和 $S_j(a,b)$。我们将证明 $b \notin P_j$。再次考虑见证 $S_j(a,b)$ 的一个赋值。于是，由于 $a \leftarrow z_1$ 和 $z_1 \in \overline{P_j}$，我们有 $z_1 \in \overline{P_{j-1}} \cap \overline{P_j} = P_{j+1}$。以类似方式继续推理，可得 $z_2 \in P_{j-1}$，接着得到 $z_3 \in P_j$，最后得到 $b \in \overline{P_j}$。

现在，在性质 (a)、(b) 和 (c) 得到验证后，我们可以如下完成证明。我们定义 $S = \bigcap_j S_j \cap \bigcap_j S_j^{-1}$。根据定义，$S$ 是对称的。由 (b) 可知 $S(v, v')$，而由 (c) 可知 $S \subseteq P_0^2 \cup P_1^2 \cup P_2^2$。从我们的构造中也显然可见，$S$ 可由 $\to$ 和 P_i pp-可定义。令 $\sim$ 为 S 的传递闭包。S 的自反性蕴含 $S \subseteq 2S \subseteq 3S \subseteq \dots$。另一方面，所有 kS 在 $\mathcal{H}$ 下均不变，因此它们是 $\mathcal{H}$ 的 2-轨道的并集。由于 $\mathcal{H}$ 有有限多个 2-轨道，因此对于某个有限数目 k，有 $\sim = S^{\circ k}$。特别地，$\sim$ 可由 $\to$ 和 P_i pp-可定义。不存在这样的非平凡等价关系，因此 $\sim$ 是平凡的，从而 $v = v'$，证明至此完成。 □

我们现在可以通过证明 $(A; \to)$ 的每个弱连通分支都是有限的，来完成定理 24 的证明。设 C 是 $(A, \to)$ 的一个弱连通分支，并令 $c \in C$ 任意取值。我们断言，对于所有 a、$b \in C$，如果有序对 (c,a) 和 (c,b) 属于 $\mathcal{H}$ 的同一轨道，那么 $a = b$。由于 $\mathcal{H}$ 只有有限多个 2- 轨道，这一事实意味着 C 必须是有限的。令 $\alpha \in \mathcal{H}$ 满足 $\alpha(c) = c$ 且 $\alpha(a) = b$。设 w 是一条从 c 到 a 的游走 $c = c_0\ \epsilon_0\ \dots\ \epsilon_{n-1}\ c_n = a$。那么 $\alpha(w') = \alpha(c_0)\ \epsilon_0\ \dots\ \epsilon_{n-1}\ \alpha(c_n)$ 是一条从 c 到 b 的有向游走。由于 P_i 在……下不变 $\mathcal{G}$，每个 c_i 都与 P_{j_i} 属于同一集合 $\alpha(c_i)$。引理 43 现在给出了 $c_1 = \alpha(c_1)$、$c_2 = \alpha(c_2)$，最终还给出 $a = c_n = \alpha(c_n) = b$，证明得以完成，

B. 腿相邻

我们在此证明命题 26 中V-B 节的一个引理。

截断*

证明。我们证明 $V_1^{\leftrightarrow} \supseteq V_0$，对于其他 i，j 也同样成立。也就是说，我们将证明每个 $v \in V_0$ 在 V_1 中都有一个邻点。

我们记 $P_i = \bigcup U_i$，并用以下公式在 $\mathfrak{A}$ 中定义子集 $B \subseteq A$。

$$B(x) \equiv \exists y_1, y_2, y_3 \;\; x \to y_1 \leftarrow y_2 \to y_3 \leftarrow x \\ \wedge P_1^{\to}(y_1) \wedge P_1^{\to}(y_2) \wedge P_0^{\to}(y_3).$$

注意，集合 P_i 可由 $\to$ 和 1-轨道 $\mathfrak{A}$ pp-可定义。因此，B 也具有此性质。

回想一下，在 $\mathfrak{U}$ 中存在一个三角形，其顶点为 $u_i \in U_i$。我们声称，B 包含 $u_i \in U_i$ 的所有轨道元素。事实上，对于 $x \in u_0 \cup u_1$，一个见证赋值为 $y_1 = y_3 \in x^{\to} \cap u_2$ 且 $y_2 \in y_1^{\leftarrow} \cap u_0$；对于 $x \in u_2$，一个见证赋值为 $y_1 \in x^{\to} \cap u_0$、$y_2 = x$ 和 $y_3 \in x^{\to} \cap u_1$。与引理 28 中的论证相同，可得 $B = A$。

现在任取 $x \in v \in V_0$。由于 $B = A$，我们知道 $B(x)$。取 y_1、y_2、$y_3 \in A$ 作为见证，并令 v_1、v_2、$v_3 \in U$ 为它们的 $\mathcal{G}$-轨道。我们有 $v \leftrightarrow v_1 \leftrightarrow v_2 \leftrightarrow v_3 \leftrightarrow v$、$v_1$、$v_2 \in U_1^{\leftrightarrow}$ 以及 $v_3 \in U_0^{\leftrightarrow}$。我们声称 $v_1 \in V_1$。否则，$v_1 \in U_0$，因为 $v_1 \in U_1^{\leftrightarrow} = U_0 \cup U_2 \cup V_1$，且它是 $v \in V_0$ 的邻点。于是 $v_2 \in U_2$，因为 $v_2 \in U_1^{\leftrightarrow}$，且它是 $v_1 \in U_0$ 的邻点。最后，$v_3 \in U_1$，因为 $v_2 \in U_0^{\leftrightarrow}$，且它是 $v_2 \in U_2$ 的邻点。但这样一来，v 和 v_3 就不可能是邻点，矛盾。 □

C. 最弱伪自环条件

定理 25. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个 ω-范畴模型完备核结构。则以下命题等价。

1) $\mathfrak{A}$ 不会带参数 pp-解释所有有限结构；2) Pol($\mathfrak{A}$) 满足某个非平凡的伪自环条件；3) 对每个对称的非二分 $\mathfrak{B}$，Pol($\mathfrak{A}$) 都满足 $\mathfrak{B}$-伪自环条件。

我们首先给出一个一般性陈述，它保证模型完备核满足某个伪自环条件。

引理 44. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个 ω-范畴模型完备核，且设 $\mathfrak{C}$ 是一个满足以下条件的有向图。

对于所有有向图 $\mathfrak{B} = (B, \to)$ 和具有有限多个 1-轨道的群 $\mathcal{G} \leq \mathrm{Aut}(\mathfrak{B})$，只要 $\mathfrak{B}/\mathcal{G}$ 包含一个与 $\mathfrak{C}$ 同构的（不一定是诱导）子图，且 $\mathfrak{A}$ 将 $\mathfrak{B}$ 与 $\mathcal{G}$ 的 1-轨道一起 pp-解释，$\mathfrak{B}$ 就模 $\mathcal{G}$ 具有伪自环。

那么 $\mathfrak{A}$ 满足 $\mathfrak{C}$-伪自环条件。

引理 44 的证明是对 引理 4.3 中证明的直接推广。为方便读者，我们在下文给出论证。

证明。在引理的假设下，我们证明 $\mathfrak{C}$-伪自环条件在 $\mathfrak{A}$ 中局部成立；也就是说，对于 A 的任意有限子集 F，都存在 $f \in \mathrm{Pol}(\mathfrak{A})$，使得 $f|_{F^n}$ 满足 $\mathfrak{C}$-伪自环条件。局部满足伪自环条件蕴含全局满足该条件，这一事实可由标准的紧致性论证得出；详情请参阅 [7] 中的引理 10.1.10。

令 $[m]$ 为 $\mathfrak{C}$ 的顶点集，并令 $(\sigma_1, \tau_1) \dots, (\sigma_n, \tau_n)$ 为 $\mathfrak{C}$ 的边的一个枚举。

克隆 $\mathrm{Pol}(\mathfrak{A})$ 具有函数 A^{F^m} 的自然作用，即从 F 到 A 的 m 元函数集合。我们在 A^{F^3} 上定义一个图 $\mathfrak{B}$，其边由 $(\pi^m_{\sigma_j}, \pi^m_{\tau_j})$: $1 \le j \le n$ 通过 $\mathrm{Pol}(\mathfrak{A})$ 的作用生成；并定义 $\mathcal{G}$ 为 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ 在 A^{F^3} 上逐坐标作用所成的群。根据定义，$\mathrm{Pol}(\mathfrak{A})$ 保持 $\mathfrak{B}$ 上的边关系。此外，$\mathcal{G}$ 的 1-轨道对应于 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ 的 $|F^3|$-轨道，因此其数量有限；又由于 $\mathfrak{A}$ 是一个模型完备核，这些轨道都由 $\mathrm{Pol}(\mathfrak{A})$ 保持。根据我们的构造，我们还知道 $\mathfrak{B}$ 包含一个与 $\mathfrak{C}$ 同构的子图。因此，由引理的假设可知，$\mathfrak{B}$ 模 $\mathcal{G}$ 包含一个伪自环。这恰好意味着 $\mathrm{Pol}(\mathfrak{A})$ 在 F 上满足 $\mathfrak{C}$-伪自环条件。

□

定理 25的证明。我们首先证明蕴含关系 1)→3）。注意，如果 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{C}'$ 的子图，那么 $\mathfrak{C}$-伪自环条件蕴含 $\mathfrak{C}'$-伪自环条件。因此，只需证明 $\mathfrak{A}$ 满足所有 C_{2k+1}-伪自环条件，其中 C_n 表示顶点集为 $[n]$ 且边集为 $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow n \leftrightarrow 1$的循环图。

我们检验引理 44 关于 $\mathfrak{C} = C_{2k+1}$的假设。令$\mathfrak{B}$ 和 $\mathcal{G}$ 如引理 44的假设所述。令

$$S_0 := B, S_{i+1} := S_i \cap S_i^{\rightarrow} \cap S_i^{\leftarrow}$$

由于 $\mathfrak{B}/\mathcal{G}$ 是有限的，因此 $S_n = S_{n+1}$ 对某个$n \in \mathbb{N}$成立。于是，有向图 $\mathfrak{B}|_{S_n}$ 是光滑的，且仍包含一个与 C_{2k+1}同构的子图。此外，S_n 在 $\mathfrak{B}$中是 pp-可定义的，而 $\mathcal{G}|_{S_n}$ 的 1-轨道都是 $\mathcal{G}$的 1-轨道。根据我们的假设，这意味着有向图 $\mathfrak{B}|_{S_n}$ 连同 $\mathcal{G}|_{S_n}$ 的 1-轨道，不能通过带参数的 pp-解释 K_3。根据定理 24 ，我们得到 $\mathfrak{B}|_{S_n}$ ，因此 $\mathfrak{B}$ 也包含一个模 $\mathcal{G}$伪自环。因此，引理 44的假设成立，由此可知 $\mathfrak{A}$ 满足 C_{2k+1}-伪自环条件。

蕴含关系 3)→2) 显而易见。

最后，蕴含关系 2)→1) 可由[9]中定理 4.5 证明第一段所给出的论证推出[9]。

□

附录 E 第 VI 节中缺失的证明第 VI 节

命题 37. 如果 $\mathfrak{A}$ 是一个核，那么 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$ 是一个模型完备核。

证明. 设 e 是 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$的一个自同态，B 是 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$的论域。由于 $\neq$ 在 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$中是 pp-可定义的，e 是单射。由于 e 保持 $\sim$，它由此诱导出 $\mathfrak{A}$的一个自同态 e' ，定义如下：对所有 $t \in [B]^k$，都有 $e'([t]_\sim) = [e(t)]_\sim$（这里 e 是逐分量作用的）。由于 $\mathfrak{A}$ 是一个核，e'是 $\mathfrak{A}$的一个自同构。若对 $\mathfrak{A}$的某个关系 R，有 $(t^1, \dots, t^r) \notin R^k$，则根据定义，$([t^1]_\sim, \dots, [t^r]_\sim) \notin R$，因此 $(e'([t^1]_\sim) \dots, e'([t^r]_\sim)) \notin R$，也就是说，$([e(t^1)]_\sim, \dots, [e(t^r)]_\sim) \notin R$。再次根据定义，这意味着 $(e(t^1) \dots, e(t^r)) \notin R^k$，因此 e 保持 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$ 的每个关系的补关系，故是一个嵌入。由于 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$ 是齐次的，e 在任意有限集合上的限制都可以扩展为 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$的一个自同构，因此 $\mathfrak{A}^{\otimes k}$ 是一个模型完备核。

□

命题 39. 设 $(\mathfrak{A}_i)_{i\in\omega}$ 是一个结构序列，其中每个结构都具有满足 Σ 的幂等多态函数。设 $(k_i)_{i\in\omega}$ 是一个正自然数序列。所有类 $\mathcal{C}(\mathfrak{A}_i, k_i)$ 叠加后的 Fra¨ıss´e 极限具有满足 $\overline{\Sigma}$ 的单射多态函数。

证明。设 $\mathfrak{B}$ 是所有类 $\mathcal{C}(\mathfrak{A}_i, k_i)$ 叠加后的 Fra¨ıss´e 极限。证明与前一个相同：用映射 $(q^i_s)_{i\in\omega}$ 定义结构 $\mathfrak{C}_s$ ，并得到一个从 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的嵌入 s' ，它恰好是 $\mathfrak{B}$ 的单射多态。对 $\overline{\Sigma}$ 的满足情况也可类似验证。

□