关于 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_k$-对称空间的等变上同调

SAM HAGH SHENAS NOSHARI

Abstract. 在 [Lut81] 中引入了 Γ-对称空间这一类空间，它是对称空间的一种广泛推广。此前的结果使人们可以推测，这些空间的各向同性作用是等变形式的；我们在 $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_k$ 的情形下提供了支持这一猜想的证据。这尤其意味着， $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_k$-对称空间在有理同伦论意义下是形式的。

arXiv:2302.12151v1 [math.AT] 23 Feb 2023

1. Introduction

李群 G 在拓扑空间上的作用称为（有理）等变形式的，如果该作用的有理等变上同调相对于其自然模结构，是分类空间 G 的上同调环上的自由模。关于作用的等变上同调是否为自由模的问题，Borel [Bor16], 已经研究过；但这一概念或许是在 Goresky、Kottwitz 和 MacPherson 的开创性著作发表之后，才受到广泛关注（事实上，“等变形式性”这一术语最早见于 [GKM98]）。部分原因在于，同一篇文章还指出，如何依据某些等变形式作用的 0 维和 1 维轨道，重构其完整的等变上同调环。这种描述等变上同调环的技术已得到广泛应用，并催生了许多推广，通常统称为 GKM 理论，参见例如 [GZ01, GH04, HHH05, GHZ06, Mar08, GSZ13, MW13, GM14, GW15, Kur19, GKZ20, GKZ22a, GKZ22b, EGS23]。

需要指出的是，等变形式性这一性质对作用空间可能具有的拓扑结构施加了严格限制。例如，若环面作用于一个具有有限个不动点的紧致空间，那么该空间奇数次上同调消失，是等变形式性的充要条件。鉴于此，迄今仅发现少数几类等变形式的作用，也就不足为奇了。

齐性空间上的各向同性作用 G/K是大量例子的来源，从某种意义上说，它们构成了每个作用的基本构件；也就是说，这是由 G中的群运算诱导的 K 在 G/K 上的作用。自然地，人们会问这一作用何时是等变形式的。当 G 和 K 秩相等时，这一问题有一个著名的肯定答案，见 [GHZ06]。当 K 的秩为 1 时的等变形式的各向同性作用在 [Car19], 中进行了分类，而余秩为 1 的子群 K 的情形则在 [CH22]中得到了研究。其他始终是等变形式的各向同性作用例子包括：G/K为对称空间的情形 [Goe12], ，以及 K 为 G的某个自同构的不动点集的情形[GHSN16]。沿着另一个方向推广对称空间的情形，[AK20] 以及独立地 [HSN18] 证明了：如果 K 是两个对合的交换对的不动点集，则该各向同性作用是等变形式的。鉴于这些结果，人们可能会进一步思考：如果允许 G/K 为一个 Γ-对称空间[Lut81], ，即如果 K 是Aut(G)中的某个有限生成阿贝尔子群Γ ⊆的公共不动点集，那么该各向同性作用是否仍然是等变形式的。本注记的主要目的就是为这一猜想提供进一步的证据：

定理 1.1。设 G/K 为 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_k$ 对称空间，并取一种表示，使得 G 和 K 是紧致连通李群。则 K 在 G/K 上的各向同性作用是等变形式的。特别地，空间 G/K 在有理同伦论的意义下是形式的。

尽管仔细检查定理 1.1 的证明也会发现 G/K 是形式的，但我们将专注于证明配对 $(G,\ K)$ 是各向同性形式的；按照 [CF18], 的说法，这意味着 K 在 G/K 上的各向同性作用是等变形式的。这样做的依据是 [CF18，定理 1.4], ：根据该定理，若 $(G,\ K)$ 是各向同性形式的，则空间 G/K 必然在有理同伦论意义下是形式的。

现在，我们简要说明本文的组织结构以及定理 1.1 的证明。证明李群相关命题时，通常可以从相应的单李群结论推出一般结果。定理 1.1 也同样如此，正如我们将在第 3 节中所示。本节余下部分中，我们因此假设 G 是单的。设 σ_1 是一个对合， σ_2 是 G 上一个与 σ_1 相互交换的有限阶自同构。分别在 $K_1 = (G^{\sigma_1})_0$、 $K_2 = (G^{\sigma_2})_0$，和 $K = (G^{\sigma_1} \cap G^{\sigma_2})_0$，中选取极大环面 T_1、 T_2 和 S ；下标表示我们考虑的是包含单位元的连通分支。众所周知， $Z_G(T_i)$ 是 G 中的极大环面，但 $Z_G(S)$ 通常包含于 G 的不止一个极大环面中。这也是单李代数上的自同构可以分类、而相互交换的自同构对却难以分类的原因之一。这也使得证明 $(G,\ K)$ 是各向同性形式的变得困难：事实上，若 $Z_G(S)$ 是单李群 G 中的极大环面，则由命题 4.2 可立即推出 $(G,\ K)$ 是各向同性形式的。

因此，我们需要研究 $Z_G(S)$ 不成为极大环面的程度。为此，固定 G 的一个包含 S 的极大环面 T，并且不妨设它同时在 σ_1 和 σ_2 作用下保持不变。令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_\alpha \mathfrak{g}_\alpha$ 为相应的根空间分解；这里的求和遍历 G 的所有根，而 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{t}$ 分别是 G 和 T 的李代数的复化。于是，初等的李理论考察表明， $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_\alpha \mathfrak{g}_\alpha$，其中此次求和遍历集合Ω中的所有根 α，满足 $\alpha|_{\mathfrak{s}} = 0$。 [HSN18] 中的一个关键观察是：当 σ_2 也是一个对合时，为了证明 (G, K) 是各向同性形式，我们注意到 σ_2 反射Ω中的每一个根。事实上，如果 σ_2 是一个内对合，那么 σ_2 必须是单根反射的乘积 $\prod_\alpha s_\alpha$，其中 s_α 随 α 遍历Ω中的正根。此外，Ω中的根是强正交的，也就是说，如果 α 和 β 属于Ω，那么 $\alpha + \beta$ 和 $\alpha - \beta$ 都不是根，因此乘积 $\prod_\alpha s_\alpha$ 中的各因子两两可交换。

在定理 5.1 中，我们证明，这一结论也适用于 σ_2 为任意有限阶自同构的情形。也就是说，我们证明 σ_2 反射了 Ω 中的所有根。对于一对对合而言，这一结论可由将 $\mathfrak{g}$ 分解为 σ_1 和σ_2的特征子空间而直接推出；但对于一般的 σ_2 ，证明要复杂得多，占据了第 5 节的全部篇幅。我们将[HSN18 的命题 3.2] 推广，并证明：若 σ_2 反射了 Ω 中的所有根，那么 σ_2 也必定是由简单根反射 s_α 构成的乘积，其中 $\alpha \in$Ω，还可能与 G的 Dynkin 图自同构复合。我们还注意到，这个 Dynkin 图自同构与每个反射 s_α 都可交换，而且 Ω 中的根仍然两两强正交。

这些观察的一个显著推论是，在同构类型不同于 $\mathfrak{d}_4$、 σ_2 的单李群上， σ_2 必须是 T 上的对合（或恒等映射）。这引出了一个问题：能否以某种方式改变 σ_2，使得 σ_2 在所有 G 上都成为对合，同时仍使 S 成为改变后的 K 的极大环面? 这等价于询问：Weyl 群元素 $\prod_\alpha s_\alpha$（ α 是 Ω 中的一个正根）能否提升为 G 的一个对合内自同构。一般而言，这是不可能的；不过，我们在第 6 节观察到，只要 σ_1 和 σ_2 在 G 的外自同构群 Out(G) 中代表同一个自同构， $\prod_\alpha s_\alpha$ 就能提升为一个对合。再结合 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 对称空间各向同性作用的等变形式性，我们便可推得，偶对 $(G,\ K)$ 是各向同性

形式的，只要 σ_1 和 σ_2 同为内自同构或同为外自同构（定理 6.1），或者 σ_1 是外自同构而 σ_2 是内自同构（定理 7.1）。

接下来要讨论的情形是： σ_1 是内自同构，但 σ_2 不是。由于缺乏一般性论证，我们在此情形下明确确定集合Ω，见第8节。这里的总体目标是利用 σ_2 在 T 上的明确描述，找回 K的极大环面 S ，因为证明($G,\ K$)是各向同性形式的，等价于证明($G,\ S$)也是如此。幸运的是，只有三类单李群上 σ_2 可能是外自同构，而且集合Ω的可能取值也有限。理由如下。若固定一个根 $\alpha \in$Ω，则在所有根的集合上存在一种正性概念，使得 α 成为支配的；此时，Ω中其余的根 $-\{\pm\alpha\}$ 必须包含在 G 的 Dynkin 图中由所有与 α正交的根所张成的子图内。除 $\mathfrak{d}_4$型根系外，该子图至多包含两个连通分支；对于经典李群，其中一个分支与 G属于同一系列。递归进行下去，可得 G 的 Dynkin 图中一列嵌套子图，Ω中的根包含于其中；这大大限制了可能出现的集合Ω，至少在作用 Weyl 群元素的意义下如此（Kos [12] 中已对此有所观察，并将这类集合称为链级联）。由 σ_1 的对合性带来的进一步限制，使我们得到一份简短的情形列表；我们逐一验证其中($G,\ S$)必为各向同性形式，从而完成定理 1.1 的证明。

致谢。 本研究得到SNSF项目200020E 193062和DFG优先计划SPP 2026的支持。作者还要感谢 Philipp Reiser分享了他关于 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_k$子群描述的证明。

2. 预备知识

本节总结了一些关于单李代数上的自同构以及各向同性作用的等变上同调的已知结果，后文将用到这些结果。关于等变上同调诸多方面的简明概述，可见 [Qui71]；综述 [GZ19], 中也有介绍，而更全面的阐述可参见著作 [AP93]。关于李代数自同构的结果，我们主要参考 [Hel01, Chapter X] 和 [WG68, section 5]。

2.1. 李代数上的自同构。我们将经常需要运用关于（有限维）复单李代数上有限阶自同构及其不动点集的分类 [Hel01, section X.5], [WG68, p. 106]。给定这样的李代数 $\mathfrak{u}$ 及其一个嘉当子代数 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{u}$，设 $\Delta \subseteq \mathfrak{h}^*$ 为根， $\Pi \subseteq \Delta$ 为关于某种正性概念的单根。对每个 $\alpha \in \Pi$，都存在元素 $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$、 $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ ，它们在 [Hel01, proposition X.4.1] 中称为典范生成元，在 [WG68, lemma 5.3], 中称为Weyl基，并且它们生成 $\mathfrak{u}$ 这个代数。若 $\nu\colon\ \Pi \to \Pi$ 是 $\mathfrak{u}$的Dynkin图自同构，则通过要求对所有单根 α都有 $\nu(X_\alpha) = X_{\nu(\alpha)}$ 且 $\nu(Y_\alpha) = Y_{\nu(\alpha)}$ ，即可确定 $\mathfrak{u}$ 的一个自同构 ν。我们称 $\nu\colon\ \mathfrak{u} \to \mathfrak{u}$ 为由 $\mathfrak{u}$的Dynkin图自同构诱导的 $\mathfrak{u}$ 自同构。于是，经过共轭后， $\mathfrak{u}$ 上的每个自同构 μ 都具有$\mu = c \circ \nu$的形式，其中 ν是由Dynkin图自同构诱导的某个自同构，而 c是一个与 ν 可交换并逐点固定 $\mathfrak{h}$ 的内自同构，参见 [WG68, lemma 5.3]。特别地， $\mathfrak{u}^\mu$ 的秩必须等于 $\mathfrak{u}^\nu$ 的秩，其中 ν 是由 $\mathfrak{u}$的Dynkin图自同构诱导的某个自同构。结合 [Hel01, 表I, p. 505], 即可证明以下众所周知的

命题 2.1。 设 $\mathfrak{u}$ 是一个单复李代数，且 $\mu\colon\ \mathfrak{u} \to \mathfrak{u}$ 是由 $\mathfrak{u}$, $k > 1$ 的 *Dynkin* 图的 k 阶自同构所诱导的李代数自同构。那么 $\mathfrak{u}$ 的同构类型以及 μ 的不动点集 $\mathfrak{u}_0$ 的同构类型包含在下表中：

$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{a}_{2n}\ (k=2)$	$\mathfrak{a}_{2n-1}\ (k=2)$	$\mathfrak{d}_n\ (n\geq 4, k=2)$	$\mathfrak{d}_4\ (k=3)$	$\mathfrak{e}_6\ (k=2)$
$\mathfrak{u}_0$	$\mathfrak{b}_n$	$\mathfrak{c}_n$	$\mathfrak{b}_{n-1}$	$\mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{f}_4$

此外， $\mathfrak{u}$ 上任意非内自同构的不动点集的秩，必等于这些李代数之一 $\mathfrak{u}_0$ 的秩。

对于 $\mathfrak{u}$ 上的有限阶自同构，我们还可以说得更多。选取 $\mathfrak{u}$ 上一个阶为 k 的 Dynkin 图自同构，并令 $\nu\colon \mathfrak{u}\to\mathfrak{u}$ 为其诱导的李代数自同构。令 D 为 Hel01 第 503] 页表 k 中与 $\mathfrak{u}$ 的同构类型相对应的图，并进一步令 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 为 $\mathfrak{u}^\nu$ 的单根。存在一个顶点 $v\in V(D)$，使得图 $D-\{v\}$ 连通，且等于 $\mathfrak{u}^\nu$ 的 Dynkin 图。于是令 $a_1,\ldots,a_n$ 为分别对应于 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 的顶点标签，并令 a_0 为剩余的标签。任意一组没有非平凡公因子的非负整数 $s_0,\ldots,s_n$，都定义了 $\mathfrak{u}$ 上一个阶为 $k(a_0s_0+\ldots+a_ns_n)$ 的自同构。若 $J\subseteq\{0,\ldots,n\}$ 是满足 $s_j=0$ 的指标 j 所组成的集合，那么该自同构的不动点集具有一个 $(n-|J|)$ 维中心，其半单部分是 D 中以 J 为顶点集的子图。相差一个共轭，$\mathfrak{u}$ 上的每个有限阶自同构都以此方式得到 [Hel01，定理 X.5.15]。若对 2 阶自同构执行这一过程，便可得到 Hel01 第 515] 页的表 II 和 III（ [）。为方便读者，我们在此重现这些表

命题 2.2。设 μ 是单复李代数 $\mathfrak{u}$ 上的一个对合， $\mathfrak{u}_0$ 是其不动点集。则会出现以下情形之一。

(1) μ 是内自同构，且 $\mathfrak{u}_0$ 是半单的。 $\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{u}_0$ 的同构类型列于下表。

$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{b}_n$	$\mathfrak{c}_n$	$\mathfrak{d}_n$	$\mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{e}_8$
$\mathfrak{u}_0$	$\mathfrak{d}_p\oplus\mathfrak{b}_{n-p}$	$\mathfrak{c}_p\oplus\mathfrak{c}_{n-p}$	$\mathfrak{d}_p\oplus\mathfrak{d}_{n-p}$	$\mathfrak{a}_1\oplus\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{b}_4$ $\mathfrak{a}_1\oplus\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{a}_1\oplus\mathfrak{a}_5$	$\mathfrak{a}_7$ $\mathfrak{a}_1\oplus\mathfrak{d}_6$	$\mathfrak{a}_1\oplus\mathfrak{e}_7$ $\mathfrak{d}_8$

此处， $2\leq p\leq n$ （情形 $\mathfrak{b}_n$）、 $1\leq p\leq\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ （情形 $\mathfrak{c}_n$）以及 $2\leq p\leq\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$（情形 $\mathfrak{d}_n$）。

(2) μ 是内自同构，且 $\mathfrak{u}_0$ 有一维中心。 $\mathfrak{u}$ 的同构类型以及 $[\mathfrak{u}_0,\mathfrak{u}_0]$ 的半单部分如下所示。

$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{a}_n$	$\mathfrak{b}_n\ (n>2)$	$\mathfrak{c}_n\ (n>1)$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_n\ (n>4)$	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{e}_7$
$[\mathfrak{u}_0,\mathfrak{u}_0]$	$\mathfrak{a}_p\oplus\mathfrak{a}_{n-p-1}$	$\mathfrak{b}_{n-1}$	$\mathfrak{a}_{n-1}$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{d}_{n-1}$ $\mathfrak{a}_{n-1}$	$\mathfrak{d}_5$	$\mathfrak{e}_6$

p 的可能取值为 $0\leq p\leq\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$。 ——

(3) μ 不是内自同构，且 $\mathfrak{u}_0$ 是半单的。 $\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{u}_0$ 的类型为

$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{a}_{2n}\ (n\geq 2)$	$\mathfrak{a}_{2n-1}\ (n>2)$	$\mathfrak{d}_{n+1}\ (n>1)$	$\mathfrak{e}_6$
$\mathfrak{u}_0$	$\mathfrak{b}_n$	$\mathfrak{d}_n$ $\mathfrak{c}_n$	$\mathfrak{b}_p\oplus\mathfrak{b}_{n-p}$	$\mathfrak{c}_4$ $\mathfrak{f}_4$

and $0\leq p\leq\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$.

2.2. **等变上同调**。设 G 为一个李群，并固定一个可缩空间 EG，使得 G 在其上自由作用。对于任意 G-空间（X,ρ），即任意赋有固定连续 G-作用 ρ 的拓扑空间 X，我们可以关联得到（*Borel*）等变上同调，其定义为分次群

$$H^*_G(X;R):=H^*(EG\times_{(G,\rho)}X;R).$$

换言之，Borel 等变上同调就是 G 在 $EG \times X$ 上的对角作用所产生的轨道空间 $EG \times_{(G,\rho)} X$ 的（奇异）上同调。

现在令 $R = \mathbb{R}$ 为实数域。这是我们最感兴趣的系数群，因此从现在起将在记号中省略。注意， $H_G^*(X) = H_G^*(X;\mathbb{R})$通过杯积构成一个环，而赋值 $X \mapsto H_G^*(X)$具有函子性。特别地，任意映射 $X \to \{*\}$ 都会诱导环同态 $H_G^*(*) \to H_G^*(X)$，从而使 $H_G^*(X)$成为一个 $H_G^*(*)$-模。若 $H_G^*(X)$恰好是一个自由的 $H_G^*(*)$-模，则称 G对 X 的作用是等变形式的。

描述等变形式作用还有其他几种等价方式，例如参见 [GZ19，第 7] 节；对于各向同性作用这一特殊情况，参见 [CF18]（请注意， [CF18]使用了有理系数，但这不会影响等变形式性问题，参见 [GHSNM19，推论 2.5，命题 2.7]）。我们主要会使用两个适用于齐性空间情形的判据，第一个是由[Hsi75，第 46] 页直接推出的：

命题 2.3. 设 G 是紧致连通李群， K 是闭连通子群。对于任意极大环面 $S \subseteq K$ ，有

$$2^{\operatorname{rank} G - \operatorname{rank} K} \cdot \dim H^0\left(\frac{N_G(S)}{N_K(S)}\right) \leq \dim H^*(G/K)$$

当且仅当 (G, K) 是各向同性形式时，等号成立。

第二个判据对于在 G 的不同子群之间转换非常有用。只要 K 和 H 共有一个极大环面，我们就可以根据一对 (G, H) 的等变形式性，推导出一对 (G, K) 的等变形式性。

命题 2.4 ([Car19，定理 1。1])。 设 G 是紧致连通李群， K 是闭连通子群， $S \subseteq K$ 是极大环面。那么， (G, K) 是各向同性形式，当且仅当(G, S) 是各向同性形式。

回顾一下，如果纤维到全空间的包含映射在上同调上诱导出满射，那么该纤维化称为完全非零同调。对于紧致连通李群 G 的闭连通子群 K 以及纤维化 $K \hookrightarrow G \to G/K$ ，也可以等价地要求限制映射将 $\mathfrak{g}$ 上的不变多项式空间 $P_{\mathfrak{g}}$ 满射到 $\mathfrak{k}$ [上的不变多项式空间 $P_{\mathfrak{k}}$，G HV76，定理 VI，第 11 节。6], 在这种情况下，也称 K 在 G 中完全非零同调。一个经典结果指出， G/K 在有理同伦论的意义下是形式的， [GHV76，推论 I，第 10 节。19], 事实证明，该条件对于 (G, K) 是各向同性形式也是充分的。

命题 2.5 ([Shi96，推论4。2])。 设 K 是紧致连通李群 G的紧致连通子群。若 K 在 G中完全非零同调，则对偶 (G, K) 是各向同性形式。

给定单李群 G 上的一个自同构 σ: $G \to G$ ，总能找到一个由 Dynkin 图自同构诱导的自同构 τ ，使得 $K = G^\sigma$和 $H = G^\tau$ 共享一个极大环面。这意味着 (G, K) 是各向同性形式，这是由命题 2.4 以及以下命题得出的

命题 2.6 ([GHSN16，第 4]节。 设 G 是一个紧致连通单李群，且μ: $G \to G$ 是由 G的 *Dynkin* 图自同构诱导的自同构。则$K = (G^\mu)_0$ 在 G中完全非零同调。

最后，为了说明定理 1.1 的意义，我们提及由 [GHSN16] 证明的关于 $\mathbb{Z}_\ell$–对称空间各向同性作用的等变形式性的一个直接推论。

命题 2.7。设 G 是一个紧致连通李群，且 $\Gamma = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, $\Gamma \subseteq \mathrm{Aut}(G)$ 是一个满足 $(p,q) = 1$ 的子群。那么，具有 $K = (G^\Gamma)_0$ 的对 (G, K) 是各向同性形式的。

证明。由 [GHSN16，定理 1.1], ，因为 $\Gamma \cong \mathbb{Z}_{pq}$，即可直接得到这一结论。 □

3. From arbitrary quotients to quotients of simple Lie groups

我们的首要目标是证明，为了证明定理 1.1，只需考虑分子为单李群的齐性空间。因此，假设对于所有 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_k$-对称空间 G/K，其中 G 是紧致连通单李群，定理 1.1 均成立。我们断言，在这一假设下，对于每个子群 $\Gamma \subseteq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_k$ 以及每个紧致连通单李群 L，若 Γ 通过自同构作用于其上，则由 $(L,\ U)$ 构成的对是各向同性形式的，其中 U 是 Γ的不动点集的单位连通分支。一旦证明 Γ 必为 $\mathbb{Z}_\ell$ 或 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_r$ 的形式（其中 r），便可由 $\mathbb{Z}_\ell$-对称空间各向同性作用的等变形式性（参见 [GHSN16，定理 1.1]）推出这一结论。

为说明 Γ 具有所断言的形式，注意到 Γ 至多由两个元素生成，因为根据 [Lan02，定理 I.7.3], $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$的每个子群都由两个元素生成。如果 Γ 包含于 $\{0\}\times\mathbb{Z}_k$，那么 Γ 是循环的，因为 $\mathbb{Z}_k$的每个子群都是循环的，由此可知，我们可以假设 Γ 由两个形如 $x = (1, a)$、$y = (0, b)$的元素生成，其中 a、$b \in \mathbb{Z}$。令 g为 a与 b的最大公约数。由于 $\mathbb{Z}$是主理想整环，故存在整数 m和 n [，使得 $g = ma + nb$（Lan02，命题 II.5.1]）。特别地，$mx + ny = (m, g)$ 包含于Γ。先假设 m为偶数。–那么 $a/g \cdot (m, g) = (0, a)$ 也属于 Γ。这意味着 (1, 0) 包含于 Γ，于是对于 $\Gamma_2 = \{(0, z) \in \Gamma \mid z \in \mathbb{Z}\}$，必有 $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \Gamma_2$。由于 Γ_2 是循环的，此时断言成立。接下来，假设 $m = 1$。如果 a/g为偶数，那么如前所述，$a/g \cdot (1, g) = (0, a)$。类似地，如果 b/g为奇数，那么 $b/g \cdot (1, g) = (1, b)$ 表明 (1, 0) 包含于 Γ。因此，剩下的情况是 a/g 为奇数而 b/g 为偶数。于是 $a/g \cdot (1, g) = (1, a)$，且 $b/g \cdot (1, g) = (0, b)$，由此 Γ是以 (1, g) 为生成元的循环群。总之，Γ 具有所述形式。

因此，若我们假设定理 1.1 对所有形如 G/K 且 G 为单的齐性空间都成立，那么下面的一般约化原理表明，定理 1.1 对所有 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_k$-对称空间 G/K 都成立。

定理 3.1. 设 Γ 是一个有限群，具有以下性质：对于每个紧致连通单李群 L，若 Γ 通过自同构作用于其上，且对于每个子群 $\Gamma' \subseteq \Gamma$，由 L 和 U 组成的李群对 (L, U)（其中 U 是 $L^{\Gamma'}$ 的单位连通分支）都是各向同性形式。则对于每个紧致连通李群 G，以及 Γ 通过自同构作用于 G 的任意作用，由 G 和 K 组成的李群对 (G, K) （其中 $K = (G^\Gamma)_0$ ）都是各向同性形式。

类似的约化原理早已出现在 [GHSN16] 和 [HSN18] 中。然而，其中使用了一种临时论证来推导：若紧致连通李群对 (G, K) 是各向同性形式，则李群对 $(G \times \ldots \times G, \Delta(K))$ 也具有各向同性形式。这通常成立：

命题 3.2. 设 G 为紧致连通半单李群，K 为闭连通子群。若 K 在 G/K 上的各向同性作用是等变形式的，则 $\Delta(K)$ 在$(G \times \ldots \times G)/\Delta(K)$ 上的各向同性作用也等变形式的。

证明。为方便记号，我们只考虑两个因子的情形。根据命题 2.4，不失一般性，可以假设 K 是一个环面子群；又因为对偶（G, K）的形式性只取决于李代数 $\mathfrak{k} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ [GHSNM19的包含关系，根据命题 2.13], ，假设 G 是单连通的也不失一般性。于是根据命题 2.3，我们有

$$2^{\operatorname{rank} G - \dim K} \cdot \dim H^0(N_G(K)) \leq \dim H^*(G/K)$$

当且仅当（G, K）具有各向同性形式时，等号成立。将 $G \times G$ 和Δ（K）分别替换为 G 和 K，也有类似结论，因此我们需要比较 N_G（K）与 $N_{G\times G}$（Δ（K））。设（g, h）$\in G \times G$ 正规化 Δ（K）。这等价于要求 g和 h 正规化 K，并且对所有 $k \in K$，都有 c_g（k）$= c_h$（k）；这里 c_g 和 c_h 表示 G 中的共轭映射。特别地，$g^{-1}h$ 与 K对易，因此包含于 Z_G（K）中。由此可得

$$N_{G\times G}(\Delta(K)) = \{(g, gz) \,|\, g \in N_G(K),\, z \in Z_G(K)\}\,.$$

然而，由于 K 是一个环面，G 中 K 的中心化子 Z_G(K) 是连通的（参见 Kna02，推论 IV.4.51], ），因此 $N_{G\times G}$(Δ(K)) 与 N_G(K) 的连通分支数相同。现在考虑纤维化 (G × G)/Δ(K) → (G × G)/Δ(G)，其纤维为 G/K。由于 G 是单连通的，相应谱序列的第二页 $(E^{*,*}_r)_{r\geq 2}$ 为

$$E_2^{p,q} = H^q(G/K) \otimes H^p\big(\tfrac{G\times G}{\Delta(G)}\big),$$

并且，如果 K 在 G/K 上的作用是等变形式的，那么，由于 (G × G)/Δ(G) 与 G 微分同胚，且上述谱序列收敛到 (G × G)/Δ(K)，我们有

$$\begin{aligned}\dim H^*\big(\tfrac{G\times G}{\Delta(K)}\big) &\leq \dim H^*(G/K) \otimes H^*\big(\tfrac{G\times G}{\Delta(G)}\big)\\ &= 2^{\operatorname{rank} G} \cdot \dim H^*((G/K)^K)\\ &= 2^{\operatorname{rank}(G\times G) - \dim K} \cdot \dim H^0(N_{G\times G}(\Delta(K))).\end{aligned}$$

如前所述，这意味着 Δ(K) 在 (G × G)/Δ(K 上的作用是等变形式的). □

定理 *3.1* 的证明。设 G 是一个紧致连通李群，Γ 通过自同构作用于它。正如在命题 3.2 的证明中所观察到的，根据 [GHSNM19，命题 2.13]，我们可以转而考虑 G 的覆盖群，因此不失一般性，可以假设 G 分解为直积 $G = Z \cdot \prod_{j=1}^{r} G_j$，其中包含单连通单因子 G_i 和环面因子 Z。由于 Γ 通过自同构作用于 G，Γ 将置换 G 的单因子 $\mathcal{G} = \{G_1, \ldots, G_r\}$，并保持 Z 不变。此外，由命题 2.3 立即可知，对于任意子环面 $Z' \subseteq Z$，数对 (Z， Z′) 具有各向同性形式性质。这意味着我们可以假设 Z 是平凡的，也就是说，G 是半单的。

暂时将 Γ 视为 $\mathcal{G}$的置换群的子群，我们固定一个单因子$L \in \mathcal{G}$，并将经过 L 的轨道 $\Gamma \cdot L$ 中的元素枚举为 $\Gamma \cdot L = \{L, \gamma_1(L) \ldots, \gamma_t(L)\}$，其中 $\gamma_1, \ldots, \gamma_t \in \Gamma$是某些自同构。子群 $U = L \cdot \gamma_1(L) \cdots \gamma_t(L)$是 G的 Γ-不变子空间，而 Γ 的不动点集 $U \cap K$ 是 K的子群。考察 Γ 在 $\mathcal{G}$ 上的各个轨道可知，G/K 分解为形如$U/(U \cap K)$的齐性空间之积，其中 U 如上所述；并且 (G, K)是各向同性形式，当且仅当由此得到的所有配对 $(U, U \cap K)$ 都是各向同性形式。因此，我们不妨从一开始就假设 G 是直积$G = L \cdot \gamma_1(L) \cdots \gamma_t(L)$，且 $\mathcal{G} = \{L, \gamma_1(L) \ldots, \gamma_t(L)\}$ 是 G的单因子。

现在令 γ_0 :=恒等映射$_L$，并注意到我们有一个李群同构

$$\begin{aligned}\Phi\colon L \times \ldots \times L &\to G,\\ (g_0, \ldots, g_t) &\mapsto \prod_{j=0}^{t} \gamma_j.g_j.\end{aligned}$$

为了确定在此映射下不动点集 K 的同构像，令 $\Gamma' \subseteq \Gamma$ 为所有将 L 映入自身的元素所组成的集合。换言之，Γ' 是点 $L \in \mathcal{G}$ 处的各向同性子群，且轨道映射 $\Gamma/\Gamma' \to \mathcal{G}$, $\gamma\Gamma' \mapsto \gamma(L)$ 成为双射。用 $H \subseteq L$ 表示 Γ' 在 L 上的不动点集。于是，在上述同构下，$\Delta(H) \cong K$。事实上，对于每个

$\gamma \in \Gamma$ 以及所有 j，都存在唯一一个 $\pi(j)$，使得 $\gamma\gamma_j(L) = \gamma_{\pi(j)}(L)$。根据 Γ' 的选取，这意味着对于某个元素 $\gamma' \in \Gamma'$，有 $\gamma\gamma_j = \gamma_{\pi(j)}\gamma'$；因此，若给定 $h \in H$，则

$$\gamma.(\gamma_j.h) = (\gamma_{\pi(j)}\gamma').h = \gamma_{\pi(j)}.h.$$

再次利用 Γ 通过自同构作用于 G，可得

$$\gamma.\Phi(h,\dots,h) = \prod_{j=0}^{t} \gamma.(\gamma_j.h) = \prod_{i=0}^{t} \gamma_i.h = \Phi(h,\dots,h).$$

反过来，假设 $\Phi(g_0,\dots,g_t)$ 被 Γ 固定。特别地，每个元素 $\gamma' \in \Gamma'$ 都必须固定 $\Phi(g_0,\dots,g_t)$。但是 γ' 限制为单因子 L 上的一个自同构，这意味着 $g_0 = \gamma'.g_0$。类似地，元素 $(\gamma_i)^{-1}$ 将单因子 $\gamma_i L$ 映到单因子 L 上，这意味着 $g_0 = g_i$。结合这两点可得 $\Delta(H) \cong K$。由于根据假设 (L, H) 是各向同性形式，由命题 3.2，(G, K) 也是各向同性形式。□

4. Normal forms

设 G 是一个紧致连通李群，σ_1、σ_2 是两个彼此可交换的李群自同构，其阶分别为 2 和 k。这两个自同构定义了 G 上的一个 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_k$ 自同构作用，反之，任何此类作用都可由这种方式得到。令 K 为 $G^{\sigma_1} \cap G^{\sigma_2}$ 的单位连通分支，$S \subseteq K$ 为一个极大环面。根据命题 2.4，当且仅当 (G, S) 是各向同性形式时，(G, K) 才是各向同性形式。因此，证明定理 1.1 的一种策略是用 G 上的可计算数据描述 S，并利用这一描述证明 (G, S) 是各向同性形式。当 $k = 2$ 时，即 σ_2 是一个对合且 G/K 是一个 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 对称空间时，HSN18 第 II 章 [中便采用了这种方法]。该处指出，可以找到一个合适的 σ_2 不变极大环面 T，它包含 S，并且可以在 G 的根集上定义正性概念，使得在李代数 $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ 的复化 $\mathfrak{t}$ 上，自同构 σ_2 是 $\prod_{\alpha\in\Omega^+} s_\alpha$ 与 G 的一个自同构的复合；该自同构会置换正根，并且与每个根反射 $s_\alpha\colon \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}$ 相交换，也就是说，它是沿超平面 $\ker\alpha$, $\alpha \in \Omega^+$ 的反射。集合Ω^+ 由所有在李代数 S 的复化 $\mathfrak{s}$ 上限制为零的正根组成，并且可以根据 G 的根系显式确定集合Ω^+。由此，可以从 G 的根系恢复 K 的一个极大环面 S。

接下来两节的目的是说明，类似的结果也适用于任意 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_k$ 对称空间。从 K 的一个极大环面 S 出发，我们将构造 G 的一个极大环面 T，使其在 σ_1 和 σ_2 作用下保持不变。若对于该极大环面 T，每个在 S 上取值为零的根都被 σ_2 反射（定义 4.6），我们就称这对 σ_1、σ_2 具有性质 $\star$。下文的定理 4.7 将说明，在这种情况下，$\sigma_2|_T$ 必然是根反射的乘积，且可能与 G 的 Dynkin 图自同构复合。下一节中（参见定理 5.1），我们将进一步说明，对于单李群 G，每一对在 G 上定义 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_k$ 作用的自同构 σ_1、σ_2 实际上都满足性质 $\star$。

下文中，我们将经常需要提及根和根系。这些概念最自然的定义对象是复李代数，因此为便于记号，我们约定用不带修饰的哥特体字母表示相应李群的李代数的复化。若要指相应的实李代数，则在字母下标处加下标。例如，若 G 是一个李群，则 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 是 G 的李代数，而 $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$ 是其复化。

命题 4.1. 设 T 是紧致连通李群 G 的极大环面，$S \subseteq T$ 是一个子环面。设 $\Delta \subseteq \mathfrak{t}^*$ 是 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{t}$ 的根，且 $\Omega \subseteq \Delta$ 是在其上消失的根的集合

$\mathfrak{s}$。那么，若将每个根 α 的根空间记为 $\mathfrak{g}_\alpha$，则 $\mathfrak{g}$ 中 $\mathfrak{s}$ 的中心化子 $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$ 为

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Omega} \mathfrak{g}_\alpha.$$

现在设 G 是一个紧致连通李群，σ_1 和 σ_2 是 G 的两个自同构。我们假设 σ_1 是一个对合，σ_2 是有限阶的，并且 σ_1 与 σ_2 可交换。记 K 为包含单位元的 $G^{\sigma_1} \cap G^{\sigma_2}$ 的连通分支，并选取一个极大环面 $S \subseteq K$。我们还在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 上固定一个 Ad_G-不变的负定内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，使其在 σ_1 和 σ_2 作用下不变，并将其线性扩张到 $\mathfrak{g}$ 上。这样的内积总是存在的，因为我们可以对由 σ_1 和 σ_2 生成的 $\mathrm{Aut}(G)$ 的有限子群取平均。进一步，令 $K_i = (G^{\sigma_i})_0$ 为 σ_i 的不动点集的单位连通分支。注意，由于 σ_1 与 σ_2 可交换，σ_2 限制为一个自同构 $K_1 \to K_1$。众所周知，$T_1 = Z_{K_1}(S)$ 因而是 K_1 的一个极大环面（参见例如 Hel01，引理 X.5.3]）；同理，$T = Z_G(T_1)$ 是 G 中的一个极大环面。T_1 和 T 均在 σ_1 及 σ_2 作用下不变。我们用 Δ 表示 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathfrak{t}$-根，Ω 表示在 $\mathfrak{s}$ 上取值为零的根所成的集合。

命题 4.2. 设 G 是一个紧致单李群，G 上有两个可交换的自同构 σ_1 和 σ_2。令 K 为 $G^{\sigma_1} \cap G^{\sigma_2}$ 的单位连通分支。假设 $Z_G(S)$ 是 G 的一个极大环面。那么 (G, K) 是各向同性形式。

证明。在此情形下，根据命题 4.1，$T = Z_G(S)$。另请注意，S 含有关于 T 的正则元。取这样一个元 $X \in \mathfrak{s}$，并在 Δ 中 $\mathfrak{t}$ 根的集合上定义正性概念：规定根 $\alpha \in \Delta$ 为正根，当且仅当 $\alpha(\mathrm{i}X) > 0$。将所得的单根集合记为 Π。于是 σ_1 和 σ_2 都置换 Π，我们可以写成 $\sigma_i = c_i \circ \tau_i$，其中 $t_i \in N_G(T)$，而 τ_i 要么是恒等映射，要么是由 $\mathfrak{g}$ 的 Dynkin 图自同构所诱导的外自同构，该 Dynkin 图自同构对应于 $\sigma_i|_\Pi \colon \Pi \to \Pi$（参见第 2 节）。事实上，$\sigma_i \circ (\tau_i)^{-1}$ 置换 Π；又由于没有 Weyl 群元素会固定一个 Weyl 室（[Hum78，定理 10.3]），因此可得 $t_i \in T$。现在我们分两种情况讨论。

若 $\tau_1 = \tau_2$，则 S 也是 K_1 的极大环面。事实上，$\sigma_i|_T = \tau_i|_T$，因为 $t_i \in T$，因此 $\sigma_1|_T = \sigma_2|_T$。此外，根据构造，我们有 $T^{\sigma_1} = T_1$ 和 $(T_1)^{\sigma_2} = S$，因此特别有 $\sigma_2|_{T_1} =$ 恒等映射。这意味着 $S = T_1$ 是有限阶自同构 σ_1 的极大环面；又由于 (G, K_1) 是各向同性形式的，所以根据命题 2.4，(G, K) 也是各向同性形式的。接下来，考虑 $\tau_1 \neq \tau_2$ 的情形。我们断言，要么 $\tau_1 =$ 恒等映射，要么 $\tau_2 =$ 恒等映射。事实上，若 $\mathfrak{g}$ 不属于 $\mathfrak{d}_4$ 型，则至多存在一个非平凡自同构 $\Pi \to \Pi$，见 Hel01 定理 X.3.29]；若 $\mathfrak{g}$ 属于 $\mathfrak{d}_4$ 型，则 $\mathrm{Out}(G)$ 同构于三字母上的置换群，并且我们注意到 $\tau_1|_\Pi$ 与 $\tau_2|_\Pi$ 也必定可交换，这只有在 $\tau_1|_\Pi$ 或 $\tau_2|_\Pi$ 是恒等置换时才可能。因此，σ_1 和 σ_2 中有一个是内自同构。假设 σ_2 是内自同构。那么 σ_2 逐点固定 T_1，因此再次有 $S = T_1$，且 (G, K) 是各向同性形式的。另一方面，若 σ_1 是内自同构，则 $T_1 = T$ 且 $S = T^{\sigma_2}$。但是，$T_2 = Z_{K_2}(S)$ 是 K_2 的极大环面，且 $T_2 \subseteq T$。因此，$T_2 = S$、K 和 K_2 共有一个极大环面，并且 (G, K) 是各向同性形式的。□

对于下一个命题——这是 [HSN18, 命题 II.2.2]，的推广——我们还固定一个不相交分解 $\Omega = \Omega^+ \cup (-\Omega^+)$。在后面的章节中，当在所有根的集合上固定了正性概念时，Ω^+ 通常只由包含在 Ω 中的所有正根构成；但目前 Ω^+ 可以是任意的。给定 $\mu \in \mathrm{Aut}(G)$，我们进一步设 $\mu(\alpha) := \alpha \circ \mu^{-1}$，对所有根 α 均如此。根据这个定义，并假设 μ 也是双线性形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的等距变换，我们有 $\mu(H_\alpha) = H_{\mu(\alpha)}$，其中 $H_\alpha \in \mathfrak{t}$ 是相对于 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 与 α 对偶的向量。

命题 4.3。沿用上述记号，以下结论成立

(1) 对所有 $\alpha \in \Omega$，$\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{p}$，其中 $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$ 是 σ_1 的(-1)特征子空间；

(2) 若 $\alpha \in \Omega$，则 $\sigma_1 \alpha = \alpha$；

(3) Ω 的任意两个不同的根都强正交；*(4)* 我们有 $\mathfrak{t} = \bigcap_{\alpha\in\Omega^+} \ker(\alpha)^{\oplus} \bigoplus_{\alpha\in\Omega^+} \mathbb{C}H_\alpha$。

证明。

(1) 设 $V := \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{\sigma_1\alpha}$。则 $V \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$，因为 σ_1 固定了 $\mathfrak{s}$，且 α 在 $\mathfrak{s}$上消失。因此

$$(V \cap \mathfrak{k}_1) \subseteq (\mathfrak{k}_1 \cap Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})) = Z_{\mathfrak{k}_1}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{t}_1.$$

因此，$V \cap \mathfrak{k}_1 = 0$，并且由于 V是 σ_1-不变的，$V \subseteq \mathfrak{p}$。

(2) 取 $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$、$E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$，使得 $H_\alpha = [E_\alpha, E_{-\alpha}]$。根据前一项，且由于$[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}_1$，我们有 $H_\alpha \in \mathfrak{k}_1$。因此 H_α，从而 α 被 σ_1固定。(3) 假设 α，$\beta \in \Omega$ 满足 $\alpha + \beta$ 是一个根。设 $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ 和 $E_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ 为非零向量。根据第一项，我们再次得到 $X = [E_\alpha, E_\beta] \in \mathfrak{k}_1$。另一方面，由于 G 是紧致的，X 也是 $\alpha + \beta$的一个非零特征向量，并且 $\alpha + \beta$ 仍在 $\mathfrak{s}$上消失，也就是说，$\alpha + \beta \in \Omega$。但根据第一项，$X \in \mathfrak{p}$ 也必须成立，这不可能。

(4) 由于 Ω 中的元素彼此强正交，向量 H_α、$\alpha \in \Omega^+$ 彼此正交。因此，它们线性无关。此外，由于 ad 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是斜对称的，我们看到，$\bigoplus_{\alpha\in\Omega^+} \mathbb{C}H_\alpha$ 的正交补为 $\bigcap_{\alpha\in\Omega^+} \ker \alpha$。□

命题 4.4。给定 $\alpha \in \Omega$，令 $\ell \geq 1$ 为使根 α、$\sigma(\alpha)$、.....、$\sigma^{\ell-1}(\alpha)$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关的最大整数（从而 $\mathbb{C}$）。则 $(\sigma_2)^\ell(\alpha) = -\alpha$。特别地，$\bigoplus_{\alpha\in\Omega^+} \mathbb{C}H_\alpha$ 中没有向量被 σ_2 固定。

证明。我们首先证明 $\mathfrak{k}_2$ 与 $\bigoplus_{\alpha\in\Omega^+} \mathbb{C}H_\alpha$ 的交仅为零向量。为此，注意到根据命题 4.3，任何满足 H_α 且 $\alpha \in \Omega^+$ 的向量都被 σ_1 固定，因此 $H_\alpha \in \mathfrak{k}_1$。于是，投影

$$q\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{k}_2,$$
$$X \mapsto \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} (\sigma_2)^j(X),$$

其中，$(m+1)$ 是 σ_2 的阶，将 H_α 发送到 $q(H_\alpha) \in \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{t} = \mathfrak{s}$。但对于任意 $Y \in \mathfrak{s}$，我们有

$$\langle Y, q(H_\alpha)\rangle = \langle Y, H_\alpha\rangle = \alpha(Y) = 0,$$

由于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 σ_2-不变的，$\mathfrak{s}$ 被 σ_2 逐点固定，且 α 在 $\mathfrak{s}$ 上消失。由于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 上负定，可知 $q(H_\alpha) = 0$。因为 $q|_{\mathfrak{k}_2} = \mathrm{id}$，所以在 $\bigoplus_{\alpha\in\Omega^+} \mathbb{C}H_\alpha$ 中不存在被 σ_2 固定的非零向量。

另一方面，由于每个根 α 在 $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ 上取纯虚值，而 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 上取实值，因此 H_α 包含于 $\mathfrak{ig}_{\mathbb{R}}$。于是，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在实张成 $\bigoplus_{\beta\in\Delta^+} \mathbb{R}H_\beta$ 上正定。现在固定一个根 $\alpha \in \Omega^+$。由于 σ_2 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 的自同构，因此它限制为实欧几里得向量空间上的等距变换

$$V := \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ (\sigma_2)^j(H_\alpha) \mid j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}.$$

令 $v_i := (\sigma_2)^i(H_\alpha)$，并回忆 ℓ 是使得 $v_0, \ldots, v_{\ell-1}$ 线性无关、因而构成 V 的一组基的最大整数。事实上，每个向量 v_i 都等于某个根 $\beta \in \Omega$ 对应的 H_β，因为集合Ω是 σ_2 不变的；又由于 $v_i \neq \pm v_j$，向量 $v_0, \ldots, v_{\ell-1}$ 甚至必定两两正交，这由命题 4.3 可知。因此，若将 $(\sigma_2)^\ell(H_\alpha)$ 表示为 $(\sigma_2)^\ell(H_\alpha) = c_0 v_0 + \ldots + c_{\ell-1} v_{\ell-1}$，其中 $c_0, \ldots, c_{\ell-1}$ 是实数，则我们可以计算

$$\langle H_\alpha, H_\alpha\rangle = \langle (\sigma_2)^\ell(H_\alpha), (\sigma_2)^\ell(H_\alpha)\rangle = \sum_{t=0}^{\ell-1} |c_t|^2 \cdot \langle H_\alpha, H_\alpha\rangle.$$

This 得出 $\sum_{t=0}^{\ell-1} |c_t|^2 = 1$。相对于基 $(v_i)_{i=0,\dots,\ell-1}$，端omorphism $\sigma_2|_V$ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & c_{\ell-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_{\ell-1} \end{pmatrix},$$

这表明 $\det(\sigma_2|_V) = \pm c_0$。但由于 $\sigma_2|_V$ 也是欧几里得空间上的等距变换，我们必有 $c_0 = \pm 1$，因此由方程 $|c_0|^2 + \dots + |c_{\ell-1}|^2 = 1$ 可推出 $c_1, \dots, c_{\ell-1}$ 必须恒等于零。我们断言，实际上 $c_0 = -1$。确实，若 $c_0 = 1$，则 $\sigma_2(v_{\ell-1}) = v_0$，而 $v_0 + \dots + v_{\ell-1}$ 将是 σ_2 在 $\bigoplus_{\alpha\in\Omega^+} \mathbb{C}H_\alpha$ 中的一个非零不动点；正如我们先前所观察到的，这是不可能的。因此，$c_0 = -1$，且 $(\sigma_2)^\ell(\alpha) = -\alpha$。□

[HSN18 命题 II.3.2] 的证明可原样照搬，从而得到：

推论 4.5. 我们有 维数 $\mathfrak{s} \le$ 秩 $\mathfrak{k}_1 - |\Omega^+|$，若 σ_2 是内自同构，则取等号。

证明. 由命题 4.3，σ_1 逐点固定 $V := \bigoplus_{\alpha\in\Omega^+} \mathbb{C}H_\alpha$，而 V 中没有向量被 σ_2固定。令 $L := \bigcap_{\alpha\in\Omega^+}$ 核 α，我们还注意到，同一命题给出了 σ_2-不变分解 $\mathfrak{t}_1 = (L \cap \mathfrak{t}_1) \oplus V$；由于 $\mathfrak{s} = (\mathfrak{t}_1)^{\sigma_2}$，这便得到 $\dim \mathfrak{s} \le$ 秩 $\mathfrak{k}_1 - |\Omega^+|$。

若 σ_2 是一个内自同构，例如对某个元素 $n \in G$取 $\sigma_2 = c_n$，那么由于σ_2 逐点固定 S，可知 $n \in Z_G(S)$。由于环面的中心化子是连通的（见 [Kna02，推论 IV.4.51],），我们可以将 $n =$ 写成 $\exp(X)$，其中 $X \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$；根据命题 4.1，我们可将 X 分解为 $X = X_0 + X_\Omega$，其中 $X_0 \in \mathfrak{t}$ 和 $X_\Omega \in \bigoplus_{\alpha\in\Omega} \mathfrak{g}_\alpha$是某些元素。特别地，若 $Y \in L$，则 $[Y, X] = 0$。因此 Ad_n 逐点固定 $L \subseteq \mathfrak{t}$。如前所述，V中没有向量被 σ_2固定，所以 σ_2 在 $\mathfrak{t}$ 上的不动点集恰为 L。于是 $\mathfrak{s} = L \cap \mathfrak{t}_1$。□

定义 4.6。沿用命题 *4.3* 前一段中的记号，若 σ_1、σ_2 满足性质 $\star$，则称其满足该性质，当且仅当对所有 $\alpha \in \Omega$，$\sigma_2(\alpha) = -\alpha$ 成立。

定理 4.7。设 Δ^+ 是 $\mathfrak{t}$ 上正根的一种选取，并且 $\Omega^+ = \Omega \cap \Delta^+$。如果 σ_1 和 σ_2 满足性质 $\star$，则存在 $w \in N_G(T)$，使其具有以下性质。

(1) $w\sigma_2 w^{-1} = c_g \circ \nu$，其中 ν 是 G 的自同构，且 $\nu(\Delta^+) = \Delta^+$、$\tilde{}$ $\tilde{}$；*(2)* 每个根 $\alpha \in \Omega$（其中 $\Omega\colon = w(\Omega)$）均由 ν 固定；*(3)* 伴随作用$g|_{\mathfrak{t}} = \prod_{\alpha\in\tilde{}\Omega^+} s_\alpha$。

证明。证明采用对 G维数的归纳法。若 G 是一个维数为 1 的紧致连通李群，则 $G \cong S^1$ 作为李群。在这种情况下，G 上不存在根，因此定理的陈述是空泛的。这就建立了归纳基。现在假设对于维数至多为r 的所有紧致连通李群，定理的陈述均成立，并令 G 为一个维数为 $r+1$的紧致连通李群。我们区分 $\Omega = \emptyset$ 和 $\Omega \neq \emptyset$两种情形。首先假设 Ω 为空。这意味着没有 $\mathfrak{g}$-根在 $\mathfrak{s}$上消失，因此 $\mathfrak{s}$ 包含关于 $\mathfrak{t}$-根的正则元。我们固定一个这样的正则元，并将由此得到的正性概念记为 R^+。由于 G 是紧致的，存在一个 Weyl 群元素w 使得 $w(R^+) = \Delta^+$，于是 $w\sigma_2 w^{-1}$ 保持 Δ^+。因此，在这种情况下归纳步骤成立。现在假设 Ω 非空，并固定一个根 $\delta \in \Omega$。由于 Weyl 群 $W(G,T)$的轨道 $W(G,T)\cdot\delta$根据 [Kna02，推论 2.68],包含一个支配根，我们可以在必要时用这样的 Weyl 群元素对 σ_2 进行共轭，从而假设 δ 是支配的，即对所有 $\alpha \in \Delta^+$均有 $\langle \delta, \alpha\rangle \ge 0$成立。现在将 σ_2表示为 $\sigma_2 = c_x \circ \rho$，其中 $x \in N_G(T)$，且 ρ是 G 的一个自同构，并满足 $\rho(\Delta^+) = \Delta^+$。

断言 1。 $\rho(\delta) = \delta$。

事实上，根据假设，我们有 $-\delta = \sigma_2(\delta)$，因此也有

$$-\mathrm{Ad}_{x^{-1}}(\delta) = \rho(\delta);$$

现在， $\mathfrak{t}$-根的集合 Δ 分解为互相正交的不可约分支 $\Delta = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_m$的不交并。由于 Ad_x 是一个 Weyl 群元素，它将每个这样的不可约分支映射到自身，因此 δ 和 $-\mathrm{Ad}_{x^{-1}}(\delta)$ 包含在同一个不可约分支中。此外，由于 ρ 只置换单根，并且由于 ρ 关于 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是一个等距变换（因为 σ_2 和 Ad_x 都是如此），我们看到 $\rho(\delta)$ 是一个支配根，并且与 δ包含在同一个不可约分支中。然而，在一个不可约根系中，至多存在两个支配根，即最高长根，以及在存在两种根长时的最高短根；又由于 ρ 保持根长不变，我们得出 $\rho(\delta) = \delta$。■

这意味着 $\mathrm{Ad}_x(\delta) = -\delta$，因此 $s_\delta \circ (\mathrm{Ad}_x|_{\mathfrak{t}})$ 是一个保持 δ 不变的 Weyl 群元素。根据 Chevalley 引理（参见 [Kna02，命题 2.72]），$\mathrm{Ad}_x|_{\mathfrak{t}}$ 因而是 s_δ 与某些满足 $\langle \beta, \delta \rangle = 0$ 的根反射 s_β 的乘积。令 $\Delta' \subseteq \Delta$ 为所有满足 $\langle \beta, \delta \rangle = 0$ 的根 β 的集合。由于根据命题 4.3， σ_1 和 σ_2 将 δ 映至 $\pm\delta$，我们得出 σ_1 和 σ_2 保持 Δ' 不变。因此，它们也保持子代数不变

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{t}' \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta'} \mathfrak{g}_\alpha, \text{ where } \mathfrak{t} = \mathbb{C}H_\delta \oplus \mathfrak{t}' \text{ and } \mathfrak{t}' = \ker \delta.$$

注意，由于 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 的复化， $\mathfrak{g}'$ 也是实子代数 $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}} := \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 的复化。令 $G' \subseteq G$ 为 G 中李代数为 $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$ 的连通李子群。

断言 2. G' 是紧致的。

事实上，带有 $\mathfrak{t}'' = \sum_{\alpha \in \Delta'} \mathbb{C}H_\alpha$ 的子代数 $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{t}'' \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta'} \mathfrak{g}_\alpha$ 是半单的，因此若令$G'' \subseteq G$ 为与 $\mathfrak{g}''$对应的连通子群，则 G'' 是紧致的。我们还注意到，李代数为 $\mathfrak{t}' \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 的连通李子群 $T' \subseteq T$是一个环面，因为它是 s_δ 在 $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 上的不动点集，而且 s_δ 是 $\mathfrak{g}$ 的某个内自同构在 $\mathfrak{t}$上的限制。因此， $T' \cdot G'' \subseteq G$是一个包含 G'的紧致连通李群。但 $T' \cdot G'' \subseteq G'$，由此可得 $T' \cdot G'' = G'$。■

记 σ'_i 为将 σ_i 限制到 G' 所得的自同构 $G' \to G'$，并令 K'_i 为 σ'_i的不动点集的单位连通分支。

断言 3. S 是 $K'_1 \cap K'_2$的极大环面。 $\mathfrak{t}'$-根中在 $\mathfrak{s}$ 上消失的那些根，恰好由所有形如 $\alpha|_{\mathfrak{t}'}$ 且满足 $\alpha \in \Omega - \{\pm\delta\}$的元素构成。

由于 $\delta \in \Omega$，我们知道 $\mathfrak{s} \subseteq \ker \delta$，因此 $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{k}'_1 \cap \mathfrak{k}'_2$。由于 $\mathfrak{k}'_1 \cap \mathfrak{k}'_2$ 是 $\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2$的子代数，且根据假设，$\mathfrak{s}$ 是后者代数的极大环面，所以 $\mathfrak{s}$ 也是前者代数的极大环面。现在注意，根据构造， $\mathfrak{t}'$-根恰好是 Δ' 中的根在 $\mathfrak{t}'$上的限制。因此，若 Δ' 中的根 β 在 $\mathfrak{s}$上消失，则对于某个 $\mathfrak{t}$-根 α，有 $\beta = \alpha|_{\mathfrak{t}'}$，并且$\alpha$ 在 $\mathfrak{s}$上消失。也就是说， $\alpha \in \Omega$。由于$\delta \notin \Delta'$，我们必有 $\alpha \in \Omega - \{\pm\delta\}$。■

令 $T' \subseteq T$为对应于 $\mathfrak{t}'$和 $T'_1 = Z_{K'_1}(S)$ 的子环面。我们有 $T'_1 \subseteq Z_{K_1}(S) \cap G'$，因此 $T'_1 \subseteq T \cap G'$。显然 $T' = T \cap G'$，由此可知 $T'_1 \subseteq T'$，且 T'是包含 T'_1的 G'的极大环面。由于 $Z_{G'}(T'_1)$ 是包含 T'_1的 G'中的唯一极大环面，因此我们得到 $T' = Z_{G'}(T'_1)$。于是，若我们赋予紧致连通李群 G' 的极大环面 T'正性概念（$\Delta' \cap \Delta^+$）$|_{\mathfrak{t}'}$，则归纳假设适用于 σ'_1和 σ'_2。因此，我们可以找到一个 Weyl 群元素 $w \in N_{G'}(T')$，使得 $w\sigma'_2 w^{-1} = \mathrm{Ad}_h \circ \mu$，使得 $h \in G'$ 对应于根反射 s_β 与 $\beta \in w(\Omega')$ 的乘积，并且使得μ 置换 $\mathfrak{t}'$ 上的正根，并固定 $w(\Omega')$中的元素。注意，由于 Weyl

群 $\mathfrak{g}'$ 由根反射 s_β （其中 $\beta \in \Delta'$）生成，我们有 $N_{G'}(T') \subseteq N_G(T)$，并且$w(\delta) = \delta$。因此，对于某个自同构 ν （满足$\nu(\Delta^+) = \Delta^+$）以及某个元素 $g \in N_G(T)$，我们可以将 $w\sigma_2 w^{-1}$ 表示为 $w\sigma_2 w^{-1} = \mathrm{Ad}_g \circ \nu$，而且 $(\mathrm{Ad}_g \circ \nu)(\delta) = -\delta$。现在，断言 1 中的同一证明表明，$\nu(\delta) = \delta$ 且 $\mathrm{Ad}_g(\delta) = -\delta$，因为 $w\sigma_2 w^{-1}$ 是一个等距变换。特别地，Ad_g 和 ν 保持 $\mathfrak{g}'$，因此

$$c_g|_{G'} \circ \nu|_{G'} = w\sigma_2' w^{-1} = c_h \circ \mu;$$

但 $\nu|_{G'}$ 和 μ 都保持了 $\mathfrak{t}'$上的正性概念，因此 $c_{h^{-1}} \circ c_g|_{G'}$也必然如此。另一方面，再次利用 Chevalley 引理可得 $g = g_1 g_2$，其中 $g_2 \in N_G(T)$对应于 s_δ，而 $g_1 \in G'$ 对应于根反射的某个乘积 s_β，其满足 $\beta \in \Delta'$。由于 s_δ 逐点固定 $\mathfrak{t}'$，且没有非平凡的 Weyl 群元素会固定一个 Weyl 室，因此我们可知 $g_1 T' = hT'$，并且 $\nu|_{\mathfrak{t}'} = \mu|_{\mathfrak{t}'}$。特别是，

$$\mathrm{Ad}_g|_{\mathfrak{t}'} = \mathrm{Ad}_h|_{\mathfrak{t}'} = \prod_{\alpha \in w(\Omega') \cap \Delta^+} s_\alpha$$

但是 $\mathrm{Ad}_g(\delta) = -\delta$ 且 $w(\delta) = \delta$，所以 $w(\Omega) = w(\Omega') \cup \{\pm\delta\}$，从而 $\mathrm{Ad}_g|_{\mathfrak{t}} = \prod_\alpha s_\alpha$，其中 α 现在遍历 $w(\Omega) \cap \Delta^+$中的元素。由于 ν固定 δ，而 μ固定 $w(\Omega')$，我们得出结论：ν 固定 $w(\Omega)$中的元素，因此归纳法的断言得证。□

我们还将用到另一个命题的推广，该命题已在 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-对称空间中于 [HSN18], 参见 [HSN18, 命题 II.3.5]中得到证明。

推论 4.8。设 σ_1 是一个内自同构，且 $\sigma_2|_{\mathfrak{t}}$ 是一个对合。存在一种正性概念 Δ^+，使得定理 *4.7* 的结论对 $w =$ 恒等映射成立。此外，如果 β 是一个根，且 $\nu(\beta) = \beta$，则整数

$$\sum_{\alpha \in \Omega^+} \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

是偶数。如果 σ_2 也是一个内自同构，那么对于所有根 β，这个整数都是偶数。

证明。从 Δ上的任意一种正性概念 R^+ 出发。由于 $\sigma_2|_{\mathfrak{t}}$ 是一个对合， σ_1和 σ_2 满足性质 $\star$。因此，根据定理 4.7，存在一个 Weyl 群元素 w，使得$w\sigma_2 w^{-1} = c_k \circ \mu$，并且 Ad_k、μ如定理 4.7 中所述。于是 $\sigma_2 = c_g \circ \nu$，其中 $g = w^{-1}(k)$且 $\nu = w^{-1}\mu w$。注意，$\mathrm{Ad}_g|_{\mathfrak{t}}$ 表示$\prod_{\alpha \in \Omega^+} s_\alpha$，并且 μ 固定 Ω^+中的每个元素。此外， μ 置换 Δ^+ 中的根：$= w^{-1}(R^+)$，因此定理 4.7 的结论对于正性概念 Δ^+ 成立。

利用命题 4.3，将 $\mathfrak{t}$ 分解为 $\mathfrak{t} = L \oplus V$，其中$V = \bigoplus_{\alpha \in \Omega^+} \mathbb{C}H_\alpha$ 且 $L = \bigcap_{\alpha \in \Omega^+} \ker \alpha$。我们知道，$\nu$ 固定 Ω^+中的每个元素。因此，这个分解是分解为在 Ad_g和 ν作用下不变的子空间。事实上， L 恰好是 1-特征子空间，而 V 恰好是 $\mathrm{Ad}_g|_{\mathfrak{t}}$的 (-1)-特征子空间；我们还可以将 L 进一步分解为 $L = L^+ \oplus L^-$，其中 L^+ 和 L^- 分别是 ν 在 L上的 1-特征子空间和 (-1)-特征子空间。

由于 σ_1 是一个逐点固定 T 的内自同构，因此必有 $\sigma_1 = c_t$，其中 $t \in T$。现在将 t 分解为 $t = t_+ t_-$，其中 t_+ 包含于 L^+ 在指数映射下的像中，而 t_- 包含于 $L^- \oplus V$的像中。于是 $\sigma_2(t_-) = (t_-)^{-1}$ 且 $\sigma_2(t_+) = t_+$。由于σ_2 与 σ_1 可交换，因此得到

$$c_{t_+} \circ c_{t_-} = \sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ (\sigma_2)^{-1} = c_{t_+} \circ (c_{t_-})^{-1},$$

因此 c_{t_-} 必定是一个对合。任取 $\beta \in \Omega$。根据命题 4.3 σ_1 对所有 $\beta \in \Omega$ 都作用为 $-$恒等映射于$\mathfrak{g}_\beta$，而根据构造，Ad_{t_+} 在每个这样的根空间上都是恒等变换。因此，$\mathrm{Ad}_{t_-}|_{\mathfrak{g}_\beta} = -\mathrm{id}$ 也必须成立。于是，若将 t_- 写成 $t_- = \exp(X + \mathrm{i}\pi \sum_{\alpha \in \Omega^+} \frac{m_\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle} H_\alpha)$，其中

某些实系数为 m_α，且有一个元素 $X \in L^-$，并回忆命题 4.3 中指出 Ω 的元素两两正交，那么我们得到

$$-\mathrm{id} = \mathrm{Ad}_{t_-}|_{\mathfrak{g}_\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi m_\beta}.$$

This 这表明 m_β 必须是奇数。同理，写出方程 恒等映射 $=$ (伴随作用$_t$_)$^2|_{\mathfrak{g}}$

面，β其现在是任意一个根，我们得出

$$\sum_{\alpha\in\Omega^+} m_\alpha \frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} - \mathrm{i}\beta(X)$$

必须是偶数。若 β 是一个满足 $\nu(\beta) = \beta$ 的根，则 $\beta(X) = 0$，因为 $X \in L^-$，并且由于 $\frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$始终是整数而 m_α 是奇数，结论由此得出。□

5. Property ⋆ on simple Lie groups

与上一节一样，令 G 为一个紧致连通李群，并假设给定一个对合自同构 σ_1 以及 G 上的有限阶阶自同构σ_2，且它与 σ_1交换。$G^{\sigma_1} \cap G^{\sigma_2}$ 的单位连通分支记作 K，G^{σ_1} 的单位连通分支记作 K_1，而 $S \subseteq K$ 是一个任意的极大环面。回顾一下，$T_1 = Z_{K_1}(S)$是 K_1 中的一个极大环面，而 $T = Z_G(T_1)$是 G中的一个极大环面。令Δ 为相对于 $\mathfrak{t}$ 的 G-根，并令 Ω 为在 $\mathfrak{s}$上限制为零的根。本节中，我们还在 Δ上固定一个辅助正性概念 Δ^+。采用这些记号，本节的目标是证明以下对 [HSN18，命题 II.2.2]的推广。

定理 5.1。如果 G 是单的，那么对于任意根 $\alpha \in \Omega$，我们有 $\sigma_2(\alpha) = -\alpha$。

若假设 $\sigma_2|_{\mathfrak{t}}$ 是对合，则这可直接由命题 4.4 得出。然而，一般情形要复杂得多，本节余下部分将讨论这一问题。颇为有趣的是，对于同构类型不是 $\mathfrak{d}_4$的单李群 G，定理 5.1 和定理 4.7 更进一步地 表明 $\sigma_2|_{\mathfrak{t}}$ 是对合。

引理 5.2。设 $\alpha \in \Omega$，并令 $j \geq 1$ 为满足$(\sigma_2)^j(\alpha) = \alpha$的最小整数。那么，命题 *4.4* 中出现的整数 $\ell \geq 1$ 满足 $j = 2\ell$。

证明。事实上，我们有 $(\sigma_2)^{2\ell}(\alpha) = \alpha$，因此 $2\ell \geq j$。接下来注意，对于任意满足 $(\sigma_2)^r(\alpha) = -\alpha$ 的非负整数 r，必有 $r \geq \ell$；否则，$\alpha, \sigma_2(\alpha), \ldots, (\sigma_2)^{\ell-1}(\alpha)$ 将线性相关。特别地，必有 $\ell < j$；否则，我们可以将 ℓ表示为 $\ell = mj + r$，其中 $m, r \geq 0$ 和 $r < \ell$均为整数，这将推出 $(\sigma_2)^r(\alpha) = -\alpha$。类似的计算表明 $2\ell = j$。事实上，若我们将 $j = m\ell + r$ 写成某些整数m, $r \geq 0$ 的形式，其中 $r < \ell$，并为推出矛盾而假设 $2\ell > j$，那么 $m = 1$，于是我们得到

$$\alpha = (\sigma_2)^j(\alpha) = (\sigma_2)^r\big((\sigma_2)^\ell(\alpha)\big) = -(\sigma_2)^r(\alpha).$$

但这意味着 $(\sigma_2)^r(\alpha) = -\alpha$，这仍然是不可能的。 □

引理 5.3. 设 $j \geq 0$，并令 $\tau := (\sigma_2)^j$。那么 $\mathfrak{t}_1$ 包含 $\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{g}^\tau$的一个极大环面 .

证明。由于每个被 σ_2固定的点也被 τ固定，因此有 $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{g}^\tau$。所以，存在 $\mathfrak{k}_1 \cap (\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})^\tau$ 的一个极大环面 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$，其中包含 $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$。另一方面，$\tau$ 限制为 $\mathfrak{k}_1$的一个有限阶自同构 $\tau|_{\mathfrak{k}_1}: \mathfrak{k}_1 \to \mathfrak{k}_1$，因此，正如前面已经指出的，$\mathfrak{k}_1$的 $Z_{\mathfrak{k}_1}(\mathfrak{h})$ 必定是一个极大环面。但 $\mathfrak{s} \subseteq Z_{\mathfrak{k}_1}(\mathfrak{h})$，且 $\mathfrak{t}_1$ 是 $\mathfrak{k}_1$ 中包含 $\mathfrak{s}$的唯一极大环面，由此必有 $Z_{\mathfrak{k}_1}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{t}_1$，特别是 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{t}_1$。□

引理 5.4. 记 $\mathfrak{q} = [\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_1]$ 为 $\mathfrak{k}_1$ 的半单部分，并假设 Ω 非空。那么，在单李群 G 上，以下情况恰有一种成立。

(1) $\mathfrak{q}$ 包含一个 σ_2不变单理想。在这种情况下，对于所有 $\alpha \in \Omega$，$\sigma_2(\alpha) = -\alpha$。

(2) $\mathfrak{q} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ 是两个单理想 $\mathfrak{h}_1$ 和 $\mathfrak{h}_2$ 的和，它们经由 σ_2相互同构映射。此外，对于所有 $\alpha \in \Omega$，有 $\sigma_2(\alpha) = -\alpha$ 或$(\sigma_2)^2(\alpha) = -\alpha$ 。

证明。 固定 $\alpha \in\Omega^+$。由命题 4.3 可知， α 被 σ_1固定，因此 H_α 包含于 $\mathfrak{k}_1$的极大环面 $\mathfrak{t}_1$ 中。由于 K_1 是紧李群， $\mathfrak{k}_1$ 可分解为 $\mathfrak{k}_1 = Z \oplus \mathfrak{q}$，其中 Z 是 $\mathfrak{k}_1$的中心（可能是平凡的），因此我们可以相应地将 H_α 分解为 $H_\alpha = H_0 + H_s$，其中$H_0 \in Z$ 和 $H_s \in \mathfrak{q}$。

断言 1。 若 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{q}$ 是一个 μ-不变单理想， $\mu = (\sigma_2)^j$，且 $\mu|_{\mathfrak{h}}$ 是一个内自同构，则 μ 逐点固定 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{h}$ 。

根据假设，$\operatorname{rank} \mathfrak{h}^\mu = \operatorname{rank} \mathfrak{h}$。由于根据引理 5.3， $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{h}$ 包含 $\mathfrak{h}^\mu$ 的一个极大环面，因此我们看到 μ 在 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{h}$上必定是恒等变换。■

Cl目标 2. 如果 H_0 非零，那么 $\sigma_2\left(H_0\right) = -H_0$。特别地， $\left(\sigma_2\right)^{\ell}(\alpha) = -\alpha$ 当且仅当 ℓ 为奇数 .

事实上，根据对合不动点集的分类（命题 2.2），中心 $\mathfrak{k}_1$ 至多是一维的；又由于 σ_2: $\mathfrak{k}_1 \to \mathfrak{k}_1$ 是由 $\mathbb{R}$-线性映射 σ_2: $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$诱导的有限阶自同构，我们得出 H_0 必定是 σ_2 对应于特征值 1 或 -1的特征向量。但由命题 4.4 可知，对于某个 $\ell \geq 1$，$(\sigma_2)^{\ell}(\alpha) = -\alpha$ ，因此 H_0 必定是对应于特征值 -1的特征向量。■

断言 3. 如果存在一个 σ_2-不变的单理想 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{q}$ ，那么 $\sigma_2\left(\alpha\right) = -\alpha$。

首先注意到，$(\sigma_2)^2|_{\mathfrak{h}}$ 或 $(\sigma_2)^3|_{\mathfrak{h}}$ 必定逐点固定 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{h}$ 。事实上，如果 μ: $L \to L$ 是紧致单李群 L上的李群自同构，那么 μ^2 或 μ^3 是内自同构，因为外自同构群 $\operatorname{Out}(L)$ =$\operatorname{Aut}(L)/\operatorname{Int}(L)$ 同构于 $\mathfrak{l}$的 Dynkin 图的自同构群，而后者至多只具有 3 [阶的自同构（Hel01，定理 X.3.29]）。将这一观察应用于 $\sigma_2|_{\mathfrak{h}}$，我们看到，对于 $j = 2$ 或 $j = 3$，$(\sigma_2)^j|_{\mathfrak{h}}$ 必定是内自同构，因此根据断言 1，$(\sigma_2)^j$ 逐点固定 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{h}$ 。此外，如果 $\mathfrak{q}$ 不是单的，那么根据命题 2.2，我们知道 $\mathfrak{q}$ 是两个单理想之和，由此 $\mathfrak{q}$ 的另一个单理想 $\mathfrak{h}'$ 也必定是 σ_2-不变的。同样的推理表明，$(\sigma_2)^2$ 或 $(\sigma_2)^3$ 必定是 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{h}'$上的恒等变换。现在回忆 $H_\alpha = H_0 + H_s$，其中 $H_s \in \mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{k}_1$中心中的一个 H_0 元素。我们进一步将 H_s 分解为 $H_s = H + H'$，其中 $H \in \mathfrak{h}$、 $H' \in \mathfrak{h}'$，并令 $j \geq 1$ 为满足 $(\sigma_2)^j(\alpha) = \alpha$的最小数。根据引理 5.2，我们知道对于某个 $\ell \geq 1$ 有 $j = 2\ell$ ，且 $(\sigma_2)^{\ell}(\alpha) = -\alpha$，因此要证明我们的断言，只需证明 $j \leq 3$。为此，我们区分两种情形。

首先，假设 H_0 非零。根据断言 2，整数 ℓ 必须是奇数。另一方面，由于 $(\sigma_2)^6$ 在 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{h}'$ 上是恒等变换，因此可得 $j \leq 6$，于是我们必有 $j = 2$ 或 $j = 6$。然而，若假设 $j = 6$，则 H 或 H' 必有一个非零，因为 σ_2 在 $\mathbb{C} \cdot H_0$ 上的阶为 2。此外，$(\sigma_2)^3(\alpha) = -\alpha$。因此，若 H 非零，则 σ_2 在 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{h}$ 上的阶至多为 2；同理，若 H' 非零，则 σ_2 在 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{h}'$ 上的阶至多为 2。但这样一来， $j \leq 2$，矛盾。

接下来，假设 $H_0 = 0$。如果 H 或 H' 中有一个为零，那么由σ_2 在 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{h}'$上的阶至多为 3， $j \leq 3$ 可立即得到。否则，令 r、 $s \in \{2, 3\}$ 为满足 $(\sigma_2)^r(H) = H$ 且 $(\sigma_2)^s(H') = H'$ 的最小整数，并注意到 $j = \operatorname{lcm}(r, s)$。因此，如果 $r = s$，则再次可推出 $j \leq 3$。于是，为了导出矛盾，假设 r 和 s 不同。由于r、 $s \in \{2, 3\}$，这只有在 $j = 6$时才可能。但这样我们就有 $(\sigma_2)^3(\alpha) = -\alpha$，这与假设 $(\sigma_2)^r(H) = H$ 和 $(\sigma_2)^s(H') = H'$相矛盾。■

断言 4. 如果 $\mathfrak{q}$ 不含 σ_2-不变单理想，那么 $\sigma_2(\alpha) = -\alpha$ 或 $(\sigma_2)^2(\alpha) = -\alpha$.

再次利用命题 2.2，我们发现 $\mathfrak{q} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ 必须是两个单理想的和，且 $\sigma_2(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$。这意味着 $\mathfrak{h}_1$ 是 $\mu = (\sigma_2)^2$, 的不变单理想，这又意味着 $\mu|_{\mathfrak{h}_1}$、 $\mu^2|_{\mathfrak{h}_1}$ 或 $\mu^3|_{\mathfrak{h}_1}$ 是内自同构。由于 σ_2: $\mathfrak{h}_1 \to \mathfrak{h}_2$ 是李代数的同构， σ_2 在 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{h}_1$ 和 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ 上的阶必须相同，因此利用断言 1，我们得出 μ 在 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{q}$ 上的阶至多为 3。还需证明 $(\sigma_2)^4(\alpha) = \alpha$，因为根据引理 5.2，必有 $\sigma_2(\alpha)$ $= -\alpha$ 或 $(\sigma_2)^2(\alpha) = -\alpha$ 成立。为导出矛盾，假设情况并非如此。也就是说，假设 $\mu^2(\alpha) \neq \alpha$, 尤其是 $\mu(\alpha) \neq -\alpha$ 成立。这意味着 $\mu^2|_{\mathfrak{h}_1}$ 不可能是内自同构。事实上， $\mathfrak{h}_1$ 是一个 μ-不变单理想，因此如果 $\mu^2|_{\mathfrak{h}_1}$ 是内自同构，那么根据断言 1， μ^2 将逐点固定 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{h}_1$ 。但这样一来， μ^2 也会逐点固定 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ ；又由于根据断言， $2\,\mu$ 总是固定 H_0，因此 μ 也必须固定 α，而我们已假设情况并非如此。因此， $\mu|_{\mathfrak{h}_1}$ 必须是 Out($\mathfrak{h}_1$) 中的一个 3 阶元素；只有当 $\mathfrak{h}_1$ 的同构类型为 $\mathfrak{d}_4$ 时，这才有可能。类似地，我们可以看出， $\mathfrak{h}_2$ 必须属于 $\mathfrak{d}_4$ 类型。由此，根据命题 2.2， $\mathfrak{g}$ 属于 $\mathfrak{d}_8$ 类型， σ_1 是 $\mathfrak{g}$ 的内自同构，且 $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{q}$ 是半单的。特别地，Out($\mathfrak{g}$) 中的任意元素的阶都是 2，因此 $\mu = (\sigma_2)^2$ 必须是 $\mathfrak{g}$ 的内自同构。

根据这些观察，我们现在可以用两种不同的方法计算 $|\Omega^+|$ 。首先注意，映射 $(\mathfrak{h}_1)^\mu \to (\mathfrak{k}_1)$ $^{\sigma_2}$, $X \mapsto X + \sigma_2(X)$ 是一个同构，因此 rank $(\mathfrak{h}_1)^\mu$ = dim $\mathfrak{s}$。由于 $\mu|_{\mathfrak{h}_1}$ 是同构类型为 $\mathfrak{d}_4$的李代数上的一个阶为 3 的外自同构，可知 $(\mathfrak{h}_1)^\mu$ 是一个秩为 2 的李代数（命题 2.1），从而 dim $\mathfrak{s} = 2$。由推论 4.5，因$|\Omega^+| \leq$ rank $\mathfrak{g}$ − dim $\mathfrak{s}$，这意味着 Ω^+ 至多含有 6 个元素。另一方面，根据引理 5.3，存在一个 $\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{g}^\mu$的极大环面 $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{t}_1$ ；若令 Γ为在 $\mathfrak{u}$上消失的 $\mathfrak{g}$-根，则可将推论 4.5 应用于内自同构 σ_1,μ，从而得出 $|\Gamma^+|$ = rank $\mathfrak{g}$ − dim $\mathfrak{u}$。由于 dim $\mathfrak{u}$ = rank $(\mathfrak{h}_1)^\mu$ + rank $(\mathfrak{h}_2)^\mu$，可知 dim $\mathfrak{u} = 4$ ，因此 $|\Gamma^+| = 4$。此外，因为 $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{u}$，所以有 $\Gamma^+ \subseteq \Omega^+$。然而， α 不可能包含在 Γ^+中。事实上，若 α 在 $\mathfrak{u}$上消失，则可应用引理 5.2，得出满足 $\mu^j(\alpha) = \alpha$ 的最小数 j 为偶数。由于 $\mu|_{\mathfrak{t}_1}$ 的阶为 3，这将推出 $j = 2$，矛盾。因此， $\alpha \in \Omega^+ - \Gamma^+$。再次应用引理 5.2，可知 $(\sigma_2)^3(\alpha) = -\alpha$，且 6 是满足 $(\sigma_2)^j(\alpha) = \alpha$的最小整数 j。但根据引理 5.2，根 α, $\sigma_2(\alpha)$ 和 $(\sigma_2)^2(\alpha)$ 必须线性无关；又由于 Γ 是一个 σ_2 不变子集，这意味着 $\Omega^+ - \Gamma^+$ 至少含有 3 个元素。因此 $|\Omega^+| \geq 7$，由此得到所需的矛盾。□

引理 5.5。若 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{a}_n$ 型， $n \geq 1$，则对所有 $\alpha \in \Omega$， $\sigma_2(\alpha) = -\alpha$ 。

证明。假设存在一个根 $\alpha \in \Omega$，使得 $\sigma_2(\alpha) \neq -\alpha$ ，以导出矛盾。根据引理 5.4，这只有在 $\mu($ $\alpha) = -\alpha$ 时才可能，其中 $\mu = (\sigma_2)^2$, ，并且若进一步 $\mathfrak{q} := [\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_1]$ 分解为两个单理想 $\mathfrak{h}_1$、 $\mathfrak{h}_2$ 之和，且它们在 σ_2 的作用下同构映射到彼此。我们运用单李代数上对合的分类（命题 2.2），推得 σ_1 是一个内自同构， $\mathfrak{k}_1 = Z \oplus \mathfrak{q}$ 具有一维中心 Z，且 $\mathfrak{h}_1$和 $\mathfrak{h}_2$ 是 $\mathfrak{a}_k$ 型，其中 $k \geq 1$ 为某个数。特别地， $n = 2k + 1$。

由于 Out(G) 是 2 阶循环群， μ必为内自同构。因此，若记 Γ 为在 $(\mathfrak{k}_1)^\mu$ 的极大环面 $\mathfrak{u} = \mathfrak{t}^\mu$ 上消失的 $\mathfrak{g}$- 根，则由推论 4.5，dim $\mathfrak{u} = n - |\Gamma^+|$ 。我们还由引理 5.4 得知， σ_1、 μ 满足性质 $\star$，因为 $\Gamma \subsetneq \Omega$。定理 4.7 随即表明， $\mu|_{\mathfrak{t}}$ 是一个对合，因此由推论 4.8 可知，该整数

$$\sum_{\alpha \in \Gamma^+} \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

对于所有 $\mathfrak{g}$-根 β 都是偶数。于是，HSN18 中的分类，例 II.4.11] ，适用，并表明 $|\Gamma^+| = k + 1$。因此，dim $\mathfrak{u} = k$ 且 rank $(\mathfrak{k}_1)^\mu = k$。如果 $\mathfrak{h}_i$ 属于类型 $\mathfrak{a}_k$，且 $k = 2r$

为偶数，则

$$2r = k = \operatorname{rank}(\mathfrak{k}_1)^\mu = 2 \cdot \operatorname{rank}(\mathfrak{h}_1)^\mu + 1,$$

因为 μ 逐点固定 Z。但我们也不可能有 $k = 2r-1$。事实上，我们知道 $\mu|_{\mathfrak{h}_i}$ 不可能是内自同构；否则，根据引理 5.3， μ 将逐点固定 $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}_i$，从而固定 $\mathfrak{t}$的全部元素。这意味着 $(\mathfrak{h}_i)^\mu$ 的秩为 r，因为 $\mathfrak{h}_i$ 是 $\mathfrak{a}_{2r-1}$ 型（见命题 2.1），而

$$2r - 1 = k = \operatorname{rank}(\mathfrak{k}_1)^\mu = 2 \cdot \operatorname{rank}(\mathfrak{h}_1)^\mu + 1 = 2r + 1,$$

这又导致矛盾。 □

众所周知，在抽象（约化）根系中，沿单根α 的反射 s_α 会置换除 α之外的所有正根。

引理 5.6。 设$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, \Delta)$ 是一个抽象根系， Δ^+ 是正根的一种选取， Φ是相应的单根集。固定 $\alpha \in \Phi$。若 *Weyl* 群元素满足 $w(\alpha) = -\gamma$，且对所有 $\beta \in \Phi - \{\alpha\}$ 以及某个正根 γ，都有 $w(\beta) \in \Delta^+$，则必有 $\gamma = \alpha$ 和 $w = s_\alpha$。

证明。 定义两个开魏尔室 C_+ 和 C_- 如下:

$$C_\pm := \big\{v \in V \mid \langle \pm\alpha, v\rangle > 0\big\} \cap \bigcap_{\beta \in \Phi - \{\alpha\}} \big\{v \in V \mid \langle \beta, v\rangle > 0\big\}.$$

注意，若 $v \in C_+$ 是任意的，则对所有 $\beta \in \Phi - \{\alpha\}$，都有 $\langle \beta, w^{-1}(v)\rangle > 0$，因为根据假设， $w(\beta)$ 是一个正根。另一方面， $w(\alpha) = -\gamma$ 是一个负根，因此可知 $w^{-1}(C_+) = C_-$。但当 $\beta \in \Phi - \{\alpha\}$ 时， $s_\alpha(\beta)$ 也是一个正根，因为 α 和 β 是单根（见 [Hum78，引理 10.2.B]），且 $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$。因此， $s_\alpha(C_+) = C_-$ 也成立。由于 Weyl 群在开魏尔室集合上简单传递地作用（参见 [Hum78，定理 10.3]），所以必有 $w = s_\alpha$，特别是 $w(\alpha) = -\alpha$。 □

引理 5.7。 若 $\mathfrak{g}$ 属于 $\mathfrak{d}_n$ 型， $n \geq 4$，则对所有 $\alpha \in \Omega$， $\sigma_2(\alpha) = -\alpha$ 。

证明。 与引理 5.5 的证明一样，我们采用反证法的逆否形式。因此，假设存在一个根 $\alpha \in \Omega$，使得 $\sigma_2(\alpha) \neq -\alpha$ ，以导出矛盾。根据引理 5.4，这只有在$\mu(\alpha) = -\alpha$时才可能，其中 $\mu = (\sigma_2)^2$,，且 $[\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_1] = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$是两个单理想 $\mathfrak{h}_1$、 $\mathfrak{h}_2$之和，并且它们经由 σ_2互相同构映射。令 Γ 为在 $\mathfrak{g}^{\sigma_1} \cap \mathfrak{g}^\mu$的极大环面 $\mathfrak{u} = \mathfrak{t}^\mu$ 上消失的根。

断言 1。 自同构 σ_1 是内自同构， $n = 2r$, $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$，且 $\mathfrak{h}_i \cong \mathfrak{d}_r$。

由命题 2.2 可知，要么 $\mathfrak{h}_i \cong \mathfrak{b}_r$、 $n = 2r+1$和 σ_1 是一个外自同构；要么 $\mathfrak{k}_1$ 是半单的， $\mathfrak{h}_i \cong \mathfrak{d}_r$，且 σ_1 是一个内自同构。在第一种情况下， $\mu|_{\mathfrak{h}_i}$ 必须是一个内自同构，因为 $\mathfrak{b}_r$ 型李代数的外自同构群是平凡的（见 [Hel01，定理 IX.5.4] 和 [Hel01，定理 X.3.29]）。由引理 5.3，这意味着 μ 在 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{h}_i$ 上是恒等变换，因此在 $\mathfrak{t}_1$ 上也是恒等变换。于是，由于 $\dim \mathfrak{t} = \dim\ \mathfrak{t}_1 + 1$， Γ^+ 中至多有一个根。但这是不可能的，因为 Γ^+ 是 σ_1 不变的，而且根据引理 5.2， α 和 $\sigma_1(\alpha)$ 线性无关。■

断言 2. 自同构 μ 是内自同构。

反设 μ 不是内的。由于当且仅当 $n = 4$ 时，Out(G) 同构于 3 个元素上的置换群；否则同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，并且因为 $\mu = (\sigma_2)^2$,，我们可知 $n = 4$，且 σ_2 和 μ 都代表 Out(G) 中的 3 阶元素。特别地，根据命题 2.1， $\mathfrak{g}^\mu$ 是秩为 2 的李代数。另一方面，我们知道 $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ 是两个单理想之和，它们被 σ_2 置换，且 $\mathfrak{h}_i$ 的同构类型等于$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$。因此，$(\mathfrak{h}_i)^\mu$ 的秩为 1 或 2，相应地，$(\mathfrak{k}_1)^\mu$ 的秩为 2 或 4。现在

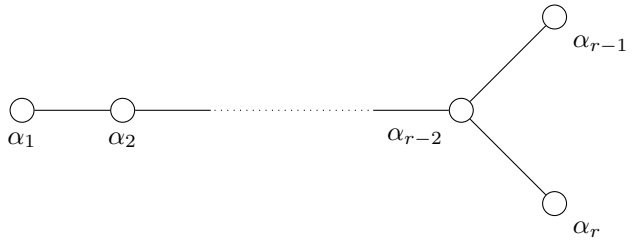

FIGURE 1. 根系的 Dynkin 图 $\mathfrak{d}_r$.

由于 $(\mathfrak{k}_1)^\mu \subseteq \mathfrak{g}^\mu$，且后者是秩为 2 的李代数，因此可知 $(\mathfrak{k}_1)^\mu$ 的秩也必为 2。特别地，$\mathfrak{s}$ 也是 $\mathfrak{g}^\mu$ 的极大环面。但这样一来，$\mathfrak{s}$ 必定含有关于 $\mathfrak{g}$-根 [的正则元（Hel01，引理 X.5.3], ），这意味着没有 $\mathfrak{g}$-根能在 $\mathfrak{s}$上消失。然而，这与我们的假设 $\Gamma \neq \emptyset$矛盾。■

断言 3. 按照图*1*中的方式给单根编号，存在一个 *Weyl* 群元素 $w \in W(G,T)$ 使得 $w(\Gamma) = \{\pm\alpha_1, \pm\delta\}$。特别地，若 $n > 4$，则 α_1 在非平凡的 *Dynkin* 图自同构下保持不变。

由于 $\Gamma \subseteq \Omega$，根据引理 5.4，我们知道 σ_1 和 μ 满足性质 $\star$。因此，根据定理 4.7，并且在必要时用一个 Weyl 群元素共轭 σ_1 和 μ 之后，我们有 $\mu = \mu_1 \circ \mu_2$，其中μ_1 是 G的一个内自同构，它在 $\mathfrak{t}$上表示 Weyl 群元素 $\prod_{\beta\in\Gamma^+} s_\beta$，而 μ_2 是一个置换正 $\mathfrak{g}$根的自同构。注意，μ 在 Out(G) 中表示非平凡元素，当且仅当 μ_2 如此。由于 μ 是内自同构，因此可知 μ_2是一个置换正 $\mathfrak{g}$ 根的内自同构。因此，μ_2 逐点固定 $\mathfrak{t}$，并且$\mu|_{\mathfrak{t}} = \prod_{\beta\in\Gamma^+} s_\beta$。特别地，$\mu|_{\mathfrak{t}}$ 是一个对合。

这意味着 μ^2 逐点固定 $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}_i$。由于 $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}_i$ 是 $\mathfrak{h}_i$的极大环面，$(\mu|_{\mathfrak{h}_i})^2$ 必为内自同构，因此 $\mu|_{\mathfrak{h}_i}$ 在 Out($\mathfrak{h}_i$) 中表示一个 2 阶元素。利用 $\mathfrak{h}_i$ 是 $\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$ 型的李代数（若 $r = 2$），$\mathfrak{a}_3$ ($r = 3$) 或 $\mathfrak{d}_r$ ($r \geq 4$)，并且 $\mu|_{\mathfrak{h}_i}$ 不是内自同构（否则 μ 将已经逐点固定 $\mathfrak{t}$），我们由此得出结论：$(\mathfrak{h}_i)^\mu$ 是秩为 $r-1$的李代数。因此，$(\mathfrak{k}_1)^\mu$ 是秩为 $2r-2 = n-2$ 且维数为 $\mathfrak{u} = n-2$的李代数。现在由推论 4.5 可知，Γ^+ 恰好包含两个元素。

最后，我们注意到推论 4.8 使我们能够应用 HSN18 中例 II.4.12] 给出的 $\mathfrak{d}_n$ 型李代数的强正交根集分类。考察这一分类，我们立即发现，经过一个 Weyl 群元素的作用后，Γ^+ 具有所声称的形式。事实上，根据这一分类，Γ^+ 要么包含 n 个元素，这是不可能的；要么必定是如下形式的集合

$$\{\alpha_1, \delta_1, \alpha_3, \delta_3, \ldots, \alpha_{2t-1}, \delta_{2t-1}\},\ \{\delta_1, \delta_3, \ldots, \delta_{n-3}, \gamma\}.$$

这里，α_1、.....、α_n是单根，编号方式如图1所示；δ_i是由 $\Delta \cap \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{\alpha_i, \ldots, \alpha_n\}$确定的（$\Delta$、$\mathrm{it}_{\mathbb{R}}$）的根子系的最高根，且 $\gamma \in \{\alpha_{n-1}, \alpha_n\}$。此外，整数 t 满足 $2t-1 < n-2$。因此，Γ^+ 要么是第一种形式且 $t = 1$，要么 $n = 4$ 且 Γ^+是第二种形式。在这两种情况下，Γ^+ 均如断言所述，因为 δ_1 是最高根。■

根据前面的断言，我们可以假设 $\Gamma^+ = \{\alpha_1, \delta\}$，其中 α_1，.....，α_n 按图1所示枚举，且 δ 是最高根。令 $\sigma_2 = c_g \circ \nu$ 为某个元素 $g \in N_G(T)$以及 G 的某个自同构，其中 $\nu(\Delta^+) = \Delta^+$。另考虑集合 $\Delta' \subseteq \Delta$，它由所有与 α_1 和 δ正交的根组成，并令 $\mathfrak{t}' = \sum_{\beta\in\Delta'} \mathbb{C}H_\beta$，将 $\mathfrak{g}'$ 定义为李

子代数

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{t}' \oplus \bigoplus_{\beta \in \Delta'} \mathfrak{g}_\beta$$

$\mathfrak{g}$。这个李代数是半单的，因此，具有李代数 $\mathfrak{g}'$ 的 G 的连通子群 G' 是紧致的，我们将 σ_i 在 G' 上的限制记为 σ_i': $G' \to G'$。

断言 4. ν 逐点固定 Γ^+。

当 δ 时，这显然成立，因为任何置换正单根的自同构都必须固定最高根。此外，若 $n > 4$，则断言 3 的部分内容是： α_1 在单根上的非平凡 Dynkin 图自同构作用下不变，因此在这种情况下， ν 也固定 α_1。因此，我们可以假设 $n = 4$。通过逆否推理，我们还假设 $\nu(\alpha_1) \neq \alpha_1$。根据定理 4.7，存在 $w' \in W(G', T')$，使得 $w'(\sigma_2')(w')^{-1} = c_{g'} \circ \nu'$ 是一个自同构与一个内自同构的复合：前者 ν' 置换正根（Δ'）$^+|_{t'}$，后者 $c_{g'}$ 在 $\mathfrak{t}'$ 上是若干与 ν' 对易的根反射的乘积。由于 w' 可扩张到 G，且逐点固定 Γ^+，不妨设 $w' =$恒等映射（注意，用 w' 共轭 σ_2 会改变 g，但不会改变 ν）。此外，由于 $\mathfrak{g}$ 属于 $\mathfrak{d}_4$ 型，我们以如下方式枚举 $\mathfrak{g}$ 的单根 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$： α_2 是唯一一个不与 δ 正交的单根。于是，$(\Delta')^+ = \{\alpha_3, \alpha_4\}$，且 $\mathfrak{g}'$ 是一个 $\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$ 型李代数，这两个理想分别是 $j = 3$ 对应的 $\mathbb{C}H_{\alpha_j} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_j} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_j}$，4。因此，由于 $\dim \mathfrak{s} = 1$，可知要么 $\sigma_2' = \mathrm{Ad}_{g'}$ 恰为一个根反射，要么 $\sigma_2' = \nu'$ 且 ν' 交换 $\mathfrak{g}'$ 的理想。我们分别讨论这两种情况，并证明它们都会导致矛盾。

首先，假设 σ_2' 交换了 $\mathfrak{g}'$的理想。由于 ν' 置换了 $\mathfrak{g}'$的单根$\{\alpha_3|_{t'}, \alpha_4|_{t'}\}$，这意味着 σ_2 交换了 α_3 和 α_4。因为 ν 不固定 α_1，所以对 $i \in \{3, 4\}$，有$\nu(\alpha_1) = \alpha_i$；不失一般性，可假设 $i = 3$。由于 ν 和σ_2 在 Out(G) 中表示同一个元素，且根据断言 2， $\mu = (\sigma_2)^2$ 是一个内自同构，因此 $\nu^2|_{\mathfrak{t}} = \mathrm{id}$， ν 置换两个单根并固定其余单根。因此， $\nu(\alpha_3) = \alpha_1$，并且

$$\alpha_4 = \sigma_2(\alpha_3) = \mathrm{Ad}_g(\alpha_1).$$

类似地，由于 $\nu(\alpha_4) = \alpha_4$，我们有 $\mathrm{Ad}_g(\alpha_4) = \alpha_3$。现在注意，根据引理 5.2， Γ 由 σ_2 构成一个单独的轨道。因此，要么 $\sigma_2(\alpha_1) = \delta$ 且 $\sigma_2(\delta) = -\alpha_1$，要么 $\sigma_2(\alpha_1) = -\delta$ 且$\sigma_2(\delta) = \alpha_1$。第一种情况推出 $\mathrm{Ad}_g(\alpha_3) = \delta$，因此 Ad_g 将 α_1、 α_4 和 α_3 映到正根上。根据引理 5.6，$\mathrm{Ad}_g(\alpha_2)$ 不可能是负根，所以 $\mathrm{Ad}_g(\alpha_2)$也必为正根。但这样一来， $g \in T$，特别是 $\mathrm{Ad}_g|_{\mathfrak{t}} =$id，这就产生了矛盾。在第二种情况下，元素 $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}$将 α_1、 α_4、 α_3 映到正根上，我们再次得到矛盾。因此， σ_2 不能交换 α_3 和 α_4。

现在假设 $\sigma_2'|_{t'}$ 是一个根反射。由于 $\Delta' = \{\alpha_3, \alpha_4\}$，不妨在必要时重新命名 α_3 和 α_4，使得 $\sigma_2(\alpha_3) = -\alpha_3$ 且 $\sigma_2(\alpha_4) = \alpha_4$。我们已经看到， ν 必须是 $\mathfrak{t}$ 上的一个 2 阶自同构，因此要么 $\nu(\alpha_1) = \alpha_3$，要么 $\nu(\alpha_1) = \alpha_4$。在第一种情况下，$\nu(\alpha_4) = \alpha_4$，因此 $\mathrm{Ad}_g(\alpha_4) = \alpha_4$。根据 Chevalley 引理， [Kna02，命题 2.72], Ad_g 必定是由满足 $\beta \in \{\alpha_1, \alpha_3, \delta\}$ 的根 β 构成的乘积。注意，这些根两两正交；另一方面，由于 ν 固定 δ，我们还有 $\mathrm{Ad}_g(\delta) = \pm\alpha_1$。但这类根的任何乘积 β 都不能将 δ 映到 $\pm\alpha_1$，因此这种情况不可能成立。若假设 $\nu(\alpha_1) = \alpha_4$，则 $\mathrm{Ad}_g(\alpha_3) = -\alpha_3$。同样，由 Chevalley 引理可知，$\mathrm{Ad}_g$ 是 s_{α_3} 与满足 $\beta \in \{\alpha_1, \alpha_4, \delta\}$ 的根 β 的乘积；同样，从这一描述可知，Ad_g 不可能将 δ 映到 $\pm\alpha_1$。■

该引理的论证现如下。由于根据断言 4， ν 保持 $\mathfrak{t}'$ 不变，伴随作用 g 也必保持 $\mathfrak{t}'$ 不变。因此，若我们写作 $\sigma_2' = c_{g'} \circ \nu'$，其中同样 ν' 是一个自同构

在 $\mathfrak{g}'$ 上置换正根 $(\Delta')^+|_{\mathfrak{t}'}$ 以及 $g' \in N_{G'}(T')$，则

$$(\mathrm{Ad}_g)|_{\mathfrak{t}'} \circ \nu|_{\mathfrak{t}'} = \sigma_2' = c_{g'} \circ \nu'.$$

根据构造，$\nu|_{\mathfrak{t}'}$ 和 ν' 保持在 $\mathfrak{g}'$-根上选定的正性概念，因此 $\mathrm{Ad}_{g^{-1}g'}|_{\mathfrak{t}'}$ 置换 $\mathfrak{g}'$ 的单根 $\alpha_3|_{\mathfrak{t}'}$、...、$\alpha_n|_{\mathfrak{t}'}$。也就是说，$w = \mathrm{Ad}_{g^{-1}g'}|_{\mathfrak{t}}$ 是一个置换 $\{\alpha_3, \ldots, \alpha_n\}$ 的 Weyl 群元素。另一方面，由于 $\mathrm{Ad}_{g'}$ 逐点固定 Γ^+，我们看到，$(\sigma_2)^{-1}$ 在 Γ^+ 上与 w 一致，因此要么 $w(\alpha_1) = \delta$ 且 $w(\delta) = -\alpha_1$；要么 $w(\alpha_1) = -\delta$ 且 $w(\delta) = \alpha_1$。在第一种情形中，w 将除 α_2 以外的所有单根都映为正根，因此，如果 $w(\alpha_2)$ 是正根，则 $w = \mathrm{id}$；而如果 $w(\alpha_2)$ 是负根，则由引理 5.6 得 $w = s_{\alpha_2}$。因此，第一种情形不可能成立。于是设第二种情形成立。回忆 $\mathfrak{g}$ 属于 $\mathfrak{d}_n$ 型，因此最高根 δ 是 $\delta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \gamma$，其中 $\gamma \in$张成 $_{\mathbb{Z}}\{\alpha_3, \ldots, \alpha_n\}$，例如参见 Hum78，表 2，第 III.12 节。2]我们有

$$\alpha_1 = w(\delta) = -\delta + 2w(\alpha_2) + w(\gamma),$$

并且我们已经看到，$w(\gamma)$仍包含在 α_3、.....、α_n的张成空间中。因此，$w(\alpha_2)$中的系数 $m_1 = \sum_j m_j \alpha_j$ 必定等于 1，从而 $w(\alpha_2)$是一个正根。但这同样不可能，因为根据引理 5.6，现在必有 $w = s_{\alpha_1}$。□

定理 *5.1* 的证明。令 $\mathfrak{k}_1$的半单部分为 $\mathfrak{q} = [\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_1]$。根据引理 5.4，我们可以假设 $\mathfrak{q} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ 是两个在 σ_2作用下互换的单理想之和。令 $\mu = (\sigma_2)^2$。假设 $\mu|_{\mathfrak{h}_i}$ 是一个内自同构。根据引理 5.3，μ 逐点固定 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{h}_i$，因此 μ逐点固定 $\mathfrak{t}_1$ 的全部元素，因为 $\mathfrak{k}_1$ 的中心至多为一维。对每个根 $\alpha \in \in \Omega$，向量 H_α 在 σ_1 作用下不变（命题 4.3），故 $H_\alpha \in \mathfrak{t}_1$，于是根据命题 4.4，对所有 $\alpha \in \in \Omega$，都有 $\mu(\alpha) = \alpha$ 以及 $\sigma_2(\alpha) = -\alpha$。因此，我们可以假设$\mu|_{\mathfrak{h}_i}$ 不是内自同构。只有当 $\mathfrak{h}_i$ 属于 $\mathfrak{a}_n$、$\mathfrak{d}_n$ 或 $\mathfrak{e}_6$类型时，这才有可能。根据对合不动点集的分类（命题 2.2），李代数 $\mathfrak{g}$ 必定属于 $\mathfrak{a}_n$ 或 $\mathfrak{d}_n$类型，于是由引理 5.5 和引理 5.7 即得所述结论。□

6. Isotropy formality in case that σ_1 and σ_2 are of the same type同类型

设 G 是一个紧致连通李群，σ_1、σ_2 是定义 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_k$ 作用于 G 的自同构。我们沿用前几节的记号。因此，σ_1 是一个对合，K_1 是其不动点集的连通分支，$K = (G^{\sigma_1} \cap G^{\sigma_2})_0$，，而 $S \subseteq K$ 是一个极大环面。我们在 K_1 和 G 中首选的极大环面分别为 $T_1 = Z_{K_1}(S)$ 和 $T = Z_G(T_1)$。若 G 是单的，我们已在定理 4.7 和 5.1 中建立了 σ_2 的标准形（模共轭），利用这一标准形，我们现在将证明数对 (G, K) 具有各向同性形式。这将证明 G 为单时的定理 1.1，进而由定理 3.1 得出对任意李群均成立。我们将定理 1.1 中关于单 G 的证明分为三种情形：σ_1 和 σ_2 同为内或同为外；σ_1 为外而 σ_2 为内；以及最后一种情形，即 σ_1 为内而 σ_2 为外。最后一种情形的证明仍将大量运用对合不动点集的分类（命题 2.2），而第一种情形对其运用较少，并由以下观察引出。

根据定理 4.7，σ_2 是若干根反射 s_α 与 G 的一个自同构 ν 的复合，该自同构由 Dynkin 图的一个自同构诱导。此外，此复合中的各因子彼此可交换。因此，若 $\nu|_{\mathfrak{t}}$ 的阶至多为 2——例如，当 $\mathfrak{g}$ 为单且其同构类型不同于 $\mathfrak{d}_4$时，情况总是如此——那么 $\sigma_2|_{\mathfrak{t}}$ 的阶也至多为 2。因此，一个自然的问题是，能否从 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-对称空间的各向同性作用的等变形式性，推导出（$G$，$K$）的各向同性形式性。注意，尽管对每个根 α，s_α：$\mathfrak{t} \to \mathfrak{t}$ 都是一个对合，但未必能用 $g \in N_G(T)$中的某个元素表示$s_\alpha \in W$（G，T），且该元素在整个 G上都是对合。这与正合列 $0 \to T \to N_G(T) \to W(G, T) \to 0$ 未必分裂这一事实有关

[AH17]。因此，没有理由认为 σ_2 通常可以由一个对合表示。不过，若 σ_1 和 σ_2 在 Out(G) 中表示同一个自同构，则可以根据关于 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-对称空间的已知结果，推导出（$G$，$K$）的各向同性形式性。

定理 6.1。设 $\sigma_1 \circ (\sigma_2)^{-1}$ 是内自同构，且 σ_1、σ_2 满足性质 $\star$。则 (G, K)是各向同性形式的。

引理 6.2。在定理 *6.1* 的假设下，存在一种正性概念 Δ^+，使得 $\sigma_1 = \nu$ 和 $\sigma_2 = c_g \circ \nu$，其中 伴随作用$g|_{\mathfrak{t}} = \prod_{\alpha \in \Omega^+} s_\alpha$，并且 ν 是 G的一个自同构，它逐点固定Ω 并置换 Δ^+。

证明。由于 $\mathfrak{t} = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_1)$，在 Δ 上存在一种正性概念 Δ^+，且该正性概念在 σ_1作用下保持不变。现在应用定理 4.7，选取元素 $w \in W(G, T)$，使得

$$w\sigma_2 w^{-1}|_{\mathfrak{t}} = \prod_{\alpha \in \tilde{\Omega}^+} s_\alpha \circ \nu|_{\mathfrak{t}}$$

对于 $\tilde{\Omega} = w(\Omega)$以及某个自同构 $\nu\colon\ G \to G$，该自同构置换 Δ^+，并固定$\tilde{\Omega}^+$中的每个元素。注意，对于某个 $k \in N_G(T)$，有 $w^{-1}\nu w = c_k \circ \nu$。因此，我们得到，对于某个元素 $g \in N_G(T)$，有 $\sigma_2 = c_g \circ \nu$。 $\sigma_1 \circ (\sigma_2)^{-1}$ 是内自同构这一假设意味着$\sigma_1 \circ \nu^{-1}$ 是内的。但是， $\sigma_1 \circ \nu^{-1}$ 保持 Δ^+不变，因此 $\sigma_1 \circ \nu^{-1}$ 是逐点固定 T 的内自同构。所以，如有必要，将 ν 替换为某个 $t \in T$ 对应的 $c_t \circ \sigma_1$ 后，我们可以假设$\sigma_1 = \nu$，并且 $\sigma_2 = c_g \circ \nu$。特别地，由上述对 $w\sigma_2 w^{-1}|_{\mathfrak{t}}$ 的描述可知，$\sigma_2|_{\mathfrak{t}}$ 是一个对合。现在证明 $\mathrm{Ad}_g|_{\mathfrak{t}}$ 是若干个彼此对易且与$\nu|_{\mathfrak{t}}$对易的根反射之积。令 $r := \prod_{\alpha \in \Omega^+} s_\alpha$ 以及 $f := w^{-1} \circ \nu|_{\mathfrak{t}} \circ w \circ (\nu|_{\mathfrak{t}})^{-1}$。于是得到

$$\sigma_2|_{\mathfrak{t}} = \prod_{\alpha \in \Omega^+} s_\alpha \circ w^{-1} \circ \nu \circ w = r \circ f \circ \nu.$$

首先，我们证明 f 保持空间 $V \overset{\alpha \in \Omega^+}{=} \bigcap_{\alpha \in \Omega^+} \ker \alpha$ 不变。事实上，若 $\beta \in \Omega$ 任意，则由于 $\sigma_1 = \nu$，根据命题 4.3，我们有 $\nu(\beta) = \beta$。由于根据假设， σ_1 和 σ_2 满足性质 $\star$，我们也有 $-\beta = \sigma_2(\beta)$，这表明 $f(\beta) = \beta$，因为$r(\beta) = -\beta$，且 r 是一个双射。根据命题 4.3，$\mathfrak{t} = V \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Omega^+} \mathbb{C}H_\alpha$，又由于 f 是等距变换，我们得出 $f(V) = V$。接下来，我们证明 $f \circ \nu|_{\mathfrak{t}} = \nu|_{\mathfrak{t}} \circ f^{-1}$。事实上，由于$f(V) = V$，且 $r|_V = \mathrm{id}_V$，我们看到 f和 r 可交换。另一方面，由于 $\sigma_2|_{\mathfrak{t}}$、r和 ν 都是对合，且 r 与 $\nu = \sigma_1$可交换，我们还有

$$\mathrm{id}_{\mathfrak{t}} = (r \circ f \circ \nu|_{\mathfrak{t}}) \circ (r \circ f \circ \nu|_{\mathfrak{t}}) = f \circ \nu|_{\mathfrak{t}} \circ f \circ (\nu|_{\mathfrak{t}})^{-1},$$

这就表明 $f \circ \nu|_{\mathfrak{t}} = \nu|_{\mathfrak{t}} \circ f^{-1}$。现在将 $V = V^+ \oplus V^-$ 分解为对合 $\nu|_{\mathfrak{t}}$的 1-特征子空间和 (-1)-特征子空间。我们断言， f 也保持 V^+ 和 V^-不变。为此，回想一下， σ_2 与 σ_1可交换，因此 σ_2 保持 V^+ 和 V^-不变。然而， $r|_V =$ 是恒等映射，且 ν 保持 V^+和 V^-不变，因此 f也必然如此。由此我们可以证明 f必定是一个对合。事实上，若 $v \in V$ 是 ν 对应特征值 λ的特征向量，则

$$\lambda \cdot f(v) = f(\nu(v)) = \nu(f^{-1}(v)) = \lambda \cdot f^{-1}(v),$$

由此得到 $f^2|_V =$ 恒等映射$_V$。正如我们已经看到的， f固定每个满足 $\beta \in \Omega$ 的向量 H_β，因此可知 f 是一个对合。特别地， $f \circ \nu|_{\mathfrak{t}} = \nu|_{\mathfrak{t}} \circ f$。

但请注意， $f \in W(G, T)$，因为 ν保持 T不变；而且 Weyl 群元素只有在它是若干个彼此可交换的根反射的乘积时，才可能是对合，参见 [Kna02，问题 II.12.13]。因此，对于某组根 Φ，有 $f = \prod_{\alpha \in \Phi} s_\alpha$。然而，若 $\alpha \in \Phi$，则对任意$X \in \mathfrak{s}$，我们有

$$\langle H_\alpha, X \rangle = \langle \sigma_2(H_\alpha), X \rangle = \langle (r \circ f \circ \nu)(H_\alpha), X \rangle = -\langle H_\alpha, X \rangle,$$

因为 r和 σ_1是 $\langle \cdot, \cdot \rangle$的等距变换，它们固定 $\mathfrak{s}$并与 f可交换。这表明 α在 $\mathfrak{s}$上的限制为零，因此 $\Phi \subseteq \Omega$；根据命题 4.4，这只有在 $\Phi = \emptyset$时才可能。□

定理 *6.1* 的证明。我们按照引理 6.2 选择一种正性概念 Δ^+。因此，对于一个将 Δ^+ 置换且固定 Ω 中每个根的自同构 ν，有 $\sigma_1 = \nu$ 和 $\sigma_2 = c_g \circ \nu$。此外，$\mathrm{Ad}_g|_{\mathfrak{t}}$ 是根反射 s_α 的乘积 $\prod_{\alpha \in \Omega^+} s_\alpha$，其中 $\alpha \in \Omega^+$。

由于 $\nu = \sigma_1$ 与 σ_2 交换，我们有 $c_g \circ \nu = \nu \circ c_g$，故 ν 与 c_g 交换。众所周知（例如参见 Kna02 定理 IV.4.54] 或下文命题 6.4），每个根反射 s_α 都可以表示为 $\exp(E_\alpha + E_\alpha)$，其中某个元素 $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$。现在，我们为每个 $\alpha \in \Omega^+$ 选取这样一个元素$x_\alpha \in N_G(T)$。由于对于所有 $\alpha \in \Omega$，$\mathfrak{g}_\alpha$ 都包含在 ν 的（-1）特征子空间中（命题 4.3），因此我们有 $\nu(x_\alpha) = (x_\alpha)^{-1}$。于是令 $x = \prod_{\alpha \in \Omega^+} x_\alpha$，这是一个定义良好的表达式，因为根据命题 4.3，此乘积的各因子彼此交换。如前所述，g 与 x 表示同一个 Weyl 群元素。因此存在某个 $t \in T$ 使得 $g = xt$；又因为 $\mathfrak{t}$ 分解为对合 ν 的 1 特征子空间和（-1）特征子空间，我们相应地可将 t 分解为 $t = t_+ t_-$，其中 $\nu(t_+) = t_+$，且 $\nu(t_-) = (t_-)^{-1}$。接着考虑元素 $h := g \cdot (t_+)^{-1}$。由于 $\nu(t_+) = t_+$，我们仍有 $c_h \circ \nu = \nu \circ c_h$，也就是说，$\nu$ 与 $\tau_2 := c_h \circ \nu$ 交换。此外，我们有

$$\begin{aligned} h \cdot \nu(h) &= (xt_-) \cdot \nu(xt_-) \\ &= (xt_-) \cdot (xt_-)^{-1}, \end{aligned}$$

这意味着 τ_2 是一个对合。事实上，ν 是一个对合，因此

$$\begin{aligned} (\tau_2)^2 &= c_{h\nu(h)} \circ \nu^2 \\ &= \mathrm{id}. \end{aligned}$$

我们断言，$\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{g}^\nu \cap \mathfrak{g}^{\tau_2}$的极大环面。为此，假设 $Y \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$ 在 ν 和 τ_2作用下保持不变。由于每个属于 Ω 的 $\mathfrak{g}_\alpha$ 都包含在 ν的（-1）特征子空间中，我们必有 $Y \in \mathfrak{t}_1$。此外，$\sigma_2|_{\mathfrak{t}} = \tau_2|_{\mathfrak{t}}$，因此 $Y \in (\mathfrak{t}_1)^{\sigma_2}$。由构造可知，后一个空间等于 $\mathfrak{s}$，所以 $\mathfrak{s}$确实是 H的极大环面：$= (G^\nu \cap G^{\tau_2})_0$。于是，$(G, H)$ 是各向同性形式的，因为 ν 和 τ_2 是对合 [AK20]（或 [HSN18]），因此，根据命题 2.4，(G, K) 也是各向同性形式的，因为 S 是 K 和 H的极大环面。□

推论 6.3. 若 G 为单代数，且 σ_1 和 σ_2 同为内自同构或同为外自同构，则各向同性作用是等变形式的。

证明. 若 G 为单代数，则根据定理 5.1，σ_1 和 σ_2 满足性质 $\star$。因此，若 σ_1 和 σ_2 是内自同构，或者若 $\mathfrak{g}$ 是一个同构类型不同于 $\mathfrak{d}_4$ 的李代数，则根据定理 6.1，(G, K) 是各向同性形式的。现在假设 $\mathfrak{g}$ 属于类型 $\mathfrak{d}_4$，且 σ_1 和 σ_2 是外自同构。根据对合不动点集的分类（命题 2.2），$\mathfrak{k}_1$ 必定是至多两个类型为 $\mathfrak{b}_p$、$\mathfrak{b}_{3-p}$ 的单理想之和。这些理想不可能彼此同构，因此必被 σ_2 保持；又由于类型为 $\mathfrak{b}_k$ 的李代数只允许内自同构，可知 $\mathfrak{s}$ 必须是 $\mathfrak{k}_1$ 的极大环面。因此，根据 [Goe12] 或 [GHSN16，定理 1.1]，(G, K) 是各向同性形式的。□

在结束本节之前，我们先汇总一些关于 Weyl 群元素的阶及其代表元的阶的结果，因为在后续章节中，我们需要能够判断一个 Weyl 群元素何时能提升为 $\mathrm{Int}(G)$ 中具有相同阶的元素。设 α 为一个根，并回忆 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是负定的。因此，我们可以选取 $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ 使得

$$\langle E_\alpha, \overline{E_\alpha} \rangle = -\frac{\pi^2}{2\langle \alpha, \alpha \rangle},$$

众所周知，若令 $g = \exp(E_\alpha + E_\alpha)$，则在 $\overline{\mathfrak{t}}$上有 $\mathrm{Ad}_g = s_\alpha$，例如参见[Kna02，定理 IV.4.54]。利用伴随表示可对角化这一事实，经过直接计算即可确定每个根空间上的 $(\mathrm{Ad}_g)^2$：

命题 6.4。设定 $Z = E_\alpha + E_\alpha$ 和 $\overline{g} = \exp(Z)$。则有

(1) (伴随作用$_g)^2(E_\alpha) = E_\alpha$. *(2)* 若 β 是一个根，且 $\beta - \alpha$ 和 $\beta + 3\alpha$ 都不是根，则

$$(\mathrm{Ad}_g)^2|_{\mathfrak{g}_\beta} = e^{\mathrm{i}\pi \frac{2\langle \alpha, \beta\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}} \mathrm{id}.$$

证明。设定$U = [\overline{E}_\alpha, E_\alpha]$，使得 $U = \pi^2/(2\langle \alpha, \alpha\rangle)H_\alpha$。注意到 ad_Z相对于 $\mathfrak{g}$上的厄米内积（X，Y）$\mapsto \langle X, Y\rangle$ 是一个斜厄米端omorphism。因此，ad_Z 可对角化，且特征值均为纯虚数；我们将在 ad_Z-不变（因而也是 Ad_g-不变）的子空间上计算这些特征值

$$V = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathbb{C}U \oplus \mathfrak{g}_\alpha \text{ and } W = \bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{g}_{\beta + n\alpha}.$$

事实上，关于基 $E_{-\alpha}, U, E_\alpha$，V 的 $\mathrm{ad}_Z|_V$ 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha(U) & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha(U) & 0 \end{pmatrix},$$

并且由于 $\alpha(U) = \pi^2/2$，对于 $\mathrm{ad}_Z|_V$ 的特征多项式 $p(t)$，我们有 $p(t) = (-t) \cdot (t + \mathrm{i}\pi) \cdot (t - \mathrm{i}\pi)$。因此，$\mathrm{ad}_Z$ 可对角化，其特征值为 0、$\mathrm{i}\pi$ 和 $-\mathrm{i}\pi$。接着利用 Ad_g 的级数展开可得，Ad_g 可对角化，其特征值为 $e^0 = 1$ 和 $e^{\pm \mathrm{i}\pi} = -1$。但这样必然有 $(\mathrm{Ad}_g)^2|_V = \mathrm{id}_V$。

为计算 $\mathrm{ad}_Z|_W$ 的特征值，我们考虑 W 的基 $((\mathrm{ad}_Z)^k(E_\beta))_\ell$，其中 $\ell = 0, \ldots, k$，且 k 是使 $\beta + k\alpha$ 为根的最大整数。这确实是 W 的一组基，因为经过 β 的 α-串没有间隙。特别地，根据假设，$k \in \{0, 1, 2\}$，且由于我们已经处理了 $\beta = \alpha$ 的情形，可以假设 $\beta \neq \alpha$。那么若 $k = 0$，$\mathrm{ad}_Z = 0$ 在 W 上，因此 $\mathrm{Ad}_g = \mathrm{id}$。于是，我们可以假设 $k = 1$ 或 $k = 2$，此时 $\mathrm{ad}_Z|_W$ 的矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta(U) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 0 & \beta(U) & 0 \\ 1 & 0 & (\alpha + 2\beta)(U) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

如前所述，$\alpha(U) = \pi^2/2$。此外，根据假设，$\beta - \alpha$ 不是根，因此经过 β 的 α-串只包含形如 $\beta + j\alpha$ 的根，我们有

$$\beta(U) = \frac{\pi^2}{2\langle \alpha, \alpha\rangle} \cdot \langle \beta, \alpha\rangle = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{2\langle \alpha, \beta\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle} = -k\frac{\pi^2}{4},$$

参见 [Kna02，命题 II.2.48] 或 [Hum78，命题 II.8.4]。因此，在 $k = 1$的情况下，$\mathrm{ad}_Z|_W$的特征多项式 $q(t)$由 $q(t) = (t + \mathrm{i}\frac{\pi}{2})(t - \mathrm{i}\frac{\pi}{2})$给出。仿照前面的论证可知，$(\mathrm{Ad}_g)^2$ 可对角化，其特征值为 $e^{\pm \mathrm{i}\pi} = -1$，因此$(\mathrm{Ad}_g)^2 = -$在 W上是恒等映射，正如所断言的那样。若 $k = 2$，则

$$q(t) = (-t) \cdot (t^2 - (\alpha + 3\beta)(U)) = (-t) \cdot (t + \mathrm{i}\pi) \cdot (t - \mathrm{i}\pi),$$

并且$(\mathrm{Ad}_g)^2 =$ 在 W上是恒等映射，这再次印证了我们的断言。 □

推论 6.5。设 α 是一个根。若 $\mathfrak{g}$ 是单的，但不属于类型 $\mathfrak{g}_2$，则对所有根 β，有：

$$(\mathrm{Ad}_g)^2|_{\mathfrak{g}_\beta} = e^{\mathrm{i}\pi \frac{2\langle \alpha, \beta\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}} \cdot \mathrm{id}.$$

证明。 首先注意，若该命题对根 α 成立，且 $w \in N_G(T)$ 任意，则该命题对根 $\rho = \mathrm{Ad}_w(\alpha) = \alpha \circ (\mathrm{Ad}_w)^{-1}$ 也成立。事实上，Ad_w 是 $\langle \cdot, \cdot \rangle$上的一个实 endomorphism 和等距变换，因此 $k = \exp(\mathrm{Ad}_w(Z))$ 表示由 $^s\rho$定义的简单反射。此外，对任意根 β，有

$$(\mathrm{Ad}_k)^2|_{\mathfrak{g}_\beta} = \mathrm{Ad}_w \circ (\mathrm{Ad}_g)^2 \circ (\mathrm{Ad}_w)^{-1}|_{\mathfrak{g}_\beta} = e^{\mathrm{i}\pi \frac{2\langle \alpha, (\mathrm{Ad}_w)^{-1}\beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}} \cdot \mathrm{id} = e^{\mathrm{i}\pi \frac{2\langle \rho, \beta \rangle}{\langle \rho, \rho \rangle}} \cdot \mathrm{id}.$$

由于 $\mathfrak{g}$ 是单的，同一长度的所有元素都包含在同一个 Weyl 群轨道中，而且根长至多有两种 [Hum78，引理 10.4.C], 因此，我们只需验证推论断言对最高长根和最高短根成立。此外，任意选定一种正性概念后，我们只需检验正根对应的所述恒等式，因为 $\mathfrak{g}_\beta$ 与 $\mathfrak{g}_{-\beta}$ 共轭，并且 Ad_g 与共轭相交换，这是因为它由 $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$上的一个实端omorphism诱导。因此，设 β 是一个正根，且 $\alpha = \delta$ 是最高长根。我们可以假设 $\beta \neq \delta$。那么 $\beta + \delta$ 不是根，否则它会高于 δ。此外， $\delta - \beta$ 要么是正根，要么不是根，因此 $2\delta - \beta$不可能是根，否则它也会高于 δ。由此可见，根 $-\beta$满足命题 6.4 的假设，因此

$$(\mathrm{Ad}_g)^2|_{\mathfrak{g}_{-\beta}} = e^{-\mathrm{i}\pi \frac{2\langle \delta, \beta \rangle}{\langle \delta, \delta \rangle}} \cdot \mathrm{id}.$$

再次利用 Ad_g 是实端omorphism，可得此情形下的断言。

现在假设存在两种根长，且 $\alpha = \gamma$ 是最高短根。令 Π 为单根集合。则 $\mathfrak{g}$ 属于 $\mathfrak{c}_r$、 $\mathfrak{b}_r$ 或 $\mathfrak{f}_4$ 类型；根据 Dynkin 图及其最高短根的分类（[Hum78，表 2，第 III.12.2] 节），我们知道至多存在一个满足 $\langle \gamma, \beta \rangle \neq 0$ 的根 $\beta \in \Pi$。此外，由于 $\mathfrak{g}$ 不属于 $\mathfrak{g}_2$ 类型，我们还知道，对于该根 β，经过 β 的 γ-串具有形式 $\beta - j\gamma$，其中 $0 \leq j \leq 2$；特别地， $\beta + \gamma$ 不是根。因此，如前所述，我们得出 $(\mathrm{Ad}_g)^2|_{\mathfrak{g}_\beta}$ 正如所断言的那样。由于单根的根空间构成生成集，且 $\langle \gamma, \cdot \rangle$ 是线性的，该断言对所有根 β 均成立。□

7. The case that σ_1 is outer and σ_2 is inner.

我们继续使用上一节引入的记号，并转而讨论σ_1 为外部对合而 σ_2 为内自同构的情形。考虑自同构 $\tau_2 := \sigma_1 \circ \sigma_2$。显然， σ_1 和 τ_2 可交换，因为 σ_1 和 σ_2 可交换。记 $H := (G^{\sigma_1} \cap G^{\tau_2})_0$。根据假设， $\sigma_1 \circ (\tau_2)^{-1} = (\sigma_2)^{-1}$ 是内自同构，因此，根据定理 6.1，(G, H) 是各向同性形式。此外，完全仿照定理 6.1 的证明可知，S 必为 H的极大环面。事实上，若 $Y \in Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{s})$被 σ_1固定，则 $Y \in \mathfrak{t}_1$，因为 σ_1在每个满足 $\alpha \in \Omega$的根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 上都限制为 –id；若进一步假设 Y被 τ_2 固定，则 $Y \in \mathfrak{s}$，因为 $\mathfrak{s} = (\mathfrak{t}_1)^{\sigma_2}$ 且$\tau_2|_{\mathfrak{t}_1} = \sigma_2|_{\mathfrak{t}_1}$。由命题 2.4，$(G, K)$ 也为各向同性形式。我们已经证明:

Th定理 7.1。 如果 σ_1 是外自同构，且 σ_2 是内自同构，那么 (G, K) 是各向同性形式 *l.*

8. The case that σ_1 is inner and σ_2 is outer

本节假设 G 是单连通紧致李群， σ_1 是一个对合内自同构，而 σ_2 是一个与 σ_1 对易的有限阶外自同构。在这种情况下，我们没有一般性论证来证明 (G, K) 是各向同性形式的。不过，允许非内自同构的单李代数只有三个系列，因此 $\mathfrak{g}$ 必定属于同构类型 $\mathfrak{e}_6$、 $\mathfrak{a}_n$ 或 $\mathfrak{d}_r$。我们将直接验证，在这些情形中， K 在 G/K 上的各向同性作用都是等变形式的。结合前两节的结果，这便完成了证明：只要 G， K 是单的，它就是各向同性形式的

如前所述，定理 3.1 随即表明，定理 1.1 对任意李群 G 也成立。

型为 $\mathfrak{e}_6$ 的李群。首先假设 $\mathfrak{g}$ 的类型为 $\mathfrak{e}_6$。根据单李群上对合自同构的不动点集同构类型分类（命题 2.2），σ_1 的不动点集 $\mathfrak{k}_1$ 是李代数 $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{i}_1 \oplus \mathfrak{i}_2$ 的直和，其中有序对 $(\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2)$ 属于类型 $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_5)$ 或 $(\mathbb{C}, \mathfrak{d}_5)$。特别地，$\mathfrak{i}_1$ 和 $\mathfrak{i}_2$ 均在 σ_2 下不变。对理想 $\mathfrak{i}_1$ 和 $\mathfrak{i}_2$ 分别应用命题 2.1，我们得出 σ_2 在 $\mathfrak{k}_1$ 上的不动点集的秩至少为 4。也就是说，$\operatorname{rank}\mathfrak{k} \geq 4$。另一方面，根据假设，$\sigma_2$ 是一个外自同构；在类型为 $\mathfrak{e}_6$ 的李代数上，每个这样的自同构都由命题 2.1 知会固定一个秩为 4 的子代数。由于 $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{k}_2$，因此必有 $\operatorname{rank}\mathfrak{k} = 4$，所以 $\mathfrak{s}$ 也是 $\mathfrak{k}_2$ 的一个极大环面。根据 GHSN16 的定理 1.1], , (G, K_2) 是各向同性形式的；由命题 2.4，(G, K) 也必为各向同性形式。

李群的类型 $\mathfrak{a}_n$。接下来，我们假设 $\mathfrak{g}$ 属于类型 $\mathfrak{a}_n$, $n \geq 1$。在所有 $\mathfrak{g}$-根 Δ 的集合上固定一个正性概念Δ^+。必要时取共轭后，由定理 4.7 可知，我们可以将 σ_2 表示为 $\sigma_2 = c_g \circ \nu$，其中 Ω 中的每个元素都被 ν 固定，且 $\nu(\Delta^+) = \Delta^+$。因此，若 $\Pi \subseteq \Delta^+$ 表示单根集合，那么 ν 会置换 Π 和 $\nu|_\Pi\colon\ \Pi \to \Pi$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Dynkin 图自同构。众所周知，除恒等映射外，这样的自同构只有一个，因此根据假设，$\nu|_\Pi$ 必定是这个非平凡自同构。特别地，记 $\ell := \lceil n/2 \rceil$，可见存在单根的一个编号 $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$，使得对所有 $i \leq \ell$，$\nu(\alpha_i) = \alpha_{n-i+1}$。于是，被 ν 固定的根就是这些根

$$\delta_t := \alpha_t + \alpha_{t+1} + \ldots + \alpha_{n-(t+1)+1} + \alpha_{n-t+1},$$

其中再次有 $t = 1, \ldots, \ell$。我们还注意到，Weyl 群元素 $w = s_{\alpha_t} s_{\alpha_{n-t+1}}$ 满足$w(\delta_{t+1}) = \delta_t$，且 w 与 ν可交换。因此，我们还可以假设

$$\Omega^+ = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\}$$

对某个 $m \geq 0$。由于 $\mathfrak{t}^\nu = \bigoplus_{j=1}^{\ell} \mathbb{C}H_{\delta_j}$ 和 $\operatorname{Ad}_g|_{\mathfrak{t}} = \prod_{\alpha \in \Omega^+} s_\alpha$，我们得出 $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}^{\sigma_2}$ 以向量 $H_{\delta_{m+1}}, \ldots, H_{\delta_\ell}$ 为基。然而，由于 ν 是由 $\mathfrak{g}$ 的 Dynkin 图自同构诱导的，我们知道向量 $\beta_1, \ldots, \beta_\ell$ 满足

$$\beta_i := (\alpha_i)|_{\mathfrak{t}^\nu},$$

构成 $(\mathfrak{t}^\nu)^*$的一组基。事实上，由于 ν 置换 Π，Δ^+ 通过限制在李代数 $\mathfrak{h}$ 的$\mathfrak{t}^\nu$-根上诱导出一种正性概念: $= \mathfrak{g}^\nu$；相对于这种正性概念，向量 $\beta_1, \ldots, \beta_\ell$ 构成一个单根系。此外，$\mathfrak{h}$ 的类型为 $\mathfrak{b}_\ell$ 或 $\mathfrak{c}_\ell$，具体取决于 n的奇偶性，而 $\beta_1, \ldots, \beta_{\ell-1}$ 的长度都相同。相对于 $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ 而言，与 β_i 对偶的元素 K_{β_i} 恰为 $1/2(H_{\alpha_i} + H_{\nu(\alpha_i)})$，因此我们看到

$$\mathfrak{s} = \bigoplus_{j=m+1}^{\ell} \mathbb{C}H_{\delta_j} = \bigoplus_{j=m+1}^{\ell} \mathbb{C}K_{\beta_j}.$$

因此，$\mathfrak{s}$ 是由根空间 $\mathfrak{h}_{\beta_j}$（其中$j = m+1$、.....、ℓ）生成的 $\mathfrak{h}$ 的子代数 $\mathfrak{f}$ 的一个极大环面。由于该子代数 $\mathfrak{f}$ 在 $\mathfrak{h}$ 中完全非同调于零（例如参见 [HSN18，推论 II.5.7]），且根据命题 2.6，$\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中也完全非同调于零，因此 $\mathfrak{f}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中同样完全非同调于零。由此，根据命题 2.4 和命题 2.5，K 在 G/K 上的各向同性作用是等变形式的。

类型为 $\mathfrak{d}_r$ 的李群。最后要讨论的情形是 $\mathfrak{g}$ 属于类型 $\mathfrak{d}_r$, $r \geq 4$。我们先处理 σ_2 在 Out(G) 中表示一个 3 阶元素的情形。根据 $r = 4$[Hel01，定理 X.3.29]，这只有在此时才可能。根据命题 2.1，$\mathfrak{k}_2$ 的秩等于 2。因此，$\operatorname{rank}\mathfrak{k}$ 等于 2 或 1，因为每个非阿贝尔紧李群上的有限阶自同构都有非平凡的不动点集 [Hel01，引理 X.5.3]。若 $\dim \mathfrak{s} = 2$，则 $\mathfrak{s}$ 也是 $\mathfrak{k}_2$ 的一个极大环面，且 (G，K) 是各向同性形式的，这是因为 (G，K_2) 是各向同性形式的[GHSN16，定理 1.1]。现在假设 $\mathfrak{s}$ 是 1 维的。根据命题 2.2，$\mathfrak{k}_1$ 的同构类型只能是 $\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$。$\sigma_2$ 在 $\mathfrak{k}_1$ 上固定一个秩为 1 的子代数的唯一方式，是 σ_2 置换 $\mathfrak{k}_1$ 的单理想，因此 $\mathfrak{k}$ 必须属于类型 $\mathfrak{a}_1$。然而，紧李群的每个秩为 1 的单李子群都完全非同调于零（参见 [HSN18，引理 II.5.11]），所以这种情况下的各向同性作用也等变形式的。

今后，我们假设 σ_2 在 Out(G) 中的阶为 2。与 $\mathfrak{a}_n$型李群的情形一样，我们必须在共轭意义下确定集合Ω。由于 σ_1、σ_2 根据定理 5.1 满足 $\star$，且 σ_1 是一个内自同构，我们可以像推论 4.8 中那样，在所有 G-根 Δ的集合上定义正性概念 Δ^+。因此，对于某个自同构 ν，它固定Ω中的元素，并且保持集合 Δ^+，有 $\sigma_2 = c_g \circ \nu$。按照图1对单根 $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ 进行编号，也就是说，在 $\mathfrak{g}$ 的 Dynkin 图中，根 α_{r-2} 对应于带三重连接的节点，并且 ν 交换 α_{r-2} 与 α_{r-1}，而固定其余所有单根。

现在，我们仿照 [HSN18，定理 II.3.9]，描述一种算法，以得到 Ω^+ 的标准形式，允许施加 Weyl 群元素。为此，注意到由于 $\mathfrak{g}$ 是单的，Weyl 群在根集上传递作用 [Hum78，定理 10.3]。特别地，存在某个 Weyl 群元素，可将 Ω^+ 中给定的根映到 $\mathfrak{d}_r$ 的最高根。事实上，Ω^+ 中的每个根 $\alpha \in$ 都被 ν 固定，因此若将 α 表示为 $\alpha = m_1\alpha_1 + \ldots + m_r\alpha_r$，则有 $m_{r-1} = m_r$；于是，要将 α 映到最高根，只需使用由反射 s_{α_1}、.....、$s_{\alpha_{r-2}}$或元素 $s_{\alpha_{r-1}} \circ s_{\alpha_r}$ 复合而成的 Weyl 群元素。这些元素都与 $\nu|_{\mathfrak{t}}$ 交换，并且实际上由 Int(G) 中与 ν 交换的元素表示，见推论 4.8。故不失一般性，我们可以假设最高根 δ 包含在 Ω^+ 中。

注意，恰有一个与 δ 不正交的单根，即 α_2。由于 Ω^+ 的元素两两正交（命题 4.3），且最高根是支配的，因此可知，Ω^+ 中任何不同于 δ 的元素都必定包含在 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 对 $\Pi - \{\alpha_2\}$ 的张成空间中；也就是说，它要么等于 α_1，要么包含在 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 对 $\alpha_3, \ldots, \alpha_r$ 的张成空间中。但是，$\alpha_3, \ldots, \alpha_r$ 的张成空间（在适当的对应下）是由 $\mathfrak{g}_{\alpha_3}, \ldots, \mathfrak{g}_{\alpha_r}$ 生成的 $\mathfrak{g}$ 的李子代数 $\mathfrak{g}_{\geq 3}$ 的根格，而这是一个类型为 $\mathfrak{d}_{r-2}$、$\mathfrak{a}_3$ 或 $\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$ 的李代数，分别对应于 $r \geq 6$、$r = 5$ 或 $r = 4$。此外，$\mathfrak{g}_{\geq 3}$ 的 Weyl 群可视为 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群中由简单反射 $s_{\alpha_3}, \ldots, s_{\alpha_r}$ 生成的子群；该子群同时保持最高根和 α_1 不变。

递归进行下去，我们便得到 Ω^+ 的如下描述，至多相差一个与 ν 交换的 Weyl 群元素 w。对 $t = 1$、..、$r-2$，定义根 δ_t 为

$$\delta_t = \alpha_t + 2(\alpha_{t+1} + \ldots + \alpha_{r-2}) + \alpha_{r-1} + \alpha_r.$$

这是由 $\mathfrak{g}_{\alpha_t}$、...、$\mathfrak{g}_{\alpha_r}$ 生成的李子代数 $\mathfrak{g}_{\geq t}$ 的最高根，即使在 $t = r-2$ 的情况下也是如此；此时 $\mathfrak{g}_{\geq t}$ 属于 $\mathfrak{a}_3$ 型。于是存在一个奇数指标 m，满足 $m \leq r-2$，以及一组指标 $I \subseteq \{1, 3, \ldots, m\} \cup \{r-1, r\}$，具有如下性质：$\Omega^+$ 等于

$$\{\alpha_i \,|\, i \in I\} \cup \{\delta_1, \delta_3, \ldots, \delta_m\}.$$

命题 8.1。设Ω 非空。存在一个与 ν 交换的内自构 w，使得 $w(\Omega^+)$ 为以下两者之一：

(1) $\{\delta_1, \alpha_1, \delta_3, \alpha_3, \ldots, \delta_m, \alpha_m\}$，其中 m 为奇数且 $m \leq r-2$；或 *(2)* $\{\delta_1, \delta_3, \ldots, \delta_k\}$，其中 k 是满足 $k \leq r-2$的最大奇整数。

证明。我们采用本命题前一段中的记号，并不失一般性地假设 $w =$id。首先注意，在先前得到的 Ω^+ 描述中，必有 $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$，因为 α_{r-1}和 α_r不被 ν固定。接下来，回忆推论 4.8，整数

$$p(\beta) := \sum_{\alpha \in \Omega^+} 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

当 β等于单根 α_1、.....、α_{r-2}之一时，必须为偶数。然而，若 $\beta = \alpha_{2j}$，则上述表达式中的每一项都等于 ± 1。因此，若 $2j \leq r-2$，则 Ω^+ 中必有偶数个与 α_{2j}不正交的根。

由此可知，要么 I为空，要么 $I = \{1, \ldots, m\}$。事实上，假设 $\ell \in I$且 $\ell < m$。这意味着 δ_ℓ、 $\delta_{\ell+2}$和 α_ℓ 都包含在 Ω^+中。这些根都与 $\alpha_{\ell+1}$不正交，因此 Ω^+ 中必定还至少有一个与 $\alpha_{\ell+1}$不正交的根。然而，形如 δ_k 或 α_k 且 k 为奇数、并与 $\alpha_{\ell+1}$ 不正交的根只有 δ_ℓ、 $\delta_{\ell+2}$、 α_ℓ和 $\alpha_{\ell+2}$，因此 $\alpha_{\ell+2}$ 也必须包含在 Ω^+ 中。类似的论证表明，若 $\ell > 1$，则 $\alpha_{\ell-2} \in \Omega^+$ 。

为了完成证明，只需注意：若 I 为空，则整数 m 必须取最大值并满足 $m \leq r-2$，否则 $p(\alpha_{m+1})$ 就不会是偶数。□

有了这些结果，我们终于可以证明，当 $\mathfrak{g}$ 属于类型 $\mathfrak{d}_r$ 时，各向同性作用是等变形式的。与一个内自同构共轭后，我们可以假设 Ω^+ 具有命题 8.1 给出的两种形式之一。若 Ω^+ 是第一种形式，则对所有单根 α，都有 $p(\alpha) = 0$。因此，在这种情况下，将 $\mathrm{Ad}_g|_{\mathfrak{t}} = \prod_{\alpha \in \Omega^+} s_\alpha$ 中的每个因子都按命题 6.4 表示，我们看到 $\mathrm{Ad}_g|_{\mathfrak{t}}$ 可以提升为 G 中的一个对合（推论 6.5），且所选的提升与 ν 交换。于是 σ_2 是一个对合，而 $\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2$ 是一对对合的交换对的李代数。因此，根据命题 2.4 以及 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-对称空间的等变形式性（参见 [AK20] 或 [HSN18，定理 II.1.2]），各向同性作用是等变形式的。因此，我们假设

$$\Omega^+ = \{\delta_1, \delta_3, \ldots, \delta_k\},$$

其中 k 是满足 $k \leq r-2$的最大奇数。现在令 $\sigma_1 = c_t$ 满足 $t = \exp(U)$，其中 $U \in \mathfrak{t}$是某个元素。利用 $\sigma_2|_{\mathfrak{t}}$是一个对合，我们可以将 U分解为 $U = U^+ + U^-$，其中 U^+和 U^-分别属于 $\sigma_2|_{\mathfrak{t}}$的 1 特征子空间和 (-1) 特征子空间。与推论 4.8 的证明中一样，由 σ_1 和 σ_2 的交换性可知，$c_{\exp(U^-)}$ 必为一个与 σ_2交换的对合；而定理 6.1 证明中的论证表明， S 仍是 $c_{\exp(U^-)}$ 和 σ_2的不动点集的极大环面。因此，我们可以假设$U = U^-$。事实上，我们可以假设 $U = X + \mathrm{i}\pi \sum_{\alpha \in \Omega^+} \frac{1}{\langle \alpha, \alpha \rangle} H_\alpha$，其中 $\nu(X) = -X$，参见推论 4.8 的证明。——

注意， X 不能为零，否则根据 σ_1 的对合性可推出，对所有根 β， $p(\beta)$ 都是偶数；然而，当 r 为偶数时， α_{r-2} 并非如此；当 r 为奇数时， α_{r-1} 也并非如此。接着，利用 $X \in \mathbb{C}(H_{\alpha_{r-1}} - H_{\alpha_r})$ 进行直接计算可知，存在某个 $t \in \{r-1, r\}$，使得对所有形如 $\alpha = m_1\alpha_1 + \ldots + m_r\alpha_r$的根 α，都有

$$\sigma_1|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \begin{cases} (-1)^{m_{r-2}+m_t}, & r \text{ even}, \\ (-1)^{m_t}, & r \text{ odd}. \end{cases}$$

不失一般性，假设 $t = r$ ，并注意到 r 不可能是偶数。事实上，反设 r是偶数。一个根 α具有 $m_{r-2} \in \{0, 1, 2\}$，且若 $m_{r-2} = 2$,

则必有 $m_{r-1} = m_r = 1$。因此，上述对 σ_1 的描述表明， $\mathfrak{k}_1$ 等于$\mathfrak{t} \oplus \bigoplus_\alpha \mathfrak{g}_\alpha$，其中 α 遍历所有包含在集合$\Phi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-3}\} \cup \{\alpha_{r-2} + \alpha_r, \alpha_{r-1}\}$的 $\mathbb{Z}$-张成空间中的根 α。特别地， $Z(\mathfrak{k}_1) = \bigcap_{\alpha\in\Phi} \ker(\alpha)$ 是一维的。然而， $Z(\mathfrak{k}_1)$ 是一个 σ_2-不变子空间；若 r 是偶数，则 $\sigma_2(\alpha_{r-1}) = \alpha_r$，因此 $Z(\mathfrak{k}_1)$ 也包含在 $\bigcap_{j=1}^{r} \ker(\alpha_j)$ 中。但后一个空间是平凡的，矛盾。

因此，我们可以假设 r 是奇数，设为 $r = 2q + 1$，且 $k = 2q - 1$。由于 $\mathfrak{g}$ 中任意根 α 都有 m_{r-1}、$m_r \in \{0, 1\}$，可知 $\mathfrak{k}_1$ 等于 $\mathfrak{t} + \mathfrak{g}'$，其中 $\mathfrak{g}'$ 是由根 α_1、.....、α_{r-1} 的权空间生成的李子代数。事实上， $\mathfrak{g}'$ 是 $\mathfrak{k}_1$ 的半单部分，并且 $Z(\mathfrak{k}_1) = \ker(\alpha_1) \cap \ldots \cap \ker(\alpha_{r-1})$。根据我们对 σ_2 的明确描述，$\dim \mathfrak{s} = \mathfrak{t}^\nu - q$；又由于 ν 将 α_{r-1} 与 α_r 互换，我们进一步看到 $\mathfrak{k}$ 的秩为 $2q - q = q$，这也是类型 $\mathfrak{a}_{2q}$ 的李代数上任意非平凡自同构的最小秩（命题 2.1）。因此，由于 $\mathfrak{g}'$ 属于类型 $\mathfrak{a}_{2q}$，我们得出 $\sigma_2|_{\mathfrak{g}'}$ 是外自同构，且 $\mathfrak{k}$ 等于 σ_2 在 $\mathfrak{g}'$ 上的不动点集。特别地， $\mathfrak{s}$ 是 $\sigma_2|_{\mathfrak{g}'}$ 的不动点子代数的极大环面，而 $\mathfrak{u} = Z_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{s})$ 是 $\mathfrak{g}'$ 中的极大环面。因此，由于 $\mathfrak{s}$ 被 σ_2 逐点固定，我们可以在 $\mathfrak{g}'$ 的根上（相对于 $\mathfrak{u}$）定义一种正性概念，该概念在 $\sigma_2|_{\mathfrak{g}'}$ 下保持不变；随后将 $\sigma_2|_{\mathfrak{u}}$ 所诱导的 Dynkin 图自同构扩展为自同构 $\tau\colon \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}'$。其不动点集 $\mathfrak{f} = (\mathfrak{g}')^\tau$ 与 $\mathfrak{k}$ 共享极大环面 $\mathfrak{s}$。此外，根据命题 2.6， $\mathfrak{f}$ 在 $\mathfrak{g}'$ 中完全非同调于零。事实上，若 $P_{\mathfrak{g}'}$ 和 $P_{\mathfrak{f}}$ 分别表示 $\mathfrak{g}'$ 和 $\mathfrak{f}$ 上在伴随表示下不变的多项式，且若 $I \subseteq P_{\mathfrak{g}'}$ 是由所有奇数次多项式生成的理想，则多项式的限制映射诱导满射 $P_{\mathfrak{g}'}/I \to P_{\mathfrak{f}}$，因为 $P_{\mathfrak{f}}$ 由偶数次多项式生成 [Hum90，表I，第 3 节。7]。然而，根据 [HSN18，推论 II.5。10]，限制映射也诱导满射 $P_{\mathfrak{g}} \to P_{\mathfrak{g}'}/I$，其中 $P_{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的不变多项式，因此 $P_{\mathfrak{g}} \to P_{\mathfrak{f}}$ 也必为满射。也就是说， $\mathfrak{f}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中完全非同调于零。特别地，根据命题 2.5，(G, F) 这一对是各向同性形式的。由于 $\mathfrak{s}$ 同时是 $\mathfrak{f}$ 和 $\mathfrak{k}$ 的极大环面，(G, K) 这一对也必是各向同性形式的（命题 2.4）。

References

[AH17] J. Adams 和 X. He，《Weyl群元素的提升》， *Journal of Algebra* **485** (2017)，142–165。https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2017.04.018。[AP93] C. Allday和 V. Puppe，*Cohomological methods in transformation groups* *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* **32**，剑桥大学出版社，1993。https://doi.org/10.1017/CBO9780511526275。[AK20] M. Amann 和 A. Kollross，《 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$-对称空间上各向同性作用的等变形式性》， *Preprint* (2020)。https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.07645。[Bor16] A. Borel，*Seminar on Transformation Groups*，*Annals of Mathematics Studies* **46**，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2016。https://doi.org/10.1515/9781400882670。[Car19] J. D. Carlson，《各向同性环面作用的等变形式性》， *J. Homotopy Relat. Struct.* **14** 第1期（2019），199–234。https://doi.org/10.1007/s40062-018-0207-5。[CF18] J. D. Carlson 和 C.-K. Fok，*J. Lond. Math. Soc. (2)*，《各向同性作用 **97** 3 2018 470 494 的等变形式性》，第 () 期，–。https://doi.org/10.1112/jlms.12116。[CH22] J. D. Carlson 和 C. He，《余秩一各向同性作用的等变形式性与有理球面的乘积》， *Preprint* (2022)。https://doi.org/10.48550/ARXIV.2204.00135。[EGS23] C. Escher、O. Goertsches和 C. Searle，《非负曲率奇维GKM流形》，*Int. Math. Res. Not. IMRN* 1 2023 744 784 https://doi.org/10.1093/imrn/rnab137 第 () 期，–。[Goe12] O. Goertsches，对称空间上各向同性作用的等变上同调， ()，–。https://doi.org/10.4171/DM/361。[GHSN16] O. Goertsches 和 S. Hagh Shenas Noshari，《李群自同构定义的齐性空间上各向同性作用的等变形式性》，*J. Pure Appl. Algebra* **220** 第5期（2016），2017–2028。https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2015.10.013。

[GHSNM19] O. Goertsches、 S. Hagh Shenas Noshari和 A.-L. Mare, 《对称空间上超极化作用的等变上同调》, *Doc. Math.* **24** (2019 1657 1676 https://doi.org/10.), –。[GKZ 4171/DM/711
20] O. Goertsches、 P. Konstantis和 L. Zoller, 《六维中的GKM理论与哈密顿非K¨ahler作用》, *Adv. Math.* **368** (2020), 107141, 17。 https://doi.org/10.1016/j.aim.2020.107141。[GKZ22a] O. Goertsches、 P. Konstantis L. Zoller *Algebr. Geom.* 和, 《GKM流形并非刚性》, 第 *Topol.* **22** 7 2022 3511 3532 https://doi.org/10.2140/agt.2022.22.3511 () 期, –。[GKZ22b] O. Goertsches、 P. Konstantis和 L. Zoller, 《低维GKM理论》, *Preprint* (2022)。 https://doi.org/10.48550/arXiv.2210.06234。[GM14] O. Goertsches 和 A.-L. Mare, 《非阿贝尔GKM理论》, *Math. Z.* **277** 第1-2期 (2014), 1–27。https://doi.org/10.1007/s00209-013-1242-x。[GW15] O. Goertsches 和 M. Wiemeler, 《正曲率GKM流形》, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 第22期 (2015), 12015–12041。 https://doi.org/10.1093/imrn/rnv046。[GZ19] O. Goertsches 和 L. Zoller, 《等变德拉姆上同调: 理论与应用》, *Paulo J. Math. Sci.* **13** 2 2019 539 596 Sao 第 () 期, –。 https://doi.org/10.1007/s40863-019-00129-4。[GKM98] M. Goresky、 R. Kottwitz和 R. MacPherson, 《等变上同调、Koszul对偶与局部化定理》, *Invent. Math.* **131** 第 1 1998 25 83 https://doi.org/10.1007/ 期 () , –。[GHV s002220050197
76] W. Greub、 S. Halperin和 R. Vanstone, *Connections curvature and cohomology III Pure* , , , , , Academic Press *and Applied Mathematics Vol. 47* [ ], Harcourt Brace Jovanovich出版社, 纽约-伦敦, 1976。[GH04] V. Guillemin 和 T. S. Holm *Int.* , 《具有非孤立不动点的环面作用 *Math. Res. Not.* 40 2004 2105 2124 的GKM理论》, 第 () 期, –。 https://doi.org/10.1155/S1073792804132285。[GHZ06] V. Guillemin、 T. S. Holm和 C. Zara, 《齐性空间等变上同调环的GKM描述》, *J. Algebraic Combin.* **23** 第 1 2006 21 41 https://doi.org/10.1007/ 期 () , –。[GSZ s10801-006-6027-4
13] V. Guillemin、 S. Sabatini C. Zara *K* *Ann. Global* 和, 《 *Anal. Geom.* **43** 1 2013 31 45 GKM丛的等变K理论》, 第 () 期, –。 https://doi.org/10.1007/s10455-012-9331-3。[GZ01] V. Guillemin 和 C. Zara 1 *Duke Math. J.* , -骨架、贝蒂数与等变上同调, 第 **107** 2 2001 283 349 () 期, –。 https://doi.org/10.1215/S0012-7094-01-10724-2。[HSN18] S. Hagh Shenas Noshari、 *On the equivariant cohomology of isotropy actions*, 马尔堡菲利普斯大学, 2018。 https://doi.org/10.17192/z2018.0496。[HHH 05] M. Harada、 A. Henriques和 T. S. Holm, 《Kac-Moody旗簇广义等变上同调的计算》, *Adv. Math.* **197** 第 1 2005 198 221 https://doi.org/10.1016/j. 期 () , –。[Hel aim.2004.10.003
01] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Graduate Studies in Math-ematics* **34**, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2001年, 1978年原版的修订重印本。 https://doi.org/10.1090/gsm/034。[Hsi 75] W. Y. Hsiang, *Cohomology Theory of Topological Transformation Groups Ergebnisse der Math-* , 施普 *ematik und ihrer Grenzgebiete* **85** 1975 https://doi.org/10.1007/ 林格出版社, 纽约, 。978-3-642-66052-8 。[Hum 78] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory Graduate Texts in Math-* , 施普林格出版社, 纽约-柏林, 。[Hum90] J. E. Humphreys, *ematics* **9** 1978 *Reflection groups and Coxeter groups Cambridge Studies in Advanced* , 剑桥大学出版社, 剑桥, 。 *Mathematics* **29** 1990 https://doi.org/10.1017/ CBO9780511623646 。[Kna02] A. W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction*, 第二版, *Progress in Mathematics* **140**, Birkhäuser Boston, Inc., 波士顿, 马萨诸塞州, 2002。[Kos12] B. Kostant, 《正交根的级联与半单李群Borel子群幂零根的余伴随结构》, *Mosc. Math. J.* **12** 第 3 2012 605 620, 669 https: 期 () , –。[Kur //doi.org/10.17323/1609-4514-2012-12-3-605-620
19] S. Kuroki, *J. Math. Soc. Japan* , 《作用于 **71** 2 2019 483 513 GKM流形的环面维数上界》, 第 () 期, –。 https://doi.org/10.2969/jmsj/79177917。[Lan02] S. Lang, *Algebra*, 第三版, *Graduate Texts in Mathematics* **211**, 施普林格出版社, 纽约, 2002。https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0041-0。[Lut 81] R. Lutz, 《关于 Γ-对称空间的几何》, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **293**第1期 (1981), 55–58。可见 https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k55328509/f73.item。[Mar08] A.-L. Mare, 《四元数旗流形的等变上同调》, *J. Algebra* **319** 第7期 (2008), 2830–2844。 https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2007.04.031。

[MW13] A.-L. Mare 和 M. Willems, 《八元数旗流形的拓扑学》, *Münster J. Math.* **6** 第 2 期（2013）, 483–523。可见 https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:6-55309457271。[Qui71] D. Quillen, 《等变上同调环的谱》, I、II, *Ann. of Math. (2)* **94**（1971）, 549–572; 同上, 第 94 卷第 2 期（1971）, 573–602。https://doi.org/10.2307/1970770。[Shi96] H. Shiga, 《齐性空间的等变德拉姆上同调》, *J. Pure Appl. Algebra* **106** 第 2 期（1996）, 173–183。https://doi.org/10.1016/0022-4049(95)00018-6。[WG68] J. A. Wolf 和 A. Gray *J. Differen-*, 《由李群自同构定义的 *tial Geometry* **2** 1968 77 114 http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214501139 齐性空间》。I, （）, –。可见 。

Departement of Mathematics, University of Fribourg, Switzerland
Email address: sam.haghshenasnoshari@unifr.ch