arXiv:2302.12153v1 [math.CO] 23 Feb 2023

图和嵌入图的权系与不变量

M. Kazaryan、S. Lando*

目录

1 4-项关系 5
1.1 弦图与四项关系.61.2 交图.61.3 图的4项关系.71.3.1 色多项式.81.3.2 加权色多项式（Stanley 对称化色多项式）.91.3.3 交错多项式.101.3.4 转移多项式.111.3.5 斜特征多项式.12

2 图的霍普夫代数 13
2.1 图的乘法与余乘法.142.2 本原元、Milnor–Moore 定理与 Hopf 代数结构.142.3 图不变量与 Hopf 代数结构.162.4 图的霍普夫代数与可积性.172.4.1 KP 可积层级.172.4.2 影子图不变量.182.4.3 示性不变量的可积性.18

3 弦图的霍普夫代数
与李代数相关的权系 19
3.1 弦图霍普夫代数的结构.193.2 与李代数相关的权系的普适构造.213.2.1 权系的定义.213.2.2 雅可比图及权系在本原元上的取值 223.3 $\mathfrak{sl}(2)$ 权系.223.3.1 Chmutov-Varchenko递推关系.233.3.2 $\mathfrak{sl}(2)$ 图的权系.243.3.3 $\mathfrak{sl}(2)$ 权系在完全图上的取值 253.3.4 份额代数.27

*俄罗斯国立高等经济大学、斯科尔科沃科学技术学院

3.3.5 完全二部图上的 $\mathfrak{sl}(2)$-权系的取值 . . . . . 283.3.6 $\mathfrak{sl}$在非交图上的(2)-权系的取值 303.4 $\mathfrak{gl}(N)$-权系.313.4.1 $\mathfrak{gl}(N)$-权系上的置换与递推关系 . . . . . 323.4.2 通过 $\mathfrak{gl}(N)$-权系计算 Harish-Chandra 同构.343.5 $\mathfrak{sl}(N)$ 权系.353.6 权系 $\mathfrak{gl}(1|1)$.36

4 嵌入图与 δ-拟阵36

4.1 嵌入图与四项关系.374.2 图与嵌入图的 δ-拟阵，以及它们的四项关系.374.3 δ-拟阵的霍普夫代数.394.4 将图不变量扩展到嵌入图和 δ-拟阵.394.4.1 交错多项式.394.4.2 Stanley 对称化色多项式.404.4.3 转移多项式.404.4.4 斜特征多项式.414.5 扩展到不可定向曲面：带框架弦图、带框架图以及不一定为偶的 δ-拟阵.41

$\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle$ 赋有非退化不变标量积的李代数$\mathfrak{gl}(N)$一般线性李代数；由所有 $N \times N$-矩阵组成，交换子作为李括号$\mathfrak{gl}(1|1)$一般线性 $1|1$ 李超代数$\mathfrak{sl}(N)$特殊线性李代数；由所有迹为零的 $N \times N$–矩阵组成，交换子作为李括号d 李代数的维数；特别地， $d = N^2$ 对于 $\mathfrak{gl}(N)$，C 弦图n 弦图中的弦数$g(C)$弦图的交图 CG 抽象简单图Γ 嵌入图；允许有环和重边$\mathcal{G}$ 图的霍普夫代数$\mathcal{C}$ 弦图的霍普夫代数$\mathcal{B}^e$ 偶拟阵的霍普夫代数K_n 具有 n 个顶点的完全图，以及交图为此图的弦图$K_{n,m}$ 部件大小分别为 n 和 m 的完全二部图，以及交图为此图的弦图 π 在各种霍普夫代数中，投影到本原元子空间，其核为可分解元子空间$C_1, \cdots, C_N$在 $U(\mathfrak{gl}(N))$ 中的卡西米尔元 w 权系 $w_{\mathfrak{g}}$ 与李代数相关联的权系 $\mathfrak{g}\bar{w}_{\mathfrak{g}}$ $w_{\mathfrak{g}}(\pi(\cdot))$；权系的复合$w_{\mathfrak{g}}$ 以及投影 π 到本原元子空间S_m 对称群σ 置换m 被置换的元素数；例如，对于由弦图定义的置换， $m = 2n$ $G(\sigma)$置换的有向图 $\sigma\Lambda^*(N)$含 N 个变量的移位对称多项式代数ϕ Harish-Chandra 投影$p_1, \cdots, p_N$移位幂和$\nu(G)$图的非退化性 $GA_G(q_1, q_2, \ldots)$ 图的 Abel 多项式 $G\chi_G(c)$ 图的色多项式 $GS_G(q_1, q_2, \ldots)$ 图的 Stanley 对称化色多项式 $GW_G(q_1, q_2, \ldots)$图的加权色多项式 $GT_C(x, t, s)$弦图的转移多项式 $CQ_G(x)$图的斜特征多项式 $GL_G(x)$图的交错多项式 G

主要在 1990 年代构建的纽结和链环有限型不变量理论，起源于论文 [62]，并由此引出了研究权系的必要性。权系是定义在弦图上的函数，满足所谓的 Vassiliev 四项关系。通常考虑取值于交换环的权系。弦图则是一种组合对象，是一种特殊类型的图。可以将其看作一个三正则图以及一条指定的哈密顿回路。若存在一个同构将第一个图中的哈密顿回路映射为第二个图中的哈密顿回路，且保持定向，则认为这两个图同构。

四项关系由一个弦图及其沿哈密顿回路相邻的一对顶点构造而成；它是一个线性关系，涉及一个函数在四个顶点数相同的弦图上的取值。由于这些关系是线性的，所有权系都可以描述为一个线性方程组的解。然而，随着顶点数增加，变量（弦图）的数量和方程（四项关系）的数量都会迅速增长（因此，顶点数为 $2 \cdot 9 = 18$ 的图超过 60 万个，关系数量超过 $5 \cdot 10^6$）。相比之下，方程矩阵的秩，也就是弦图模掉四项关系后所得空间的维数，增长要慢得多；对于 9 条弦，秩仅为 104。目前没有通用工具能够计算这些维数，已知的只有粗略的上下界估计。

研究所有权系构成的空间，必须通过构造具体的权系及其族来完成。尤其是，这些构造可用于获得维数的下界。构造的两个主要来源是满足图的4项关系的弦图交图不变量 [45], 和带度量李代数 [40, 5]。这两种构造本质上不同。图不变量通常很容易计算，但其区分能力相当有限。相比之下，与李代数相关的权系功能强大，但直到最近，人们还不知道如何高效计算它们。本文将介绍这两种方法，并着重讨论近期成果。

计算带度量李代数相关的权系在弦图上的取值十分复杂，因为计算必须在高度非交换的代数中进行，而该代数就是李代数的泛包络代数。对于最简单的非平凡情形，即李代数 $\mathfrak{sl}(2)$，利用 Chmutov– Varchenko 递推关系 [22], 可以简化计算，但这些关系往往仍不够用。因此，很长一段时间以来，我们都不知道 $\mathfrak{sl}(2)$-权系在任意两条弦都相交的弦图上的取值（也就是说，其交图为完全图）。P. Zakorko [65] 通过证明 S. Lando 的 2015 年猜想，给出了这些取值的生成函数，解决了这一问题。另一项近期成果是构造了关于 $\mathfrak{gl}(N)$-权系取值的递推关系 [64]。这些关系基于 M. Kazarian 提出的一种方法：将 $\mathfrak{gl}(N)$-权系延拓到任意置换（弦图可被视为某种特殊置换）。

研究图不变量时的一个关键问题，是如何将其延拓到嵌入图上。许多近期论文都研究了这一问题。在其中大多数论文中，嵌入图的不变量被定义为底层抽象图的不变量，并辅以有关嵌入的信息。然而，我们首先感兴趣的是将由有限型结不变量定义的权系，延拓为与有限型链环不变量相关联的权系（与结不同，链环有多个连通分支）。弦图可以解释为可定向曲面上只有一个顶点的嵌入图；而链环则对应于广义弦图，即位于可定向曲面上的嵌入图，其顶点数与链环分支数相同。

在近期的论文中， [51, 25], 提出了一种将权系和图不变量推广到

任意嵌入图的方法，该方法基于对相应霍普夫代数结构的研究。图空间以及模掉四项关系后的弦图空间都具有自然的连通分次霍普夫代数结构。我们尚不了解由嵌入图张成的空间是否具有这种结构。不过，二元 δ-拟阵空间确实具有这种结构 [47], ；二元 δ-拟阵是组合对象，能够积累有关图或弦图以及嵌入图的重要信息。然而，将与带度量李代数相关联的权系推广到具有任意多个顶点的嵌入图，仍然是一个悬而未决的问题。

本文结构如下。

在第 1 节中，我们回顾与弦图、其交图以及弦图和图的四项关系相关的主要定义。我们给出若干满足四项关系的图不变量的关键示例，并由此定义权系。

在第 2 节中，我们介绍图空间上的霍普夫代数结构，以及上述图不变量在该结构下的性质。我们还提及了近期关于 [21] 图不变量的霍普夫代数结构与可积性之间关系的结果。

第3 节专门讨论与李代数相关的权系。除了介绍关于 $\mathfrak{sl}(2)$-权系的已知定义和结果外，我们还描述了 P. Zinova 和 M. Kazar- ian 关于该权系在交图为完全二部图的弦图上的取值的近期结果，以及 Lando关于该权系在交图为完全图的弦图上的取值的猜想（P. Zakorko定理）。本节还介绍了将 $\mathfrak{gl}(N)$-权系延拓至任意置换的方法，以及计算它的递推关系。

第 4节专门介绍如何将权系从弦图延拓到任意嵌入图。这里我们引入 δ-拟阵，并描述偶二元 δ-拟阵空间上的霍普夫代数结构。

关于权系的所有必要定义和经典结果，均可参见 [18]。我们仅重述陈述近期结果所必需的定义和结论。

作者部分受到 NRU HSE簇几何国际实验室、俄罗斯联邦政府资助项目（协议编号 075-15-2021-608，日期为 2021年06月08日）的支持。

1 四项关系

1990年，V. Vassiliev [62] 引入了有限型结不变量的概念，并为任意阶不超过 n 的结不变量定义了一个作用于具有 n 条弦的弦图上的函数。他证明，任何这样的函数都满足四项关系。1993年，M. Kontsevich [40] 证明了逆命题：如果一个作用于具有 n 条弦的弦图上的函数取值于零特征域，并且满足四项关系，那么它就可以由 Vassiliev 的构造从某个阶不超过 n的结不变量得到。（在 Vassiliev 定理和 Kontsevich 定理中，该函数还须满足一项额外要求，即所谓的单项关系。不过，当纽结换成框架结时，这项要求便不再存在；它不影响理论，因此下文不再提及。）满足四项关系的弦图上的函数称为权系。

Kontsevich 构造的通用有限型结不变量（*Kontsevich*积分）原则上可以让我们根据相应的权系重建有限型不变量。因此，研究权系对于理解有限型结不变量的本质至关重要。不过需要注意的是，明确计算一个结的 Kontsevich 积分是一项计算复杂的问题，迄今尚无令人满意的解决方案。

1.1 弦图与四项关系

一个阶为 n 的弦图，是由一个定向圆以及其上 $2n$ 个两两不同的点组成的图形，这些点分成 n 对；弦图视为在圆的保向微分同胚下等价。我们称承载该图的圆为其威尔逊环。

在下面所有图中，我们都假设圆沿逆时针方向定向。构成一对的点由线段或弧段连接。

四项关系由一个弦图和其中端点相邻的一对弦定义。若我们说，函数 f 在弦图上满足维谢夫 四项关系，则对于任意弦图 C 以及任意一对弦 a，b 在 C 中具有相邻端点时，图 1所示的方程成立。

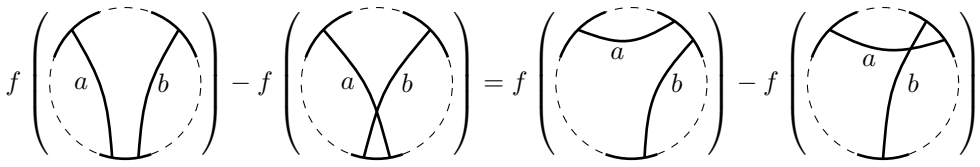


图1：弦图的四项关系

图中的方程具有以下含义。参与其中的四个弦图都可以添加一组弦，其端点属于虚线弧，并且这组弦在四个图中完全相同。在两条特定弦的四个端点 a、b中，固定 b 的两个端点以及 a 的一个端点，而 a 的第二个端点依次取靠近 b端点的四个位置。第二个端点 a 的具体位置决定了关系中的弦图。注意，两条弦 a 和 b是否相交并不重要：相交弦的情形可通过将图 1 所示关系乘以 -1，化为不相交弦的情形。

下面，我们将四项关系写成如下形式

$$f(C) - f(C'_{ab}) = f(\widetilde{C}_{ab}) - f(\widetilde{C}'_{ab}) \tag{1}$$

并称弦图 C'_{ab} 是通过对 C 中的$\widetilde{\quad}$$\widetilde{\quad}$弦 a、b施行 *Vassiliev* 第一次变换 得到的；弦图 C_{ab} 是施行*Vassiliev* 第二次变换的结果，而 C'_{ab} 则是这两种变换复合的结果。注意，对同一对弦施行第一次和第二次变换时，两者彼此交换，施行顺序无关紧要。

四项关系的定义涉及减法，而接下来我们还打算将弦图相乘。因此，我们通常会考虑取值于交换环的权系，并在具体示例中明确指出该环。

1.2 交图

弦图交图的不变量是权系的主要来源之一，

交图 g（C）是弦图 C 的简单图，其顶点集与 C的弦集一一对应，且当且仅当相应的弦相交时，两个顶点之间由一条边连接。（如果弦图中的两条弦的端点沿圆周交替出现，则称这两条弦彼此相交；图中弦的交点不是弦图的顶点。）图 2 展示了一个四项关系的例子

其中给出了一个弦图及其交图。图中只描绘了弦图及其交图；没有涉及函数值。

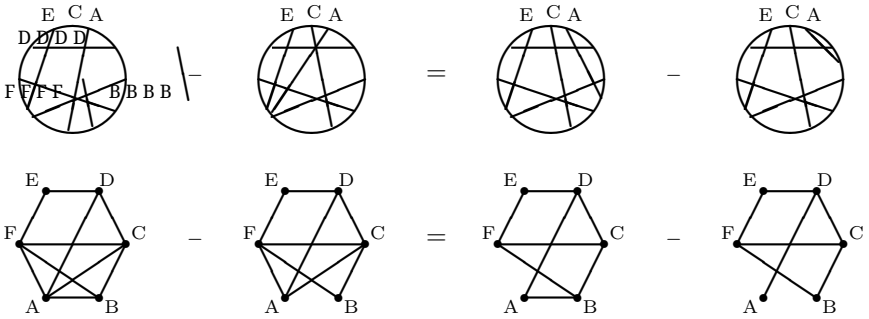


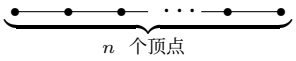
图2：弦图及其对应交图的四项关系

任何至多有 5 个顶点的图，都是某个弦图的交图。有两个有 6 个顶点的图不是交图；它们见图 3。随着 n 增大，在有 n 个顶点的简单图中，交图所占的比例迅速上升。已知多种用于判定一个图是否为交图的完备障碍集。

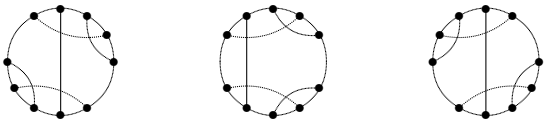


图3：5轮图和3棱柱图，这两个有 6 个顶点的图不是交图

另一方面，某些交图可以由多个彼此不同构的弦图实现。例如，考虑顶点为 n 的链，



对于 $n = 5$，存在三个具有此交图的不同弦图：



1.3 图的4项关系

图的4项关系由 [45]引入。我们称图不变量 f 满足4项关系，如果对于任意图 G 及其任意一对 a， b 顶点，我们都有

$$f(G) - f(G'_{ab}) = f(\widetilde{G}_{ab}) - f(\widetilde{G}'_{ab}); \tag{2}$$

这里，图 G'_{ab} 通过切换顶点 a 和 b 之间的邻接关系由 G 得到；图 G_{ab} 通过将 a 与 G 中所有与 b 相邻的顶点之间的邻接关系进行切换，由 G 得到；图 G'_{ab} 则是这两个操作复合的结果。

备注。 变换 $G \mapsto G'_{ab}$ 关于 a 和 b, $G'_{ab} = G'_{ba}$是对称的。反过来，图的第二 Vassiliev 变换 $G \mapsto G_{ab}$ 并不对称，而且图 G_{ba}通常并不同构于 G_{ba}。

满足四项关系的图不变量称为 4-不变量。与权系的情形类似，我们假设 4-不变量取值于交换环。

直接研究弦图的交图在 Vassiliev 变换下的变化方式，可以证明以下结论。

定理 1.1 ([45])。 若 f 是图上的 4-不变量，则 $f \circ g$ 是弦图上的一个权系。

四项关系的一个例子见图 2。但请注意，即使图 G 是交图，也不意味着四项关系中的另外三幅图同样是交图。

因此，任何4-不变量都确定一个权系，从而根据 Kontsevich 定理确定一个结不变量。下面给出几个 4-不变量的例子。

S. Lando 提出的以下问题在过去二十年中仍未解决：

问题。 模去图的四项关系，任意图是否都是交图的线性组合?

计算机计算（I. A. Dynnikov，私人通信）表明，对于所有至多有8个顶点的图，这一结论都是正确的。

1.3.1 色多项式

简单图的4-不变量中，历史上最早的例子之一是色多项式。设 G 是一个图，令 $V(G)$ 表示其顶点集合。 G 的 色多项式 $\chi_G(c)$ 是用 c 种颜色对集合 $V(G)$ 进行正常着色的数量，也就是说，是满足以下条件的映射 $V(G) \to \{1, 2, \ldots, c\}$ 的数量：对于任意两个相邻（由一条边连接的）顶点，映射的值都不同。

众所周知，色多项式满足收缩－删除关系：

$$\chi_G(c) = \chi_{G'_e}(c) - \chi_{G''_e}(c) \tag{3}$$

对于任意图 G 及其中任意一条边 e ；这里，图 G'_e 是从 G 中删除边 e得到的，而 G''_e 则是收缩这条边后的结果。收缩一条边时，该边会被删除，其两个端点合并为图中的一个新顶点，之后若出现重边，则将其替换为一条单边。

收缩－删除关系很容易证明：它对应于将图 G'_e 的顶点用 c 种颜色进行正则着色的集合划分为两个互不相交的子集，即两端着色不同的那些着色（这恰好是图 G的顶点的正则着色）和两端着成相同颜色的那些着色（后者与图 G''_e的顶点的正则着色一一对应）。由于含有 n 个顶点的离散（无边）图的色多项式为 c^n，收缩－删除关系证明，对于含有 n 个顶点的图 G ， $\chi_G(c)$确实是一个次数为 n 且首项系数为 1 的多项式。

定理 1.2 ([17])。 色多项式是一个4-不变量，

事实上，对图 G及其一条边 e 应用收缩－删除关系，其中该边的端点为 a， b ，我们得出

$$\chi_G(c) - \chi_{G'_{ab}}(c) = -\chi_{G''_{ab}}(c).$$

进而，

$$\chi_{\widetilde{G}_{ab}}(c) - \chi_{\widetilde{G}'_{ab}}(c) = -\chi_{\widetilde{G}''_{ab}}(c).$$

~验证两个图 G''_{ab} 和 G''_{ab}的顶点集之间的自然对应确立了它们的同构，即可完成证明。

1.3.2 加权色多项式（Stanley 对称化色多项式）

色多项式是一种重要的图不变量；然而，它的区分能力并不强。例如，任意一个具有 n 个顶点的树，其色多项式都是 $c(c-1)^{n-1}$；而具有 n 个顶点的两两不同构的树的数量会随着 n 的增大而迅速增长。加权色多项式（更广为人知的名称是 Stanley 对称化色多项式）是一种精细得多的图不变量。

为了定义加权色多项式，我们需要引入加权图的概念 .

定义 1.3. 加权图 是一个简单图 G ，并为其每个顶点赋予一个正整数，即权重。加权图的权重是其各顶点权重之和。

定义 1.4 ([17])。 加权色多项式 是一个加权图不变量 $G \mapsto W_G(q_1, q_2, \ldots\ldots)$，其取值属于由无穷多个变量 q_1， q_2，..... 构成的多项式环，并具有以下性质：

- 权重为 n 的单顶点图的加权色多项式为 q_n；
- 对于任意加权图的不交并 G_1， G_2，加权色多项式是可乘的 $W_{G_1 \sqcup G_2} = W_{G_1} W_{G_2}$ ；
- 加权色多项式满足加权收缩－删除关系

$$W_G = W_{G'_e} + W_{G''_e}, \tag{4}$$

其中 e 是加权图 G的一条边， G'_e 表示从 G中删除边 e所得的图，而 G''_e 是收缩 e所得的图；收缩的定义与简单图相同，新顶点的权重等于 e的两个端点权重之和。

定理 1.5 ([17])。 存在唯一一个具有上述性质的加权图不变量。权重为 n 的加权图 G 的加权色多项式 W_G 是关于变量 q_1、q_2、.....的拟齐次多项式，其次数为 n；若将变量 q_k 的权重设为 k，其中 $k = 1$、2、.....，则结论成立。

简单图可以视为加权图，并将其每个顶点的权重设为 1。因此，任何加权图不变量都定义了一个简单图不变量。

定理 1.6. 加权色多项式是一个4-不变量。

事实上，与色多项式的证明类似，我们指出，对图 G''_{ab} 和 G''_{ab} 的顶点集合进行自然的恒等识别 $\widetilde{}$，即可得到这两个图作为加权图的同构。

1995年，R. Stanley 引入了对称化色多项式的概念。

定义 1.7（[60]）。设 G 是一个简单图。将顶点集 V（G）映射到无限颜色集中的一种着色，是映射 β：V（G） $\to X = \{x_1, x_2, \dots\}$。对于每一种着色 β，都对应一个次数为 $n = |V$（G）|、变量为 x_1、x_2、.....的单项式 x_β，它等于 β 在 G 的所有顶点上的取值之积。G 的对称化色多项式 S_G（x_1，x_2，.....）是以下无穷和

$$S_G(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\substack{\beta: V(G)\to X \\ \beta \text{ regular}}} x_\beta,$$

如果着色 β 将任意两个相邻顶点映射到 X 中的不同元素，则称其为正规 着色。

显然，对称化色多项式是变量 X 的对称函数。Stanley 猜想断言，对称化色多项式能够区分任意两棵树。对于顶点数不超过 29 的树，该猜想已得到验证 [33], ，这表明对称化色多项式是比普通色多项式 χ_G 精细得多的图不变量。

作为变量 X 的对称多项式，任意对称化色多项式都可以表示为空间中对称多项式的任意一个基上的多项式。特别地，可以选择幂和

$$p_k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$$

作为该基。在这种形式下，如果将变量 p_1、p_2，..... 的次数分别设为 k（对于 $k = 1$、2，.....），则对称化色多项式 S_G 成为变量 p_1、p_2，..... 的有限拟齐次多项式，其次数为 $n = |V(G)|$。下面的陈述确立了 Stanley 对称化色多项式与加权色多项式之间的关系。

定理 1.8 （[53]）。*Stanley* 对称化色多项式用幂和表示，并在代换 $p_k =$ （-1）$^{n-k}q_k$、 $k = 1$、2、..... 后，变为加权色多项式；其中 $n = |V$（G）|。

由此得到一个推论：Stanley 的对称化色多项式是图的一个 4-不变量。

反过来，普通色多项式是 Stanley 对称化色多项式的一种特化：在代入 $p_i = c$ 后，后者便转化为前者，其中 $i = 1$、2、3、.....。

1.3.3 交错多项式

最初，交错多项式被定义为一个作用于有向图的函数，其中每个顶点都有两条入边和两条出边。该定义首次出现在论文 [4], 中，该论文专门研究 DNA 测序。后来，这一定义被推广到任意简单图。我们先来定义枢轴操作。

设 G 为一个简单图。对于 G中任意一对 a、b 相邻顶点，其余所有顶点可分为四类，即：

1. 与 a 相邻但不与 b 相邻的顶点；

2. 与 b 相邻但不与 a 相邻的顶点；

3. 同时与 a和 b相邻的顶点；

4. 既不与 a相邻，也不与 b相邻的顶点。

沿边 ab 对 G 进行枢轴 G^{ab} ，所得的图是这样得到的：当第一类中的任意两个顶点属于不同类别时，切换它们之间的邻接关系。

交错多项式 $L_G(x)$由以下递推关系定义：

1. 如果 G 没有边，那么 $L_G(x) = x^n$，其中 n 是 G中的顶点数；

2. 对于 G中的任意一条边 ab ，有

$$L_G(x) = L_{G\setminus a}(x) + L_{G^{ab}\setminus b}(x),$$

其中， $G\setminus a$ 表示从 G 中删除顶点 a 及其所有关联边后得到的图。

在 [4], 中，证明了交错多项式是良定义的：其计算结果与枢轴的应用顺序无关。定义立即表明， $L_G(x)$ 确实是 x 中的一个多项式，其次数为 $n = |V(G)|$。

定理1.9。交错多项式满足4项关系。

该定理在 [52] 中得到证明，另有一种不同的证明见 [39]。

1.3.4 转移多项式

赋有有向欧拉回路的4-正则图的转移多项式最初在 [35]中提出。通过收缩弦图 C 的每条弦，我们将后者转化为一个4正则图，其中弦图的威尔逊环成为一条有向欧拉回路。因此，该图的转移多项式定义了从弦图集合到多项式空间的映射。

反过来，对于带有指定有向欧拉回路的4正则图，可以关联一个弦图；其中弦的数量与图中顶点的数量相同。欧拉回路变为弦图的威尔逊环，而图的顶点则变为弦。

在这里，我们定义弦图的转移多项式。为了定义它，我们需要转移这一概念。设 C 为一个弦图。C 中的每条弦都可以通过以下三种方式之一替换为带；我们用希腊字母 χ、 ϕ或 ψ来表示这些方式：

- ϕ 如果这是一个普通的带；
- χ 如果这是一个半扭带；
- ψ 如果根本没有带，也就是说，如果我们直接擦除这条弦。

为每条带选择一种转移，即一个将弦的集合 $V(C)$映射 $V(C) \to \{\phi, \chi, \psi\}$ 到转移类型集合的映射，被称为弦图 D的一个状态。

选择一个权函数 w： $\{\phi, \chi, \psi\} \to K$，它将三个希腊字母中的每一个关联到交换环 K中的一个元素。

弦图的加权转移多项式 C 是多项式

$$T_C(x) = \sum_{s:V(C)\to\{\phi,\chi,\psi\}} \prod_{v\in V(C)} w(s(v))x^{c(s)-1},$$

其中，求和遍及 C的所有状态， $c(s)$表示通过将圆盘附着到威尔逊环上（并将弦替换为相应的带）而从 C 得到的曲面的边界的连通分支数。

定理 1.10 ([26])。 通过选择 $w(\chi) = t$， $w(\phi) = -t$， $w(\psi) = s$，对于权函数，我们将转移多项式转化为一个取值于多项式环中的权系$\mathbb{C}[t, s, x]$。

1.3.5 斜特征多项式

设 G 是一个含有 $n = |V(G)|$ 个顶点的简单图。以任意方式用 1 到 n 的数字为顶点编号，并根据所选编号为 G 关联一个邻接矩阵。 $A(G)$ 邻接矩阵是一个定义在二元域 $\mathbb{F}_2$ 上的 $n \times n$ 矩阵；如果编号为 i 和 j 的顶点之间有一条边，则单元格 $(i,\ j)$ 中为 1，否则为 0。特别地，矩阵 $A(G)$ 是对称的，且对角线上的元素均为 0。 G 的同构类可由其邻接矩阵唯一确定。邻接矩阵的各种特征，例如其特征多项式，在图的研究中起着关键作用。

定义 1.11. 如果图 G 的邻接矩阵$A(G)$ 在 $\mathbb{F}_2$上非退化（分别为退化），则称该图非退化（分别为退化）。图的非退化性是一个取值于域 $\mathbb{C}$ 的图不变量：对于非退化图，其值为 1；对于退化图，其值为 0。

任何具有奇数个顶点的图，其邻接矩阵都是退化的，因为它在域 $\mathbb{F}_2$ 上是反对称的，因此任何具有奇数个顶点的图的非退化性均为 0。具有偶数个顶点的图既可以是非退化的，也可以是退化的。我们用 $\nu(G)$ 表示图 G 的非退化性。

引理 1.12. 非退化性在第二 *Vassiliev* 变换下保持不变。

事实上，设 G 是一个图，其顶点为 a, b 。为图 G 的顶点编号，使得 a 的编号为 1， b 的编号为 2。则 $A(G_{ab})$，即$\backsim G_{ab}$ 的邻接矩阵，为

$$A(\widetilde{G}_{ab}) = I_{12}^t A(G) I_{12}, \tag{5}$$

其中， I_{12}是在 $\mathbb{F}_2$ 上的方阵 $|V(G)| \times |V(G)|$，除单元格 (1，2) 的值为 1 外，其余处均与单位矩阵一致，而 I_{12}^t 是其转置矩阵。该引理的断言源于矩阵 I_{12} 和 I_{12}^t 均为非退化矩阵这一事实。

定义 1.13 ([25])。 图 G 的斜特征多项式是多项式

$$Q_G(u) = \sum_{U \subset V(G)} \nu(G|_U) u^{|V(G)|-|U|},$$

其中，求和遍及图的顶点集合 $V(G)$ 的所有子集 U ，而$G|_U$ 表示由其顶点的子集 U 所诱导的 G 的子图。

具有偶数个顶点的图的斜特征多项式是其自变量的偶函数；如果顶点数为奇数，则斜特征多项式也是奇函数。

引理1.12 蕴含

命题 1.14。 斜特征多项式是图的4-不变量。

我们来解释为什么斜特征多项式会得此名称。设 C 是一个弦图， $g(C)$ 是它的交图。为这个图选取如下定向。在威尔逊环上选取一点 α ，使其不是任何一条弦的端点；在该点剪开圆周，并将其展开成一条水平线，其定向继承自圆周。经过这一变换，弦变成半圆（弧）；当且仅当对应的弧彼此相交时， $g(C)$ 中的两个顶点之间才有一条边。将 $g(C)$ 中的每条边定向，使其从对应弧的左端较早出现的顶点，指向该边另一顶点所对应弧的顶点。如果按照对应弧左端的位置为图的顶点编号，那么每条边都从编号较小的顶点指向编号较大的顶点。如此得到的交图定向取决于圆周的切点 α ；将相应的有向图记为 $\vec{g}_\alpha(C)$ 。

有 n 个编号顶点的有向图的交矩阵是一个取整数值的 $n \times n$ 矩阵，其 (i, j) 项在顶点 i 和 j 之间没有边相连时为 0；箭头从 i 指向 j 时为 1；若箭头从 j 指向 i，则为 -1 。有向图的邻接矩阵是斜对称的。

命题 1.15 （[25]）。 有向图 $\vec{g}_\alpha(C)$ 的邻接矩阵的特征多项式与切点 α无关。

定理 1.16 （[25]）。 弦图的有向交图的邻接矩阵的特征多项式 C 与其交图的斜特征多项式 $Q_{g(C)}$相同。

因此，交图的斜特征多项式与通过对其边进行某种定向而得到的有向图的特征多项式相同，该定向属于一类可容许定向。这一事实说明了该不变量名称的由来。对于非交图，可能不存在这样的定向。

2 图的 Hopf 代数

许多自然的图不变量都是可乘的。对于图$G_1 \sqcup G_2$，它是两个图的不交并， G_1 且 G_2，该不变量的值等于它在 G_1和 G_2上的取值之积。特别是，第1.3 节中定义的所有不变量都是可乘的。可乘性意味着，若要计算图的不变量值，只需知道它在该图的连通分支上的取值即可。

本节将说明，图的不变量在余乘法作用下的行为同样重要。图的乘法和余乘法共同在由简单图张成的向量空间上构成一种 Hopf 代数结构。这个 Hopf 代数是由其本原元构成的多项式代数。本原元是图的线性组合；对于许多图不变量，它们在本原元上的取值远比在图本身上的取值简单。因此，色多项式在任一本原元上的取值都是一次多项式，而一个具有 n个顶点的简单图的色多项式是次数为 n的多项式。沿用 [21], 的说法，我们将那些在本原元上的取值为一次多项式的图的多项式不变量称为影射不变量。第 2.4 节讨论影射不变量的可积性性质。

2.1 图的乘法与余乘法

De注记：由 $\mathcal{G}_n$ 在 $\mathbb{C}$ 上所有具有 n 个顶点的图自由张成的向量空间， $n=0$，1，2，..... ，and let

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \dots$$

为这些向量空间的直和。注意，向量空间 $\mathcal{G}_0$ 是一维的；它由空图张成。在 $\mathcal{G}$ 上引入交换乘法 m： $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{G}$，其在生成元上的取值为

$$m : G_1 \otimes G_2 \mapsto G_1 \sqcup G_2$$

并通过线性性将其延拓到图的线性组合上。显然，该乘法是交换的，并且保持分次：

$$m : \mathcal{G}_k \otimes \mathcal{G}_n \to \mathcal{G}_{k+n}$$

对所有 k 和 n均成立。空图 $e \in \mathcal{G}_0$ 是该乘法的单位元。

余乘法 μ： $\mathcal{G} \to \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ 作用于图 G 时具有如下形式 [1]

$$\mu : G \mapsto \sum_{V(G)=U \sqcup W} G|_U \otimes G|_W,$$

其中，右侧的求和遍历顶点集$V(G)$的所有有序划分：将 G 划分为两个互不相交的子集； $G|_U$ 表示由 G 的顶点子集 U诱导的子图。通过线性性将余乘法延拓到图的线性组合上。关于此余乘法，向量空间 $\mathcal{G}$ 是一个余代数。关于 μ的余单位是线性映射ϵ： $\mathbb{C} \to \mathcal{G}_0$，将1映射到 e。

2.2 本原元、Milnor–Moore 定理与 Hopf 代数结构

余乘法为 μ 的余代数中的元素 p 称为本原元，如果

$$\mu : p \mapsto 1 \otimes p + p \otimes 1.$$

在余代数 $\mathcal{G}$ 中，由单个顶点构成的图 $K_1 \in \mathcal{G}_1$ 是本原元。然而，没有其他图是本原元，不过，某些由多个图构成的线性组合是本原元。因此，很容易验证差 $K_2 - K_1^2$ 是本原元。下文中，我们用 K_n 表示具有 n 个顶点的完全图。

任意多项式代数 $\mathbb{C}[y_1, y_2, \dots]$，无论其变量有限还是无限，只要规定变量 y_i 为本原元， $\mu(y_1) = 1 \otimes y_i + y_i \otimes 1$，就自然具有余代数结构。余乘法扩展到单项式及其线性组合（多项式）上，并作为环同态定义，即 $\mu\left(\prod_{k=1}^{n} y_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} (1 \otimes y_{i_k} + y_{i_k} \otimes 1)$。

定义 2.1。 一个元组 $(H, m, \mu, e, \epsilon, S)$，其中

- H 是一个向量空间；
- m： $H \otimes H \to H$ 是一个带单位元 e： $\mathbb{C} \to H$ 的乘法；
- μ： $H \to H \otimes H$ 是一个带余单位 ϵ： $H \to \mathbb{C}$ 的余乘法；

[1] 余乘法通常记作 Δ；然而，在本文中，符号 Δ 被大量用于 th e差异δ-拟阵的相关背景。

- $S : H \to H$ 是一个线性映射；

若满足以下条件，则称为霍普夫代数

1. m 是余代数同态；
2. μ 是代数同态；
3. S 满足关系 $m \circ (S \otimes \mathrm{Id}) \circ \mu = \eta \circ \epsilon = m \circ (\mathrm{Id} \otimes S) \circ \mu$。

霍普夫代数中的映射 S 称为对极。

多项式代数 $\mathbb{C}[y_1, y_2, \dots]$ 在将对极 S定义为映射 S： $y_i \mapsto -y_i$（对所有 $i = 1$，2，.....）并将其作为代数同态扩展到整个空间 H后，便成为霍普夫代数。

Hopf 代数 H 可以是分次的。在这种情况下，它表示为有限维子空间的直和

$$H = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus \dots,$$

且乘法和余乘法都必须遵循分次，即：

$$m : H_i \otimes H_j \to H_{i+j}, \qquad \mu : H_n \to \bigoplus_{i+j=n} H_i \otimes H_j.$$

如果向量空间 H_0 是一维的，则称分次 Hopf 代数为连通 的。

若为多项式 Hopf 代数中的每个变量 y_i 指定分次（权重） w（y_i） $\in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n = 1$，2，3，.....，权重不超过 n的变量只有有限个，则多项式 Hopf 代数 $\mathbb{C}[y_1, y_2, \dots]$便成为分次代数。其中分次为 n的子空间由权重为 n的单项式张成，而单项式的权重是其中各变量权重之和。

下面的 Milnor–Moore 定理描述了分次交换余交换 Hopf 代数的结构。

定理 2.2 ([48])。任何连通分次交换余交换 *Hopf* 代数都是由其本原元构成的多项式 *Hopf* 代数。

这一定理意味着，如果我们在每个分次为 n的本原元子空间 $P(H_n) \subset H_n \subset H$ 中选取一个基，那么 H 就是由这些基中的元素生成的分次多项式霍普夫代数，其中每个元素的权重设为其分次。

备注。 只假设霍普夫代数是余交换的，Milnor–Moore 定理仍然成立。不过，我们只会在交换情形下使用该定理，此时上述表述已经足够。

在多项式霍普夫代数中，每个多项式都自然对应于一个本原元，即其线性部分。从多项式向量空间到其线性部分的向量空间的这个映射是一个投影，也就是说，它的平方等于自身。Milnor–Moore 定理 2.2 表明，在任意连通分次交换余交换霍普夫代数中，都可以自然地定义到本原元子空间的投影 H。我们将这个投影记为 π， π： $H \to P(H)$。

每个齐次子空间 $H_n \subset H$ 都可以表示为本原元子空间 $P(H_n)$ 与投影 π 的核 $D(H_n)$ 的直和 $H_n = P(H_n) \oplus D(H_n)$。核 $D(H_n)$ 由可分解元构成，也就是说，它由分次低于 n 的本原元多项式构成。

投影 π 可由下式给出。设 ϕ, ψ：$H \to H$ 为线性映射。定义卷积积 $\phi * \psi$：$H \to H$ 为如下线性映射：对所有 $a \in H$，令 $(\phi * \psi)(a) = m((\phi \otimes \psi)(\mu(a)))$。分次 Hopf 代数中的卷积积可用于定义线性映射上的其他运算，这些运算可用幂级数表示。因此，若 ϕ：$H \to H$是 Hopf 代数 H 到其自身的保分次线性映射，且 $\phi(1) = 1$，则 ϕ 的对数可定义为

$$\log \phi = \phi_0 - \frac{1}{2}\phi_0 * \phi_0 + \frac{1}{3}\phi_0 * \phi_0 * \phi_0 - \dots,$$

其中 ϕ_0： $H \to H$ 是由 ϕ_0： $1 \mapsto 0$ 给出的线性映射，并且 ϕ_0 在所有正分次 $k > 0$ 的齐次子空间 H_k 上与 ϕ 重合。

定理 2.3 （[60]）。投影 π： $H \to H$ 是恒等映射的对数$\pi = \log \mathrm{Id}$。

为证明这一陈述，只需验证：对于任意本原元 p，$\log \mathrm{Id}(p) = \phi_0(p) = p$，并且对于本原元的任意非线性单项式，$\log \mathrm{Id}(p_1 p_2 \dots) = 0$。

特别地，在图的霍普夫代数 $\mathcal{G}$ 中，到本原元子空间的投影 π 的核为可分解元子空间，其表达式为 [44]

$$\pi(G) = G - 1! \sum_{U_1 \sqcup U_2 = V(G)} G|_{U_1} G|_{U_1} + 2! \sum_{U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3 = V(G)} G|_{U_1} G|_{U_2} G|_{U_3} - \dots, \tag{6}$$

其中，求和遍历集合 V（G）的所有无序划分，即将 G 的顶点划分为 2、3、4、..... 个非空互不相交的子集。例如， π（K_3） $= K_3 - 3K_1K_2 + 2K_1^3$。容易验证，右侧的图的线性组合确实是一个本原元。

投影 π ： $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ 将非连通图映射为 0，因为它们是霍普夫代数 $\mathcal{G}$中的可分解元。反过来，具有 n 个顶点的连通图的投影构成了分次为 n的本原元空间 $P(\mathcal{G}_n)$的一组基。

恒等映射 Id： $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ 保持四项关系不变，因此其对数 $\log \mathrm{Id} = \pi$也具有同样的性质。作为推论，投影公式在霍普夫代数 $\mathcal{F}$ 中同样成立。

在弦图的霍普夫代数 $\mathcal{C}$中，投影公式具有类似的形式，其中用弦图 C 的弦集$V(C)$替代 G的顶点集 $V(G)$。

备注。还可以用另一种方式将图与图的霍普夫代数中的本原元联系起来，参见例如 [3], ，这种方式可能看起来更简单。具体而言，令 G 取为以下总和

$$G \mapsto \sum_{E' \subset E(G)} (-1)^{|E(G)| - |E'|} G|_{E'},$$

其中求和遍历 G的所有生成子图。然而，与投影 π 不同，该运算是图的霍普夫代数所特有的，不能通过线性扩张为到本原元子空间的投影。

2.3 图不变量与 Hopf 代数结构

许多图不变量以及权系的性质，都与相应霍普夫代数的结构密切相关。色多项式就是一个典型例子。我们通过线性性将色多项式扩展为映射 χ ： $\mathcal{G} \to \mathbb{C}[c]$ 将整个空间 $\mathcal{G}$ 映射到单变量多项式空间。

定理 2.4. 霍普夫代数 $\mathcal{G}$ 中任一本原元上的色多项式取值都是一次多项式，即一个次数为1的单项式。

事实上，这一性质不过是众所周知的色多项式的二项式性，它断言 χ 是一个 Hopf 代数同态:

定理 2.5. 图 G 的色多项式满足关系

$$\chi_G(x+y) = \sum_{U \sqcup W = V(G)} \chi_{G|_U}(x)\chi_{G|_W}(y),$$

其中，右侧的求和遍历顶点集合 $V(G)$ 的所有有序划分；这些划分将 G 分为两个互不相交的非空子集。

图的霍普夫代数 $\mathcal{G}$ 到多项式的 Hopf 代数$\mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$之间的分次同态将在下文作更详细的研究，参见第 2.4 节。

定理 2.4特别意味着，任意图$\pi(G)$ 在投影 G 到本原元子空间上的色多项式值是一个一次多项式。方程（6）以及任意（非空）图的色多项式常数项为 0 这一事实，意味着多项式 $\chi_{\pi(G)}(c)$ 对任意图 $\chi_G(c)$，都与 G 的一次项相同。

某些其他图不变量也有类似的表现。

Th定理 2.6 ([25], [39])。 任意本原元上的图的斜特征多项式 -me是一个常数。

阶为 n 的本原元的交错多项式是一个次数为 a t mo^{st} $[\frac{n}{2}]$的多项式。

2.4 图的霍普夫代数与可积性

本节介绍图不变量与数理物理中可积系统理论之间的联系。对于一个图不变量，可以将其与它的平均值关联起来；该平均值是将此不变量在所有图上的取值求和得到的，并且每个图的权重为其自同构群阶数的倒数。如果该不变量取值于无穷多个变量构成的多项式环，那么所得结果就是这些变量的形式幂级数。

众所周知，对于曲面上的图（嵌入图），类似的构造会导出可积层级的解。然而，对于抽象图，直到最近才证明了这类结果 [21]。该结果指出，经过适当缩放变量后，乌姆布拉图不变量的平均值将成为 Kadomtsev–Petviashvili 层级的一个解。

2.4.1 KP可积层级

Kadomtsev–Petviashvili 可积层级（***KP*** 层级）是一个关于未知函数 $F(p_1, p_2, \dots\dots)$的无限个变量的非线性偏微分方程系统。该层级的方程由整数分拆n、 $n \geq 4$来索引，这些分拆被分成两部分，且两部分均不等于 1。前两个方程分别对应于 4 和 5 的分拆，具体为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial p_2^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial p_3} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial p_1^2}\Big)^2 - \frac{1}{12}\frac{\partial^4 F}{\partial p_1^4} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial p_2 \partial p_3} &= \frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial p_4} - \frac{\partial^2 F}{\partial p_1^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial p_2} - \frac{1}{6}\frac{\partial^4 F}{\partial p_1^3 \partial p_2}. \end{aligned}$$

每个方程的左侧对应于一个被分成两部分且两部分均不等于 1 的分拆，而右侧的各项则对应于同一整数 n 的分拆，其中包括等于 1 的部分。对于 $n = 6$，有两个方程分别对应于分拆 $2 + 4 = 6$ 和 $3 + 3 = 6$，依此类推。KP 层级解的指数称为其τ-函数。

2.4.2 影子图不变量

定义 2.7. 取值于无穷多个变量的多项式环 $\mathbb{C}[q_1, q_2, \dots]$ 中的图不变量，如果其通过线性延拓为映射 $\mathcal{G} \to \mathbb{C}[q_1, q_2, \dots]$ 后是分次 Hopf 代数同态，则称为影子 不变量；这里，多项式环中的分次由变量 $w(q_i) = i$的权重定义，其中 $i = 1$，2，3 .....。

T根据定义，图不变量是影子不变量，当且仅当它在一个
原始 n 的元素上的取值为某个常数 c乘以 cq_n 。

例 2.8. Stanley 对称化色多项式是影子不变量的一个例子。事实上，根据定理 1.5，取商于收缩－删除关系的带权图的 Hopf 代数与多项式的 Hopf 代数分次同构。

通过为变量 q_i 赋予具体值而得到的其他影子不变量及其各种特化，包含许多广为人知的图不变量。

例 2.9. 在 [21], 中引入了图的阿贝尔多项式。对于图 G 中的任意生成森林，将变量 q_i 的单项式定义为乘积 iq_i ，其中乘积遍历森林中的所有树，而 i 表示该树的顶点数。乘以 i 在此对应于选择树中的一个根，也就是说，这样的单项式编码了与所选生成森林对应的有根树的数量。阿贝尔多项式 $A_G(q_1, q_2, ...)$ 等于对 G中的所有生成森林的这些单项式求和。

如果 G 是一个有 n 个顶点的图，那么 A_G 是一个次数为 n 的拟齐次多项式，其中 q_n 的系数等于 G 的复杂度乘以 n。（回想一下，图的复杂度 是其生成树的数量。）将所有 $i = 1$、 2 、 ..... 、 n 都代换为 $q_i = x$ 后，A_{K_n} 个顶点的完全图的多项式便成为传统的阿贝尔多项式 [1]$A_n(x) = x(x + n)^{n-1}$。

定理 2.10 ([21])。 阿贝尔多项式是乌姆布拉图不变量，即其在图的霍普夫代数上的延拓 $\mathcal{G}$ 是分次 *Hopf*代数同态。

2.4.3 影射不变量的可积性

定理 2.11。 设 I 是一个乌姆布拉图不变量，其取值于由无穷多个变量 q_1、 q_2、 .....构成的多项式环中。定义生成函数

$$\mathcal{I}^\circ(q_1, q_2, \dots) = \sum_G \frac{I_G(q_1, q_2, \dots)}{|\operatorname{Aut}(G)|}, \tag{7}$$

其中求和遍历所有图的同构类，而 $|\operatorname{Aut}(G)|$ 表示 G的自同构群的阶。

将常数 i_n 记为以下总和

$$i_n = n! \sum_{G \text{ connected}} \frac{[q_n] I_G(q_1, q_2, \dots)}{|\operatorname{Aut}(G)|}$$

即单项式 q_n 的所有系数之和。

假设对于所有 $n=1$、2、……，常数 i_n 均非零。对变量 $q_n = 2^{n(n-1)/2}(n-1)!\,i_n \cdot p_n$ 重新缩放后，生成函数 $\mathcal{I}^\circ$ 变为以下单部舒尔多项式的线性组合：

$$S(p_1, p_2, \dots) = 1 + 2^0 s_1(p_1) + 2^1 s_2(p_1, p_2) + \cdots + 2^{n(n-1)/2} s_n(p_1, p_2, \dots, p_n) + \dots.$$

我们强调，对定理中的变量重新缩放后，每个 脐带图不变量 I 都会变为同一个 生成函数。

表达式 i_n 中对连通图的求和可以替换为对所有图的求和，因为对于任意非连通图 G，多项式 $I_G(q_1, q_2, \dots)$ 中单项式 q_n 的系数为 0。

由于单部舒尔多项式的任意线性组合都是 KP 层级的 τ-函数，因此我们有

推论2.12。 对定理 *2.11*中给出的变量重新缩放后，生成函数$\mathcal{I}$ 变为 *KP* 层级的一个 τ-函数。

3 弦图的霍普夫代数及与李代数相关的权系

弦图空间和图空间都自然地具有霍普夫代数结构。本节将介绍这种结构与由李代数构造的权系之间的关系。这是一大类重要的权系，与量子纽结不变量相关。然而，求出这类权系的取值在计算上相当复杂，因为这需要在非交换代数中进行计算。我们回顾已有结果，并介绍有助于克服这些困难、从而在李代数 $\mathfrak{sl}(2)$ 和 $\mathfrak{gl}(N)$ 的情形下得到显式答案的新结果。

3.1 弦图的霍普夫代数的结构

与图类似，弦图也生成一个霍普夫代数。这种霍普夫代数与图的霍普夫代数的一个重要区别在于，它只有在弦图关于四项关系所张成子空间取商后的商空间中才是良定义的。不取这个商空间，就无法正确地定义乘法（而余乘法则可自然定义）。

定义乘积 C_1C_2 弦图 C_1，C_2 即将它们的威尔逊环在任意一点（该点不与弦的端点重合）切开后粘合，并保留这些环的定向，从而得到的弦图，见图 4。模去四项关系后，这个乘积是良定义的。

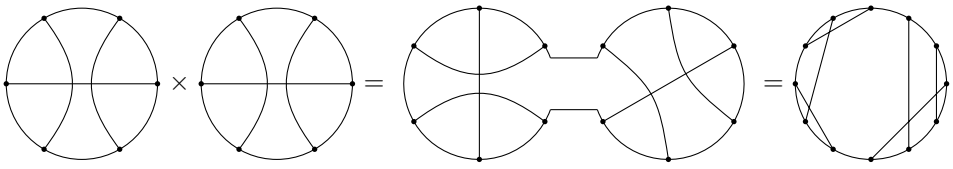


图4：弦图的乘法

余乘法将任意弦图 C 映射为弦图张量积之和，这些弦图是通过将 C 中的弦集拆分为两个不相交的子集而得到的

$$\mu : C \mapsto \sum_{I \sqcup J = V(C)} C|_I \otimes C|_J.$$

这些运算将向量空间

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus \dots,$$

其中 $\mathcal{C}_n$ 由具有 n 条弦的弦图张成，模去四项关系后，成为分次交换余交换连通霍普夫代数 [40]。

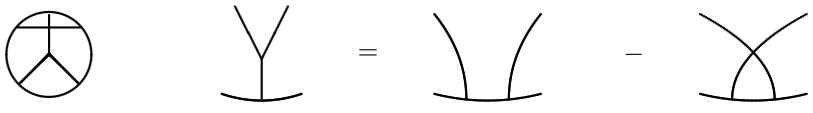
将一个弦图映射为其交图的映射，通过线性延拓，成为从弦图的霍普夫代数到模去四项关系的图的霍普夫代数的同态。

弦图的霍普夫代数自然同构于雅可比图的霍普夫代数。雅可比图 是一个嵌入的三正则图，带有一条指定方向的环，称为威尔逊环。此类图的分次等于顶点数的一半（容易看出，三正则图中的顶点数必然为偶数）。记$\mathcal{J}_n$ 为由分次为 n 的雅可比图张成并模去以下关系得到的空间

- 反对称关系
- STU关系。

反对称关系指出，对图中任意顶点改变定向，都会使相应元素的符号改变；STU 关系如图 5 所示。它使我们能够将任意雅可比图表示为弦图的线性组合。这一对应关系在 $\mathcal{J}$ 与 $\mathcal{D}$ [5]之间建立了同构。

与弦图的情形类似，两个雅可比图的乘积定义为：在不同于各因子顶点的任意点处剪开它们的威尔逊环，再将其粘合起来。移除威尔逊环后，一个雅可比图会分解为若干连通分支（弦图的连通分支就是它的弦）。余乘法将一个雅可比图映射为其子图张量积之和，这些子图通过将其连通分支集合以所有可能的方式拆分成两个子集而得到。



(a) (b)

图 5：(a) 雅可比图 (b) STU 关系。每个内部顶点处的半边均按逆时针方向定向；边的横截相交处不是顶点

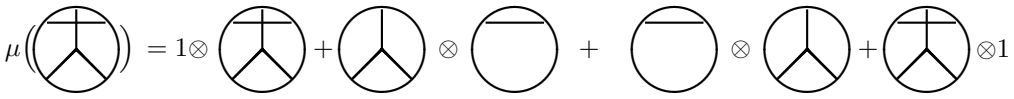


图 6：雅可比图的余乘法

特别地，连通雅可比图是霍普夫代数 $\mathcal{J}$ 中的本原元。这些本原元张成每个由本原元构成的齐次子空间 $P(\mathcal{J}_n)$（不过通常它们满足某些线性关系）。由此可得推论，每个空间 $P(\mathcal{J}_n)$，以及与前者同构的空间 $P(\mathcal{D}_n)$，都具有自然滤过

$$\{0\} \subset P^{(1)}(\mathcal{J}_n) \subset P^{(2)}(\mathcal{J}_n) \subset \cdots \subset P^{(n+1)}(\mathcal{J}_n) = P(\mathcal{J}_n),$$

其中，子空间 $P^{(k)}(\mathcal{J}_n)$ 由威尔逊环上顶点数至多为 k 的连通雅可比图张成。

李代数 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数 $U\mathfrak{g}$ 具有一个由向量子空间构成的滤过

$$U^{(0)}\mathfrak{g} \subset U^{(1)}\mathfrak{g} \subset U^{(2)} \ldots U\mathfrak{g}, \qquad U^{(0)}\mathfrak{g} \cup U^{(1)}\mathfrak{g} \cup U^{(2)}\mathfrak{g} \cup \cdots = U\mathfrak{g},$$

其中 $U^{(k)}\mathfrak{g}$ 由次数至多为 k 的 $\mathfrak{g}$中单项式张成。反过来，这个滤过在泛包络代数的中心 $ZU\mathfrak{g}$ 中也诱导出一个滤过。文献 [22] 证明，对于给定度量李代数 $\mathfrak{g}$ 所对应的权系，其在属于滤过项 $P_{(k)}$ 的本原元上的取值属于 $ZU^{(k)}$。

文献 [64] 中的一个猜想指出，给定弦图 C，若其含有 n 条弦，则它到本原元子空间的投影 $\pi(C)$ 属于子空间 $P^{(k+1)}(\mathcal{J}_n)$，其中 k 是交图 $g(C)$ 的半周长。（简单图的周长 是其中最长圈的长度。）下文关于李代数所对应的权系在弦图投影到本原元子空间后的取值的结果，证实了这一猜想。

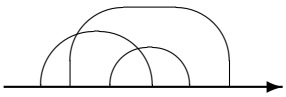
3.2 与李代数相关的权系的普适构造

每个度量李代数都对应一个权系，其取值位于该李代数的泛包络代数的中心。这个中心通常是由若干生成元构成的多项式环，这些生成元是该李代数的卡西米尔元。下面我们将介绍这一权系的构造，并给出用于计算它的多种算法，从而得到显式公式。

3.2.1 权系的定义

由度量李代数得到的权系，其普适构造如下。设 $\mathfrak{g}$ 是一个配备了 ad-不变标量积（非退化对称双线性形式） $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的李代数；这里 ad-不变性是指，对于任意三个元素 a、b、$c \in \mathfrak{g}$，等式 $\langle [a,b],c\rangle = \langle a,[b,c]\rangle$ 成立。任取 $\mathfrak{g}$ 中的一组基 $e_1, \ldots, e_d$，$\mathfrak{g}$ 的维数为 $d = \dim \mathfrak{g}$，并将对偶基的元素记为 $e_1^*, \ldots, e_d^*$，$\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{i,j}$，$i, j = 1, \ldots, d$。

现在令 C 为一个具有 n 条弦的弦图。在圆上任选一个不同于各弦端点的点，称其为切点。然后，对于每条弦 a，从$1, \ldots, d$中选取一个指标 i_a，并将基元素 e_{i_a} 赋给该弦的一个端点，将对偶基中的元素 $e_{i_a}^*$ 赋给该弦的另一个端点。按照威尔逊环的定向所规定的顺序，从切点开始，将所得的 $2n$ 个李代数元素相乘。所得单项式被视为给定李代数的泛包络代数 $U\mathfrak{g}$ 中的一个元素。对所有 d^n 种为弦赋予指标的可能方式所得的单项式求和；将所得和记为$w_{\mathfrak{g}}(C) \in U\mathfrak{g}$。例如，对于弧图



由切割相应弦图得到，其泛包络代数中的相应元素等于

$$\sum_{i,j,k=1}^{d} e_i e_j e_k e_i^* e_k^* e_j^*.$$

定理 3.1 ([40])。 *1.* 元素 $w_{\mathfrak{g}}(C)$ 与李代数中基 $e_1, \ldots, e_d$的选取无关。

2. 元素 $w_{\mathfrak{g}}(C)$ 与弦图中切点的选取无关。*3.* 元素 $w_{\mathfrak{g}}(C)$ 属于 $U\mathfrak{g}$的中心 $ZU\mathfrak{g}$。*4.* 不变量 $w_{\mathfrak{g}}$ 满足4项关系，因此是一个权系。*5.* 取值于交换环 $ZU\mathfrak{g}$ 的构造出的权系是可乘的，即对于任意两个弦图 C_1 和 C_2，有 $w_{\mathfrak{g}}(C_1C_2) = w_{\mathfrak{g}}(C_1)w_{\mathfrak{g}}(C_2)$。

3.2.2 雅可比图与权系在本原元上的取值

与李代数相关联的权系定义，可以用雅可比图的语言方便地重新表述。对于给定的度量李代数 $\mathfrak{g}$ ，考虑线性三形式$\omega(a,b,c) = \langle [a,b],c\rangle$，并将其视为第三张量幂 $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$中的一个元素。记 $\omega^* \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$为相应的对偶张量，它是利用标量积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$将 $\mathfrak{g}$与对偶空间 $\mathfrak{g}^*$相对应而得到的。注意，张量 ω^* 在张量因子的循环置换下保持不变，并且在任意两个因子互换时变号。现在取一个雅可比图。我们将张量 ω^* 与其每个内部顶点相关联，并将张量积的因子标记为从该顶点引出的边。对于每条内部边，即连接图中两个内部顶点的边，我们将边两端对应的张量通过标量积进行卷积。这样卷积所得的结果是 $\mathfrak{g}$ 的张量幂中的一个元素，其因子由位于威尔逊环上的顶点标记。最后，对该张量应用到泛包络代数的同态：它将 $\mathfrak{g}$ 中若干元素的张量积映射为它们在 $U\mathfrak{g}$ 中的乘积，乘积顺序按它们沿威尔逊环逆时针排列的次序，从切点开始。所得的 $U\mathfrak{g}$ 中的元素，正是权系 $w_{\mathfrak{g}}$ 在给定雅可比图上的取值。此定义对于高效计算权系 $w_{\mathfrak{g}}$在由连通雅可比图表示的本原元上的取值特别有用。

3.3 $\mathfrak{sl}(2)$权系

李代数 $\mathfrak{sl}(2)$ 是具有非退化 ad-不变标量积的最简单的非交换李代数。与更复杂李代数的情形不同， $\mathfrak{sl}(2)$ 权系满足 Chmutov-Varchenko 递推关系，这大大简化了其显式计算。尽管如此，即使采用这种递推关系，计算仍然相当繁琐，只能在有限的情形下得到显式答案。尤其是，直到最近，人们还不知道 $w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 权系在所有弦彼此两两相交的弦图上的取值公式。下面我们将介绍 P. Zakorko 的相关结果，以及 P. Zinova 和 M. Kazarian 关于 $w_{\mathfrak{sl}(2)}$在交图为完全二部图的弦图上的取值结果。

3.3.1 Chmutov-Varchenko递推关系

与给定李代数 $\mathfrak{g}$ 相关联的权系$w_{\mathfrak{g}}$ 取值于交换环 $ZU\mathfrak{g}$。然而，$w_{\mathfrak{g}}(C)$ 的表达式中的各项都属于复杂的非交换代数 $U\mathfrak{g}$。因此，实际应用中直接采用定义并不高效，需要找到更高效的权系计算方法，使其在每一步都使用交换环（例如多项式环）进行运算。

最简单的非交换李代数是 $\mathfrak{sl}(2)$。Chmutov 和 Varchenko 提出了一种计算该权系的高效算法 [22]。泛包络代数的中心 $U\mathfrak{sl}(2)$ 是关于一个变量的多项式环，该变量由卡西米尔元表示。我们将此生成元记为 c。因此，该权系$w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 取值于关于 c的多项式代数中。值$w_{\mathfrak{sl}(2)}(C)$ 在弦图 C 上的值，其中含有 n 条弦，是关于 c 的次数为 n 的多项式，其首项系数为 1，且常数项为零（当 $n > 0$时）。

定理3.2。 与李代数 $\mathfrak{sl}(2)$ 相关的权系 $w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 满足以下关系：

1. $w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 是乘法权系统，$w_{\mathfrak{sl}(2)}(C_1C_2)= w_{\mathfrak{sl}(2)}(C_1)w_{\mathfrak{sl}(2)}(C_2)$ 对于任意弦图 C_1 和 C_2均成立。作为推论，对于空弦图，该权系的值等于 1；

2. 如果图 C 是通过向图 C' 添加一条与 C'中的弦均不相交的弦得到的，那么有

$$w_{\mathfrak{sl}(2)}(C) = c\, w_{\mathfrak{sl}(2)}(C').$$

3. 如果图 C 是通过向图 C' 添加一条恰好与 C'中的一条弦相交的弦得到的，那么有

$$w_{\mathfrak{sl}(2)}(C) = (c-1)w_{\mathfrak{sl}(2)}(C').$$

4. 图 7中所示的6 项关系成立。

通常假定，在这些关系中，除所示弦之外，参与关系的所有图还包含其他弦，并且这六个图中的其他弦完全相同。Chmutov-Varchenko关系足以计算权系在任意弦图上的取值。事实上，如果关系1–3均不适用于给定的弦图，那么该图必然包含一条可应用关系4的弦。应用这些关系得到的所有图都比原图更简单，具体而言：右侧的两个图的弦数都少于左侧各图；左侧所有图的弦数相同，但其中最后三个图的相交弦对数少于第一个图。这意味着，通过有限次反复应用这些关系，可以以唯一的方式计算出权系的取值。

Chmutov-Varchenko关系也可用于权系$w_{\mathfrak{sl}(2)}$的公理化定义。采用这种方法，定理中的等式就作为权系的定义。于是，函数良定义这一断言便成为一个非平凡的命题，它指出计算结果与应用Chmutov-Varchenko关系的顺序无关。对于所构造的函数，四项关系是Chmutov-Varchenko关系的推论；也就是说，它确实是一个权系。

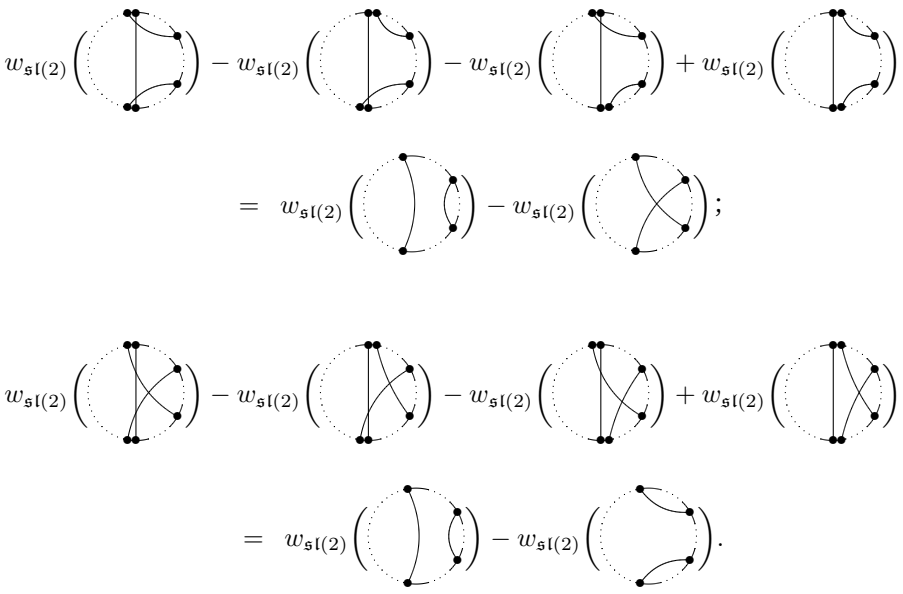


图7：权系 $\mathfrak{sl}(2)$的六项关系

3.3.2 $\mathfrak{sl}(2)$-图的权系

Chmutov和兰多的以下结果是李代数 $\mathfrak{sl}(2)$及与之相关的权系所特有的。其类似结果，比如对于李代数 $\mathfrak{sl}_3$，则不成立。

定理3.3 ([19])。 权系$w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 在任意弦图上的取值由其交图唯一确定。

该定理意味着，权系$w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 在那些作为弦图交图的图上定义了一个函数。该函数在涉及四项关系的交图组合上取零。

猜想3.4 (兰多)。 权系$w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 可以延拓为图上的一个函数，并满足图的四项关系。该延拓是唯一的。

存在这样的延拓意味着$w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 在由图的四项关系推得的交图线性组合上取值为零（这样的线性组合不一定是弦图四项关系的推论）。这样的延拓是否唯一并非$w_{\mathfrak{sl}(2)}$所特有。这与将弦图映射到其交图的映射是否为满射有关，见第1.3节。通过计算机检验了该猜想对至多有8个顶点的图是否成立（E. Krasilnikov， [41]）。请注意，对于 Krasilnikov 得到的延拓，$w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 在某些有8个顶点的图上的取值不是整数（所有这类图都不是交图，因为对所有交图，丘穆托夫–瓦尔琴科关系保证权系在其上的取值都是整数系数的多项式）。

此外，还有一些其他证据支持猜想3.3.2。例如，已知$w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 在将弦图投影到

本原元子空间时所需的延拓。权系 $w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 在将给定的、含有 $2n$ 个弦的弦图 D 投影到本原元子空间后，对其取值 $w_{\mathfrak{sl}(2)}(\pi(D))$ 是一个次数至多为 n 的多项式。

定理 3.5 ([42], [7])。 权系$w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 在弦图 D （含有 $2n$ 条弦）投影到本原元子空间后的取值 $w_{\mathfrak{sl}(2)}(\pi(D))$ 中 c^n 的系数，等于双重对数 $\nu(g(D))$ 的取值；这里的双重对数是该图交图的非退化性的双重对数（对数是按霍普夫代数中的卷积意义理解的）。

由于图的非退化性就是其 4-不变量，因此我们证实了这个猜想。

证明猜想 3.3.2 的一种可能方法，是尝试构造一个取值于单变量多项式环的图的 4-不变量，使其在交图上的取值与$w_{\mathfrak{sl}(2)}$的取值一致。为了构造这样的不变量，掌握$w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 在图上的大量明确计算值十分重要：这些值或许能揭示图的哪些特征反映在$w_{\mathfrak{sl}(2)}$中。以下给出的结果在很大程度上受到这一问题的启发。

在某种意义上，权系 $w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 与图的色多项式非常相似：

- 它是可乘的；
- 它在弦图上的取值是关于一个变量的多项式，其次数等于交图中的顶点数；
- 这个多项式的首项系数等于 1；
- 各系数的符号交替；
- 这个多项式的第二个系数的绝对值等于图中的边数；
- 如果弦图至少含有一条弦，这个多项式的常数项就等于零；
- 在弦图中添加一个叶子，会使 $w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 的值乘以 $c-1$。

因此，有必要了解 J. Huh [34] 为色多项式情形所证明的定理，是否也适用于权系 $w_{\mathfrak{sl}(2)}$ ：

问题。$w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 对于任意弦图，权系的系数绝对值序列是否为对数凸？特别是，这个系数序列是否具有单峰性，即先递增再递减？

Huh 的证明将色多项式与代数流形的几何联系起来。若能为 $\mathfrak{sl}(2)$ 权系找到类似的联系，将会很有意思。

3.3.3 $\mathfrak{sl}(2)$ 权系在完全图上的取值

Chmutov-Varchenko关系既可以用于计算权系$w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 在特定弦图上的取值，也可以为某些无限弦图序列推导出闭式公式。特别地，考虑由 n 两两相交的弦构成的弦图 K_n 。该弦图的交图是一个以 n 个顶点构成的完全图。由于完全图具有高度对称性，计算其某种图不变量通常并不困难

然而，对于权系$w_{\mathfrak{sl}(2)}$，这个问题却出人意料地难以解决，答案也相当出乎意料。

以下陈述由 S. Lando 于2015年左右提出，作为一个猜想。该猜想已在 [8] 中得到部分证明（针对多项式的一次项）。

定理 3.6 ([65])。 与李代数 $\mathfrak{sl}(2)$ 相关的权系在完全图上的取值所对应的生成级数具有如下无限连分式展开

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} w_{\mathfrak{sl}(2)}(K_n)t^n &= 1+ct+c(c-1)t^2+c(c-1)(c-2)t^3+c(c^3-6c^2+13c-7)t^4+\dots \\ &= \cfrac{1}{1+a_0t+\cfrac{b_1t^2}{1+a_1t+\cfrac{b_2t^2}{1+a_2t+\dots}}},\end{aligned}$$

其中

$$a_m=-c+m\,(m+1), \qquad b_m=m^2c-\frac{m^2(m^2-1)}{4}.$$

将这一分解与完全图的色多项式生成函数的一个具有类似分解的连分式进行比较是有益的:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{K_n}(c)t^n &= 1+ct+c(c-1)t^2+c(c-1)(c-2)t^3+c(c-1)(c-2)(c-3)t^4+\dots \\ &= \cfrac{1}{1+a_0t+\cfrac{b_1t^2}{1+a_1t+\cfrac{b_2t^2}{1+a_2t+\dots}}},\end{aligned}$$

$$a_m=-c+2m, \qquad b_m=mc-m(m-1).$$

在 [65] 中给出的该定理证明还包含一种根据该定理计算权系取值的高效方法，它作为计算过程中的一个中间步骤出现。考虑作用于单变量 x 多项式空间上的线性算子 T，其作用定义如下:

$$T(1)=x, \qquad T(x)=x^2-x,$$

以及

$$T(x^2f)=(2x-1)T(xf)+(2c-x-x^2)T(f)+(x-c)^2$$

对于任意多项式 f。

定理 3.7 ([65])。 权系 $\mathfrak{sl}(2)$ 在具有完全交图的弦图上的取值，等于多项式 $T^n(1)$ 在点 $x=c$ 处的取值，

$$w_{\mathfrak{sl}(2)}(K_n)=T^n(1)\,\big|_{x=c}\,.$$

根据权系 $w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 在完全图上的已知取值，很容易求出其在完全图投影到本原元子空间后的取值。事实上，完全图构成的多项式在图的霍普夫代数 $\mathcal{G}$中形成一个霍普夫子代数。具有 n 个顶点的完全图 K_n 的自同构群的阶为 $n!$，因此可以将完全图投影到本原元子空间后的指数生成函数表示为完全图的指数生成函数的对数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\pi(K_n)\frac{t^n}{n!}=\log\sum_{n=0}^{\infty}K_n\frac{t^n}{n!}.$$

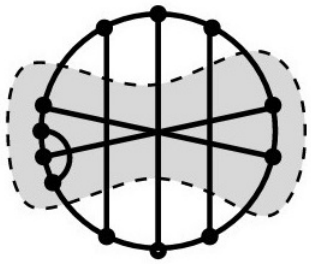


图 8：两个份额的并接

对恒等式两边应用 $w_{\mathfrak{sl}(2)}$ ，并代入我们已知的取值 $w_{\mathfrak{sl}_2}(K_n)$，即可得到展开式的前几项：

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_{\mathfrak{sl}(2)}(K_n)\frac{t^n}{n!} &= c\frac{t}{1!} - c\frac{t^2}{2!} + 2c\frac{t^3}{3!} + (2c^2-7c)\frac{t^4}{4!} - (24c^2-38c)\frac{t^5}{5!} \\ &\quad -(16c^3-284c^2+295c)\frac{t^6}{6!} + \dots .\end{aligned}$$

3.3.4 份额代数

定义 3.8。一个具有 n 条弦的份额 是两个有定向的区间组成的有序对，其中给定了 $2n$ 两两不同的点，并将其划分为 n 个互不相交的点对；该有序对视为在分别对两个区间施加保向微分同胚下等价。

对于这些区间，我们通常取威尔逊环上的两条弧。在这种情况下，份额是由两条弧的端点均属于所选弧对的弦所构成的弦图部分，而其他弦均没有端点落在这些弧上。如果弦图中的一对弧构成一个份额，那么它的补集也构成一个份额。在这种情况下，我们称该弦图为两个份额的并接 ，记作 $S_1 \# S_2$，见图8。在并接中，第一个份额的第一个区间的末端 S_1 连接到 S_2中第一个区间的起点； S_2 中第一个区间的末端 S_1连接到 S_1 中第二个区间的起点； S_2中第二个区间的末端 S_2 连接到 S_1中第一个区间的起点。并接是一种非交换运算。

对于每个份额 S，将两个区间的末端分别连接到另一区间的起始端，从而把这两个区间合并成一个威尔逊环，由此可以得到一个弦图。我们将这个弦图记作 S ，并称其为 S 的闭包 。我们还将交图$g(S)$称为份额 S 的交图，并将其记作 $g(S)$。

两个份额可以通过连接编号相同的区间来相乘，见图 9 .
Thi份额乘法不交换。

由同构类份额张成的空间可以赋予类似于定理 3.2 中丘穆托夫–瓦尔琴科关系的关系。也就是说，我们可以假设参与关系的所有图实际上都是份额。不过，定理中的关系 2 和 3 在定义时有些微妙。具体而言，假设份额 S 是通过添加一条弦得到的，该弦的两个端点都属于同一个编号为 i 的区间 $i \in \{1,2\}$，并且至多与其他一条弦相交。则份额的关系形式如下：

$$S = c_i\, S', \qquad S = (c_i - 1)\, S', \tag{8}$$

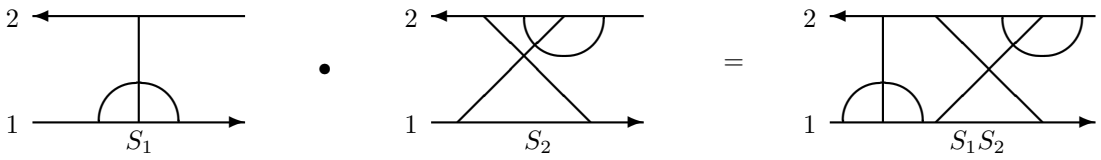


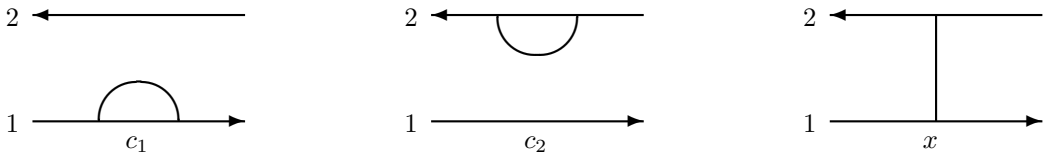
图9：两个份额的乘积

分别对应给定的弦不与其他任何弦相交，或只与其中一条相交的情况。

记 $\mathcal{S}$ 为由所有份额张成的向量空间对由六项关系和关系（8）张成的子空间取商所得的商空间。该商空间配备了由弧份乘法运算诱导的代数结构。

注意，由于六项关系不是齐次的，代数 $\mathcal{S}$ 是过滤代数，而不是分次代数。

命题 3.9. 代数 $\mathcal{S}$ 是交换的，并且同构于由以下三个生成元 c_1、c_2、x 生成的多项式代数：



该命题指出，模去六项关系和关系（8）后，每个份额都可以唯一表示为份额 1、x、x^2、x^3、.....的线性组合，其中份额 x^n由 n 条平行弦构成，弦的端点位于两个不同的区间上；这些线性组合中的系数是 c_1 和 c_2的多项式。

引入代数 $\mathcal{S}$ 的原因之一是以下这条评述。

命题 3.10. 假设两个份额（或两个份额的线性组合） S_1 和 S_2 在 $\mathcal{S}$中表示同一个元素。那么对于任意份额 R，将份额 S_1 和 S_2分别与 R并接所得到的弦图上的 $\mathfrak{sl}_2$ 权系取值相同，

$$w_{\mathfrak{sl}(2)}(S_1\#R) = w_{\mathfrak{sl}(2)}(S_2\#R).$$

例如，可以选择由 n 条彼此平行且端点位于不同弧上的弦组成的元组作为额外份额 R，也可以选择由 n 条两两相交且端点位于不同弧上的弦组成的元组。

3.3.5 完全二部图上的 $\mathfrak{sl}(2)$-权系取值

交图为完全二部图的弦图构成了另一大类弦图，对于这类弦图，$w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 的取值有显式公式给出。

记 $K_{m,n}$ 为由 m 条平行水平弦和 n 条平行垂直弦构成的弦图。此类弦图的交图是完全二部图，其一部分有 m 个顶点，另一部分有 n 个顶点。等价地，$K_{m,n}$ 是由两个份额并接而成的，它们分别由 m 条和 n 条平行弦构成，且每条弦的端点都位于不同的弧上。

对于每个 $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$，考虑权系$w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 在弦图 $K_{m,n}$ 上取值的生成函数,

$$G_m = G_m(c,t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{\mathfrak{sl}(2)}(K_{m,n}) t^n.$$

定理 3.11. 生成函数 G_m 满足以下关系

$$\frac{G_m(t) - c^m}{t} = \sum_{i=0}^{m} s_{i,m} G_i, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

其中，系数 $s_{i,m}$ 由以下生成幂级数给出

$$\sum_{i,m=0}^{\infty} s_{i,m} x^i t^m = \frac{1}{1 - x\,t} \left(c + \frac{c^2 t^2 - x\,t}{(1 - x\,t)^2 + (1 + x\,t)t - 2\,c\,t^2} \right)$$

请注意， G_m 也出现在等式右边，系数为 $s_{m,m} = c - {}^{m}_{(m-1)\,2}$。将这一项移至左边后，递推关系可以写得更明确:

$$G_m = \frac{1}{1 - s_{m,m} t} \big(c^m + t \sum_{i=0}^{m-1} s_{i,m} G_i \big).$$

由归纳法可得

推论 3.12. 生成函数 G_m 可以表示为几何级数 $1 - {}^{1}_{(c - {}^{i(i+1)}_{2})\,t}$，$i = 0, 1, \ldots, m$的有限线性组合。这些几何级数的系数是关于 c 的多项式。

对于较小的 m，递推关系给出

$$\begin{aligned}
G_0 &= \frac{1}{1 - c\,t}, \\
G_1 &= \frac{c}{1 - (c-1)\,t}, \\
G_2 &= \frac{c^2}{3(1 - c\,t)} + \frac{c}{2\,(1 - (c-1)\,t)} + \frac{c\,(4c-3)}{6\,(1 - (c-3)\,t)}, \\
G_3 &= \frac{c^2}{6\,(1 - c\,t)} + \frac{c\,(3\,c^2 - 2c + 2)}{5\,(1 - (c-1)\,t)} + \frac{c\,(4c-3)}{3\,(1 - (c-3)\,t)} + \frac{c\,(c-2)(4c-3)}{10\,(1 - (c-6)\,t)}.
\end{aligned}$$

上述命题可推广如下。对于任意份额 S，记 (S, n) 为由 S 与包含 n 条平行弦的份额 x^n 并接而成的弦图。引入生成函数

$$f_S = \sum_{n=0}^{\infty} w_{\mathfrak{sl}(2)}((S, n))\, t^n.$$

推论 3.13。生成函数 f_S 可以表示为以下形式的等比数列的有限线性组合：$1 - {}^{1}_{(c - {}^{i(i+1)}_{2})\,t}$，$i = 0, 1, \ldots, m$，其中 m 是 S 中端点属于不同弧的弦的数量。这些等比数列的系数是关于 c 的多项式。

事实上，如果份额 S 模掉六项关系和关系（8）后可以表示为基份额的线性组合 x^m，

$$S = \sum_{m=0}^{m} a_m x^m,$$

那么，级数 f_S 可以表示为以下级数的线性组合

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_{\mathfrak{sl}(2)}(x^m, n)\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} w_{\mathfrak{sl}(2)}(K_{m,n})\, t^n = G_m,$$

其系数相同，即

$$f_S = \sum_{k=0}^{m} a_m G_m,$$

于是我们可以应用上述推论。

与完全图的情形类似，完全二分图中的多项式在 $\mathcal{G}$中构成一个霍普夫子代数。存在一些公式，用于计算权系$w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 在完全二分图投影到本原元子空间后的取值；这些公式推广了完全图指数生成函数对数的公式，详情见 [32]。

3.3.6 $\mathfrak{sl}(2)$权系在非交图上的取值

并非每个图都是某个弦图的交图，但利用图的4项关系，我们可以尝试将其表示为交图的形式，并将 $\mathfrak{sl}(2)$ 权系扩展到该图上。上一节的公式使我们不仅能够将其扩展到某个特定的图，还能扩展到无限图序列。对于任意图 G，用 $(G,\ n)$ 表示它与 n 个孤立顶点的连通和，也就是在 G 上添加 n 个顶点，并将每个新增顶点与 G 的每个顶点相连。现在，令 G 为图 $C_5 =$ ，即含 5 个顶点的圈。对于 $n \geq 1$，图 $(C_5,\ n)$ 不是交图。



命题 3.14 ([31])。 假设关于 $\mathfrak{sl}(2)$-权系可扩张到图空间的猜想 *3.3.2* 成立。那么扩展权系在图 (C_5, n)上的取值由生成函数给出

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} w_{\mathfrak{sl}(2)}((C_5, n))\, t^n \\
&\qquad = (c+5)c^2\, G_0 - 2(c-1)(7c+3)\, G_1 + (5c^2 - 6c - 26)\, G_2 + 29\, G_3 - 10\, G_4 + G_5 \\
&\qquad = \tfrac{(30c^4-60c^3-111c^2+64c+36)c}{70(1-(c-1)t)} + \tfrac{(c-2)(5c^2-15c+9)(4c-3)c}{45(1-(c-6)t)} + \tfrac{(c-6)(c-2)(4c-15)(4c-3)c}{126(1-(c-15)t)},
\end{aligned}$$

其中 $G_m = \sum_{n=0}^{\infty} w_{\mathfrak{sl}(2)}(K_{m,n})\, t^n$ 是 $\mathfrak{sl}(2)$-权系在完全二部图上的取值生成函数。

证明通过对图（$C_5,\ n$）应用图 10 所示的四项关系得出。10 ，

$$(C_5, n) = G_{1,n} - G_{2,n} + G_{3,n}.$$

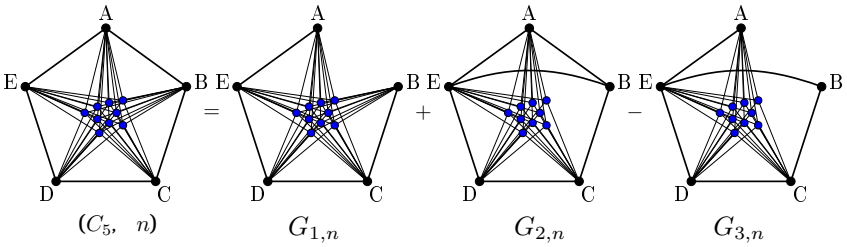


图 10：图 $(C_5,\ n)$ 的四项关系。右侧的所有图都是交图

右侧的每个图都是交图。此外，它是某个份额 S 对应的弦图（$S,\ n$）的交图，

$$G_{1,n} = g\left(\quad , n \right), \qquad G_{2,n} = g\left(\quad , n \right), \qquad G_{3,n} = g\left(\quad , n \right).$$

通过应用上一节中的论证，我们可以用基本份额 x^m、 $m = 0$、1、.....、5 表示得到的每个份额，并以此将图 $(C_5,\ n)$ 的生成函数表示为相应完全二部图的生成函数。

3.4 $\mathfrak{gl}(N)$权系

直到最近，除了 $\mathfrak{sl}(2)$ 之外，还没有人发现适用于其他李代数、类似 Chmutov–Varchenko 递推的方法；而计算与某个李代数相关的权系取值，基本上唯一已知的方法就是直接应用定义，这极其繁琐。本文将介绍近期论文 [64]中的研究成果，该论文致力于计算与李代数 $\mathfrak{gl}(N)$ 相关的权系。

对于 $\mathfrak{gl}(N)$ 的基，可以选取矩阵单位 E_{ij}，它们在第 i 行与第 j 列的交点处为 1，其余所有元素均为 0。两个矩阵单位的交换子具有形式 $[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{jk}$。标准的不变标量积由$\langle x, y\rangle = \mathrm{Tr}(xy)$ 给出，相对于此标量积的对偶基为 $E^*_{ij} = E_{ji}$。中心$ZU(\mathfrak{gl}(N))$由以下卡西米尔元自由生成：卡西米尔元 $C_1, C_2, \ldots, C_N$，其中 $C_1 = \sum_{i=1}^{N} E_{ii}$,$C_2 = \sum_{i}^{N}{}_{,j=1} E_{ij}E_{ji}$，更一般地，

$$C_k = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{N} E_{i_1 i_2} E_{i_2 i_3} \ldots E_{i_k i_1}.$$

编号大于 N 的卡西米尔元也以类似方式定义。它们也属于中心，但可以表示为编号至多为 N 的卡西米尔元的多项式。因此，与李代数 $\mathfrak{gl}(N)$ 相关的权系的值是卡西米尔元的多项式。例如，很容易看出，对于由单根弦组成的弦图 K_1，有 $w_{\mathfrak{gl}(N)}(K_1) = C_2$。

定理 3.15 ([64])。 存在一个通用权系，我们记作 $w_{\mathfrak{gl}}$，其取值属于以无限多个变量 N、C_1、C_2、.....为变量的多项式环；对于给定的正整数 N，它的取值与 $\mathfrak{gl}(N)$ 权系的取值一致。

容易看出，对于每个含有 n 条弦的弦图 C，当 $N \geq n$ 时，权系 $w_{\mathfrak{gl}(N)}(C)$ 的取值是关于 C_1、 ..... 、 C_n 的多项式。该定理断言，这个多项式的系数是关于 N 的多项式。此外，我们得到的 $w_{\mathfrak{gl}(N)}(C)$ 的通用公式对 $N < n$ 也仍然成立。

例 3.16. 对于由两条相交弦构成的弦图 K_2，我们有

$$w_{\mathfrak{gl}(N)}(K_2) = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} E_{ij}E_{kl}E_{ji}E_{lk} = C_2^2 + C_1^2 - N\,C_2 = w_{\mathfrak{gl}}(K_2).$$

下面，我们为任意置换定义权系 $w_{\mathfrak{gl}}$，并给出其计算的递推关系。

3.4.1 $\mathfrak{gl}(N)$-置换上的权系及递推关系

Let m 为正整数，令 S_m 为所有元素的置换构成的群 s
$\{1, 2, ..., m\}$；对于任意 $\sigma \in S_m$，我们定义

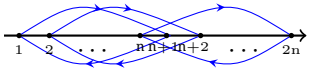
$$w_{\mathfrak{gl}(N)}(\sigma) = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} E_{i_1 i_{\sigma(1)}} E_{i_2 i_{\sigma(i_2)}} \ldots E_{i_m i_{\sigma(m)}} \in U(\mathfrak{gl}(N)).$$

事实上，这样构造的元素属于中心 $ZU(\mathfrak{gl}(N))$。此外，它在循环置换的共轭作用下是不变的，

$$w_{\mathfrak{gl}(N)}(\sigma) = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} E_{i_2 i_{\sigma(i_2)}} \ldots E_{i_m i_{\sigma(m)}} E_{i_1 i_{\sigma(1)}}.$$

例如，卡西米尔元 C_m 对应于循环置换 $1 \mapsto 2 \mapsto \cdots \mapsto m \mapsto 1$。另一方面，任何含有 n 条弧的弧图，都可以看作是集合 $m = 2n$ 个元素上的一个无不动点对合。由此对合确定的置换上的 $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ 的值，与相应弦图上的 $\mathfrak{gl}(N)$-权系的值一致。例如，对于弦图 K_n，我们有 $w_{\mathfrak{gl}(N)}(K_n)$ $= w_{\mathfrak{gl}(N)}((1\ n{+}1)(2\ n{+}2)\ldots(n\ 2n))$。

任何置换都可以用一个有向图表示。该图的 m 个顶点对应于被置换的元素。它们沿着定向圆排列，并按照圆的方向循环排序。图中的有向边表示置换的作用（因此，每个顶点恰有一条入边和一条出边）。有向图 $G(\sigma)$由这些 m 个顶点和 m 条边组成，例如，

$G((1\ n+1)(2\ n+2)\cdots(n\ 2n)) =$ 

（包含图顶点的圆以水平线表示）。

定理 3.17 ([64])。 权系 $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ 在置换上的取值具有以下性质：

- 权系$w_{\mathfrak{gl}(N)}$ 关于置换的连通和（串接）是可乘的。因此，对于空图（顶点数为零），$w_{\mathfrak{gl}(N)}$ 的值为 1。

- 对于循环序与该置换一致的循环置换，$w_{\mathfrak{gl}(N)}$ 的值与相应的卡西米尔元相同，即 $w_{\mathfrak{gl}(N)}(1 \mapsto 2 \mapsto \cdots \mapsto m \mapsto 1) = C_m$。

- 对于任意置换 $\sigma \in S_m$，以及顶点集合 $\{1, 2, \ldots, m\}$ 中任意两个相邻元素 $k, k+1$，不变量 $w_{\mathfrak{gl}_N}$ 的取值满足恒等式

$$w_{\mathfrak{gl}(N)}\left(\begin{array}{c}\includegraphics[height=2.5cm]{image_1.png}\\ a \quad c \quad k \quad k+1 \quad b \quad d\end{array}\right) - w_{\mathfrak{gl}(N)}\left(\begin{array}{c}\includegraphics[height=2.5cm]{image_2.png}\\ a \quad c \quad k \quad k+1 \quad b \quad d\end{array}\right)$$

$$= w_{\mathfrak{gl}(N)}\left(\begin{array}{c}\includegraphics[height=2.5cm]{image_3.png}\\ a \quad c \quad k' \quad b \quad d\end{array}\right) - w_{\mathfrak{gl}(N)}\left(\begin{array}{c}\includegraphics[height=2.5cm]{image_4.png}\\ a \quad c \quad k' \quad b \quad d\end{array}\right)$$

恒等式左侧的图显示了两个相邻顶点及与它们关联的边。右侧的图中，这两个顶点被替换为一个顶点。参与该恒等式的四个图中的其他顶点和（半）边均相同。

在特殊情形 $\sigma(k+1) = k$ 下，恒等式的形式为

$$w_{\mathfrak{gl}(N)}\left(\begin{array}{c}\includegraphics[height=2.5cm]{image_5.png}\\ a \quad b \quad k \quad k+1\end{array}\right) - w_{\mathfrak{gl}(N)}\left(\begin{array}{c}\includegraphics[height=2.5cm]{image_6.png}\\ a \quad b \quad k \quad k+1\end{array}\right)$$

$$= C_1 \times w_{\mathfrak{gl}(N)}\left(\begin{array}{c}\includegraphics[height=2.5cm]{image_7.png}\\ a \quad b\end{array}\right) - N \times w_{\mathfrak{gl}(N)}\left(\begin{array}{c}\includegraphics[height=2.5cm]{image_8.png}\\ a \quad b \quad k'\end{array}\right)$$

应用定理中的恒等式，每个图都可以化为生成元 C_k 的单项式（即独立循环的连接），模去顶点数较少的图。这使得可以通过归纳计算不变量$w_{\mathfrak{gl}(N)}$的取值。

推论 3.18. $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ 在任意置换上的取值属于泛包络代数的中心 $ZU\mathfrak{gl}(N)$，是 $N, C_1, C_2, \ldots$ 的多项式，而且这个多项式是普适的（对所有 $\mathfrak{gl}(N)$ 都相同）。

我们将把置换映射为这个通用多项式的映射记为$w_{\mathfrak{gl}}$。定理3.15 将此推论专门化到置换是不动点为空的对合这一情形。

下面给出$w_{\mathfrak{gl}}$ 在弦图 K_n上的取值表，列出 n最初几个取值的情况。

$$
\begin{aligned}
w_{\mathfrak{gl}}(K_2) &= C_1^2 + C_2^2 - N\,C_2,\\
w_{\mathfrak{gl}}(K_3) &= C_2^3 + 3C_1^2C_2 + 2C_2N^2 + (-2C_1^2 - 3C_2^2)N,\\
w_{\mathfrak{gl}}(K_4) &= 3C_1^4 - 4C_1^3 + 6C_2^2C_1^2 + 2C_1^2 - 8C_3C_1 + C_2^4 + 6C_2^2 + (-6C_2^3 - 14C_1^2C_2 + 6C_1C_2 - 2C_2 + 2C_4)N\\
&\quad + (6C_1^2 + 11C_2^2 - 2C_3)N^2 - 6C_2N^3,\\
w_{\mathfrak{gl}}(K_5) &= C_2^5 + 10C_1^2C_2^3 + 30C_2^3 + 15C_1^4C_2 - 20C_1^3C_2 + 10C_1^2C_2 - 40C_1C_3C_2 + (-20C_1^4 + 48C_1^3\\
&\quad - 50C_2^2C_1^2 - 32C_1^2 + 30C_2^2C_1 + 96C_3C_1 - 10C_2^4 - 82C_2^2 + 10C_2C_4)N + (35C_2^3 + 70C_1^2C_2\\
&\quad - 72C_1C_2 - 10C_3C_2 + 32C_2 - 24C_4)N^2 + (-24C_1^2 - 50C_2^2 + 24C_3)N^3 + 24C_2N^4
\end{aligned}
$$

与 $\mathfrak{sl}(2)$ 的情形类似，权系 $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ 在完全图投影到本原元子空间上的取值，可以通过对相应的指数生成函数取对数来计算。

3.4.2 利用 Harish-Chandra 同构计算 gl(N)-权系

本节介绍另一种计算 [64]，$\mathfrak{gl}(N)$ 权系的方法，该方法由 $U(\mathfrak{gl}(N))$ 提出。代数可分解为以下直和

$$U(\mathfrak{gl}(N)) = (\mathfrak{n}_- U(\mathfrak{gl}(N)) + U(\mathfrak{gl}(N))\mathfrak{n}_+) \oplus U(\mathfrak{h}), \tag{9}$$

其中 $\mathfrak{n}_-$、$\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{n}_+$ 分别是 $\mathfrak{gl}(N)$ 中下三角矩阵、对角矩阵和上三角矩阵构成的子代数。

定义3.19。 Harish-Chandra 投影 是到式（9）中第二个直和项的线性投影，

$$\phi : U(\mathfrak{gl}_N) \to U(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}[E_{11}, \cdots, E_{NN}].$$

定理3.20 （Harish-Chandra 同构，[55]）。*Harish-Chandra* 投影在中心 $ZU(\mathfrak{gl}_N)$ 上的限制是交换代数的单同态，其同构像由平移矩阵单位 $x_i = E_{ii} + N - i$、$i = 1$、.....、N 中的对称函数构成。

定理中的同构使我们能够将权系 $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ 的陪域 $\mathbb{C}[C_1, C_2, \ldots, C_N]$ 识别为由生成元 x_1、.....、x_N 构成的对称函数环。在此同构下，生成元 C_k 的显式表达式如下:

$$1 - N\,u - \sum_{k=1}^{\infty} \phi(C_k)\,u^{k+1} = \prod_{i=1}^{N} \frac{1 - (x_i + 1)\,u}{1 - x_i u}.$$

利用 Harish-Chandra 同构计算给定弦图上的 $\mathfrak{gl}(N)$ 权系的取值时，需要将投影 ϕ逐一作用于权系定义中涉及的每个单项式，并求出其对最终取值的贡献。总贡献通过对交换环中的元素求和得到。因此，可以大幅减少所需的随机存取存储器。不过，随着 N 增大，计算所需时间会迅速增加，因为权系定义中涉及的单项式数量也会随之增加；对于含有 n 条弦的弦图，该数量为 N^{2n} 。还需注意，Harish-Chandra 投影可用于计算特定 N的 $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ 权系，但这并不会使其取值对 N 呈现普适的（多项式）依赖关系。

3.5 $\mathfrak{sl}(N)$ 权系

李代数 $\mathfrak{gl}(N)$ 不是单的，它可以表示为单李代数 $\mathfrak{sl}(N)$ 与一维阿贝尔李代数的直和。因此，泛包络代数 $\mathfrak{gl}(N)$ 的中心是 $\mathfrak{sl}(N)$ 和 $\mathbb{C}$的泛包络代数的中心的张量积，因而可将其视为以 C_1 为变量、系数取自 $ZU(\mathfrak{sl}(N))$ 的多项式环。因此，权系 $w_{\mathfrak{sl}(N)}$的取值可由 $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ 的取值通过令 $C_1 = 0$ 和 $C_k = \tilde{C}_k$, $k \geq 2$得到，其中 C_k 是相应卡西米尔元在 $ZU(\mathfrak{gl}(N))$ 中向 $ZU(\mathfrak{sl}(N))$ 的投影。代入后的结果是关于 $\tilde{C}_2$, $\tilde{C}_3$, ... 的多项式。更明确地，令 $\tilde{E}_{i,j} = E_{i,j} - \delta_{i,j}N^{-1}C_1 \in \mathfrak{sl}(N) \subset \mathfrak{gl}(N)$。那么

$$\tilde{C}_k = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{N} \tilde{E}_{i_1 i_2}\tilde{E}_{i_2 i_3}\ldots\tilde{E}_{i_k i_1} = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i C_{k-i}\left(\tfrac{C_1}{N}\right)^i,$$

其中我们令 $C_0 = N$ 并

$$ZU(\mathfrak{sl}(N)) = \mathbb{C}[\tilde{C}_2,\ldots,\tilde{C}_N] \subset ZU(\mathfrak{gl}(N)) = \mathbb{C}[C_1,\ldots,C_N].$$

或者，也可以将权系 $w_{\mathfrak{sl}(N)}$ 扩展到置换上，并通过与 $\mathfrak{gl}(N)$ 情形类似的递推关系计算：只需将其中的 $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ 替换为 $\tilde{w}_{\mathfrak{sl}(N)}$，将 C_k 替换为 $\tilde{C}_k$，并令 $C_1 = 0$。与 $w_{\mathfrak{gl}}$ 权系类似，所得结果是关于 $N, C_2, C_3, \ldots$ 的通用多项式，我们将其记为 $\tilde{w}_{\mathfrak{sl}}$。由于生成元数量较少，计算 $w_{\mathfrak{sl}(N)}$ 更高效，答案也更简洁。例如，对于弦图 K_n，我们得到

$$\begin{aligned}
w_{\mathfrak{sl}}(K_2) &= \tilde{C}_2^2 - \tilde{C}_2 N,\quad w_{\mathfrak{sl}}(K_3) = \tilde{C}_2^3 - 3\tilde{C}_2^2 N + 2\tilde{C}_2 N^2,\quad w_{\mathfrak{sl}}(K_4) = \tilde{C}_2^4 + 6\tilde{C}_2^2 - 2(3\tilde{C}_2^3 + \tilde{C}_2 - \tilde{C}_4)\\
&N + (11\tilde{C}_2^2 - 2\tilde{C}_3)N^2 - 6\tilde{C}_2 N^3,\quad w_{\mathfrak{sl}}(K_5) = \tilde{C}_2^5 + 30\tilde{C}_2^3 - 2(5\tilde{C}_2^4 + 41\tilde{C}_2^2 - 5\tilde{C}_4\tilde{C}_2)N + (\\
&35\tilde{C}_2^3 - 10\tilde{C}_3\tilde{C}_2 + 32\tilde{C}_2 - 24\tilde{C}_4)N^2 w_{\mathfrak{sl}}(K_6) = \tilde{C}_2^6 + 90\tilde{C}_2^4 + 264\tilde{C}_2^2 - 240\tilde{C}_4\tilde{C}_2 + 160\tilde{C}_3^2 + (\\
&-15\tilde{C}_2^5 - 552\tilde{C}_2^3 + 30\tilde{C}_4\tilde{C}_2^2 + 64\tilde{C}_3\tilde{C}_2 - 72\tilde{C}_2 w_{\mathfrak{sl}}(K_7)\\
&= \tilde{C}_2^7 + 210\tilde{C}_2^5 + 3192\tilde{C}_2^3 - 1680\tilde{C}_4\tilde{C}_2^2 + 1120\tilde{C}_3^2\tilde{C}_2 + (-21\tilde{C}_2^6 - 2212\tilde{C}_2^4 + 70\tilde{C}_4\tilde{C}_2^3 + 448\tilde{C}_3\tilde{C}_2^2\\
&\quad - 2(25\tilde{C}_2^2 - 12\tilde{C}_3)N^3 + 24\tilde{C}_2 N^4,\\
&\quad + 88\tilde{C}_4 - 16\tilde{C}_6)N + (85\tilde{C}_2^4 - 30\tilde{C}_3\tilde{C}_2^2 + 1014\tilde{C}_2^2 - 174\tilde{C}_4\tilde{C}_2 - 88\tilde{C}_3 + 32\tilde{C}_5)N^2\\
&\quad + (-225\tilde{C}_2^3 + 174\tilde{C}_3\tilde{C}_2 - 416\tilde{C}_2 + 224\tilde{C}_4)N^3 + 2(137\tilde{C}_2^2 - 120\tilde{C}_3)N^4 - 120\tilde{C}_2 N^5,\\
&\quad - 10680\tilde{C}_2^2 + 7432\tilde{C}_4\tilde{C}_2 - 112\tilde{C}_6\tilde{C}_2 - 4096\tilde{C}_3^2)N + (175\tilde{C}_2^5 - 70\tilde{C}_3\tilde{C}_2^3 + 8358\tilde{C}_2^3 - 714\tilde{C}_4\tilde{C}_2^2\\
&\quad - 2792\tilde{C}_3\tilde{C}_2 + 224\tilde{C}_5\tilde{C}_2 + 3456\tilde{C}_2 - 3392\tilde{C}_4 + 544\tilde{C}_6)N^2 + (-735\tilde{C}_2^4 + 714\tilde{C}_3\tilde{C}_2^2 - 12892\tilde{C}_2^2\\
&\quad + 2212\tilde{C}_4\tilde{C}_2 + 3392\tilde{C}_3 - 1088\tilde{C}_5)N^3 + 4(406\tilde{C}_2^3 - 581\tilde{C}_3\tilde{C}_2 + 1316\tilde{C}_2 - 464\tilde{C}_4)N^4\\
&\quad - 12(147\tilde{C}_2^2 - 200\tilde{C}_3)N^5 + 720\tilde{C}_2 N^6.
\end{aligned}$$

权系 $w_{\mathfrak{gl}}$ 的取值可以利用弦图空间的霍普夫代数结构，从 $w_{\mathfrak{sl}}$ 的取值重构出来。具体而言，对于弦图代数中次数大于 1 的任意本原元 P，我们有 $w_{\mathfrak{gl}(N)}(P) = \tilde{w}_{\mathfrak{sl}(N)}(P) \in ZU(\mathfrak{sl}(n))$，即 $w_{\mathfrak{gl}(N)}(P)$ 可以表示为关于 $\tilde{C}_2$, $\tilde{C}_3$, ...的多项式。对于 $P = K_1$，我们有

$$w_{\mathfrak{gl}(N)}(K_1) = C_2 = \tilde{C}_2 + \frac{C_1^2}{N} = w_{\mathfrak{sl}(N)}(K_1) + \frac{C_1^2}{N}.$$

这使得我们能够通过将给定弦图表示为本原元的多项式，利用已知的 $w_{\mathfrak{sl}}$ 取值重构 $w_{\mathfrak{gl}}$ 的取值。更具体地说，对于给定的弦图 C，我们有

$$w_{\mathfrak{gl}}(C) = \sum_{I \sqcup J = V(C)} \left(\frac{C_1^2}{N}\right)^{|I|} w_{\mathfrak{sl}}(C|_J).$$

In p特别地，弦图上$w_{\mathfrak{gl}}$和 $w_{\mathfrak{sl}}$ 取值的指数生成函数 s
K_n 满足关系式

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_{\mathfrak{gl}}(K_n)\frac{x^n}{n!} = e^{\frac{C_1^2}{N}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_{\mathfrak{sl}}(K_n)\frac{x^n}{n!}\right).$$

3.6 权系 $\mathfrak{gl}(1|1)$

除了带度量李代数之外，也可以由带度量李超代数构造权系。这种权系的取值落在相应李超代数的泛包络代数的中心中。这类权系的一般构造与李代数的构造非常相似，这里不再赘述。与李代数的情形类似，要计算较为复杂的李超代数的权系取值也相当繁琐。

在 [30], 此处详细阐述了最简单的李超代数 $\mathfrak{gl}(1|1)$的构造。相应的权系$w_{\mathfrak{gl}(1|1)}$ 取值于两个变量构成的多项式环，也就是中心 $ZU\mathfrak{gl}(1|1)$的子环；该子环由分次为 1 和 2 的卡西米尔元生成。

在 [30], 计算该权系取值的递推关系，与$w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 的丘穆托夫–瓦尔琴科关系类似。对于 [19], , 证明了该权系的取值仅取决于弦图的交图。图的斜特征多项式（见第1.3.5节）不过是将权系 $w_{\mathfrak{gl}(1|1)}$ 延拓为图的一个 4-不变量。

4 嵌入图与 δ-拟阵

弦图可以视为可定向曲面上具有单个顶点的嵌入图。权系理论的一个关键问题是，如何将给定的权系延拓到具有任意多个顶点的嵌入图上。这类广义权系与链环有限型不变量相关联，其方式与普通权系和纽结有限型不变量的关联方式相同。

将权系和图不变量延拓到嵌入图有多种方法。其中发展最成熟的方法，是将嵌入图解释为附加了嵌入信息的普通图，参见例如 [28]。多种经典 Tutte 多项式的延拓都是用这种方式构造的 [10, 29]。

本节介绍一种构造延拓的另一种方法，这种方法在过去几年中一直在发展。该方法基于对 δ-拟阵空间上的 Hopf 代数结构的分析。因此，它导出的不变量满足四项关系，并且是广义权系。δ-拟阵（也称拉格朗日拟阵）由 Bouch´et 于 1990 [13, 12] 年左右引入。这些组合结构能够同样出色地提取抽象图和嵌入图的本质特征。各种 δ-拟阵空间上的 Hopf 代数结构及其四项关系由 [47] 引入。

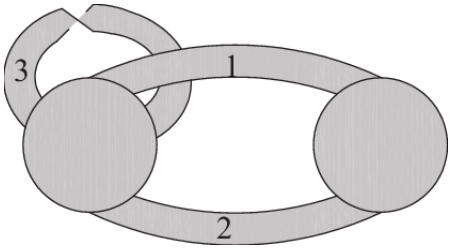


图11：一个嵌入图

4.1 嵌入图与四项关系

嵌入图也称带状图，是拓扑图论的研究对象。一个可定向嵌入图可以定义为一个抽象图（可能包含环和重边），并赋予每个顶点处关联半边的循环序。下文中，我们只考虑可定向的连通嵌入图。这样的图可以表示为一个带边界的可定向曲面，该曲面由与顶点对应的圆盘和与边对应的带构成；每条带都通过其较短的边连接到一个或两个圆盘上，见图11。

对于每个弦图，都可以将威尔逊环变成顶点：在其上附加一个圆盘，并用带替换每条弦，使曲面保持可定向。由此可得到一个只有一个顶点的带状图。

四项关系（1）可解释为适用于任意嵌入图，而不一定仅适用于只有一个顶点的嵌入图。在这种更一般的情形下，参与关系的两条边的端点可以附着在不同顶点的边界上（涉及两个甚至三个顶点）。我们称这些关系为广义四项关系，并称满足这些关系的嵌入图不变量为广义权系。嵌入图的 Vassiliev 第一次变换是交换两条带相邻的端点，而第二 Vassiliev 变换则是将一条带的端点（把手）沿另一条带滑动。

下面，我们首先关注如何将一个权系扩展为广义权系。我们将要构造的权系基于 δ-拟阵空间上的 Hopf 代数结构。

4.2 图和嵌入图的 δ-拟阵及其4项关系

若集合系统是由有限集 E 及其子集集合中的一个子集 $S \subset 2^E$ 组成的有序对 $(E; S)$。如果集合 S 非空，则称集合系统 $(E; S)$ 为真集合系统；下文只考虑真集合系统。

定义 4.1。若真集合系统 $(E; S)$ 满足以下对称交换公理，则称其为δ-拟阵：

对于任意一对子集 $X, Y \in S$ 以及任意元素 $a \in X \Delta Y$，都存在一个元素 $b \in Y \Delta X$，使得 $(X \Delta \{a, b\}) \in S$。

这里 Δ 表示对称差集运算，$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$。对称交换公理中的元素 b 既可以与 a 相同，也可以与之不同。S 中的元素称为 δ-拟阵（$E; S$）的可容许集 。

对于每个简单图 G 和任意嵌入图 Γ，都可以关联一个 δ-拟阵。对于图，这一构造过程如下。回顾一下，如果图 G 的邻接矩阵在二元域 $\mathbb{F}_2$ 上的行列式为 1，则称该图为非退化图。图 G 的δ-拟阵$\delta(G) = (V(G); S(G))$ 是一个集合系统，由顶点集 $V(G)$ 以及其子集组成的集合 $S(G) \subset 2^{V(G)}$ 构成；若子集 $U \subset V(G)$ 是图的顶点集的子集，则它可容许（即 $U \in S(G)$）当且仅当导出子图 $G|_U$ 是非退化的。

相应地，嵌入图 Γ 的 δ-拟阵 $\delta(\Gamma) = (E(\Gamma); S(\Gamma))$ 是由集合 Γ 的边集 $E(\Gamma)$ 以及其子集构成的集合系统 $S(\Gamma) \subset 2^{E(\Gamma)}$，其中，边集的子集$U \subset E(\Gamma)$ 可容许（即 $U \in S(\Gamma)$）当且仅当生成嵌入子图$\Gamma|_U$ 具有连通边界。

如果嵌入图 Γ 的亏格为 0（即该图嵌入在球面上），那么其边集的某个子集可容许，当且仅当相应的生成子图 $\Gamma|_U$ 是一棵树。对于任意亏格，δ-拟阵 $\delta(\Gamma)$ 中的可容许子集也称为拟树。

A. Bouch´et 证明了集合系统 $\delta(G)$ 和 $\delta(\Gamma)$ 确实是 δ-拟阵。此外，如果 Γ 是只有一个顶点的嵌入图，也就是一个弦图，则相应的定义是相容的：

定理 4.2。 C 是一个弦图，也就是说，是只有一个顶点的嵌入图，那么 δ-拟阵 $\delta(C)$ 自然同构于 C的交图的 δ-拟阵 $\delta(g(C))$ 。

弦图 C 的边界连通，当且仅当其交图非退化。最后这个结论已被多次重新发现，例如参见 [61]。

图的 δ-拟阵以及可定向嵌入图的 δ-拟阵都是偶的。若一个 δ-拟阵（$E; S$）满足其所有可容许集中的元素数量具有相同的奇偶性，则称其为 偶 δ-拟阵 ，即对于所有 $|X| \equiv |Y|$，模 2 意义下均有 X，$Y \in S$。由于我们首先关注嵌入可定向曲面的图，因此下文只讨论偶 δ-拟阵，不过大多数构造也可以扩展到非偶 δ-拟阵，参见第 4.5节。

引入如下的 δ-拟阵扭转（或部分对偶）操作。设 $U \subset E$ 是 δ-拟阵 $D = (E; S)$ 的基集 E 的一个子集。δ-拟阵 在子集 U上 $D * U$的扭转 D 是集合系统 $D * U = (E; S * U)$，其中 $S * U = \{X \Delta U | X \in S\}$。对于嵌入图的 δ-拟阵，扭转操作对应于 [20]中引入的部分对偶性。对基集的任意子集进行 δ-拟阵扭转，所得仍是一个 δ-拟阵 [12]。

定义 4.3。 图 G 的 δ-拟阵 $\delta(G)$ 称为图 δ-拟阵。对图 δ-拟阵的基集的子集进行扭转，所得称为二元 δ-拟阵。

特别地，任意可定向曲面上的嵌入图 Γ 的 δ-拟阵 $\delta(\Gamma)$ 都是偶二元的。

对于 δ-拟阵，定义了一个四项关系。其定义需要先定义 δ-拟阵上的两个运算，即第一和第二 Vassiliev 变换。每种运算都由 δ-拟阵中的一对选定元素指定。

结果
D_{ab}在 δ-拟阵 $D = (E; S)$$a$，$b \in E$中沿着把手滑动把手 a 沿着把手 b 的结果定义为 $D_{ab} = (E; S_{ab})$，其中

$$\widetilde{S_{ab}} = S\Delta\{X \sqcup a | X \sqcup b \in S \text{ and } X \subseteq E \setminus \{a, b\}\}.$$

D'_{ab} 在 δ-拟阵 $D = (E; S)$$a$中把手端点的交换 a 和 b $b \in E$所得结果定义为 $D'_{ab} = (E; S'_{ab})$，其中

$$S'_{ab} = S\Delta\{X \sqcup \{a, b\} | X \in S \text{ and } X \subseteq E \setminus \{a, b\}\}.$$

第一 Vassiliev 变换和第二 Vassiliev 变换都会将二元 δ-拟阵变为同类型的 δ-拟阵。

偶二元 δ-拟阵上的函数 f 满足四项关系，是指对于任意这样的 δ-拟阵 $D=(E;S)$ 以及基集中的任意一对元素 a，$b\in E$，都有

$$f(D)-f(D'_{ab})=f(\widetilde{D_{ab}})-f(\widetilde{D'_{ab}}).$$

如果偶二元 δ-拟阵上的函数满足四项关系，那么它在可定向曲面上嵌入图的 δ-拟阵上的限制满足相应的广义四项关系。

4.3 δ-拟阵的 Hopf 代数

若存在一个从集合 E_1 到集合 E_2 的一一映射，将子集族 S_1 一一映射到子集族 S_2，则称两个集合系统 $(E_1;S_1)$ 和 $(E_2;S_2)$ 同构。

记由偶二元 δ-拟阵的同构类张成的向量空间为 $\mathcal{B}_n^e$ 在 n 元集合上，并定义

$$\mathcal{B}^e=\mathcal{B}_0^e\oplus\mathcal{B}_1^e\oplus\mathcal{B}_2^e\oplus\dots.$$

向量空间 $\mathcal{B}^e$ 可以赋予一种自然的分次交换、余交换霍普夫代数结构。该代数中的乘法由不交并给出，而余乘法则通过将 δ-拟阵的基集以所有可能的方式拆分为两个互不相交的子集来定义。如果一个 δ-拟阵不能表示为两个基集更小的 δ-拟阵的乘积，则称其为连通的。

向量空间 $\mathcal{B}^e$ 对四项关系子空间取商后，继承了霍普夫代数结构。我们不会使用这个霍普夫代数，也不为其引入记号。

备注。与图和 δ-拟阵不同，据我们所知，嵌入图并不生成自然的霍普夫代数。

4.4 将图不变量延拓至嵌入图和 δ-拟阵 s

本节将说明如何把第 2 节所述的图的 4-不变量延拓至嵌入图。所得延拓恰好定义在二元 δ-拟阵上，其定义使用了二元 δ-拟阵向量空间上的 Hopf 代数结构。

4.4.1 交错多项式

上述定义的图的交错多项式可以自然地延拓到二元 Δ-拟阵。

定义 4.4。集合系统 $D=(E;S)$ 到子集 $U\subset E$ 的距离是以下数量

$$d_D(U)=\min_{W\in S}|U\Delta W|.$$

δ-拟阵 $D=(E;S)$ 的交错多项式 $L_D(x)$ 是多项式

$$L_D(x)=\sum_{U\subset E}x^{d_D(U)}.$$

定理 4.5。 如果 $D = D(G)$ 是图 G 的 δ-拟阵，那么 D 的交错多项式L_D 与 G 的交错多项式之间存在如下关系：

$$L_{D(G)}(x) = L_G(x-1).$$

定理 4.6 ([39])。 偶二元 δ-拟阵的交错多项式满足 4项关系。

定理 4.7。 交错多项式在 $\mathcal{B}_n^e$ 中本原元子空间上的取值空间维数为 n。

这意味着， $\mathcal{B}_n^e$ 中本原元空间的维数至少为 n。

4.4.2 Stanley 的对称化色多项式

图的影子不变量这一概念可以自然地延拓为 δ-拟阵的不变量。要定义这样一个不变量，只需对每个连通 δ-拟阵 $D =(E; S)$，指定该 δ-拟阵的影子不变量取值中 q_n 的系数，其中 $n = |E|$。

在 [51], 中，有人提出了一种将影子图不变量延拓为 δ-拟阵的影子不变量的方法。这种方法基于 [2]中引入的组合 Hopf 代数结构。下文中，我们将自身限制在交换余交换 Hopf 代数的范围内。

组合 Hopf 代数 是一个二元组 $(\mathcal{H}, \xi)$，由连通分次霍普夫代数 $\mathcal{H}$和特征标（即可乘映射） $\xi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$组成。

多项式 Hopf 代数 $\mathbb{C}[q_1, q_2, \dots]$ 若赋予典范特征标 ζ，使每个变量 q_k 都映射为 1，就成为一个组合 Hopf 代数。这个组合 Hopf 代数是组合 Hopf 代数范畴中的终对象；也就是说，对每个组合 Hopf 代数 $(\mathcal{H}, \xi)$，都存在唯一的影子不变量（分次 Hopf 代数同态）
$\mathcal{H} \to \mathbb{C}[q_1, q_2, \dots]$ 与之对应，且该同态将 ξ映射为 ζ。

文献 [2] 证明，Stanley 对称化色多项式是分次 Hopf 代数同态 $\mathcal{G} \to \mathbb{C}[q_1, q_2, \dots]$，它对应于特征标 ξ: $\mathcal{G} \to \mathbb{C}$；该特征标将只有一个顶点的图映射为 1，并将任意具有 $n \geq 2$ 个顶点的连通图映射为 0。

这种结构使人们能够将 [51] δ-拟阵的 *Stanley* 对称化色多项式定义为分次同态 W: $\mathcal{B}^e \to \mathbb{C}[x; q_1, q_2, \dots]$ 它从偶二元 δ-拟阵的霍普夫代数映射到变量 q 的多项式的霍普夫代数（其系数取自变量 x的多项式环），该同态与如下特征标相关：将 δ-拟阵（$\{1\}; \{\{\emptyset\}\}$）映射为 1，将 δ- 拟阵（ $\{1\}; \{\{1\}\}$ ）映射为 x，并将任意分次为 $n \geq 2$ 的连通 δ- 拟阵映射为 0。这两个定义在 1 元素集上的 δ-拟阵张成齐次子空间$\mathcal{B}_1^e$。

定理 4.8。 δ-拟阵的 *Stanley* 对称化色多项式满足 δ-拟阵的4项关系。

4.4.3 转移多项式

转移多项式也可以延拓到 δ-拟阵，并且对 δ-拟阵满足 4 项关系。为了定义转移多项式，我们还需要几个进一步的定义。设$D =$ （$E; S$）为一个 δ-拟阵，并设 $U \subset E$ 为其基集的一个子集。

该多项式

$$Q_D(s,t,x) = \sum_{E=\Phi \sqcup X \sqcup \Psi} s^{|\Phi|} t^{|X|} x^{d_{D+\Phi * X \bar{*} \Psi}(\emptyset)}$$

称为 δ-拟阵 $D = (E; S)$ 的转移多项式。这里，对于元素 $u \in E$，运算 $+$ 定义为

$$D + u = (E, S\Delta\{F \cup \{u\} | F \in S, u \notin F\}).$$

运算 $\bar{*}$ 定义如下

$$D\bar{*}u = D + u * u + u = D * u + u * u.$$

这两个运算可推广到任意子集 $A \subset E$。

该定义是对 [14] 中加权转移多项式定义的特化。

定理 4.9 ([26])。 偶二元 δ-拟阵的转移多项式满足关于它们的4项关系。

4.4.4 斜特征多项式

图的非退化性自然地推广到嵌入图和 δ-拟阵。若 δ-拟阵 $(E; S)$ 满足 $E \in S$，即整个集合 E 可容许，则称其为非退化的 。对于嵌入图，这意味着嵌入图非退化当且仅当其边界连通。对于弦图，这一定义与我们已知的定义一致。δ-拟阵的非退化性 $\nu(D)$ 为 1，当且仅当 D 非退化；否则为 0。

我们可以定义 δ-拟阵的斜特征多项式 $D = (E;\ S)$如下

$$Q_D(x) = \sum_{U \subset E} x^{|U|} \nu(D|_U).$$

定理 4.10。δ-拟阵的斜特征多项式满足四项关系。

与图的情形类似，这一结论源于非退化性在第二 Vassiliev 变换下保持不变这一事实。

4.5 扩展到不可定向曲面：带框弦图、带框图和不一定为偶的 δ-拟阵

弦图、图和嵌入图的四项关系都有一个不可定向版本，我们在此作简要介绍。不可将其与可定向版本分开：所有构造，尤其是霍普夫代数结构，都需要可定向和不可定向对象共同参与。在每种情况下，可定向对象都会在不限制可定向性的对象所构成的霍普夫代数中生成霍普夫子代数。

一个带框弦图是一个对 $(C,\ \varphi)$，由弦图 C 和一个框架φ 组成： $V(C) \to \mathbb{F}_2$ 将 C 的每条弦映射到域 $\mathbb{F}_2$中的一个元素。带框弦图的同构，是指底层弦图之间的同构，并将前一个弦图的框架映射到后一个弦图的框架。

带框架图是一个有序对 $(G,\ \varphi)$，由一个简单图 G 和一个框架 φ：$V(G) \to \mathbb{F}_2$组成；该框架为 G 的每个顶点指定域 $\mathbb{F}_2$中的一个元素。带框架图之间的同构，是指底层图之间将第一个图的框架映射到第二个图框架的同构。将 G 的顶点编号为 1、.....、$n = |V(G)|$后，可为该带框架图赋予其邻接矩阵 $A(G,\ \varphi)$。该矩阵的非对角元素与简单图 G的邻接矩阵 $A(G)$的非对角元素相同，而其对角元素

与相应顶点的框架值相同。带框架图的同构类对应于域 $\mathbb{F}_2$ 上的对称矩阵，视为在同时重新排列列和行的变换下等价。

任意带框弦图都对应一个带框图，即其交图。带框弦图可以视为只有一个顶点的带状图：普通带对应于框架为 0 的弦，而框架为 1 的弦则替换为半扭带。如果存在框架为 1 的弦，则与该带框弦图对应的曲面是不可定向的。带框图不变量 f 称为四项不变量，如果对于任意一对顶点 $a,\ b \in V(G)$，它满足四项关系

$$f((G,\varphi)) - f((G'_{ab},\varphi)) = f((\widetilde{G}_{ab},\widetilde{\varphi}_{ab})) - f((\widetilde{G}'_{ab},\widetilde{\varphi}_{ab})).$$

参与该关系的任意两个图的顶点集之间存在自然的一一对应关系，因此，两个框架 φ 和 $\tilde{\varphi}_{ab}$ 具有共同的定义域。这里$\widetilde{\varphi}_{ab}$ 表示图 G_{ab}的框架，它在除 φ 之外的所有顶点上都与 a一致，而 $\widetilde{\varphi}_{ab}(a) = \varphi(a) + \varphi(b)$。换言之，带框图 G_{ab}的邻接矩阵 $A(G_{ab})$可由 $A(G)$通过与无框情形相同的变换（5）得到。

带框图的非退化性和斜特征多项式的定义与普通图相同。图的非退化性在第二 Vassiliev 变换下保持不变。这意味着斜特征多项式是带框图的 4-不变量。与简单图的斜特征多项式不同，带框图的斜特征多项式既非偶多项式，也非奇多项式。

带框图的任何 4-不变量都定义一个带框权系，它将带框弦图映射为该不变量在其带框交图上的取值。特别地，非退化性和斜特征多项式都定义了带框权系。

带框图的 δ-拟阵以及任意嵌入图（包括不可定向的嵌入图）的 δ-拟阵，其定义与可定向情形相同。如果带框图有一个框架为 1 的顶点，那么相应的 δ-拟阵将不是偶 δ-拟阵：其可容许集既包含偶数个元素的集合，也包含奇数个元素的集合。不可定向曲面上的嵌入图的 δ-拟阵也不是偶 δ-拟阵。二元 δ-拟阵的同构类生成一个包含霍普夫子代数 $\mathcal{B}^e$ 的霍普夫代数。

参考文献

[1] N. H. Abel, 《一个表达式的证明，二项式公式只是其特例》, 《纯粹与应用数学杂志》**1** 159–160（1826）。[2]M. Aguiar, N. Bergeron, F. Sottile, 《组合 Hopf 代数与广义 Dehn–Sommerville 关系》, 《组合数学汇刊》**142** 1–30（2006）。[3] M. Aguiar, S.Mahajan, 《物种范畴中的 Hopf 幺半群》, 载于: 《Hopf 代数与张量范畴》, 《当代数学》第585卷, 17–（2013）[4] R. Arratia, B. Bollob´as, and G.B. Sorkin, 《二元交错多项式》, 《组合学》24(4): 567–584, 2004[5] D. Bar-Natan, 《论 Vassiliev 纽结不变量》, 《拓扑学》, 1995, **34**, 423–472[6] D. Bar-Natan and S. Garoufalidis, 《论 Melvin–Morton—Rozansky 猜想》, 《数学发明》1996, **125**, 103-133

[7] D. Bar-Natan and H. T. Vo，证明 Kulakova 等人关于 $sl(2)$ 权系的一个猜想，《欧洲组合学杂志》，2015，45，65–70[8] A. Bigeni，通过普遍权系推广 Kreweras 三角形，《组合理论杂志 A 辑》，2017，第161卷，309–326[9] S. Billey, P. McNamara，Stanley 对对称函数与拟对称函数发展的贡献，载于《Richard P. Stanley 的数学遗产》，编辑 P. Herch, T. Lam, P. Pylyavskyy, V. Reiner，83–104（2016）。[10] B. Bollob´as, O. Riordan，曲面上图的多项式，《数学年刊》，第323卷，81–96（2002）[11] A. Bouchet，《圆图障碍》，《组合理论杂志 B 辑》，1994，60，107–144[12] A. Bouchet and A. Duchamp，δ-拟阵在 $GF(2)$ 上的可表示性，《线性代数及其应用》，1991，146，67–78[13] A. Bouchet，《地图与δ-拟阵》，《离散数学》，1989，78，59–71[14] R. Brijder and H. Hoogeboom，多拟阵与δ-拟阵的交错多项式，《欧洲组合学杂志》，第40卷，142–167页，2014。[15] Viktor M Buchstaber and Nikolai Yu Erokhovets，多胞体、斐波那契数、Hopf 代数与拟对称函数，《俄罗斯数学评论》66:2（2011），271–367[16] B. S. Bychkov, A. V. Mikhailov，图的多项式不变量与线性层级，《俄罗斯数学评论》，2019，第74卷，第2期，第366–368页[17] S. Chmutov, S. Duzhin, and S. Lando，Vassiliev 纽结不变量。III：森林代数与加权图，《奇点与分岔》，《苏联数学进展》21，135–145，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1994[18] S. Chmutov, S. Duzhin, and J. Mostovoy，《Vassiliev 纽结不变量导论》，剑桥大学出版社，2012[19] S. Chmutov and S. Lando，突变纽结与交图，《代数与几何拓扑》，2007，7，1579–1598[20] S. Chmutov，曲面上图的广义对偶性与带符号的 Bollob´as–Riordan 多项式，《组合理论杂志 B 辑》99（2009）617–638[21] S. Chmutov, M. Kazarian, and S. Lando，图的多项式不变量与 KP 层级，《数学精选》新系列（2020）26:34[22] S. Chmutov, A. Varchenko，关于源自《拓扑学》的 Vassiliev 纽结不变量的评述，1997，36，1，153–178[23] C. Chun, I. Moffatt, S. D. Noble, and R. Rueckriemen，论嵌入图与δ-拟阵之间的相互作用，《伦敦数学会会刊》，2018[24] C. Chun, I.Moffatt, S. D. Noble, and R. Rueckriemen，拟阵、δ-拟阵与嵌入图，《组合理论杂志 A 辑》，2019，167，7–59[25] R. Dogra, S. Lando，图与嵌入图的斜特征多项式，arXiv: 2201.07084（2022）

[26] A. Dunaykin 和 V. Zhukov，《转移多项式作为二元δ-拟阵的权系》，《莫斯科数学杂志》，第22卷，第1期，1–13页（2022年）[27]Petr Dunin-Barkowski、Maxim Kazarian、Aleksandr Popolitov、Sergey Shadrin、Alexey Sleptsov，《环面结的着色HOMFLY-PT多项式的扩展 Ooguri-Vafa 配分函数的拓扑递归》，arXiv:2010.11021[28] J. A. Ellis-Monaghan、I. Moffatt，《曲面上的图：对偶性、多项式与纽结》，2013年，Springer出版社[29] J. A. Ellis-Monaghan、I. Moffatt，《嵌入图的 Las Vergnas 多项式》，《欧洲组合学杂志》，第50卷，2015年11月，97–114页[30] Figueroa-O'Farrill、T. Kimura、A. Vaintrob，《李超代数的普适Vassiliev不变量》 $\mathfrak{gl}(1|1)$《数学物理通讯》，1997年，第185卷，93–127页[31] P. Filippova，《(2) 权系在完全二部图上的取值》，《泛函分析及其应用》，54:3（2020年），208–223页[32] P. Filippova，《(2) 权系在一类非弦图交图上的取值》，《数学文集》，213:2（2022年），115–148页[33] S. Heil 和 C. Ji，《关于比较树的色对称函数的一种算法》，《澳大拉西亚组合学杂志》，75：210–222页，2019年[34] J. Huh，《射影超曲面的 Milnor 数与图的色多项式》，《美国数学会杂志》25（2012年），第3期，907–927页[35] F. Jaeger，《关于4正则图的转移多项式》，载于：《圈与射线》（蒙特利尔，魁北克省，1987年），《北约高级研究院系列C：数学与物理科学》，第301卷，Kluwer学术出版社，多德雷赫特，1990年，123–150页[36] S.A. Joni 和 G.C. Rota，《组合学中的余代数与双代数》，《应用数学研究》61（1979年），9–139页[37] B. B. Kadomtsev、V. I. Petviashvili，《弱色散介质中孤立波的稳定性》，《苏联物理学文献通报》15：539–541页（1970年）。[38] M. Kazarian、S. Lando，《可积层级的组合解》，《俄罗斯数学评论》，70(3)，453–482页（2015年）。[39]N. Kodaneva，《二元δ-拟阵的交错多项式与链环不变量》，arXiv:2002.12440v1（2020年）[40] M. Kontsevich，《Vassiliev 纽结不变量》，载于：《苏联数学进展》，16(2):137–150，1993年。[41] E. Krasilnikov，《权系向带顶点的图的延拓》，《Arnold数学杂志》，第7卷，第4期，609–618页（2021年）[42] E. Kulakova、S. Lando、T. Mukhutdinova 和 G. Rybnikov，《关于一个推测上与 sl_2相关的权系》，《欧洲组合学杂志》，2014年，第41卷，266–277页[43] S. Lando，《平面曲线的 J^-不变量与带框弦图》，《泛函分析及其应用》，2006年，第40卷，1–10页

[44] S. Lando, 《弦图双代数中的本原元》, 《美国数学会译丛（第二辑）》, 180, 167–174页, 1997年, 普罗维登斯 [等等。] 美国数学会, 1949年—[45] S. Lando, 《图论中的一个霍普夫代数》, 《组合理论杂志》, 2000年, 第80卷, 104–121页[46] S. Lando 和 A. Zvonkin, 《曲面上的图及其应用》, 2003年[47] S. Lando 和 V. Zhukov, 《δ-拟阵与Vassiliev不变量》, 《莫斯科数学杂志》, 17(4)（2017年）, 741–755页。[48] J. Milnor、J. Moore, 《霍普夫代数的结构》, 《数学年刊》（第2辑）81（1965年）, 211–264页[49] I. Moffatt 和 E. Mphako-Banda, 《δ-拟阵的柄滑动》, 《欧洲组合学杂志》, 2017年, 第59卷, 23–33页[50] A. Morse, 《交错多项式》, 载于: 《图多项式》, 编者: Y. Shi、M. Dehmer、X. Li、I. Gutman, Chapman and Hill, 2017年[51] M. Nenasheva、V. Zhukov, 《Stanley染色对称函数向二元δ-拟阵的延拓》, 《离散数学》, 2021年[52] N. Netrusova, 《交错多项式与纽结不变量》, 未发表[53] S. D. Noble; D. J. A. Welsh, 《源自纽结染色不变量的加权图多项式》, 《傅里叶研究所年刊》（1999年）, 第49卷, 第3期, 1057–1087页[54] Okounkov、Andrei 和 Olshanski、Grigori, 《移位Schur函数》, 1996年6月。《圣彼得堡数学杂志》第9卷。[55] G. Olshanski, 《无限维经典群的表示、包络代数的极限与Yangian代数》, 载于《表示论专题》, 《苏联数学进展》2, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1991年, 第1–66页。[56] S. Roman、G.-C. Rota, 《影子演算》, 《数学进展》27, 95–188页（1978年）[57] G.-C. Rota、J. Shen、B. Taylor, 《所有二项式型多项式均由阿贝尔多项式表示》, 《比萨高等师范学校年刊——科学部》, 第4辑第25卷（3–4）: 731–738页（1997年）。[58] M. Sato 和 Y. Sato, 《孤子方程作为无限维 Grassmann 流形上的动力系统》, 载于: 《应用科学中的非线性偏微分方程》（东京, 1982年）, 《北荷兰数学研究》81, 北荷兰出版社, 阿姆斯特丹, 1983年, 第259–271页。[59] W. R. Schmitt, 《关联霍普夫代数》, 《纯粹与应用代数杂志》96, 299–330页（1994年）。[60] W. R. Schmitt, 《图论中的霍普夫代数方法》, 《纯粹与应用代数杂志》101(1), 77–90页（1995年）。[61] E. Soboleva, 《源自李代数的Vassiliev结不变量与4-不变量》, 《纽结理论及其应用》, 2001年, 第10卷, 161–169页。[St95] R. Stanley, 《图的色多项式的对称函数推广》, 《数学进展》111(1), 166–194页（1995年）。

[62] V. Vassiliev，纽结空间的上同调载于：《苏联数学进展》第1卷，1990年，第23–69页[63] Zhuoke Yang，关于 $\mathfrak{sl}_3$ 交图为完全二部图的弦图上的权系取值，arXiv:2102.00888[64] Zhuoke Yang，权系的新方法 $\mathfrak{gl}(N)$ 权系，arXiv:2202.12225 (2022年)[65] P. Zakorko，权系 $\mathfrak{sl}$ (2) 在完全交图弦图上的取值即将发表[66] ZhelobenkoD.P. 紧李群及其表示Nauka，莫斯科，1970年。英文译本：数学专著译丛，第40卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1973年。