arXiv:2302.12206v1 [math.AT] 23 Feb 2023

相干 ∞幺半群的膜作用

Hugo Pourcelot*

2023年2月23日

摘要

我们证明，Mann–Robalo 构造的膜作用 [MR18] 可扩展到一般的相干 ∞-幺半群，其中可能有多个颜色，且一元运算空间可能不可缩。这需要确立关于扩张空间的两个结果，而这两个结果在上述构造中尚未得到证明。首先，我们证明 Lurie 和 Mann–Robalo 对此类空间所给出的模型是等价的。其次，我们证明，按照 Lurie 的定义，扩张空间通常并不等价于相应遗忘态射的同伦纤维，而是等价于其关于一元运算 ∞-群胚的同伦商，从而纠正了现有文献中的一个疏漏。作为应用，我们得到， ∞-幺半群的 B-带框小圆盘是相干的，因此为完美导出叠的膜空间带来了新的运算。

目录

1 引言 **2**

2 膜纤维化 **5**

2.1 跨度范畴与扭曲箭头范畴.6 2.2 扩张与相干 ∞-幺半群.7 2.3 对称幺半包络及其扭曲箭头.9 膜纤维化的构造.10 2.5 定理 A 的证明.12 2.6 定理 A 的推广版本.13

3 脊纤维化的笛卡尔性 13

3.1 笛卡尔提升的构造.14 3.2 笛卡尔性证明概要.15 3.3 从切片到函子范畴：函子 $q^{(0)}$ .16 3.4 无害扩张：函子 $q^{(2)}$ 和 $q^{(3)}$ .19 3.5 分解的存在性与唯一性：函子 $q^{(1)}$ .21 3.6 技术引理的证明. 24

4 与 Lurie 扩张空间的比较 2 **8**

4.1 结果陈述.28 4.2 定义介于 $\mathcal{B}\mathcal{O}_\sigma$ 与 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 之间的空间 .29 4.3 定理 4.1 的证明.32

5 扩张空间的同伦类型 40

5.1 结果陈述.40 5.2 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 的辅助模型，以及 $\mathcal{O}(n+1) \to \mathcal{O}(n)$ 的同伦纤维 . . . . . 42 5.3 定理 5.1 的证明.45

*索邦巴黎北大学，LAGA，法国国家科学研究中心，UMR 7539，F-93430，维勒塔讷兹，法国

6 应用
476.1 小 ∞-框架圆盘幺半群的相干性 B-带框架圆盘.476.2 膜空间上的运算.50

A 附录 **52**
A.1 关于标记单纯集的一些结果.....5A.2 回顾.....5 2
6

1 引言

膜作用。由 Toën 于 [Toë13], 提出，并由 Mann 和 Robalo 于 [MR18，MR21]以及 Kern 于 [Ker21], 重新表述并进一步发展。膜作用是一种运算子构造，以统一的方式编码几何对象的某些“构形空间型”不变量。其动机实例包括来自计数几何的 Gromov–Witten不变量和弦拓扑运算；在这两种情况下，膜作用都反映了相关拓扑共形场论结构的一部分，其含义见 Costello 的工作 [Cos07]。

形式上，给定一个约化的[1] 相干单色的 ∞-幺半群 $\mathcal{O}^{\otimes}$，膜作用是为每个运算 $\sigma \in \mathcal{O}(k)$ 关联其扩张空间$\mathrm{Ext}(\sigma)$；非正式地说，该空间将满足以下条件的运算参数化：元数为 $\sigma^{+}\ k+1$，且限制在前 σ 个 k 输入上时得到2.6 （详见定义）。每个这样的空间$\mathrm{Ext}(\sigma)$ 随后构成一个余跨图

$$\mathrm{Ext}(\mathrm{id})^{\amalg k} \longrightarrow \mathrm{Ext}(\sigma) \longleftarrow \mathrm{Ext}(\mathrm{id}) \tag{1}$$

它们共同组装成 Ext(id) 上的一个 $\mathcal{O}$-代数结构，其中 Ext(id) 被视为∞-范畴中空间余跨度的一个对象。

关于扩张空间和相干2 -幺半群的精确定义，以及 Mann–Robalo 构造相关膜作用的方法，请参阅第 2 节。我们还要指出，我们的工作有很大一部分实际上致力于首次在文献中证明他们工作中用到的若干论断，从而完成了 ∞-幺半群的构造；我们将把 Mann–Robalo 的构造推广到非约化有色情形。让我们提及，我们的工作有很大一部分实际上致力于在文献中首次证明他们工作中用到的若干论断，从而完成膜作用的构造 [MR18]。

在 Gromov–Witten不变量与弦拓扑中的应用。这一构造的首个应用是 Gromov–Witten不变量的范畴化，由 Mann 和 Robalo 提出。在 [MR18], 中，作者证明，当膜作用取为一种∞-幺半群（其对象为带标记点的稳定代数曲线）的变体时，能够恢复光滑复射影簇的亏格0 Gromov–Witten不变量的结构[2]。因此，他们的构造将 Gromov–Witten不变量从上同调或 K 理论提升到纯几何层面，进而可通过例如考察拟凝聚层的导出范畴来得到范畴不变量。

相干 ∞-幺半群的主要例子来自“构型类型”的几何结构：典型例子是小圆盘 ∞-幺半群 $\mathbb{E}_n$。与 Gromov–Witten不变量的情形类似，人们预期，将膜作用应用于小圆盘 ∞-幺半群$\mathbb{E}_2$，能够恢复自由环空间的链上的弦拓扑运算的经典构造，其中自由环空间为闭定向流形 $\mathrm{Map}(S^1, X)$ 的 X。二者之间的联系如下：膜作用为 $\mathbb{E}_2$ 构造的扩张空间的余跨度（图表(1)）等价于经典的配边型图表；通过使用 Gysin态射在同调上进行拉回-推出，这些图表会诱导出弦拓扑运算。

膜拓扑。 更一般地，可以考虑膜空间 Map(S^{n-1}, X)；它们是自由环空间的高维类似物，对它们的研究称为膜拓扑。一个核心猜想[3] 指出，高阶环空间上的奇异链应继承一种代数结构

[1]回想一下，一个 ∞-幺半群 $\mathcal{O}$ 称为约化的，如果其底层 ∞-范畴是平凡的 ∞-群胚。在单色情形下，这意味着 $\mathcal{O}(1) \simeq *$。[2]将亏格限制为0 只是因为高亏格情形需要发展模 ∞-幺半群的膜作用。作者与 David Kern 合作，旨在推广这一构造。[3]这一猜想明确出现在 [GTZ12] 的引言中，其依据是 [CV06，第 5 节。4]。

，其定义在维数为 n 的带框小圆盘 $\mathbb{E}_n^{\mathrm{fr}}$ 幺半群 ∞ 上。Sullivan 和 Voronov [CV06] 的工作为此提供了动机，他们研究了这一猜想的同调版本。Ginot–Tradler–Zeinalian 在 [GTZ12]，中证明了底层 $\mathbb{E}_n$-代数结构的情形，假设 X 是一个 $(n-1)$-连通的庞加莱对偶空间，并使用 Hochschild 同调模型（相关结果另见 [Hu06] ）。他们的代数方法可以进一步精炼，从而得到一个$\mathbb{E}_{n-1}^{\mathrm{fr}}\otimes\mathbb{E}_1$-代数结构（参见 [Gin17, Corollary 5.25], ），但不易推广到完全带框的情形；因此，人们或许可以尝试改用膜作用。然而，由于∞-幺半群 $\mathbb{E}_n^{\mathrm{fr}}$ 并非约化的，其一元运算包含非平凡群 $\mathbb{E}_n^{\mathrm{fr}}(1)\simeq \mathrm{SO}(n)$，因此无法使用 Toën 或 Mann–Robalo 的定理。这促使人们寻找一种适用于非约化相干 ∞-幺半群的膜作用构造。

主要结果

我们的贡献有三方面：将膜作用推广到一般的相干 ∞-幺半群，补全先前方法的证明，最终在更一般的情形下（包括拓扑和导出代数几何情形）获得膜空间上的运算。关于膜拓扑的进一步应用，尤其是关于膜空间上的奇异链所具有的猜想性 $\mathbb{E}_{n+1}^{\mathrm{fr}}$-代数结构，将在本文的后续论文中展开。

将膜作用推广到一般的相干 ∞-幺半群。 本文的首个结果将膜作用的构造推广到一般的相干 ∞-幺半群情形，表明 Toën 和 Mann–Robalo 的结果中关于约化性和单色性的假设 [Toë13,MR18] 实际上并非必要。

定理 A。 *设 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 是一个相干 ∞-幺半群。那么，空间族 $\mathrm{Ext}(\mathrm{id}_X)$在颜色 取遍 $X\in\mathcal{O}$时，在 $\mathcal{O}$ 中具有典范的 $\mathrm{Cospan}(\mathcal{S})$-代数结构，其结构映射推广了余跨图 (1)。*

我们的方法基于 Mann–Robalo 对膜作用的构造。它被明确地表述为一个笛卡尔纤维化，我们称之为膜纤维化，

$$\pi\colon \mathcal{B}\mathcal{O}\longrightarrow \mathrm{Tw}(\mathrm{Env}(\mathcal{O}))^{\otimes}$$

它定义在对称幺半包络的扭曲箭头 ∞-范畴上 $\mathcal{O}^{\otimes}$，其分类函子给出所需的 $\mathcal{O}$空间余跨度中的代数结构（详情参见第 2.4 节）。

这种方法依赖于对某个运算的扩张空间的三种可能模型之间的识别，其中该运算 σ 的元数为 n：首先是膜纤维化的纤维 $\mathcal{B}\mathcal{O}_\sigma$ ；其次是 Lurie 在$\mathrm{Ext}(\sigma)$ 中定义的 Lurie 空间 [Lur17][4] ；第三，在单色情形下，是 Toën 的原始工作 σ 中所考虑的遗忘映射 $\mathcal{O}(n+1)\to\mathcal{O}(n)$在 [Toë13]处的同伦纤维。我们分别将这些空间称为扩张空间的 Mann–Robalo 模型、Lurie 模型和 Toën 模型。现有文献使用了这些模型之间的识别，但并未给出证明。[5]

接下来的两个结果弥补了这一缺口：它们给出了前两种模型（适用于一般的幺元 ∞-幺半群，见定理 B）与后两种模型（适用于约化的幺元 ∞-幺半群；由于一般情形下必须修改比较，见定理 C）。

扩张空间模型的比较。 在尝试确认运算 σ 的扩张空间的两种定义$\mathcal{B}\mathcal{O}_\sigma$ 和 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 是否相同时，似乎没有直接明了的比较方法。例如，并不存在明显的单纯集合态射来关联这两个模型并为等价提供候选。我们通过给出 $\mathcal{B}\mathcal{O}_\sigma$ 与 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 之间一个明确且专门构造的同伦等价之字形，证明以下比较结果，

定理 B （定理4.1）。 *设 σ 是幺元的 ∞-幺半群 $\mathcal{O}^{\otimes}$中的一个活跃态射。那么，膜纤维化的纤维 $\mathcal{B}\mathcal{O}_\sigma$ 与 ∞-范畴的扩张 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 等价。*

[4]只需稍作修正，见注释 2.8。 [5]请注意，Kern 的论文中还出现了一个推广 Toën 和 Mann–Robalo 结果的陈述，见 [Ker21，定理 2.2.2.0。1], 该结果基于一个称为 *hapaxunitality* 的假设，该假设允许某些 带颜色的非约化 ∞-幺半群。这与我们的定理 A 类似，但适用范围略有不同：一方面，hapaxunitality 条件比我们的假设更严格；另一方面，Kern 的结果也适用于非相干 ∞-幺半群的例子，在这种情况下，膜作用变为松作用。更重要的是，由于 Kern 结果的证明基于 Mann–Robalo 的构造，其有效性依赖于我们的定理 B 和 C。

计算扩张空间的同伦类型。 要将膜作用应用于相干 ∞-幺半群的具体例子，或证明给定的 ∞-幺半群是相干的，就需要计算扩张空间。为此，Mann–Robalo 的模型 $\mathcal{BO}_\sigma$ 和 Lurie 的 Ext(σ) 基本上毫无用处：例如，即使在简单的 ∞-小圆盘幺半群 $\mathbb{E}_2$中，确定扩张空间 Ext(id) 的同伦类型似乎也是一个困难的组合问题。

事实上，在实践中，文献中所有已知涉及扩张空间的计算，都依赖于上述与 Toën 模型的等价。文献 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 声称，Lurie 模型（因此，根据定理 B，Mann–Robalo 模型亦然）存在这样的等价，见 [Lur17，第 5.1 节。1]更准确地说，文中定义了一个比较映射，并声称它是等价。然而，我们发现，Lurie 模型 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 仅在 约化 ∞-幺半群的情形下才与 Toën 模型一致。事实上，当这一假设不成立时，我们给出了一个反例（见命题5.4），从而与 [Lur17] 中相应的陈述相矛盾。其原因在于，一元运算群对扩张的最后一个颜色存在非平凡作用（更详细的讨论请参见第 5.1.2 节）。

一般的非约化情形由以下结果阐明，该结果表明 Ext(σ) 是 Toën 模型关于此 $\mathcal{O}$(1) 作用的商。

定理 *C*（定理 *5.1*）。设 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 是一个单色的幺元 ∞-幺半群，其底层 ∞-范畴 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-群胚，并设 $\sigma \in \mathcal{O}(n)$ 是一个元数为 n 的运算。选取一个半惰态射 $i\colon \langle n\rangle \to \langle n+1\rangle$，属于 $\mathcal{O}^{\otimes}$。那么，空间 *Ext*(σ) 等价于 $\mathcal{O}(n+1) \times^{\mathrm{h}}_{\mathcal{O}(n)} \{\sigma\}$ 的同伦商，其中 ∞-群 $\mathcal{O}(1)$ 对扩张的额外颜色上的一元运算施加自然作用。

膜空间上的运算。回顾一下，根据 Lurie 的结果 [Lur17，定理 5.1.1.1]（其证明依赖于定理 C 的有效性），对于任意 $n \geqslant 0$，小圆盘 $\mathbb{E}^{\otimes}_{n+1}$ 的 ∞-幺半群都是相干的。利用前一定理给出的计算工具，我们将这一相干性结果推广到 $\mathbb{E}^{\otimes}_{n+1}$ 的 $\mathbb{E}^{\otimes}_{B}$ 变体，即 B-带框小圆盘；这里采用 [Lur17] 的定义（见第 6.1 节）。这一系列例子尤其包括带框小圆盘的 ∞-幺半群 $\mathbb{E}^{\mathrm{fr}}_n$，$\mathbb{E}_n \rtimes SO(n)$，以及更一般的半直积 $\mathbb{E}_n \rtimes G$，其中拓扑群 G 配备了一个指向 $\mathbb{R}^n$ 的自同胚群的态射。

定理 D (定理6.7)。带 ∞-幺半群的 B-带框小圆盘 $\mathbb{E}^{\otimes}_{B}$ 是相干的。

可以证明，任意颜色 $\mathrm{Ext}(\mathrm{id}_b)$ 的扩张空间 $b \in B$ 都与球面同伦等价 S^n。作为定理 D 和A的推论，我们得到一个 $\mathbb{E}_B$-代数结构，S^n 位于空间的余跨范畴中，因此在跨度层面上，膜空间上也有相应的运算。

推论 1.1。设 X 为一个拓扑空间。那么，膜空间 $\mathrm{Map}(S^n, X)$ 在 $\mathrm{Span}(\mathcal{S})$ 中具有由膜作用给出的 $\mathbb{E}_B$-代数结构。

对于 ∞-幺半群 $\mathbb{E}^{\mathrm{fr}}_{n+1}$这一特例，这种跨度层面的结构是朝着将 Sullivan–Voronov膜拓扑运算扩展到 Map(S^n, X) 的链层面的猜想迈出的第一步。

最后，利用 [BZFN10] 中的完美叠概念以及 [Ste20], 高阶跨范畴的泛性质，我们可以将跨度中的反向映射求逆，从而在导出代数几何的框架下得到膜拓扑结构。

推论 1.2 (推论6.20)。设 X 是一个完美叠。那么，其膜空间上的拟凝聚层的 ∞-范畴 $\mathrm{Map}((S^{n-1})_{\mathrm{cst}}, X)$ 带有一个典范的 $\mathbb{E}_B$-代数（特别是$\mathbb{E}^{\mathrm{fr}}_n$-代数）结构，且该结构位于 *dg*-范畴中。

论文结构。 我们在第 2 节开始，回顾一些重要的构造：跨度的 ∞-范畴和扭曲箭头的 $\mathrm{Ext}(\sigma)$，即扩张空间的精确定义，以及相干 ∞-幺半群的定义。随后，我们遵循 Mann–Robalo 的方法定义膜纤维化，并概述定理 A的证明。该证明随后在

第 3节中通过证明函子 $\pi\colon\ \ \mathcal{B}\mathcal{O} \to \mathrm{Tw}(\mathrm{Env}(\mathcal{O}))^{\otimes}$ 确实是一个笛卡尔纤维化（定理 2.17）而完成。

第 4 节专门证明定理 B，即通过构造一条明确的同伦等价之字形，比较 Mann–Robalo 与 Lurie 关于扩张空间的模型。接着，我们在第 5 节通过建立 Toën 与 Lurie 模型之间的等价，探讨如何计算扩张空间的同伦类型，从而证明定理 C。此外，我们讨论本研究结果与 [Lur17] 中的一项主张有何不同，并为后者提供一个反例。

最后，我们在第6 节探讨膜拓扑中的应用，首先证明 ∞-幺半群 B-带框小圆盘的相干性（定理D）。最后，我们构造膜空间上的新运算，既包括拓扑语境中的运算（在 Span 层面），也包括导出代数堆中的运算（在导出范畴层面）。

最后，我们提供一个由两部分组成的附录。第一部分包含有关标记单纯集合的定义和结果，这些内容对第 4 节的论证至关重要；它们尚未见于文献，或许也具有独立的研究价值。第二部分汇集了文献中的一些结果，主要涉及 ∞-群作用，仅为方便读者而提供。

记号与约定。我们采用由拟范畴给出的特定 ∞-范畴论模型，并使用 Lurie 对 ∞-幺半群的表述。我们的记号通常遵循 [Lur09] 和 [Lur17]的记号。

- 特别的箭头：单态射记作 $A \hookrightarrow B$，余纤维化记作 $A \twoheadrightarrow B$ ，原子态射（见定义2.4）记作 $A \hookrightarrow\!\!\!\!\!\!\;\;\;

2.1 跨度范畴与扭曲箭头范畴

给定一个具有有限极限的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，我们可以构造由 $\mathcal{C}$ 中的跨度组成的 ∞-范畴 Span($\mathcal{C}$)，其对象就是 $\mathcal{C}$ 的对象；两个对象之间的态射 X 和 Y 由跨度图$X \leftarrow Z \rightarrow Y$给出，而复合通过取拉回定义（有关严格的 ∞-范畴定义，参见 [Bar13] 或 [Hau18] ）。对偶地，如果 $\mathcal{C}$ 具有有限余极限，我们可以考虑其余跨度的 ∞-范畴 Cospan($\mathcal{C}$)，其定义为 Span($\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$)。

∞-范畴 Span($\mathcal{C}$) 带有一个典范的对称幺半结构 Span($\mathcal{C}$)$^{\otimes_\times}$，它由 $\mathcal{C}^\times$ 上的笛卡尔幺半结构诱导而来，尽管 Span($\mathcal{C}$)$^{\otimes_\times}$ 本身并非笛卡尔范畴。

定义 2.1（扭曲箭头 ∞-范畴）。令 $s\colon \Delta \to \Delta$ 为由 $s[n] = [n] * [n]^{\mathrm{op}}$ 给出的函子。与 s 前合成得到一个自函子 $s^*\colon \mathrm{sSet} \to \mathrm{sSet}$，记作 Tw。将 s 沿着 Δ 的 Yoneda 嵌入作左 Kan 延拓，诱导出一个函子 $s_*\colon \mathrm{sSet} \to \mathrm{sSet}$，它是 Tw 的左伴随。一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 在 Tw 下的像仍是一个 ∞-范畴 Tw($\mathcal{C}$)，称为其扭曲箭头 ∞-范畴；其 n-单形是 $(2n+1)$-单形 $s_*(\Delta^n) = \Delta^n * \Delta^{n,\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$，表示为

$$\begin{array}{ccccccc} X_0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_n \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \overline{X_0} & \longleftarrow & \overline{X_1} & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \overline{X_n}. \end{array}$$

为了表示 Tw($\mathcal{C}$) 中的一个态射，也就是 $\mathcal{C}$ 中箭头 f 和 g 之间的一个扭曲箭头，我们通常记作 $f \rightsquigarrow g$。

注记 2.2。给定 σ

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & \overset{f}{\nearrow} & & \overset{g}{\searrow} & \\ X & & \xrightarrow{\quad h \quad} & & Z \end{array}$$

在 $\mathcal{C}$ 中，它展示了 h 是由 g 和 f复合而成的，我们分别得到 Tw($\mathcal{C}$) 中由以下交换方块给出的扭曲箭头 $h \rightsquigarrow g$ 和 $h \rightsquigarrow f$：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Z \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \overset{h}{\searrow} & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}_Z} \\ Y & \xrightarrow[g]{} & Z \end{array} \qquad \text{and} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Z \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_X}\downarrow & \overset{f}{\searrow} & \uparrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

其中的 2-单形要么是退化的，要么等于 σ。

根据 [Lur17，例 5.2.2.23。], 任意对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^\otimes$ 都会在扭曲箭头 $\mathrm{Tw}(\mathcal{C})^\otimes$ -范畴 $\mathrm{Tw}(\mathcal{C})$上诱导出一个对称幺半结构，其中两个态射 $f\colon x \to y$和 $g\colon z \to t$ 的张量积是显然的、形如 $f \otimes g\colon x \otimes z \to y \otimes t$的箭头。

构造 ∞-范畴扭曲箭头时，一个重要特征是以下泛性质。

命题 2.3（Tw 与 Span的泛性质）。设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是两个 ∞-范畴，并假设 $\mathcal{D}$ 具有所有有限极限。则：

（*1*）函子空间 $\mathcal{C} \to \mathrm{Span}(\mathcal{D})$ 与满足拉回条件的函子空间$F\colon \mathrm{Tw}(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}$ 之间存在自然等价：具体而言，对于每个 2-单纯形 $h\colon X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$，它将 h 表示为 g 和 f 的复合，所诱导的方块

$$\begin{array}{ccc} h & \rightsquigarrow & g \\ \vdots & & \vdots \\ f & \rightsquigarrow & \mathrm{id}_Y \end{array}$$

在$\mathrm{Tw}(\mathcal{C})$ 中，经 F 映射后得到 $\mathcal{D}$中的一个笛卡尔方块。

(2) 若 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 是一个对称幺半 ∞-范畴，其底层 ∞-范畴为 $\mathcal{C}$，则对称幺半函子 $\mathcal{C}^{\otimes} \to \mathrm{Span}(\mathcal{D})^{\otimes\times}$ 构成的空间，与满足上述拉回条件的对称幺半函子$\mathrm{Tw}(\mathcal{C})^{\otimes} \to \mathcal{D}^{\times}$ 构成的空间之间存在自然等价。

该结果第一部分的证明可见 [HHLN20，定理 2.18。]：其中，命题以更强的形式表述为 Cat_∞ 与某个 ∞-范畴 $\mathsf{Cat}_\infty^{\mathrm{dir}}$ 之间的伴随 ∞；该范畴由带方向的小型 ∞-范畴组成，并以全忠实方式包含由具有有限极限的小型 ∞-范畴及保持这些极限的函子构成的范畴。特别是，这要求将 Tw 提升为函子 $\mathsf{Cat}_\infty \to \mathsf{Cat}_\infty^{\mathrm{dir}}$。对称幺半情形的扩展见 [MR18，推论2.1.3。]。

2.2 扩张与相干 ∞幺半群

在本小节中，我们回顾运算在一个 ∞-幺半群中的扩张之∞-范畴的定义，以及与之密切相关的相干性概念。我们基本遵循 [Lur17，第 3.3 节。1],不过，$\mathrm{Ext}(\sigma)$ (参见注释 2.8) 的定义略有不同。

令 $p\colon \mathcal{O}^{\otimes} \to \mathbb{F}_*$ 为一个幺元的 ∞-幺半群。

定义 2.4 （半惰态射与原子映射）。令 $f\colon X \to Y$ 为 $\mathcal{O}^{\otimes}$中的一个态射，对应于态射 $\alpha = p(f) : \langle n\rangle \to \langle m\rangle$ $\mathbb{F}_*$中的一个态射，以及一族多重态射$f_j\colon \{X_i\}_{\alpha(i)=j} \to Y_j$，其中 $j \in \langle m\rangle^\circ$。若对每个 $j \in \langle m\rangle^\circ$，我们称 f 为半惰性的

- 集合 $\alpha^{-1}\{j\}$ 为空，或者
- 集合 $\alpha^{-1}\{j\}$ 是单元素集$\{i_j\}$，且映射 $f_j\colon X_{i_j} \to Y_j$ 是等价。

沿用 [Ker21], 的术语，我们称 f 为原子的，如果它是半惰性的，且位于一个包含 $\alpha\colon \langle n\rangle \to \langle n+1\rangle$之上。换言之，$f$ 是原子映射，当且仅当它是半惰性的，且无法通过另一个半惰态射进行非平凡分解。给定一个交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ {\scriptstyle f_X}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_Y} \\ X' & \xrightarrow{f} & Y' \end{array} \qquad \text{or} \qquad \begin{array}{ccc} & X & \\ {\scriptstyle f_X}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle f_Y} \\ X' & \xrightarrow{f} & Y' \end{array}$$

对于原子对象 f_X 和 f_Y，若 f 与扩张相容，则称之为与扩张相容：如果 f 将 $p(X') \setminus \mathrm{im}(p(f_X))$ 的唯一颜色映射到 $p(Y') \setminus \mathrm{im}(p(f_Y))$ 的唯一颜色。

备注 2.5。在 [Lur17，定义 3.3.2.3。], 中引入了 m-半惰态射 的概念，适用于 $m \in \mathbb{N}$。按照这个定义，态射 f 属于 $\mathcal{O}^{\otimes}$，当且仅当它是 1-半惰态射，但不是 0-半惰态射。

定义 2.6 （扩张的 ∞-范畴）。设 $\sigma\colon \Delta^n \to \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}$ 是一个 n-单纯形，对应于一列活跃态射 $X_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} X_n$。给定一个向下封闭子集 $S = \{0, \dots, r\} \subseteq [n]$，令 $\mathrm{Ext}(\sigma, S)$ 表示 $\mathrm{Fun}(\Delta^n, \mathcal{O}^{\otimes})_{\sigma/}$ 的（非全）子范畴，其

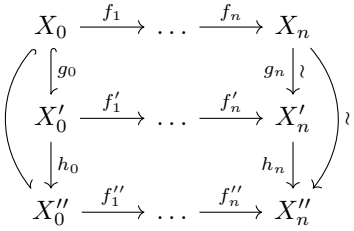
- **对象** 是表示为图表 $\Delta^1 \times \Delta^n \to \mathcal{O}^{\otimes}$ 的

$$\begin{array}{ccccccccc} X_0 & \xrightarrow{f_1} & \dots & \xrightarrow{f_r} & X_r & \longrightarrow & X_{r+1} & \longrightarrow & \dots & \xrightarrow{f_n} & X_n \\ {\scriptstyle g_0}\big\downarrow & & & & {\scriptstyle g_r}\big\downarrow & & \wr\big\downarrow{\scriptstyle g_{r+1}} & & & & \wr\big\downarrow{\scriptstyle g_n} \\ X'_0 & \xrightarrow{f'_1} & \dots & \xrightarrow{f'_r} & X'_r & \longrightarrow & X'_{r+1} & \longrightarrow & \dots & \xrightarrow{f'_n} & X'_n \end{array}$$

  满足以下条件：

  (1) 若 $i \notin S$，则 g_i 是等价；(2) 若 $i \in S$，则 g_i 是原子；(3) 若 $i \in S \setminus \{0\}$，则 f'_i 与扩张相容；(4) 每个映射 f'_i 都是活跃的；

- **态射** 是表示为 $\Delta^2 \times \Delta^n \to \mathcal{O}^{\otimes}$ 的图表



其中，态射 $h_i\colon X_i' \to X_i''$ 对所有 $i \in S$ 都与扩张相容。

给定一个活跃态射 $\sigma\colon \Delta^1 \to \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}$，我们用 Ext($\sigma$) 表示 Ext($\sigma$，$\{0\}$)。我们称 Ext($\sigma$) 为 ∞-扩张范畴 σ。当 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 的底层 ∞-范畴 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-群胚时，Ext(σ) 是一个 Kan复形，因此称为 σ 的扩张空间 。

例 2.7（离散情形下 Ext(σ) 的描述）。设 $\mathcal{O}_{\Delta}$ 是一个集合上的幺半群，$\mathcal{O}^{\otimes}$ 是它的同伦相干神经，$\sigma\colon \langle m\rangle \to \langle \mathbf{1}\rangle$ 是 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 中的一个活跃态射。那么 Ext(σ) 的 k-单形是指 1-范畴 $[1] \times [1+k] \to \mathcal{O}_{\Delta}$ 之间满足其关联图表具有如下形式的函子

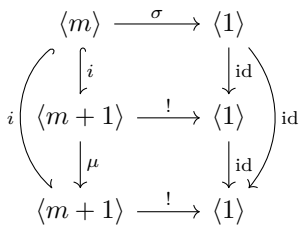
$$\begin{array}{ccc}
\langle m\rangle & \xrightarrow{\sigma} & \langle 1\rangle \\
\big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{atomic}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \sim} \\
\langle m+1\rangle & \xrightarrow{\mathrm{act}} & \langle 1\rangle \\
\vdots & & \vdots \\
\langle m+1\rangle & \xrightarrow{\mathrm{act}} & \langle 1\rangle \\
\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \sim} \\
\langle m+1\rangle & \xrightarrow{\mathrm{act}} & \langle 1\rangle .
\end{array} \tag{2}$$

and 使得所有左侧竖直态射$\langle m+1\rangle \to \langle m+1\rangle$ 都与扩张相容。

注2.8（与现有定义的区别）。前一个定义与 [Lur17] 的初始定义略有不同，因为我们对 Ext(σ) 中的态射施加条件，而不是将其定义为 Fun($\Delta^n, \mathcal{O}^{\otimes}$)$_{\sigma/}$ 的全子范畴。之所以这样选择，是因为 [Lur17，定义 3.3.1.4.]，中定义的空间（我们在此记为 Ext^{HA}(σ)）不具有预期的同伦类型。为说明这一点，考虑交换 ∞-幺半群$\mathcal{O}^{\otimes} =$ Comm$^{\otimes}$ 的例子，并令 $\sigma\colon$ hmi $\to$ h1i 是 Comm$^{\otimes}$ 中的一个活跃映射。如 [Lur17，例 3.3.1.12]，所述，σ 的扩张空间应为单元素集 h1i$^{\circ}$，并将其视为离散空间。然而，空间 Ext^{HA}(σ) 并非离散的。事实上，考虑由下图给出的对象 $\alpha \in$ Ext^{HA}(σ)

$$\begin{array}{ccc}
\langle m\rangle & \xrightarrow{\sigma} & \langle 1\rangle \\
\big\downarrow{\scriptstyle i} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\
\langle m+1\rangle & \xrightarrow{!} & \langle 1\rangle
\end{array}$$

其中 m是一个正整数，$!\colon \langle m+1\rangle \to \langle \mathbf{1}\rangle$是唯一的活跃映射，而 i是典范包含。我们断言 π_1 (Ext^{HA}(σ) α) 并非平凡。设 $\mu\colon \langle m+1\rangle \to \langle m+1\rangle$是 Comm$^{\otimes}_{\mathrm{act}}$ 中的态射，它在 $\langle m\rangle$ 上限制为原子态射 i ，并将剩余的颜色 $m+1$ 映至 $\mathbf{1}$。那么图表



定义了 $\mathrm{Ext}^{\mathrm{HA}}(\sigma)$ 中的一个态射 $\gamma\colon \alpha \to \alpha$，且具有如下性质：$[\gamma] \neq [\mathrm{id}_\alpha]$ 属于 $\pi_1(\mathrm{Ext}^{\mathrm{HA}}(\sigma)\ \alpha)$。事实上，若 γ 与 id_α 之间存在同伦，就会得到 μ的一个收缩 ρ，这是不可能的。

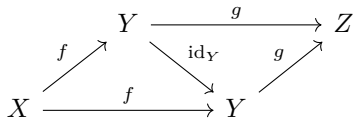
注意，图表 (3) 并未定义 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 中的态射，因为 μ 与扩张不相容。我们将看到，定义 2.6 为扩张空间给出了预期的同伦类型：这正是定理 C的内容。

定义 2.9 ([Lur17，定义 3.3.1。9])。一个 ∞-幺半群 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 若满足以下条件，则称为相干：：

(a) 它是幺元的，

(b) 其底层 ∞-范畴 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-群胚，

(c) 对于每个退化的 3-单形 σ



在 $\mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}$ 中，交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}(\sigma,\{0,1\}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}(\sigma|_{\Delta^{\{0,1,3\}}},\{0,1\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}(\sigma|_{\Delta^{\{0,2,3\}}},\{0\}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}(\sigma|_{\Delta^{\{0,3\}}},\{0\}) \end{array} \tag{4}$$

是 Kan 复形的同伦余笛卡尔方块。

注 2.10. 设 σ 和 $S = \{0,\ldots,r\}$ 如定义 2.6 中所述，并假设 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-群胚。如前所述，单纯集合 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 是一个 Kan复形。根据 Lur17 中的注 [，注 3.3.1.6.]，，若 $r < [n]$，则存在一个典范映射 $\mathrm{Ext}(\sigma, S) \to \mathrm{Ext}(f_{r+1})$，它是平凡 Kan 纤维化。利用这些等价，我们可以将交换方块 (4) 改写为

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}(\mathrm{id}_Y) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}(g) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}(f) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}(g \circ f). \end{array} \tag{5}$$

请注意，前一个方块仅在空间的同伦范畴中有定义。

2.3 对称幺半包络及其扭曲箭头

回顾对称幺半包络的构造 $\mathrm{Env}\colon \mathsf{Op}_\infty \to \mathsf{Cat}^{\otimes}_\infty$，它是从对称幺半 ∞-范畴到 ∞-幺半群的遗忘函子的左伴随 [Lur17，第 2.2 节。4]。这个左伴随将一个 ∞-幺半群 $\mathcal{P}^{\otimes}$ 送到 ∞-范畴

$$\mathrm{Env}(\mathcal{P})^{\otimes} := \mathcal{P}^{\otimes} \times_{\mathrm{Fun}(\{0\},\mathbb{F}_*)} \mathrm{Fun}^{\mathrm{act}}(\Delta^1, \mathbb{F}_*),$$

其中，上标 act 表示 $\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathbb{F}_*)$ 的全子范畴，其对象是 $\mathbb{F}_*$ 中的活跃态射。这个 ∞-范畴通过函子 $p_1\colon \mathrm{Env}(\mathcal{O})^{\otimes} \to \mathbb{F}_*$（在 $1 \in \Delta^1$ 处求值）继承对称幺半结构。注意，$\mathrm{Env}(\mathcal{O})^{\otimes}$ 的底层 ∞-范畴 $\mathrm{Env}(\mathcal{O})$ 可识别为 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 的宽子范畴 $\mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}$，它包含所有对象，且仅包含它们之间的活跃映射。如 2.1 节所述，扭曲箭头范畴 $\mathrm{Tw}(\mathrm{Env}(\mathcal{O}))$ 继承幺半包络的对称幺半结构，也记作 $p_1\colon \mathrm{Tw}(\mathrm{Env}(\mathcal{O}))^{\otimes} \to \mathbb{F}_*$。

为后续之用，我们令 $p_0\colon \mathrm{Env}(\mathcal{O})^{\otimes} \to \mathbb{F}_*$ 表示在 0 处求值所给出的函子 .

记号 2.11. 为简便起见，我们将 $\mathcal{E}$ 记作 $\mathrm{Env}(\mathcal{O})^{\otimes}$，将 $\mathcal{T}$ 记作 $\mathrm{Tw}(\mathrm{Env}(\mathcal{O}))^{\otimes}$。

让我们展开 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{T}$的定义。

- $\mathcal{E}\mathbf{h}_n\mathbf{i}$ 中的一个对象由一个对象 $X \in \mathcal{O}^{\otimes}\ \mathbf{h}_k\mathbf{i}$ 以及一个活跃映射 $\mathbf{h}_k\mathbf{i} \to \mathbf{h}_n\mathbf{i}$ 组成，该映射位于 $\mathbb{F}_*$ 中。就投影函子 p_0 和 p_1 而言，我们有 $p_0(X, \mathbf{h}_k\mathbf{i} \to \mathbf{h}_n\mathbf{i}) = \mathbf{h}_k\mathbf{i}$，以及 $p_1(X, \mathbf{h}_k\mathbf{i} \to \mathbf{h}_n\mathbf{i}) = \mathbf{h}_n\mathbf{i}$。因此，我们可以将 $\mathcal{E}$ 中的对象 $(X, \mathbf{h}_k\mathbf{i} \to \mathbf{h}_n\mathbf{i})$ 看作 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 中的 n个对象 $(X_1, \dots, X_n)$ 的列表，其总元数为 $\oplus_{i=1}^{n} p_0(X_i) \cong \mathbf{h}_k\mathbf{i}$。
- $\mathcal{E}$ 中从 $(X, p_0(X) \to \langle n \rangle)$ 到 $(Y, p_0(Y) \to \langle m \rangle)$ 的一个态射，是 $\mathcal{E}$ 中的一个态射 $X \to Y$，连同一个交换图

$$\begin{array}{ccc} p_0(X) & \longrightarrow & p_0(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle n \rangle & \xrightarrow{\alpha} & \langle m \rangle. \end{array}$$

  当 α 是活跃的时，态射 f 是 p_1-余笛卡尔的，当且仅当 $X \to Y$ 是一个等价，这由 [Lur17, 引理 2.2.4.15 得出。]
- $\mathcal{T}_{\langle n \rangle}$ 中的一个对象由一个活跃映射 $g\colon\ X \to Y$ 在 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 中，以及一个交换三角形给出

$$\begin{array}{ccccc} p_0(X) & & \xrightarrow{p_0(g)} & & p_0(Y) \\ & \searrow^{\text{act}} & & \swarrow_{\text{act}} & \\ & & \langle n \rangle & & \end{array}$$

  在 $\mathbb{F}_*$中的活跃映射。 $\mathcal{T}$中从前一个对象到（$g'\colon\ X' \to Y'$，$p_0(Y') \to \langle m \rangle$）的一个态射由一对交换图给出

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ Y & \longleftarrow & Y' \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} p_0(X) & \longrightarrow & p_0(X') \\ {\scriptstyle p_0(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_0(g')} \\ p_0(Y) & \longleftarrow & p_0(Y') \\ \downarrow{\scriptstyle \text{act}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{act}} \\ \langle n \rangle & \xrightarrow{\alpha} & \langle m \rangle \end{array} \tag{6}$$

  分别在 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 和 $\mathbb{F}_*$中。如果将 $\mathcal{E}$ 中的对象理解为 $\mathcal{O}^{\otimes}$中的对象列表，那么等价 $\mathcal{T}_{\langle m \rangle} \simeq \mathbf{Tw}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\text{act}})$ ^{m} 允许我们将 $\mathcal{T}_{\langle n \rangle}$ 中的对象（$g\colon\ X \to Y$，$p_0(Y) \to \langle n \rangle$）视为 $\mathcal{O}^{\otimes}$中的 n 个活跃态射（$X_1 \to Y_1$，…，$X_n \to Y_n$）列表。
- $\mathcal{T}$中两个对象（$\sigma_1\colon\ X_1 \to Y_1$，…，$\sigma_n\colon\ X_n \to Y_n$）和（$\sigma'_1\colon\ X'_1 \to Y'_1$，…，$\sigma'_m\colon\ X'_m \to Y'_m$）之间的一个态射，随后对应于 $\mathbb{F}_*$中的一个态射 $\alpha\colon \langle n \rangle \to \langle m \rangle$，以及 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 中一个形如如下的交换图

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i \in \alpha^{-1}(j)} X_i & \longrightarrow & X'_j \\ {\scriptstyle \oplus_i \sigma_i}\downarrow{\scriptstyle \text{act}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{act}} \\ \bigoplus_{i \in \alpha^{-1}(j)} Y_i & \longleftarrow & Y'_j \end{array}$$

  对每个 $j \in \langle m \rangle^{\circ}$。

注记 2.12。 考虑 $\mathcal{T}$中由图表（6）给出的态射，并假设 α 是活跃的。那么，当且仅当映射 p_1-余笛卡尔时，映射 $X \to X'$ 和 $Y' \to Y$ 都是等价。

2.4 膜纤维化的构造

为证明定理 A，我们将遵循 Mann–Robalo 在 [MR18第 2 节中提出的策略。1]让我们回顾一下他们的方法。

2.4.1 Mann–Robalo 的策略

首先，注意到，一个 ∞-幺半群 $\mathcal{O}^{\otimes} \to \mathrm{Cospan}(\mathcal{S})^{\otimes}$ 的 Map 等价于一个对称幺半函子 $\mathcal{E} \to \mathrm{Cospan}(\mathcal{S})^{\otimes}$ 的 Map。根据跨度的泛性质（命题 2.3），这又等价于一个满足拉回条件的对称幺半函子 $\mathcal{T} \to (\mathcal{S}^{\mathrm{op}})^{\amalg}$ 。根据 [Lur17，命题 2.4.1.7.]，，由于 $\mathcal{S}^{\mathrm{op}}(^{\amalg})\mathcal{S}^{\mathrm{op}}$ 上的幺半结构是笛卡尔的，这等价于给出一个满足拉回条件的弱笛卡尔结构 $\mathcal{T} \to \mathcal{S}^{\mathrm{op}}$ 。利用格罗滕迪克构造，只需构造一个右纤维化 $\pi\colon \mathcal{BO} \to \mathcal{T}$，使其分类函子 $F_{\pi}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}^{\mathrm{op}}$ 满足上述条件。

本节余下的部分将用于构造这个纤维化 π。

定义 2.13（膜纤维化，遵循 [MR18]）。定义 $\mathcal{BO}$ 为以下对象的子单纯集合：$\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{T})$ 其

- **对象** 是扭曲态射 $\sigma \rightsquigarrow \sigma^+$，满足– 投影 $p_1(\sigma \rightsquigarrow \sigma^+)$ 在 $\mathbb{F}_*$ 中是唯一的活跃映射 $p_1(\sigma) \to \langle 1\rangle$；– 在 $\mathcal{O}^{\otimes}$中的对应 3-单形

$$\begin{array}{ccc} S_0 & \xhookrightarrow{\sigma_0} & S_0^+ \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma^+} \\ S_1 & \xleftarrow[\sigma_1]{\sim} & S_1^+ \end{array} \tag{7}$$

  映射 σ_0 是原子的，且 σ_1 是等价；

- **态射** 从 $\sigma \rightsquigarrow \sigma^+$ 到 $\tau \rightsquigarrow \tau^+$ 是 $\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{T})$ 中满足以下条件的态射 f

  – the projection $p_1 \begin{pmatrix} \sigma & \rightsquigarrow & \sigma^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau & \rightsquigarrow & \tau^+ \end{pmatrix}$ in $\mathbb{F}_*$ is the diagram $\begin{array}{ccc} p_1(\sigma) & \xrightarrow{\mathrm{act}} & \langle 1\rangle \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}} \\ p_1(\tau) & \xrightarrow{\mathrm{act}} & \langle 1\rangle, \end{array}$

  – 在诱导出的方形中

$$\begin{array}{ccc} S_0 & \xhookrightarrow{\sigma_0} & S_0^+ \\ {\scriptstyle f_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_0^+} \\ T_0 & \xhookrightarrow{\tau_0} & T_0^+, \end{array} \tag{8}$$

  态射 f_0^+与扩张相容，其含义是 $p_0(f_0^+)$ 具有$\langle s+1\rangle \to \langle t+1\rangle$的形式，将单元素集$\langle s+1\rangle \setminus \mathrm{im}(p_0(\sigma_0))$ 映至单元素集$\langle t+1\rangle \setminus \mathrm{im}(p_0(\tau_0))$。

令 $\pi\colon \mathcal{BO} \to \mathcal{T}$为 ev_0 与包含映射 $\mathcal{BO} \subset \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{T})$ 的复合。

注记 2.14。以下性质在本文中将会一直用到。

- 由于等价和原子映射都是活跃的，图表 (7) 实际上位于 $\mathcal{O}^{\otimes}{}_{\mathrm{act}}$ 中。
- $\mathcal{BO}$ 在 p_1 下的像沿着 π 的纤维保持不变，即存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{BO} & \hookrightarrow & \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{T}) \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \\ \mathcal{T} & & \downarrow{\scriptstyle p_1\circ -} \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \\ \mathbb{F}_* & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathrm{Fun}(\Delta^1,\ \mathbb{F}_*)。 \end{array}$$

这里， ε 是唯一一个将 $\langle n\rangle$ 映至唯一活跃态射 $\langle n\rangle \to\langle 1\rangle$ ，且满足 $\mathrm{ev}_0 \circ \varepsilon = \mathrm{id}_{\mathbb{F}_*}$ 和 $\mathrm{ev}_1 \circ \varepsilon = \mathrm{const}_{\langle 1\rangle}$ 的函子。基于这一观察，我们通常会省略对各种构造在 p_1 下的投影的描述。

我们提及关于 $\mathcal{BO}$的以下一般事实。

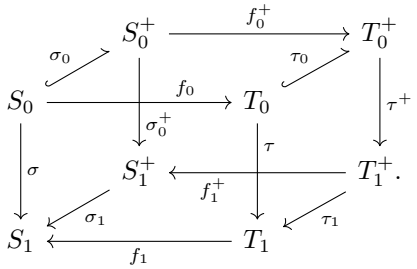
引理 2.15. 包含 $\mathcal{BO} \subset \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{T})$ 是保守等纤维化。特别地， $\mathcal{BO}$是一个 ∞-范畴。

证明。我们需要证明 $\mathcal{BO}$ 是一个饱满子范畴（依照 [Lur22，定义 01CF]和 [Lur22，例 01EX]的意义），且它是 $\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{T})$ 的子范畴。首先，我们验证 [Lur22，推论 01CR] 的条件，以证明 $\mathcal{BO}$ 是 $\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{T})$ 的子范畴。由于 2.13 中与扩张相容的条件仅取决于 1-范畴 $\mathbb{F}_*$中态射的像，因此很容易验证， $\mathcal{BO}$ 中的态射集合包含 $\mathcal{BO}$ 中对象的所有恒等态射，且在同伦和复合下封闭，如所需。

接下来，我们证明 $\mathcal{BO}$是饱满的。设 $f^+\colon \sigma^+ \to \tau^+$是 $\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{T})$ 中一个满足 $\sigma^+ \in \mathcal{BO}$的等价。我们需要证明 τ^+和 f^+都属于 $\mathcal{BO}$。由于典范函子 $\mathrm{Tw}(\mathcal{O}^{\otimes}) \to \mathcal{O}^{\otimes} \times (\mathcal{O}^{\otimes})^{\mathrm{op}}$ 是保守的（因为它是右纤维化），我们由此推得，在 $\mathcal{O}^{\otimes}$中由 f^+诱导的图表里，四个态射 $f_0\colon S_0 \to T_0$、 $f_0^+\colon S_0^+ \to T_0^+$、 $f_1\colon T_1 \to S_1$、$f_1^+\colon T_1^+ \to S_1^+$都是等价。由此以及方形（8）的交换性可知， $\tau_0\colon T_0 \to T_0^+$是半惰性的，位于一个单射 $\mathrm{h}t\mathrm{i} \to \mathrm{h}t + 1\mathrm{i}$ 之上，并且 f_0^+与扩张相容。同理，态射 σ_1、f_1 和 f_1^+都是等价，因此 τ_1也必定是等价。证明完毕。 □

引理 2.16. 假设其底层 ∞-范畴 $\mathcal{O}$ *of* $\mathcal{O}^{\otimes}$ 是一个 ∞-群胚，并令 $\sigma \in \mathcal{T}$。那么， π 在 σ 处的纤维 $\mathcal{BO}_\sigma$ 是一个 *Kan*复形。

证明。 由前一个引理可知，包含 $\mathcal{BO} \subset \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{T})$ 是一个保守等纤维化。映射 $\mathrm{ev}_0\colon \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{T}) \to \mathcal{T}$ 也如此，因此 π是一个等纤维化。为了证明结论，现在只需证明 π是保守的。考虑 $\mathcal{BO}$中的一个态射 $f\colon \sigma^+ \to \tau^+$，其像 $\pi(f)$ 在 $\mathcal{T}$中是一个等价。 f 的数据是如下形式的图表：



(9)

利用纤维化 $\mathcal{T} \to \mathcal{E} \times \mathcal{E}^{\mathrm{op}}$ 是保守的这一点，我们可推出 f_0 和 f_1 是等价。根据 $\mathcal{BO}$中对象的定义，映射 σ_1 和 τ_1 也都是等价，因此 f_1^+也是等价。最后，我们断言 f_0^+是一个等价。为此，将 f_0^+ 写成和 $f_0 \oplus f_0^+|_+$，其中 $f_0^+|_+\colon S_0^+ \backslash S_0 \to T_0^+ \backslash T_0$ 是将 f_0^+ 限制到新颜色所得的限制。由于 $f_0^+|_+$是 $\mathcal{O}$中的一个映射，而按假设 $\mathcal{O}$是一个 ∞-群胚，所以它是一个等价；因此 f也是等价。 □

2.5 定理的证明A

定理 A 证明中的关键步骤之一是以下结果，其证明见第 3 节。

定理 2.17。 令 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 为一个幺元的 ∞-幺半群。则函子 $\pi\colon \mathcal{BO} \to \mathcal{T}$ 是一个笛卡尔纤维化。

假设定理 2.17 和 B，其证明将在第 3 节和4节中给出，我们可以证明定理 A。

定理 A 的证明。 根据 Mann–Robalo 的论证（如第 2.4.1 节所述），为了证明该定理，只需构造一个位于 $\mathcal{T}$ 上的右纤维化，其纤维等价于扩张空间，并且其关联函子 $\mathcal{T} \to \mathcal{S}^{\mathrm{op}}$ 是一个弱笛卡尔结构，且满足命题 2.3 的拉回条件。

定理 2.17 保证 π 是一个笛卡尔纤维化。由引理 2.16 可知，其纤维是 Kan 复形，因此 π 是一个右纤维化。此外，定理 B 将对象 $\sigma \in \mathcal{T}$ 上的纤维 $\mathcal{BO}_\sigma$ 识别为其扩张空间 Ext(σ)。因此，剩下要证明的是，分类右纤维化 π 的函子 F_π: $\mathcal{T} \to \mathcal{S}^{\mathrm{op}}$ 是一个弱笛卡尔结构，并满足拉回条件。后者恰好是 ∞-幺半群 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 相干的条件，利用等价 $\mathcal{BO}_\sigma$ ' Ext(σ) 即可得出。对于弱笛卡尔条件，设 σ 在 $\mathcal{T}$ 中分解为 $\mathcal{T}_{\langle 1 \rangle}$ ' Tw($\mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}$) 中对象的和 σ ' $\oplus_{i=1}^{n} \sigma_i$ 。由于 p_1 在 π 的纤维上为常值（注 2.14 所述意义下），纤维 $\mathcal{BO}_\sigma$ 分解为空间 $\mathcal{BO}_{\sigma_i}$ 的不交并，因此 $\mathcal{S}$ 中的自然映射 $F_\pi(\sigma) \xleftarrow{\sim} \coprod_{i=1}^{n} F_\pi(\sigma_i)$ 是一个等价。这说明 F_π 是一个松笛卡尔结构。为验证它实际上是一个弱笛卡尔结构，设 f: $\sigma \to \sigma'$ 是 $\mathcal{T}$ 中活跃态射 hni $\to$h1i 沿 $\mathbb{F}_*$ 的一个 p_1-余笛卡尔提升。由注 2.12 可知，这意味着两个映射 source(σ) $\to$ source(σ') 和 target(σ) $\leftarrow$ target(σ') 都是等价，进而保证 $F_\pi(f)$ 是一个等价，证毕。

□

2.6 定理A的推广版本

定理 A 给出的膜作用 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 是一个幺元的 ∞- 幺半群，且不要求其底层 ∞-范畴 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-群胚（相干性的定义 （b），见2.9中的条件）。

为使这一说法更加精确，我们称一个 ∞-幺半群 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 是范畴相干的，如果它是幺元的，并且满足定义 2.9 中条件 (c) 的变体 (c')：其中要求图表 (4) 是 ∞-范畴中的范畴论推出方块（而非同伦推出方块）。注意，如果 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 是幺元的，且 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 是一个 ∞-群胚，即 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 满足定义 2.9 中的条件 (a) 和 (b)，那么条件 (c) 与 (c') 实际上等价，因为对于 Kan 复形，同伦推出方块自动就是范畴论推出方块。因此，相干的 ∞-幺半群也是范畴相干的。定理 A 的推广版本如下。

定理 A'。设 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 是一个范畴相干的 ∞-幺半群。则 ∞-范畴$\{\mathrm{Ext}(\mathrm{id}_c)\}_{c \in \mathcal{O}}$ 的集合带有一个典范的 $\mathcal{O}$- 代数结构，位于 $\mathrm{Cospan}(\mathsf{Cat}_\infty)$ 中；当 A 是 $\mathcal{O}$ 一个 ∞- 群胚时，它恢复定理

定理 A'的证明与上文给出的定理 A的证明几乎相同，只是稍微简单一些。事实上，大多数论证，包括定理 2.17 和 B的使用，都不需要假设 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-群胚。唯一的区别在于，在定理 A' 的情形下， π只是一个笛卡尔纤维化（而非右纤维化），因此其分类函子具有如下形式： $\mathcal{T} \to \mathsf{Cat}_\infty^{\mathrm{op}}$。

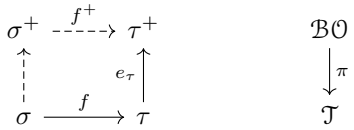
按照 [Toë13], 的思路，还可以进一步推广：去掉$\mathcal{O}^{\otimes}$ 相干的假设，也就是说，只假设 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 是一个幺元的 ∞-幺半群。在这种情况下，膜作用仅给出一个 lax 代数结构，作用在 ∞-范畴 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 上，取值于 ∞- 范畴的余跨度中；只有当 $\mathcal{O}^{\otimes}$ （按前述推广意义）相干时，这才是真正的代数结构。关于这种 lax 结构的更多细节，请参阅 Kern 的论文 Ker21] 。

3 纤维化的笛卡尔性

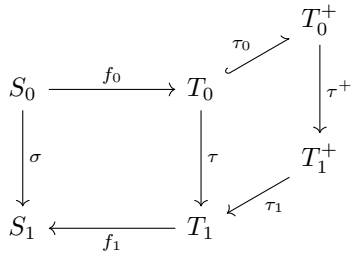
本节旨在证明定理 2.17，断言定义 π: $\mathcal{BO} \to \mathrm{Tw}(\mathrm{Env}(\mathcal{O}))^{\otimes}$ 中的膜纤维化 2.13 确实是一个笛卡尔纤维化。我们将定义沿着 π 的特殊边的提升，然后在本节余下部分证明这些提升是 $\mathcal{BO}$ 中的笛卡尔箭头。注意，这个纤维化的笛卡尔性保证了定义 $\mathcal{O}$-代数 $\mathrm{Cospan}(\mathcal{S})$ 中所涉及的全部同伦相干性的存在，而该代数由膜作用给出。

3.1 笛卡尔提升的构造

设 $f\colon\ \sigma \rightsquigarrow \tau$是 $\mathcal{T}$中的一个态射，并设 $e_\tau\colon\ \tau \rightsquigarrow \tau^+$属于纤维 $\mathcal{BO}_\tau$。我们将构造一个 $f^+\colon$ $\sigma^+ \rightsquigarrow \tau^+$，它位于 π之上方的 f，且是一个笛卡尔边。

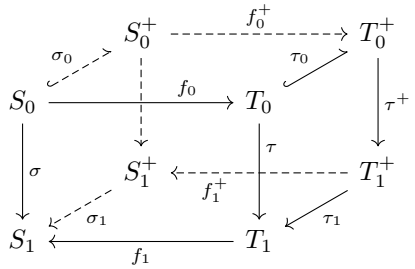


展开 $\mathcal{BO}$ 的定义，我们得到如下形式的图表



(10)

在 $\mathcal{E}$ 中，并希望将其扩展为如下形状的图表



(11)

使得所得到的态射 $f^+\colon \sigma^+ \rightsquigarrow \tau^+$属于 $\mathcal{BO}$。我们分几个步骤进行，如图 3.1所示。

˜**步骤 1**。选取复合 f 的一个代表 $e_\tau \circ f$，它位于 $\mathcal{T}$中。特别地，这给出一个 3-单纯形$S_0T_0^+T_1^+S_1$以及一个 5-单纯形 $S_0T_0T_0^+T_1^+T_1S_1$，它扩展了图表（10）。

步骤 2。定义对象 S_1^+为 S_1，并将态射 $\sigma_1\colon\ S_1^+ \to S_1$ 定义为恒等态射。由于 σ_1 是一个等价，利用 Joyal 提升定理 [Lur22、定理 019F]以及若干角填充，我们可以将 3-单纯形 $S_0T_0^+T_1^+S_1$扩展为一个 4-单纯形 $S_0T_0^+T_1^+S_1^+S_1$。

步骤 3. 现在我们转向关键步骤，即三角形 $S_0S_0^+T_0^+$ 的构造。将 T_0^+ 分解为颜色之和

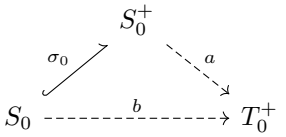
$$T_0^+ = \oplus_{i\in p_0(T_0)} C_i \oplus C^+$$

使得 C^+ 是位于元素 $p_0(T_0^+)\setminus \mathrm{im}(p_0(\tau_0))$ 上方的颜色。由于 $\mathcal{O}^\otimes$ 是幺元的，存在一个从 $\mathcal{O}^\otimes$ 的零对象到 C^+ 的本质唯一态射 ι_{C^+}。定义 S_0^+ 为和 $S_0 \oplus C^+$，并定义 σ_0 为 $\mathrm{id}_{S_0} \oplus \iota_{C^+}$，这显然是一个原子态射。

剩下的任务是构造 f_0^+。注意， $p_0(f_0^+)$ 必须与唯一态射 $h\colon\ p_0(S_0^+) \to p_0(T_0^+)$ 一致；该态射在 $p_0(S_0)$ 上限制为 $p_0(\tilde{f}_0)$，并保持 $p_0(C^+)$。考虑 ∞-范畴

$$\mathcal{M} = (\mathcal{O}^\otimes)^{\Delta^2} \times_{(\mathcal{O}^\otimes)^{\Delta\{2\}}} \{T_0^+\} \times_{(\mathcal{O}^\otimes)^{\Delta^{01}}} \{\sigma_0\} \times_{\mathbb{F}_*^{\Lambda^2_2}} \{(p_0(\tilde{f}_0), h)\}$$

由所有以下形式的图表组成



(12)

满足 $p_0(a) = h$ 和 $p_0(b) = p_0(\tilde{f}_0)$。包含 $\Delta^{02} \hookrightarrow \Delta^2$ 给出一个态射

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{Map}^{p_0(\tilde{f}_0)}_{\mathcal{O}^\otimes}(S_0, T_0^+) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{s} \mathrm{Map}^{\rho^i \circ h}_{\mathcal{O}^\otimes}(S_0, C_i). \tag{13}$$

另一方面，根据内随附包含 $\Lambda^2_1 , \to \Delta^2$ 以及 ∞-幺半群的定义，我们得到以下等价序列

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Map}^{h}_{\mathcal{O}^\otimes}(S_0^+, T_0^+) \\ &\xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{s} \mathrm{Map}^{\rho^i \circ h}_{\mathcal{O}^\otimes}(S_0^+, C_i) \times \mathrm{Map}^{\rho^{n+1} \circ h}_{\mathcal{O}^\otimes}(S_0^+, C^+) \\ &\xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{s} \mathrm{Map}^{\rho^i \circ h}_{\mathcal{O}^\otimes}(S_0, C_i) \times \mathrm{Map}_{\mathcal{O}}(C^+, C^+). \end{aligned}$$

将这些等价与投影 $\mathrm{Map}_{\mathcal{O}}(C^+, C^+) \to *$ 复合，恰好恢复态射（13）。因此我们看到，满足条件 ∞的、形如（12）的图表的 $\tilde{}$ $\tilde{}$-范畴 $b = f_0$，我们将其识别为态射（13）在 f_0处的纤维，与$\mathrm{Map}_{\mathcal{O}}(C^+, C^+)$等价。

要定义 f_0^+以及图表（2-单纯形（12）的相应 ∞-群胚，只需指定该 $\mathrm{Map}_{\mathcal{O}}(C^+, C^+)$中的任意对象即可。

步骤4。 此时，我们已将 3-单形 $S_0 T_0^+ T_1^+ S_1$ 扩展为具有如下形状的图表

$$\Delta^{S_0 T_0^+ T_1^+ S_1^+ S_1} \cup_{\Delta^{S_0 T_0^+}} \Delta^{S_0 S_0^+ T_0^+}.$$

简单计算表明，将后一个单纯集合包含到 $\Delta^{S_0 S_0^+ T_0^+ T_1^+ S_1^+ S_1}$ 中是内无害的；这使我们能够选择将该图表扩展为 5-单形 $S_0 S_0^+ T_0^+ T_1^+ S_1^+ S_1$。

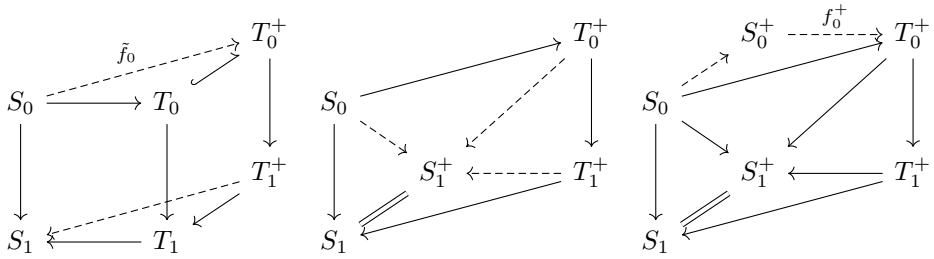


图1：构造 f^+ 的步骤 1、2 和 3 的图表。若一条箭头是在当前步骤中添加的，则用虚线表示。

至此，边 $f^+ \colon \sigma^+ \rightsquigarrow \tau^+$提升 f的构造便完成了。定理 2.17 的证明主要在于证明 f^+ 是笛卡尔的。

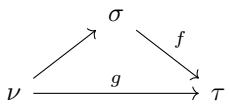
3.2 笛卡尔性证明概要

给定态射 $f \colon \sigma \to \tau \in \mathcal{T}$ 和对象 $\tau^+ \in \mathcal{BO}$，我们构造了一个特定的边 $f^+ \colon \sigma^+ \to \tau^+$，它位于 f 之上，可将其解释为 ∞- 范畴 $\mathcal{BO}_{/\tau^+} \times_{\mathcal{T}_{/\tau}} \mathcal{T}_{/f}$ 中的一个对象。本节旨在概述证明 f^+ 是笛卡尔的过程。详细内容将在本节余下部分讨论。

记号 3.1. 在整个证明过程中，我们将使用 A.12 中引入的记号。换言之，从现在起，我们固定一个对象 $\nu^+ \in \mathcal{BO}$，记 $\mathcal{D}_{\nu^+}$ 为 ∞-范畴 $\mathcal{BO}_{/\tau^+} \times_{\mathcal{T}_{/\tau}} \mathcal{T}_{/f} \times_{\mathcal{BO}} \{\nu^+\}$ 并固定其中的一个对象 u 。接着我们考虑相应的提升空间

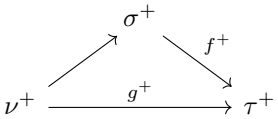
$$\mathcal{L} = \mathcal{BO}_{/f^+} \times_{\mathcal{BO}} \{\nu^+\} \times_{\mathcal{D}_{\nu^+}} \{u\}.$$

更明确地说，对象 $u \in \mathcal{D}_{\nu^+}$ 的数据是 $\mathcal{T}$ 中形如 u_0 的一个三角形



(14)

以及一个态射 $g^+\colon\ \nu^+ \to \tau^+$，位于 $\mathcal{B}\mathcal{O}$ 中，并且位于 π-上方的 g。$\mathcal{L}$ 中的一个对象是 u 的一个提升，也就是一个三角形的数据



(15)

在 $\mathcal{B}\mathcal{O}$ 位于 π上方的三角形 u_0 （见（14）中所描绘的图表） ∞-群胚 $\mathcal{L}$所参数化的图表中，只有态射 $\nu^+ \to \sigma^+$ 以及填充三角形（ 2- 单纯形（ 15 ）可以变化。

根据引理 A.13，证明 f^+ 是 π-笛卡尔的，等价于证明以下结果。

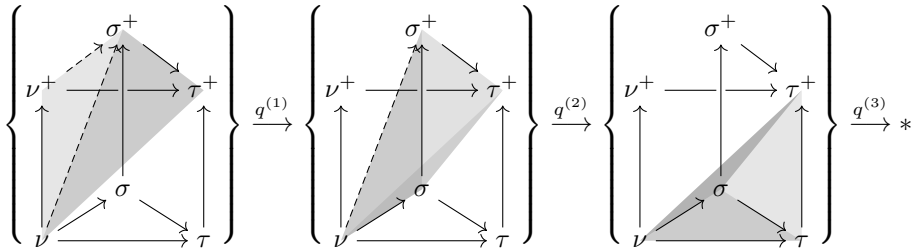
命题 3.2。 $\mathcal{L}$ 的提升空间是可缩的。

本节余下部分致力于命题 3.2的证明。为帮助读者，我们先解释论证策略：我们将研究终态射 $q\colon\ \mathcal{L} \to *$，并将其分解为一个复合

$$q\colon \mathcal{L} \xrightarrow{q^{(0)}} \mathcal{L}^{(0)} \xrightarrow{q^{(1)}} \mathcal{L}^{(1)} \xrightarrow{q^{(2)}} \mathcal{L}^{(2)} \xrightarrow{q^{(3)}} \mathcal{L}^{(3)} \cong * \tag{16}$$

并证明每个映射 $q^{(i)}$ 都是 Kan 复形的等价。其思想是，每个∞-范畴 $\mathcal{L}^{(i)}$ 都参数化 $\mathcal{T}$ 中具有某种形状 $S^{(i)}$ 且固定了某些数据的图表。对于 $i > 0$，函子 $q^{(i)}\colon\ \mathcal{L}^{(i-1)} \to \mathcal{L}^{(i)}$ 可以解释为遗忘映射。单纯集合 $S^{(0)}$ 是 $\Delta^2 \times \Delta^1$，对应于 $\mathcal{E}$ 中与三角形相对应的图表形状$\mathcal{B}\mathcal{O}$ （例如图表（15））。递减的单纯集合序列 $S^{(0)} \supset S^{(1)} \supset S^{(2)} \supset S^{(3)}$编码了非固定数据越来越少的图表（见定义 3.5）。

下图展示了复合函子 $\mathcal{L}$ 的分解 $^{(0)} \to \mathcal{L}^{(3)}$.



(17)

在此描述中，实线箭头表示 $\mathcal{T}$ 中在 $\mathcal{L}^{(i)}$ 内固定的态射，而虚线箭头表示在该空间中允许变化的态射。在复合的每一步中，新图表都是从前一个图表中移除 $\mathcal{T}$ 中的一个 3-单形（以及一些维数较低的单形）得到的；对于 $q^{(1)}$、 $q^{(2)}$ 和 $q^{(3)}$，分别移除的 3-单形是 $\nu\nu^+\sigma^+\tau^+$、 $\nu\sigma\sigma^+\tau^+$ 和 $\nu\sigma\tau\tau^+$（如图中灰色部分所示）。最后的 ∞-范畴 $\mathcal{L}^{(3)} \cong *$ 应被视为 $\mathcal{L}^{(i)}$ 中的固定数据。

函子 $q^{(2)}$ 和 $q^{(3)}$ 均由内无害态射诱导，因此是平凡 Kan 纤维化。函子 $q^{(1)}$ 的情形则更为微妙，证明它也是平凡纤维化将构成命题3.2的证明的核心。

我们将上述论证分为三个步骤：每一步都旨在证明其中一些函子 $q^{(i)}$ 是等价。证明中最具技术性的部分留待本节末尾处理（小节3.6）。

3.3 从切片到函子范畴：函子 $q^{(0)}$

第一步是定义函子 $q^{(0)}\colon\ \mathcal{L} \to \mathcal{L}^{(0)}$，并证明它是范畴等价。$\infty$-范畴 $\mathcal{L}^{(0)}$ 将是 $\mathcal{L}$ 的一个略微变体，因为这两个 ∞-范畴都参数化

形如（15）的三角形，其中固定以下数据：态射 f^+ 和 g^+，它们位于 $\mathcal{BO}$ 中；以及形状为（ u_0 的 u 底层三角形（14）。这两个 ∞-范畴具有相同的对象，区别在于 $\mathcal{L}$ 由切片 ∞-范畴 $\mathcal{BO}_{/f^+}$ 构造而成，而 $\mathcal{L}^{(0)}$ 则由函子 ∞-范畴 $\mathrm{Fun}(\Delta^2,\ \mathcal{BO})$得到。更确切地说，我们将 $\mathcal{L}^{(0)}$ 定义为

$$\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{BO}^{\Delta^2} \times_{\mathcal{BO}^{\wedge^2_2}} \{(f^+, g^+)\} \times_{\mathcal{T}^{\Delta^2}} \{u_0\}. \tag{18}$$

引理 3.3。 存在一个 ∞-范畴之间的等价 $q^{(0)}$: $\mathcal{L} \to \mathcal{L}^{(0)}$。特别地， $\mathcal{L}^{(0)}$ 是一个 *Kan*复形。

为了构造这个等价 $q^{(0)}$，我们首先需要在切片 ∞-范畴与相应的图表 ∞-范畴之间建立比较，见下引理。

引理 3.4。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴，且 p: $K \to \mathcal{C}$ 是一个图表。那么存在一个 ∞-范畴之间的典范等价

$$\mathcal{C}_{/p} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{K^{\triangleleft}} \times_{\mathcal{C}^K} \{p\}.$$

为完整起见，我们在本节末尾给出这一众所周知结果的证明，见 3.6.1。现在我们可以开始证明引理 3.3。

引理 *3.3* 的证明。 首先，注意到我们可以写成

$$\mathcal{L}^{(0)} = \left(\mathcal{BO}^{\Delta^2} \times_{\mathcal{BO}^{\Delta^{12}}} \{f^+\}\right) \times_{\mathcal{P}} \{u\},$$

其中 $\mathcal{P}$ 表示拉回

$$\mathcal{P} = \left(\mathcal{BO}^{\Delta^{02}} \times_{\mathcal{BO}^{\Delta\{2\}}} \{\tau^+\}\right) \times_{\left(\mathcal{T}^{\Delta^{02}} \times_{\mathcal{T}^{\Delta\{2\}}} \{\tau\}\right)} \left(\mathcal{T}^{\Delta^2} \times_{\mathcal{T}^{\Delta^{12}}} \{f\}\right).$$

我们将函子 $q^{(0)}$: $\mathcal{L} \to \mathcal{L}^{(0)}$ 定义为由该交换方块诱导而来 e

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{BO}_{/f^+} & \xrightarrow{\psi'} & \mathcal{BO}^{\Delta^2} \times_{\mathcal{BO}^{\Delta^{12}}} \{f^+\} \\ \downarrow{\scriptstyle \xi'} & & \downarrow{\scriptstyle \xi} \\ \mathcal{BO}_{/\tau^+} \times_{\mathcal{T}_{/\tau}} \mathcal{T}_{/f} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{P} \end{array} \tag{19}$$

通过取 $u \in \mathcal{BO}_{/\tau^+} \times_{\mathcal{T}_{/\tau}} \mathcal{T}_{/f}$ 处的纤维。

为了证明 $q^{(0)}$ 是 ∞-范畴之间的等价，我们将利用 Joyal 模型结构具有局部右适当这一性质（尽管它并非右适当）。这一性质适用于任意模型结构，其含义是：对于由纤维对象构成的任意图表 $d = (X_a \to X_b \leftarrow X_c)$，若其中一个映射是纤维化，则从拉回到同伦拉回的典范态射 $X_a \times_{X_b} X_c \to X_a \times^{\mathrm{h}}_{X_b} X_c$ 是一个等价。特别地，若此类图表 $d \to d'$ 之间的一个态射是逐点弱等价，则由此诱导的态射 $\lim d \to \lim d'$ 是弱等价。

由于图表 (19) 中的每个单纯集合都是一个 ∞-范畴（因而是 Joyal 模型结构中的纤维对象），要证明 $q^{(0)}$ 是 ∞-范畴之间的等价，只需证明以下两个断言：

(1) ψ 和 ψ' 是范畴等价；(2) ξ 和 ξ' 是等纤维化。

为证明第一个断言，我们再次使用前一段中所述的论证 a-graphs。事实上，态射 ψ 本身就是由图表的自然变换诱导的

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{BO}_{/\tau^+} & \longrightarrow & \mathcal{T}_{/\tau} & \longleftarrow & \mathcal{T}_{/f} \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_a} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_b} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_c} \\ \mathcal{BO}^{\Delta^{02}} \times_{\mathcal{BO}^{\Delta\{2\}}} \{\tau^+\} & \longrightarrow & \mathcal{T}^{\Delta^{02}} \times_{\mathcal{T}^{\Delta\{2\}}} \{\tau\} & \xleftarrow[\chi]{} & \mathcal{T}^{\Delta^2} \times_{\mathcal{T}^{\Delta^{12}}} \{f\}. \end{array}$$

引理 3.4 保证每个竖直态射都是等价。我们知道 $\mathcal{T}_{/f} \to \mathcal{T}_{/\tau}$ 是右纤维化（由 [Lur09]中的命题 2.1.2.1 的对偶可知），因此是等纤维化。

现在我们证明函子 $\chi\colon \mathcal{T}^{\Delta^2} \times_{\mathcal{T}^{\Delta^{12}}} \{f\} \to \mathcal{T}^{\Delta^{02}} \times_{\mathcal{T}^{\Delta^{\{2\}}}} \{\tau\}$ 是一个等纤维化。设 v 是 $\mathcal{T}^{\Delta^2} \times_{\mathcal{T}^{\Delta^{12}}} \{f\}$ 中的一个对象，且 $\chi(v) \xrightarrow{\sim} w$ 是 $\mathcal{T}^{\Delta^{02}} \times_{\mathcal{T}^{\Delta^{\{2\}}}} \{\tau\}$ 中的一个等价。我们希望将这个等价提升为 $\mathcal{T}^{\Delta^2} \times_{\mathcal{T}^{\Delta^{12}}} \{f\}$ 中的一个等价。v 的数据是在 $\mathcal{T}$ 中形如以下形式的一个三角形

$$\begin{array}{ccc} & \sigma & \\ \nearrow & & \searrow^{f} \\ \alpha & \xrightarrow{\ell} & \tau. \end{array} \tag{20}$$

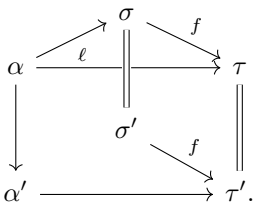
态射 $\chi(v) \to w$ 的数据是形如以下形式的一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \xrightarrow{\ell} & \tau \\ \downarrow & \searrow & \| \\ \alpha' & \longrightarrow & \tau'. \end{array} \tag{21}$$

由于自然变换逐点为等价时即为等价，$\chi(v) \to w$ 是等价这一事实转化为 $\alpha \to \alpha'$ 是等价这一陈述。我们希望将前面的图表扩展为以下形式

$$\begin{array}{ccccc} & & \sigma & & \\ & \nearrow & \| & \searrow^{f} & \\ \alpha & \xrightarrow{\ell} & & & \tau \\ \downarrow & & \sigma' & & \| \\ & \nearrow & & \searrow^{f} & \\ \alpha' & & \longrightarrow & & \tau' \end{array} \tag{22}$$

其表示 $\mathcal{T}^{\Delta^2} \times_{\mathcal{T}^{\Delta^{12}}} \{f\}$ 中的一个等价。我们分几个步骤进行这一构造：首先，将图表（20）和（21）粘合起来，并添加退化的 2-单形 $\sigma\tau\tau'$ 和 $\sigma\sigma'\tau'$，我们得到图表



从这里开始，图表（22）的构造通过在 $\mathcal{T}$ 中依次进行角填充来获得，也就是说，依次选择提升问题的解，每个问题的形式如下

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n_k & \longrightarrow & \mathcal{T}. \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

首先，在 $\alpha\sigma\tau\tau'$ 中填充形状为 Λ^3_2 的角，构造出 2-单形 $\alpha\sigma\tau'$。类似地，通过填充 $\alpha\sigma\sigma'$ 中的角 Λ^2_1，得到一个态射 $\alpha\sigma'$。利用 $\alpha\sigma\sigma'\tau'$ 中角 Λ^2_1 的角填充，我们得到 2-单形 $\alpha\sigma'\tau'$。最后，由于态射 $\alpha\alpha'$ 是一个等价，我们可以填充 $\alpha\alpha'\sigma'$ 中的角 Λ^2_0，以及 $\alpha\alpha'\sigma'\tau'$ 中的角 Λ^3_0。由此得到一个形如 (22) 的图表，其中 $\alpha \to \alpha'$ 是一个等价；因此，存在一个等价 $v \xrightarrow{\sim} w$，它沿着 χ 提升给定的态射$\chi(v) \to w$。至此，第一项断言得证。

现在我们来讨论第二个断言。由于 ξ' 是一个右纤维化，因此它特别是一个等纤维化。接下来要证明 ξ 也是一个等纤维化。考虑一个对象 $x \in \mathcal{B}\mathcal{O}_{/\tau^+} \times_{\mathcal{T}_{/\tau}} \mathcal{T}_{/f}$ 以及一个

等价 $\xi(x) \xrightarrow{\sim} y$，它位于 $\mathcal{P}$中。我们要构造一个提升 $\xi(x) \xrightarrow{\sim} y$的等价 $x \to y$。x 的数据是 $\mathcal{BO}$ 中如下形式的一个三角形：

$$\begin{array}{ccc} & \sigma^+ & \\ \nearrow & & \searrow^{f^+} \\ \alpha^+ & \xrightarrow{\ell^+} & \tau^+. \end{array} \tag{23}$$

态射 $\xi(x) \to y$ 的数据是一个形如（22）的图表以及一个提升

$$\begin{array}{ccc} \alpha^+ & \xrightarrow{\ell^+} & \tau^+ \\ \downarrow & \nearrow & \| \\ \alpha'^+ & \longrightarrow & \tau'^+ \end{array} \tag{24}$$

其子图表（21）沿着 π。根据 [Lur22，推论 01H4]，，由于态射 χ 是等纤维化，∞-子群胚 $\mathcal{P}^{\simeq} \subset \mathcal{P}$ 由下列 ∞-范畴图表的极限给出

$$\left(\mathcal{BO}^{\Delta^{02}} \times_{\mathcal{BO}^{\Delta^{\{2\}}}} \{\tau^+\}\right)^{\simeq} \longrightarrow \left(\mathcal{T}^{\Delta^{02}} \times_{\mathcal{T}^{\Delta^{\{2\}}}} \{\tau\}\right)^{\simeq} \xleftarrow{\chi} \left(\mathcal{T}^{\Delta^2} \times_{\mathcal{T}^{\Delta^{12}}} \{f\}\right)^{\simeq}.$$

态射 $\xi(x) \to y$ 是等价，因此转化为态射$\alpha^+ \to \alpha'^+$ 从 是等价这一事实。我们的目标是延拓图表（23）和（24）以获得一个提升

$$\begin{array}{ccccc} & & \sigma^+ & & \\ & \nearrow & \| & \searrow^{f^+} & \\ \alpha^+ & \xrightarrow{\ell^+} & \| & & \tau^+ \\ \downarrow & & \sigma'^+ & \nearrow & \| \\ & \nearrow & & \searrow^{f^+} & \\ \alpha'^+ & & \longrightarrow & & \tau'^+ \end{array} \tag{25}$$

给定图表（22）沿函子 π。图表（25）的构造由与证明 χ 是反等纤维化（断言（1））时相同的一系列角填充问题的解给出；唯一的区别在于，在当前情形中，角填充问题必须相对于内纤维化 π来考虑，也就是说，要考虑形如下的提升问题

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n_k & \longrightarrow & \mathcal{BO} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \pi \\ \Delta^n & \longrightarrow & \mathcal{T}. \end{array}$$

这一构造给出了一个等价 $x \xrightarrow{\sim} y$，正如所需，确保 ξ 是一个等纤维化。这就完成了引理3.3的证明。□

3.4 无害扩张：函子 $q^{(2)}$ 和 $q^{(3)}$

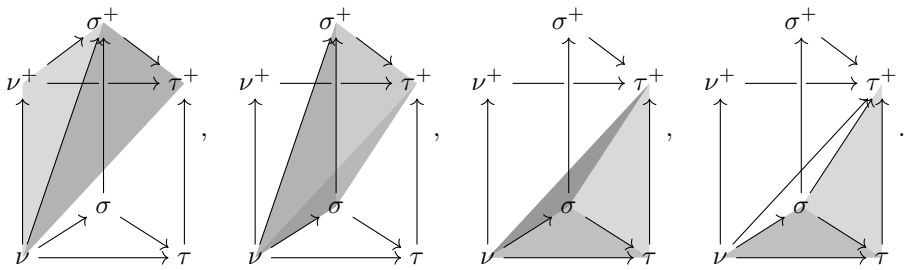
我们已经定义了函子 $q^{(0)}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}^{(0)}$ 并证明它是 ∞-群胚的一个等价。现在我们将详细说明终态射 $q\colon \mathcal{L} \to *$的分解（16），方法是定义 ∞-范畴 $\mathcal{L}^{(i)}$，其中 $i \in \{1, 2, 3\}$，并定义函子 $q^{(i)}$。

定义 3.5。• 首先，令 $S^{(0)}$ 表示单纯集合 $\Delta^2 \times \Delta^1$，其顶点标记为ν，σ，τ，ν^+，σ^+，ν^+，如（17）中的图表所示。

- 对于 $i \in \{1、2、3\}$，我们使用以下公式定义 $S^{(i)}$ 的递减子单纯集合 $S^{(0)}$：

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= \Delta^{\nu\nu^+\tau^+} \cup_{\Delta^{\nu\tau^+}} \Delta^{\nu\sigma\tau\tau^+} \cup_{\Delta^{\nu\sigma\tau^+}} \Delta^{\nu\sigma\sigma^+\tau^+}, \\ S^{(2)} &= \Delta^{\nu\nu^+\tau^+} \cup_{\Delta^{\nu\tau^+}} \Delta^{\nu\sigma\tau\tau^+} \cup_{\Delta^{\sigma\tau^+}} \Delta^{\sigma\sigma^+\tau^+}, \\ S^{(3)} &= \Delta^{\nu\nu^+\tau^+} \cup_{\Delta^{\nu\tau^+}} \Lambda^{\nu\sigma\tau\tau^+}_{\tau} \cup_{\Delta^{\sigma\tau^+}} \Delta^{\sigma\sigma^+\tau^+}. \end{aligned} \tag{26}$$

对于 $i \in \{0、1、2\}$，单纯集合 $S^{(i)}$ 将编码由 $\mathcal{L}^{(i)}$参数化的图表的形状，而 $S^{(3)}$ 将描述在 $\mathcal{L}^{(i)}$内保持不变的图表的形状。单纯集合 $S^{(0)}$、.....、 $S^{(3)}$ 可以表示为



(27)

我们将 $\mathcal{L}^{(3)}$ 定义为终端 ∞-群胚；我们将其唯一对象视为图表$S^{(3)} \to \mathcal{T}$，该图表由我们先前固定的数据 $(f^+,\ g^+,\ u_0)$ 给出。包含 $j^{(i)}\colon S^{(i)} \subset S^{(i-1)}$诱导出遗忘函子 $p^{(i)}\colon \mathcal{T}^{S^{(i-1)}} \to \mathcal{T}^{S^{(i)}}$，我们用它来定义 ∞-范畴

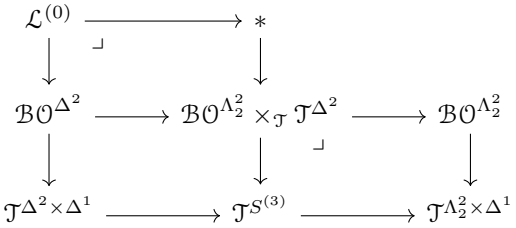
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(1)} &= \mathcal{T}^{S^{(1)}} \times_{\mathcal{T}^{S^{(3)}}} \{(f^+, g^+, u_0)\},\\ \mathcal{L}^{(2)} &= \mathcal{T}^{S^{(2)}} \times_{\mathcal{T}^{S^{(3)}}} \{(f^+, g^+, u_0)\}.\end{aligned}$$

回顾一下， $\mathcal{L}^{(0)}$ 由公式 (18) 定义，其中使用了取值于 $\mathcal{BO}$的图表项。尽管如此，下面的引理保证 $\mathcal{L}^{(0)}$ 实际上有一种简单的等价描述，可用 $\mathcal{T}$中的图表来表示，并遵循上文对 $\mathcal{L}^{(1)}$ 和 $\mathcal{L}^{(2)}$的模式。

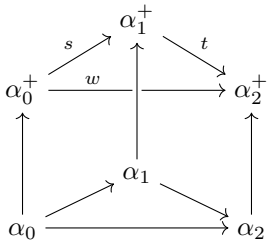
引理3.6。 我们有一个 ∞-群胚之间的典范等价

$$\mathcal{L}^{(0)} \simeq \mathcal{T}^{S^{(0)}} \times_{\mathcal{T}^{S^{(3)}}} \{(f^+, g^+, u_0)\}.$$

Proof. 根据定义， ∞-群胚 $\mathcal{L}^{(0)}$ 适合交换图



其中左上方和右下方的方块是笛卡尔的。因此，要证明该引理，只需证明底部外方块是笛卡尔的。注意，两个垂直映射$\mathcal{BO}^{\Lambda^2_2} \to \mathcal{T}^{\Lambda^2_2\times\Delta^1}$和 $\mathcal{BO}^{\Delta^2} \to \mathcal{T}^{\Delta^2\times\Delta^1}$ 都是子范畴，也就是说，它们是内纤维化的单态射。这意味着态射 $\mathcal{BO}^{\Lambda^2_2} \times_{\mathcal{T}^{\Lambda^2_2\times\Delta^1}} \mathcal{T}^{\Delta^2} \to \mathcal{T}^{\Delta^2\times\Delta^1}$ 也是子范畴的包含，因此只需验证两个子范畴 $\mathcal{BO}^{\Delta^2}$ 和$\mathcal{BO}^{\Lambda^2_2} \times_{\mathcal{T}^{\Lambda^2_2\times\Delta^1}} \mathcal{T}^{\Delta^2}$ 具有相同的对象和态射。 $\mathcal{BO}^{\Delta^2}$ 中的一个对象（分别地，$\mathcal{BO}^{\Lambda^2_2} \times_{\mathcal{T}^{\Lambda^2_2\times\Delta^1}} \mathcal{T}^{\Delta^2}$中的一个对象）是一个图表



在 $\mathcal{T}$ 中，其中映射 $\alpha_0\alpha_0^+$、 $\alpha_1\alpha_1^+$和 $\alpha_2\alpha_2^+$是 $\mathcal{BO}$ 中的对象，并且态射 s、 t和 w （分别仅 t 和 w）位于 p_1-之上 $\mathsf{id}_{\langle 1\rangle}$，且与扩张相容（条件

定义 2.13）。关键观察是，只要 t 和 w 都满足这些性质， s也满足；这一事实意味着这两个子范畴具有相同的对象。我们可以用类似的论证证明，这两个子范畴的态射也同样如此，正如所需。

□

因此，函子 $q^{(i)}$ 和 ∞-范畴 $\mathcal{L}^{(i)}$ 构成如下交换图

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{L}^{(0)} & \xrightarrow{q^{(1)}} & \mathcal{L}^{(1)} & \xrightarrow{q^{(2)}} & \mathcal{L}^{(2)} & \xrightarrow{q^{(3)}} & \mathcal{L}^{(3)} \cong * \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle (f^+,g^+,u_0)} \\ \mathcal{T}S^{(0)} & \xrightarrow{p^{(1)}} & \mathcal{T}S^{(1)} & \xrightarrow{p^{(2)}} & \mathcal{T}S^{(2)} & \xrightarrow{p^{(3)}} & \mathcal{T}S^{(3)}, \end{array} \tag{28}$$

其中所有方块都是笛卡尔的。

现在我们断言，包含映射 $j^{(2)}\colon\ S^{(1)} \subset S^{(2)}$ 和 $j^{(3)}\colon\ S^{(2)} \subset S^{(3)}$ 都是内无害的。对于后一个态射，由公式（26）可知这一点显然成立，因为 $j^{(3)}$ 是由内无害映射 $\Lambda^{\nu\sigma\tau\tau}_{\tau} \subset \Delta^{\nu\sigma\tau\tau^+}$作推出得到的。对于前一个映射，注意到我们可以将 $j^{(2)}$ 写成以下复合的推出

$$\Delta^{\nu\sigma\tau^+} \cup_{\Delta^{\sigma\tau^+}} \Delta^{\sigma\sigma^+\tau^+} \ \subset\ \Lambda^{\nu\sigma\sigma^+\tau^+}_{\sigma} \ \subset\ \Delta^{\nu\sigma\sigma^+\tau^+},$$

其中两个映射都是内无害的。这就证明了该断言。因此我们得到，诱导函子 $p^{(2)}$ 和 $p^{(3)}$ 是平凡 Kan 纤维化。由于图表（28）中的每个方块都是笛卡尔的，我们推得函子 $q^{(2)}$ 和 $q^{(3)}$ 也是平凡 Kan 纤维化。特别地，我们看到$\mathcal{L}^{(1)}$ 和 $\mathcal{L}^{(2)}$ 是可缩 Kan 复形。

3.5 分解的存在性与唯一性：函子 $q^{(1)}$

为了证明定理 3.2，现在只需证明 $q^{(1)}$ 是平凡 Kan 纤维化，这是证明的关键步骤。由于包含 $j^{(1)}$ 在 $S^{(1)}_0 \subset S^{(2)}_0$ 的 0-单形集合上限制为双射，根据 [Rez22，命题 40.6 及脚注 30]，，我们得到 $p^{(1)}\colon\ \mathcal{L}^{(1)} \to \mathcal{L}^{(2)}$是等纤维化。由于我们已经知道 $\mathcal{L}^{(1)}$ 和 $\mathcal{L}^{(2)}$ 都是 Kan 复形，因此 $p^{(1)}$ 是 Kan 纤维化。由于图表 (28) 中的方块是笛卡尔的，我们推得 $q^{(1)}$也是 Kan 复形之间的 Kan 纤维化。要证明它是弱等价，我们必须证明它的所有纤维都是可缩的；下一命题断言了这一点。

命题 3.7。设 $d\colon\ S^{(1)} \to \mathcal{T}$ 是 $\mathcal{L}^{(1)}$ 中的一个图表。那么 $q^{(1)}$ 在 d 处的纤维 $\mathcal{L}^{(0)}_d$ 是可缩的。

证明。首先，我们断言可以将问题限制到 d 在对象 ν, ν^+, σ^+ 和 τ^+ 上的满子图。事实上，若记 $S^{(1)'}$ 为 $S^{(0)'} := \Delta^{\nu\nu^+\sigma^+\tau^+}$ 的子单纯集合 $\Delta^{\nu\nu^+\tau^+} \cup_{\Delta^{\nu\tau^+}} \Delta^{\nu\sigma^+\tau^+}$，它编码形如以下形式的交换方块

$$\begin{array}{ccc} \nu^+ & \longrightarrow & \tau^+ \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ \nu & \longrightarrow & \sigma^+, \end{array} \tag{29}$$

我们注意到， $j^{(1)}\colon\ S^{(1)} \subset S^{(0)}$ 可以写成该包含的推出

$$\begin{array}{ccc} S^{(1)'} & \longrightarrow & S^{(0)'} \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ S^{(1)} & \xrightarrow[j^{(1)}]{} & S^{(0)}, \end{array} \tag{30}$$

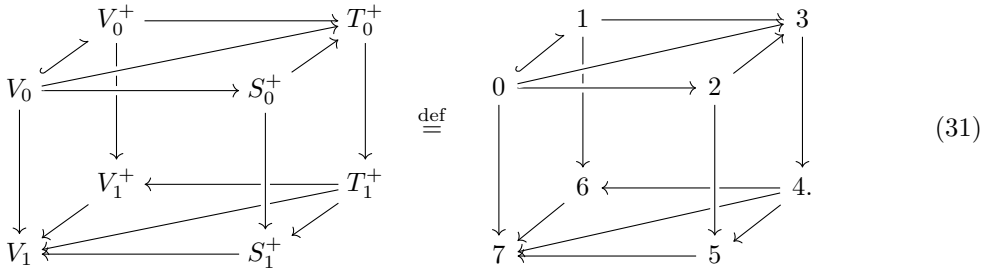
因此，我们可以将 $q^{(1)}$ 在 d 处的纤维识别为

$$\mathcal{L}_d^{(0)} \simeq \mathcal{T}^{S^{(0)'}} \times_{\mathcal{T}^{S^{(1)'}}} \{d'\},$$

其中 $d' = d|_{S^{(1)'}}$，由此证明了该断言。

注意，图表 d' 的形状为 (29)，它基本上由固定数据(f^+, g^+, u_0)决定。特别地，在此图表中，态射 $\sigma^+\tau^+$就是边 f^+，它是在第 3.1 节中构造的，而 2-单形 $\nu\sigma^+\tau^+$和 $\nu\nu^+\tau^+$是已知的。因此，该命题的证明归结为说明，剩余的单形 $\nu^+\sigma^+$, $\nu\nu^+\sigma^+$, $\nu^+\sigma^+\tau^+$ 和$\nu\nu^+\sigma^+\tau^+$ 可以通过本质上唯一的方式构造出来。

到目前为止，这些单形都是在 ∞-范畴 $\mathcal{T}$中书写的；我们需要将问题重新表述为取值于 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 的图表。形状为 (d' 的图表对应于某个图表 29) $d'_{\mathcal{O}}$: $K \to \mathcal{O}^{\otimes}$，其示意图如下



(31)

这里，为了有时简化记号，我们按相同顺序将对象 V_0, V_0^+, S_0^+, T_0^+, T_1^+,S_1^+, V_1^+, V_1 记作整数 $0, \ldots, 7$。这样，我们可以将以 $d'_{\mathcal{O}}$ 为指标的单纯集合写成其子单纯集合

$$K = \Delta^{013467} \cup_{\Delta^{0347}} \Delta^{023457}$$

Δ^7。因此，纤维 $\mathcal{L}_d^{(0)}$ 与空间 $\mathcal{L}_d^{(0)} \simeq (\mathcal{O}^{\otimes})^{\Delta^7} \times_{(\mathcal{O}^{\otimes})^K} \{d'_{\mathcal{O}}\}$规范等价；该空间参数化了将图表 $d'_{\mathcal{O}}$ 扩张为一个 7- 单纯形的方式。

证明的关键步骤涉及图表（31）上半部分的提升空间，即由满子单纯集合 $K_0 \subseteq K$ 在对象 V_0、 V_0^+、 S_0^+ 和 T_0^+ 上指标化的子图表。注意，这个单纯集合同构于 $\Delta^1 \times \Delta^1$。定义 $\mathcal{Z}$ 为纤维 $(\mathcal{O}^{\otimes})^{\Delta^3} \times_{(\mathcal{O}^{\otimes})^{K_0}} \{d'_{\mathcal{O}}|_{K_0}\}$；这个 ∞-范畴参数化了将图表 $d'_{\mathcal{O}}|_{K_0}$： $K_0 \to \mathcal{O}$ 扩张为一个 3-单形的方式。由于包含 $K_0 \subset \Delta^3$ 在对象上是双射，所诱导的函子 $(\mathcal{O}^{\otimes})^{\Delta^3} \to (\mathcal{O}^{\otimes})^{K_0}$ 是等纤维化，因此 ∞-范畴 $\mathcal{Z}$ 是一个空间。我们将证明以下中间结果。

断言 3.8。 图表上半部分的提升 $\mathcal{Z} = (\mathcal{O}^{\otimes})^{\Delta^3} \times_{(\mathcal{O}^{\otimes})^{K_0}} \{d'_{\mathcal{O}}|_{K_0}\}$ 的空间 （31） 是可缩的。

该论证依赖于以下观察：图表 $K_0 \to \mathcal{O}^{\otimes} \to \mathbb{F}_*$ 具有分解$p \circ d'_{\mathcal{O}}|_{K_0} = d^-_{\mathbb{F}_*} \oplus d^+_{\mathbb{F}_*}$，其形式为

$$\begin{array}{ccc} p_0(V_0)^+ & \longrightarrow & p_0(T_0^+) \\ \uparrow & & \uparrow \\ p_0(V_0) & \longrightarrow & p_0(S_0^+) \end{array} = \begin{array}{ccc} \langle n \rangle & \longrightarrow & \langle k \rangle \\ \| & & \uparrow \\ \langle n \rangle & \longrightarrow & \langle m \rangle \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} \langle 1 \rangle & = & \langle 1 \rangle \\ \uparrow & & \| \\ \langle 0 \rangle & \longrightarrow & \langle 1 \rangle \end{array}, \tag{32}$$

其中 $\oplus$ 表示 $\mathbb{F}_*$中图表的逐点不交并运算。利用（32）中的恒等映射，很容易看出，图表 $d^-_{\mathbb{F}_*}$ 和 $d^+_{\mathbb{F}_*}$ 都唯一延拓为 3-单形 $\widetilde{d}^-_{\mathbb{F}_*}$和 $\widetilde{d}^+_{\mathbb{F}_*}$，属于 $\mathbb{F}_*$，这意味着图表 $p\circ\ d'_{\mathcal{O}}|_{K_0}$ 也唯一延拓为一个 3-单形，即 $\widetilde{d}'_{\mathbb{F}_*} := \widetilde{d}^-_{\mathbb{F}_*} \oplus \widetilde{d}^+_{\mathbb{F}_*}$。特别地， $\Delta^3 \to \mathcal{O}^{\otimes}$ 中的任意图表 $\mathcal{Z}$ 都是 $\widetilde{d}'_{\mathbb{F}_*}$的一个提升。这表明我们可以将空间 $\mathcal{Z}$ 改写为

$$\mathcal{Z} \simeq (\mathcal{O}^{\otimes})^{\Delta^3} \times_{(\mathcal{O}^{\otimes})^{K_0}} \{d'_{\mathcal{O}}|_{K_0}\} \times_{\mathbb{F}_*^{\Delta^3}} \{\widetilde{d}'_{\mathbb{F}_*}\}.$$

我们将利用分解（32）并借助下面的引理，将空间 $\mathcal{Z}$分裂。回忆一下，如果单纯集合中每个非退化单纯形的每个面仍然是非退化的，则称该单纯集合为加括号的 Lur22，Tag 00XU]。

引理 3.9。设 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 是任意一个 ∞-幺半群。设 J 是一个加括号的单纯集合，$I \subseteq J$ 是一个子单纯集合。考虑两个图表 q 和 r，它们使下列方块交换：

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{r} & \mathcal{O}^{\otimes} \\ \downarrow & & \downarrow p \\ J & \xrightarrow{q} & \mathbb{F}_{*} \end{array} \tag{33}$$

并假设 q 分解为不交并 $q = \oplus_{i=1}^{n} q_i$ 个图表 $J \to \mathbb{F}_{*}$。那么存在一个分解 $r \simeq \oplus_{i=1}^{n} r_i$，使得方块 ∞中的提升范畴 (33) 分解为以下直积：

$$(\mathcal{O}^{\otimes})^{J} \times_{(\mathcal{O}^{\otimes})^{I}} \{r\} \times_{\mathbb{F}_{*}^{J}} \{q\} \simeq \prod_{i=1}^{n} (\mathcal{O}^{\otimes})^{J} \times_{(\mathcal{O}^{\otimes})^{I}} \{r_i\} \times_{\mathbb{F}_{*}^{J}} \{q_i\}. \tag{34}$$

本节末尾的 3.6.2 节给出了这个引理的证明。

现在我们可以完成引理 3.9 的证明。通过 (42) 中第一个等价，对象 $r \in (\mathcal{O}^{\otimes})^{I}$ 被识别为对象 $\oplus_i r_i$。现在注意到 $\mathcal{D}$ 处于一个由拉回方块组成的图表中

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & (\mathcal{O}^{\otimes})^{J} \times_{\mathbb{F}_{*}^{J}} \{q\} & \longrightarrow & (\mathcal{O}^{\otimes})^{J} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \rho' & \lrcorner & \downarrow \rho \\ * & \xrightarrow{r} & (\mathcal{O}^{\otimes})^{I} \times_{\mathbb{F}_{*}^{I}} \{q|_I\} & \longrightarrow & (\mathcal{O}^{\otimes})^{I} \times_{\mathbb{F}_{*}^{I}} \mathbb{F}_{*}^{J} \\ & \searrow & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ & & * & \xrightarrow{q} & \mathbb{F}_{*}^{J}. \end{array}$$

由于垂直函子 ρ 是等纤维化，其拉回 ρ'也如此。因此，左上方的拉回方块在 ∞-范畴的等价下保持不变。利用上述两个分解，我们推得 $\mathcal{D}$ 本身可写成一个积

$$\mathcal{D} \simeq \prod_{i=1}^{n} (\mathcal{O}^{\otimes})^{J} \times_{\mathbb{F}_{*}^{J}} \{q_i\} \underset{(\mathcal{O}^{\otimes})^{I} \times_{\mathbb{F}_{*}^{I}} \{q_i|_I\}}{\times} \{r_i\} \simeq \prod_{i=1}^{n} (\mathcal{O}^{\otimes})^{J} \times_{(\mathcal{O}^{\otimes})^{I}} \{r_i\} \times_{\mathbb{F}_{*}^{J}} \{q_i\},$$

如所期望。 □

现在我们回到命题 3.7 的证明。利用前述引理，由于 Δ^3 是加括号的，我们得到一个分解 $d'_{\mathcal{O}}|_{K_0} = d^{-}_{\mathcal{O}} \oplus d^{+}_{\mathcal{O}}$，它提升了方程（32）中的分解，并得到相应的分裂 $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^{-} \times \mathcal{Z}^{+}$，其分量为

$$\mathcal{Z}^{\pm} = (\mathcal{O}^{\otimes})^{\Delta^3} \times_{(\mathcal{O}^{\otimes})^{\kappa_0}} \left\{d^{\pm}_{\mathcal{O}}\right\} \times_{\mathbb{F}_{*}^{\Delta^3}} \left\{\widetilde{d^{\pm}_{\mathbb{F}_{*}}}\right\}.$$

如前所述，我们注意到，任何 $\Delta^3 \to \mathcal{O}^{\otimes}$ 提升 $d^{\pm}_{\mathcal{O}}$ 的图表都会自动成为$\widetilde{d^{\pm}_{\mathbb{F}_{*}}}$ 的提升。因此，空间 $\mathcal{Z}^{\pm}$ 等价于 $(\mathcal{O}^{\otimes})^{\Delta^3} \times_{(\mathcal{O}^{\otimes})^{\kappa_0}} \{d^{\pm}_{\mathcal{O}}\}$。我们注意到，$d^{-}_{\mathcal{O}}$ 中提升图表 (32) 左侧垂直映射 $\mathrm{id}^{\langle n \rangle}$ 的箭头是一个等价，因为根据假设，$V_0 \to V_0^{+}$是半惰性的。同样，根据映射 $S_0^{+} \to T_0^{+}$的构造，$d^{+}_{\mathcal{O}}$ 中提升图表 (32) 右侧垂直映射 $\mathrm{id}^{\langle 1 \rangle}$ 的箭头必然是一个等价。我们断言，这些性质迫使空间 $\mathcal{Z}^{-}$ 和 $\mathcal{Z}^{+}$ 成为可缩空间。为此，我们需要以下版本的 Joyal 提升定理。

引理 3.10。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴， α 是 $\mathcal{C}$中的一个等价。考虑一个外角α： $\Lambda^n_0 \to \mathcal{C}$，其中有 $\neg n \geqslant 2$，其沿着 $\Delta^1 \xrightarrow{\langle 01\rangle} \Lambda^n_0$ 的限制是 α。那么，参数化以下形式扩张的纤维$\mathcal{C}^{\Delta^n} \times_{\mathcal{C}^{\Lambda^n_0}} \{\alpha\}$ —

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{\alpha}{\frown} & & \\ \Delta^1 & \xrightarrow{\langle 01\rangle} & \Lambda^n_0 & \xrightarrow{\overline{\alpha}} & \mathcal{C} \\ & & \downarrow & \nearrow & \\ & & \Delta^n & & \end{array} \tag{35}$$

是一个可缩的 ∞-群胚。

引理的证明 *3.10*。 我们要证明，任意态射 $\beta\colon \partial\Delta^m \to \mathcal{C}^{\Delta^n} \times_{\mathcal{C}^{\Lambda^n_0}} \{\alpha\}$ 都可扩张为一个 m-单纯形，对所有 $m \geqslant 0$均成立。此问题等价于在交换方块中寻找一个提升

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n_0 & \xrightarrow{\mathrm{diag}\circ\overline{\alpha}} & \mathcal{C}^{\Delta^m} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle i^*} \\ \Delta^n & \xrightarrow{\beta'} & \mathcal{C}^{\partial\Delta^m} \end{array}$$

其中 diag 是对角函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\Delta^m}$, i^* 是由包含$i\colon \partial\Delta^m \to \Delta^m$ 诱导的内纤维化，且 β' 是 $\partial\Delta^m \xrightarrow{\beta} \mathcal{C}^{\Delta^n} \times_{\mathcal{C}^{\Lambda^n_0}} \{\alpha\} \to \mathcal{C}^{\Delta^n}$的伴随函子。由于 α 是一个等价，因此$\mathrm{diag}\circ\ \alpha\colon \Delta^1 \to \mathcal{C}^{\Delta^m}$也是一个等价。因此，利用 Joyal 提升定理 [Lur22， 定理 019F], ，我们得到上述方块中存在提升，证毕。

□

由上述论证和前一个引理，我们推出空间 $\mathcal{Z}$ 是可缩的。这证明了断言 3.8。为完成命题 3.7的证明，考虑推出 $\widetilde{K} = K \cup_{K_0} \Delta^3$以及包含 $\iota\colon \widetilde{K} \to \Delta^7$。纤维 $\mathcal{L}^{(0)}_d$ 和 $\mathcal{Z}$ 构成交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{L}^{(0)}_d & \longrightarrow & \mathcal{Z} & \xrightarrow{\sim} & \{d'_{\mathcal{O}}\} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ (\mathcal{O}^{\otimes})^{\Delta^7} & \xrightarrow{\iota^*} & (\mathcal{O}^{\otimes})^{\widetilde{K}} & \longrightarrow & (\mathcal{O}^{\otimes})^{K} \\ & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ & & (\mathcal{O}^{\otimes})^{\Delta^3} & \longrightarrow & (\mathcal{O}^{\otimes})^{K_0}. \end{array}$$

这里，右侧外方块和右下方块都是笛卡尔的，因此右上方块也是如此。由于上方外方块是笛卡尔的，右上方块也必然是笛卡尔的。为了完成关于 $\mathcal{L}^{(0)}_d$ 可缩的证明，我们需要仔细分析态射 ι。该结果用到了右可剥离态射这一概念，该概念在附录的定义A.5 中回顾如下。

引理 3.11。 将单纯集合 Δ^7 视为标记单纯集合，其中 $6 \to 7$ 是唯一的非退化标记边。那么，包含 $\iota\colon \widetilde{K} \longrightarrow \Delta^7$ 是右标记可剥离的。

该结果通过繁琐的显式计算得以证明，我们将其推迟到本节末尾的 3.6.3 节。

利用前一个引理，并注意到图表 67 中的态射 $d'|_{\mathcal{O}}$ 是等价，便可由引理 3.10 推出，由 ι^* 诱导的函子 $\mathcal{L}^{(0)}_d \to \mathcal{Z}$ 是等价。

至此，命题 3.7 的证明完成，因此定理 3.2 的证明也随之完成。

3.6 技术引理的证明

在本节中，我们通过证明引理3.4、3.9和3.11，完成定理2.17的证明。

3.6.1 引理3.4 的证明

引理*3.4*的证明。设 W 是一个单纯集合。根据切片 ∞-范畴的定义，我们有一个自然双射

$$\mathrm{Hom}(W, \mathcal{C}_{/p}) = \mathrm{Hom}_{K_{/}}(W \star K, \mathcal{C}),$$

其中，指标 $K_{/}$ 表示那些限制到 p 上的态射 $W \star K \to \mathcal{C}$ 所成的子集，限制范围为 K。另一方面，我们有一个自然的双射

$$\mathrm{Hom}(W, \mathcal{C}^{K^{\triangleleft}} \times_{\mathcal{C}^K} \{p\}) = \mathrm{Hom}_{K_{/}}(\overline{W}, \mathcal{C}),$$

其中我们使用单纯集合

$$\overline{W} = (W \times K^{\triangleleft}) \underset{W \times K}{\amalg} K.$$

现在我们构造一个范畴等价 $\varphi_W \colon W \to W \star K$，它对 W是自然的。该等价由推出 W的泛性质得到，由典范包含 $K \to W \star K$和某个态射 $W \times K^{\triangleleft} \to W \star K$所诱导。为了描述后者，回顾一下，从单纯集合 X到 $W \star K$的映射可以用三元组态射 $(X \to \Delta^1,\ X_0 \to W,\ X_1 \to K)$来表示，其中$X_i = \{i\} \times_{\Delta^1} X$ 是 i处的纤维。利用这一描述，态射 $W \times K^{\triangleleft} \to W \star K$对应于三元组

$$(\mathrm{can} \circ \mathrm{proj} \colon W \times K^{\triangleleft} \to K^{\triangleleft} \to \Delta^1, \quad W \times \Delta^0 \cong W, \quad \mathrm{proj} \colon W \times K \to K).$$

现在我们证明 φ_W 是一个范畴等价。论证依赖于这样一个事实：比较两种连接构造的典范态射 $c_{A,\,B} \colon A \diamond B \to A \star B$，对所有单纯集合 A，B [Lur22，定理 01HV]，都是范畴等价。注意到 W 适合交换图表

$$\begin{array}{ccccc} W \times K & \hookrightarrow & W \times (\Delta^0 \diamond K) & \xrightarrow{\mathrm{id}_W \times c_{\Delta^0, K}} & W \times K^{\triangleleft} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{proj}} & & \downarrow & & \downarrow \\ K & \longrightarrow & W \diamond K & \xrightarrow{\overline{c}_{W,K}} & \overline{W} \end{array}$$

其中所有三个方块都是余笛卡尔的。由于上方的水平映射 $W \times K \to W \times (\Delta^0 \diamond K)$ 和 $W \times K \to W \times K^{\triangleleft}$ 是单态射，左侧方块和外部方块都是范畴论推出方块；因此，右侧方块也必然如此。由于右上方的态射 $\mathrm{id}_W \times c_{\Delta^0,\,K}$ 是范畴等价，所以 $c_{W,\,K}$ 也是范畴等价。现在观察到比较等价 $c_{W,\,K} \colon W \diamond K \to W \star K$ 可分解为

$$W \diamond K \xrightarrow{\overline{c}_{W,K}} \overline{W} \xrightarrow{\varphi_W} W \star K,$$

由此我们得出，φ_W 是范畴等价。

对于变化的 W，态射 φ_W 诱导出一个 ∞-范畴函子 $\varphi \colon \mathcal{C}_{/p} \to \mathcal{C}^{K^{\triangleleft}} \times_{\mathcal{C}^K} \{p\}$。为了证明 φ 是等价，我们将证明对于每个单纯集合 W，诱导的态射

$$\varphi_* \colon \pi_0 \left(\mathrm{Fun}(W, \mathcal{C}_{/p})^{\simeq}\right) \longrightarrow \pi_0 \left(\mathrm{Fun}(W, \mathcal{C}^{K^{\triangleleft}} \times_{\mathcal{C}^K} \{p\})^{\simeq}\right) \tag{36}$$

是一个双射。根据 [Lur22，Tag01KV], 我们有一个典范双射

$$\pi_0 \left(\mathrm{Fun}(W, \mathcal{C}_{/p})^{\simeq}\right) \cong \pi_0 \left(\mathrm{Fun}_{K_{/}}(W \star K, \mathcal{C})^{\simeq}\right).$$

我们声称，对于 φ_*的目标也有一个类似的双射，即：**断言**。存在一个典范双射

$$\pi_0 \left(\mathrm{Fun}\left(W, \mathcal{C}^{K^{\triangleleft}} \times_{\mathcal{C}^K} \{p\}\right)^{\simeq}\right) \cong \pi_0 \left(\mathrm{Fun}_{K_{/}}(\overline{W}, \mathcal{C})^{\simeq}\right). \tag{37}$$

假设这一断言成立，我们看到态射 φ_* 从 (36) 在前两个双射下对应于映射

$$\varphi_W^* \colon \pi_0 \left(\mathrm{Fun}_{K_{/}}(W \star K, \mathcal{C})^{\simeq}\right) \longrightarrow \pi_0 \left(\mathrm{Fun}_{K_{/}}(\overline{W}, \mathcal{C})^{\simeq}\right),$$

由 φ_W 诱导。根据假设， φ_W 是一个与限制到 K 相容的范畴等价；因此，对所有 W， φ_W^* 都是双射，正如所需。

为完成证明，我们现在证明断言（37）。设，为两个函子 $\{\}$，并令 $\alpha_0\ \alpha_1$ 表示在双射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{K^{\triangleleft}}\times_{\mathcal{C}^K}\{p\}}(W, \mathcal{C}^{K^{\triangleleft}}\times_{\mathcal{C}^K}\{p\}) \cong \mathrm{Hom}^{K/}(W, \mathcal{C})$ 下所对应的 $\mathrm{Fun}^{K/}(\ ,\ )$ 中的对象。我们希望证明， α_0 和 α_1 等价，当且仅当 α_0 和 α_1 等价。为此，我们将使用函子范畴中等价的刻画。考虑 W 的一个范畴映射圆柱，即将 $(\mathrm{id}_W, \mathrm{id}_W)$ 分解为如下形式

$$W \amalg W \xrightarrow{(s_0,s_1)} RW \xrightarrow[\sim]{p} W \tag{38}$$

其中 p 是范畴等价，且 $(s_0、\ s_1)$ 是单态射。根据 [Lur22 的 推论 01KD], ，我们知道，对象 α_0 和 α_1 等价，当且仅当满足以下条件：

(1) 存在 α： $RW \to \mathcal{C}^{K^{\triangleleft}}\times_{\mathcal{C}^K}\{p\}$ 使得 $\alpha \circ s_0 = f_0$ 且 $\alpha \circ s_1 = f_1$。

根据函子 $X \mapsto X$ 的定义，可以观察到，后一个条件等价于以下条件：

(2) 存在某个 α'： $RW \to \overline{\mathcal{C}}$，满足 $\alpha' \circ s_0 = f_0$ 且 $\alpha' \circ s_1 = f_1$。

Usin再次由 [Lur22，推论 01KD], 可知，最后这个条件成立当且仅当 e obje态射 f_0 和 f_1 等价，前提是分解

$$\overline{W} \amalg_K \overline{W} \xrightarrow{(\bar{s}_0,\bar{s}_1)} \overline{RW} \xrightarrow{\bar{p}} \overline{W} \tag{39}$$

是相对于 W 的一个范畴映射圆柱 K；这一事实的证明很容易验证。这就证明了断言（37），并完成了引理 3.4的证明。

□

3.6.2 引理的证明3.9

引理 3.9 的证明。为方便记号，令 $\mathcal{D}$ 表示 (34) 的左端。考虑图表 $X \in \mathcal{D}$。对于每个顶点 $j \in J$，我们可以将对象 $X(j)$ 写成 $\oplus_i X(j)_i$ 的形式，由此得到的图表 X_i 位于 q_i之上。于是，对于 J中的每个 1-单纯形 f: $j_0 \to j_1$ ，利用 ∞-幺半群的定义，我们看到空间 $\mathrm{Map}_{\mathcal{O}}^{q(f)}(X(j_0)\ X(j_1))$ 可典范地分解为$\prod_i \mathrm{Map}^{q_i}(f) \wr (X(j_0)_i, X(j_1)_i)$。因此，在等价意义下，我们可以将态射 $X(f)$ 写成不交并 $\oplus_i X(f)_i$ ，其中每个分量都位于 $q_i(f)$之上。

现在考虑一般情形。令 σ 为 J 的一个维数为 n 的单纯形，并令 α: $\mathrm{Sp}^n \hookrightarrow \Delta^n$ 表示脊包含。由于 Sp^n 是 1-骨架的，证明前一部分给出了参数化图表空间的一个分解：这些图表 $\mathrm{Sp}^n \to \mathcal{O}^{\otimes}$ 提升 $q(\sigma \circ \alpha)$，分解为一个乘积

$$\prod_{i=1}^{n} (\mathcal{O}^{\otimes})^{\mathrm{Sp}^n} \times_{\mathbb{F}_*^{\mathrm{Sp}^n}} \{q_i(\sigma \circ \alpha)\} \xrightarrow{\simeq} (\mathcal{O}^{\otimes})^{\mathrm{Sp}^n} \times_{\mathbb{F}_*^{\mathrm{Sp}^n}} \{q(\sigma \circ \alpha)\}, \tag{40}$$

由不交并给出的等价。现在，由于 α 是拟同构，我们得到图表空间之间的典范等价$(\mathcal{O}^{\otimes})^{\Delta^n} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}^{\otimes})^{\mathrm{Sp}^n}$，由此我们可以将（40）延拓为一个等价

$$\prod_{i=1}^{n} (\mathcal{O}^{\otimes})^{\Delta^n} \times_{\mathbb{F}_*^{\Delta^n}} \{q_i(\sigma)\} \xrightarrow{\simeq} (\mathcal{O}^{\otimes})^{\Delta^n} \times_{\mathbb{F}_*^{\Delta^n}} \{q(\sigma)\}. \tag{41}$$

断言 3.12。 对 I 和 J 的每个单形 σ 应用前述等价，我们得到两个分解

$$\prod_{i=1}^{n} (\mathcal{O}^{\otimes})^{I} \times_{\mathbb{F}_*^I} \{q_i|_I\} \simeq (\mathcal{O}^{\otimes})^{I} \times_{\mathbb{F}_*^I} \{q|_I\}, \qquad \prod_{i=1}^{n} (\mathcal{O}^{\otimes})^{J} \times_{\mathbb{F}_*^J} \{q_i\} \simeq (\mathcal{O}^{\otimes})^{J} \times_{\mathbb{F}_*^J} \{q\}. \tag{42}$$

断言的证明。我们证明 J 的情形， I 的情形完全类似。考虑由 J 的单形构成的范畴 $\Delta \downarrow J$，并令 ι 表示由所有非退化单形构成的全子范畴 $(\Delta \downarrow J)_{\mathrm{nd}} \subset \Delta \downarrow J$ 的包含。将 $\Delta \downarrow J$ 上的单纯预层 F 和 F_i 分别记为 $\mathrm{F}(\sigma) = (\mathcal{O}^{\otimes})^{\Delta^n} \times_{\mathbb{F}_*^{\Delta^n}} \{q(\sigma)\}$ 和 $\mathrm{F}_i(\sigma) = (\mathcal{O}^{\otimes})^{\Delta^n} \times_{\mathbb{F}_*^{\Delta^n}} \{q_i(\sigma)\}$，自然等价 (41) 给出一个自然变换 $\gamma\colon \prod_i \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{F}$，它是逐层的范畴等价。我们的目标是证明，等价 (42) 是通过对 $(\Delta \downarrow J)_{\mathrm{nd}}$ 取余极限从 $\iota^*\gamma\colon \iota^* \prod_i \mathrm{F}_i \Rightarrow \iota^*\mathrm{F}$ 得到的。

首先，我们证明 $\iota^* \prod_i \mathcal{F}_i$ 和 $\iota^*\mathcal{F}$ 是等纤维图表，其意义见 [Lur22，Tag0349]。我们首先证明遗忘函子$\mathcal{U}\colon (\Delta \downarrow J)_{\mathrm{nd}} \to \mathsf{sSet}$ 将 $\Delta^n \to J$映射到 Δ^n 是投射余纤维的（即，在图表范畴$\mathrm{Fun}((\Delta \downarrow J)_{\mathrm{nd}},\mathsf{sSet})$上的投射全局模型结构中是余纤维的）。注意，每个单纯层级$\mathcal{U}_k$ 的$\mathcal{U}$ 都分解为余积

$$\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_k^{\mathrm{nd}} \coprod \mathcal{U}_k^{\mathrm{deg}}$$

分别由非退化单形和退化单形构成的子函子的余积。这两个子函子都可表对象的余积，因此二者都是投射余纤维的。根据 [Dug01，推论 9。4], 我们推得$\mathcal{U}$ 是投射余纤维的。因此，单纯预层 $\mathrm{Hom}(\mathcal{U}\ \mathcal{O}^{\otimes})$和$\mathrm{Hom}(\mathcal{U}\ \mathbb{F}_*)$ 在$(\Delta \downarrow J)_{\mathrm{nd}}$ 上是等纤维的。取拉回可知，单纯预层$\mathcal{F}$ 也同样是等纤维的。同样的论证表明 $\prod_i \mathcal{F}_i$ 是等纤维的。

由于 $\iota^*\gamma$ 是在等纤维图表之间逐层的范畴等价，诱导映射$\lim(\iota^*\gamma)\colon \lim \prod_i \iota^*\mathcal{F}_i \to \lim \iota^*\mathcal{F}$ 在极限上是范畴等价。剩下的唯一一步是将 $\lim \prod_i \iota^*\mathcal{F}_i$ (分别将 $\lim \iota^*\mathcal{F}$) 与等价式（42）右边的等式（分别为左边的等式）对应起来。为此，注意到由于 J 按假设是加括号的，包含映射 ι 存在左伴随，因此它是共终的。这意味着 $J \cong \mathrm{colim}\mathcal{U} \cong \mathrm{colim}\, \iota^*\mathcal{U}$，由此容易得到结论。

□

引理 3.9的证明现在由断言 3.12推出。 □

3.6.3 引理3.11的证明

引理 *3.11*的证明。 回顾一下，态射 ι 是包含映射

$$\iota\colon \widetilde{K} = \left(\Delta^{013467} \underset{\Delta^{0347}}{\cup} \Delta^{023457}\right) \underset{\Delta^{013} \underset{\Delta^{03}}{\cup} \Delta^{023}}{\cup} \Delta^{0123} \longrightarrow \Delta^7$$

使用图表（31）中引入的编号。首先，注意到 ι 经过 $\hat{}K = \widetilde{K} \underset{\Lambda_7^{567}}{\cup} \Delta^{567}$

~ $\hat{}$ 和右拟无退化包含 $K \to K$ 满足命题中的条件。因此，只需证明诱导映射 $\hat{}$ $K \to \Delta^7$ 是内无害的。注意，脊包含 $\mathrm{Sp}^7 \to \Delta^7$ 是内无害的，并且经过 $\hat{}K$。根据内无害态射的右消去性质，只需证明 $\mathrm{Sp}^7 \to \hat{}K$ 是内无害的。我们将后一个包含分解为若干步骤；首先，容易看出这两个态射

$$\mathrm{Sp}^7 \to \mathrm{Sp}^7 \underset{\mathrm{Sp}^{0123}}{\cup} \Delta^{0123} \to \left(\mathrm{Sp}^7 \underset{\mathrm{Sp}^{0123}}{\cup} \Delta^{0123}\right) \underset{\mathrm{Sp}^{4567}}{\cup} \Lambda_7^{4567} =: S$$

是内无害的。由于包含 $\mathrm{Sp}^7 \to \Delta^7$ 经过复合映射 $\mathrm{Sp}^7 \to S$，剩下的步骤就是向 S 添加单形 Δ^{013467} 和 Δ^{023457}。可以验证， S 与 Δ^{013467} 的交集为

$$S \cap \Delta^{013467} = \Delta^{013} \underset{\Delta^{\{3\}}}{\cup} \Delta^{34} \underset{\Delta^{\{4\}}}{\cup} \Delta^{467}$$

从而内随附包含 $\mathrm{Sp}^{013467} \to \Delta^7$ 分解为 $S \cap \Delta^{013467}$ 上的内无害映射。因此，根据右消去律，我们推出 $S \cap \Delta^{013467} \to \Delta^{013467}$ 是内无害的。由于将 S 包含到单纯集合 $\hat{}S = S \underset{S \cap \Delta^{013467}}{\cup} \Delta^{013467}$ 中的包含是包含$S \cap \Delta^{013467} \to \Delta^{013467}$的推出，因此它也是内无害的。最后，我们将证明同样的结论也适用于

包含 $\hat{}S \to \hat{}S \cup \Delta^{023567} = \hat{}K$。我们像之前一样进行：$\hat{}S$ 与 Δ^{023457} 的交集为

$$\hat{S} \cap \Delta^{023457} = \Delta^{023} \underset{\Delta^{\{3\}}}{\cup} \Delta^{34} \underset{\Delta^{\{4\}}}{\cup} \Delta^{457}$$

且包含 $\mathrm{Sp}^{023457} \to \Delta^{023457}$ 经由它分解。因此，要证明 $\hat{}S \to \hat{}K$ 是内无害的，只需证明 $\mathrm{Sp}^{023457} \to \hat{}S \cap \Delta^{023457}$ 具有这一性质，这显然成立。 □

4 与 Lurie 扩张空间的比较

现在我们转向比较 Mann–Robalo 与 Lurie 的扩张空间模型这一问题，并将在定理 4.1 中解决。

4.1 结果陈述

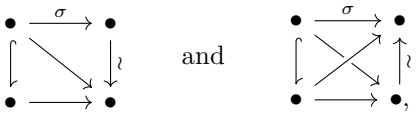
设 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 是一个幺元的 ∞-幺半群，并固定一个活跃态射 σ，将其视为幺半包络 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 的扭曲箭头 ∞-范畴 $\mathcal{T} := \mathrm{Tw}(\mathrm{Env}(\mathcal{O}))^{\otimes}$ 中的一个对象。

本节的目标是证明膜纤维化 $\mathcal{BO}_\sigma$ 的纤维 $\mathcal{BO} \to \mathcal{T}$（定义 2.13 中引入）在运算 σ 处与 ∞-范畴的扩张 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ σ一致，从而证明 [MR18] [6] 中相应的论断。我们的方法是构造 $\mathcal{BO}_\sigma$ 与 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 之间一个明确的范畴等价之字形。

定理 4.1 (定理B)。 设 σ 是幺元的 ∞-幺半群 $\mathcal{O}^{\otimes}$中的一个活跃态射。那么，膜纤维化的纤维 $\mathcal{BO}_\sigma$ 与扩张的 ∞-范畴 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 在 Cat_∞中等价。

推论 4.2。 设 σ 是幺元的 ∞-幺半群 $\mathcal{O}^{\otimes}$中的一个活跃态射，其底层 ∞-范畴是一个 ∞-群胚。那么 $\mathcal{BO}_\sigma$ 与 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 是等价的 ***Kan*** 复形。

单纯集合 $\mathbf{Ext}(\sigma)$ 与 $\mathcal{BO}_\sigma$ 之间的差异可以从它们的 0-单形集合中看出。这两个集合分别参数化 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 中的图表，其形式为

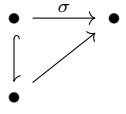


(43)

t也就是说，分别具有 $\Delta^1 \times \Delta^1$ 和 Δ^3的形状，并满足以下条件：

- 顶端的水平箭头映射到 σ;
- 左侧的垂直箭头映射到一个原子映射;
- 右侧的竖直箭头在 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 中被映为一个等价。

非正式地说，由于右侧的竖直箭头被标记为等价，43中的两个图表编码了相同的数据，即如下形式的三角形所对应的数据



(44)

Our 证明遵循这一思路，并依赖于寻找先前图表的适当推广 m
对于
h $\mathbf{Ext}(\sigma)$ 和 $\mathcal{BO}_\sigma$ 中的高维单形。

[6]更准确地说，为了使断言 $\mathcal{BO}_\sigma \simeq \mathrm{Ext}(\sigma)$ 成立，需要采用定义 2.6 作为 ∞-范畴的定义，即扩张的范畴，而不采用 [Lur17，定义 3.3.1.4。] 中使用的 [MR18]。这一细微改动在注记 2.8中作了论证。

4.2 定义在 $\mathcal{BO}_\sigma$ 与$\mathrm{Ext}(\sigma)$之间插值的空间

我们首先讨论由 Ext(σ) 和 $\mathcal{BO}_\sigma$ 的一般单形表示的图表形状。设K 是一个单纯集合。

为帮助读者理解繁琐的定义和记号，我们建议查看图 4.2.3 和 4.2.3，其中描绘了本节引入的不同图表，分别对应于 $K = \Delta^0$ 和 $K = \Delta^1$的情形。

4.2.1 由$\mathrm{Ext}(\sigma)$索引的图表

令 $F_0(K)$ 表示单纯集合 $K^\triangleleft \times \Delta^1$，并考虑典范投影 $F_0(K) \to \Delta^1$。纤维 0 中的顶点记作 x，而纤维 1 中的顶点记作 x，其中 $x \in K^\triangleleft$。展开定义 2.6 可知，态射 $K \to \mathrm{Ext}(\sigma)$ 与如下图表 α: $F_0(K) \to \mathcal{O}^\otimes$ 相对应；这些图表将 $K \times \{1\} \subset K^\triangleleft \times \Delta^1$ 中的所有态射映为等价，并且还满足以下条件。

条件 $(\star)_{0,\sigma}$：对于每个顶点 $k \in K$，

- 态射 $\triangleleft \to k$ in $F_0(K)$ 被映射为原子映射；
- 态射 $k \to k$ in $F_0(\bar{K})$ 被映射为活跃映射；
- α 到$\{\triangleleft\} \times \Delta^1$ 的限制为 σ；并且
- 对于 K 中的每个态射 $k_0 \to k_1$， $F_0(K)$ 中对应的态射均与扩张相容。

令 $F_0^+(K)$ 表示由 $F_0(K)$ 进一步标记 $K^\triangleleft \times \{1\}$ 的 1-单形而得到的标记单纯集合，则 Hom(K, Ext(σ)) 与 $\mathrm{Hom}^\sigma(F_0^+(K), \mathcal{O}^\otimes)$ 的一个子集之间存在一个双射；该子集包含 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{sSet}^+}(F_0^+(K), \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$ 中满足条件 $(\star)_{0,\sigma}$ 的那些图表。

4.2.2 由 $\mathcal{BO}_\sigma$索引的图表

注意，从 K 到 $\mathcal{BO}_\sigma$ 的图表集合是

$$\mathrm{Hom}(K, \mathcal{T}^{\Delta^1} \times_{\mathcal{T}} \{\sigma\}) = \mathrm{Hom}(K \times \Delta^1, \mathcal{T}) \underset{\mathrm{Hom}(K,\mathcal{T})}{\times} \{\sigma \circ \mathrm{proj}_K\}.$$

利用注记 2.14，我们便可将 $\mathrm{Hom}(K, \mathcal{BO}_\sigma)$ 识别为 $\mathrm{Hom}(G(K), \mathcal{O}^\otimes)$的一个特定子集，其中 $G(K)$ 表示推出

$$G(K) := s_*(K \times \Delta^1) \underset{s_*(K \times \{0\})}{\amalg} s_*\{0\}.$$

令 $G^+(K)$ 表示由 $G(K)^\flat$ 进一步标记形如 $(k,1) \to (k,0)$ 的箭头所得到的标记单纯集合，其中对所有顶点 k 均有 $k \in K$。展开 $\mathcal{BO}$ 的定义，我们将把 Hom($K, \mathcal{BO}_\sigma$) 识别为 $\mathrm{Hom}^\sigma(G^+(K), \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$，它是 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{sSet}^+}(G^+(K), \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$ 的子集，由满足以下条件的图表组成：

条件 $(\star)_{G,\sigma}$**:**

- 箭头 $s_*\{0\} \cong \Delta^1$ 在 $G^+(K)$ 中被映射到 σ；
- 对于每个 $k \in K$，由顶点 $(k,0)(k,1)(k,1)(k,0)$ 给出的 3-单形 $s_*(\{k\} \times \Delta^1)$ 被映射到 $\mathcal{BO}$ 的一个对象；
- 对于每个1-单纯形 f: $k \to k'$ 中 K，相应的图表 $s_*(f \times \Delta^1)$ 被映射为一个 $\mathcal{BO}$的态射；更明确地说，这一条件意味着箭头 $f \times \{1\}\colon (k, 1) \to (k', 1)$ 在 $G^+(K)$ 中被映射为 $\mathcal{O}^\otimes$ 中的一个映射，且该映射与扩张相容（定义2.13的意义下）。

4.2.3 中间步骤的定义

我们将通过中间的 ∞-范畴 $\mathcal{C}_i$，建立 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 与 $\mathcal{BO}_\sigma$ 之间的联系，其中 $i \in \{1, 2, 3\}$，其构造过程如下。对于一个 K 单纯集合，集合 $\mathrm{Hom}(K, \mathcal{C}_i)$ 可识别为 $\mathrm{Hom}^\sigma(F_i^+(K), \mathcal{O}^\otimes, \natural)$ 中由满足某个条件的所有图表$F_i^+(K) \to \mathcal{O}^\otimes, \natural$ 组成的子集，该条件记作 $(\star)_{i, \sigma}$。这里，标记单纯集合$F_i^+(K)$ 可视为在 $F_0^+(K)$ 与 $G^+(K)$ 之间进行插值的形状。这些标记单纯集合将组成如下形式的之字形

$$F_0^+(K) \xrightarrow{i_0(K)} F_1^+(K) \xleftarrow{i_1(K)} F_2^+(K) \xrightarrow{i_2(K)} F_3^+(K) \xleftarrow{p(K)} G^+(K), \tag{45}$$

关于 K 自然，从而得到一串 ∞-范畴函子的之字形

$$\mathrm{Ext}(\sigma) \xleftarrow{i_0^*} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{i_1^*} \mathcal{C}_2 \xleftarrow{i_2^*} \mathcal{C}_3 \xrightarrow{p^*} \mathcal{BO}_\sigma. \tag{46}$$

记号 4.3. 除非可能引起歧义，我们将用 i_n 代替 $i_n(K)$。

现在我们描述不同的标记单纯集合 $F_i^+(K)$、它们相关的条件 $(\star)_{i,\sigma}$以及态射 i_0、i_1、i_2 和 p。

(F_1^+) 标记单纯集合 $F_1^+(K)$ 是由单纯集合

$$F_1(K) = \operatorname*{colim}_{\Delta^m \to K^\triangleleft} (\Delta^m * \Delta^m),$$

通过标记 Δ^m 第二份中的所有边得到的。

(i_0) 利用 $F_0(K)$ 可改写为 $\mathrm{colim}_{\Delta^m \to K^\triangleleft}(\Delta^m \times \Delta^1)$ 这一点，典范包含 $\Delta^m \times \Delta^1 \to \Delta^m * \Delta^m$ 诱导出一个标记单纯集合的映射 $i_0 \colon F_0^+(K) \to F_0^+(K)$。与 $F_0(K)$ 的情形类似，我们利用显然的投影 $F_1(K) \to \Delta^1$ 将 $F_1(K)$ 的顶点标记为 x 或 x ，其中 $x \in K^\triangleleft$。

(F_2^+) 标记单纯集合 $F_2^+(K)$ 定义为 $F_2(K)^\flat$, 其中

$$F_2(K) = K^{\triangleleft \triangleright}.$$

(i_1) 利用同构 $F_2(K) \cong \mathrm{colim}_{\Delta^m \to K^\triangleleft}(\Delta^m)^\triangleright$，我们将包含 $i_1 \colon F_2^+(K) \to F_1^+(K)$ 定义为由态射 $i_{1,m} \colon (\Delta^m)^\triangleright \to F_1^+(K)$ 诱导的映射，这些态射将 Δ^m 送到它在 $\Delta^m * \Delta^m$ 中的第一份，并将 $\triangleright$ 送到 $\triangleleft$。

(F_3^+) 标记单纯集合 $F_3^+(K)$ 是由单纯集合

$$F_3(K) = s_*(K^\triangleleft) \cong \operatorname*{colim}_{\Delta^m \to K^\triangleleft} (\Delta^m * \Delta^{m,\mathrm{op}})$$

通过标记第二份 $\Delta^{m,\mathrm{op}}$ 的所有边得到的。

(i_2) 态射 $i_2 \colon F_2^+(K) \to F_3^+(K)$ 由包含映射 $(\Delta^m)^\triangleright \to F_3^+(K)$ 诱导，这些映射将$\triangleright$ 送到 $\triangleleft \in F_3^+(K)$，并将 $\Delta^{\overline{m}}$ 送到 $\Delta^m * \Delta^{m,\mathrm{op}}$ 中自身的第一份。

(p) 现在我们定义态射 $p \colon G^+(K) \to F_3^+(K)$。我们将用到典范同构

$$s_*(K \times \Delta^1) \cong \operatorname*{colim}_{\Delta^n \to K} s_*(\Delta^n \times \Delta^1).$$

给定 K 的一个 n-单纯形 $\tau_n \colon \Delta^n \to K$，考虑投影 $\tilde{p}_n \colon \Delta^n \times \Delta^1 \to (\Delta^n)^\triangleleft$，它将顶点 $(k, 1)$ 送到 k，并将所有形如 $(i,0)$ 的顶点送到 $\triangleleft$。复合$\tau_n \circ \tilde{p}_n \colon \Delta^n \times \Delta^1 \to K^\triangleleft$ 得到一个映射

$$s_*\tilde{p}_n \colon s_*(\Delta^n \times \Delta^1) \to s_*\left((\Delta^n)^\triangleleft\right) \subseteq \operatorname*{colim}_{\Delta^m \to K^\triangleleft} s_*(\Delta^m) = F_3(K).$$

对于变化的 n-单形 τ_n，映射 $s_*\tilde{p}_n$ 组织成一个映射 $\tilde{p} \colon s_*(K \times \Delta^1) \to F_3^+(K)$，其在 $s_*(K \times \{0\})$ 上的限制经由 $s_*\{0\}$ 分解为包含 $s_*\{0\} \cong \Delta^{\triangleleft\triangleleft} \subseteq F_3^+(K)$，从而诱导出我们的映射 $p \colon G(K) \to F_3(K)$。

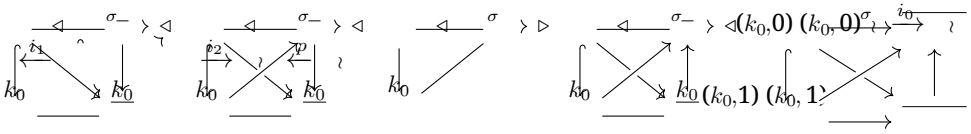


图 2：之字形图（45），适用于 $K=\{k_0\}\cong\Delta^0$

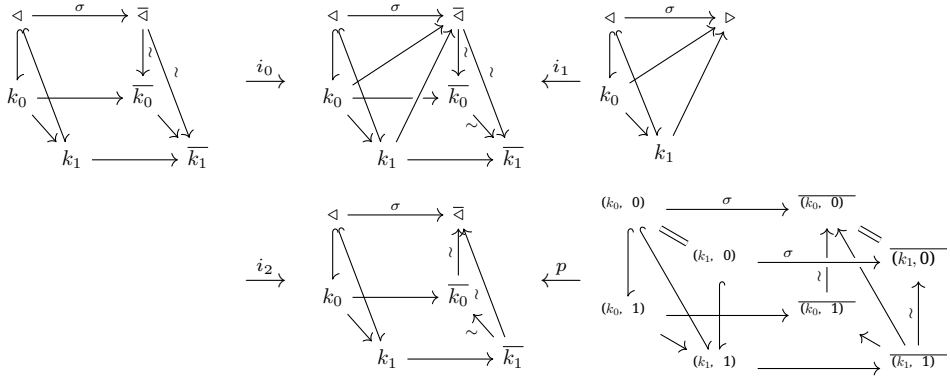


图 3：之字形图（45）对于 $K=\{k_0\to k_1\}\cong\Delta^1$

$(\star)_{n,\ \sigma}$ 条件 $(\star)_{n,\ \sigma}$ 对于 $n\in\{1,\ 2、3\}$ 作相应修改后可得 *mutatis mutandis* 由条件给出 $(\star)_{0,\ \sigma}$。

引理 4.4。令 $n\in\{1,2,3\}$，并令 K 为一个单纯集合。考虑相应的态射 $i_n\colon F_a^+(K)\to F_b^+(K)$，其中指标 $\star_{a\,\sigma}$ 和 $\star_{b\,\sigma}$ 由 i_n 和 K 和 α 确定。然后函子 $\mathcal{O}^{\otimes,\natural}$ 满足条件 $(\star)_{n,\ \sigma}$ 当且仅当 $F_a^+(K)$ 满足条件 $(\star)_{0,\ \sigma}$。

证明。逐一检查各个条件即可得出该引理。 □

现在我们证明，将 $(\mathcal{C}_n)_\bullet$ 定义为 $\mathrm{Hom}^\sigma(F_n^+(\Delta^\bullet),\mathcal{O}^{\otimes,\natural})$ 可得一个 ∞-范畴。

引理 4.5。对于 $n\in\{1,2,3\}$，单纯集合 $\mathcal{C}_n$ 是一个 ∞-范畴。

证明。我们首先对单纯集合 $\mathcal{C}_1$ 证明该结论。设 $k,\ m\in\mathbb{N}$ 满足 $0<k<m$ 且 $f\in\mathrm{Hom}^\sigma(F_1^+(\Lambda_k^m),\mathcal{O}^{\otimes,\natural})$。我们将证明，在下面的图表中存在一个提升

$$\begin{array}{ccc} F_1^+(\Lambda_k^m) & \xrightarrow{f} & \mathcal{O}^{\otimes,\natural} \\ \downarrow & \nearrow & \\ F_1^+(\Delta^m) & & \end{array}$$

方法是将垂直映射分解为一列内无害态射。首先，令 X_0 表示单纯集合 $\Delta^{\triangleleft 0\dots n}\cup F_1^+(\Lambda_k^m)\cup\Delta^{\triangleleft 0\dots m}$。显然，包含 $F_1^+(\Lambda_k^m)\to X_0$ 是内无害的。由于 $\emptyset\to\overline{\Delta}^m$ 既是右拟同构，也是左平凡上同伦，我们可以选取一个递增滤过

$$\emptyset=\Lambda_0\subset\Lambda_1\subset\cdots\subset\Lambda_r=\Delta^m \tag{47}$$

Δ^m 的子单纯集合，使得每个包含映射 $\Lambda_j\to\Lambda_{j+1}$ 都是角包含映射 $\Lambda_{k_j}^{m_j}\to\Delta^{m_j}$ 的推出，而该角包含映射要么是内无害的，要么满足 $m_j\leqslant 1$。注意，在后一种情况下，该角包含映射是左或右平凡上同伦的。引入单纯集合

$$\begin{aligned} X_j &= X_0\cup(\Lambda_j^\triangleleft * \overline{\Lambda_j^\triangleleft}) \\ Y_j &= X_0\cup(\Lambda_{j+1}^\triangleleft * \overline{\Lambda_j^\triangleleft})\cup(\Lambda_j^\triangleleft * \overline{\Lambda_{j+1}^\triangleleft}), \end{aligned}$$

使得包含映射 $X_0 \to F_1^+(\Delta^m)$ 可以写成如下包含序列

$$X_0 \subseteq Y_0 \subseteq X_1 \subseteq Y_1 \subseteq \ldots \subseteq X_{r-1} \subseteq Y_{r-1} \subseteq X_r = F_1^+(\Delta^m).$$

每个包含 $Y_j \to X_{j+1}$ 都是态射 $(\Lambda_j^\triangleleft \subseteq \Lambda_{j+1}^\triangleleft) \boxplus (\Lambda_j^\triangleleft \subseteq \Lambda_{j+1}^\triangleleft)$ 的推出；由引理 A.9 可知，它是内无害的。对于 $p \in [m]$，令 $\Lambda_j(p)$ 表示 Λ_j 与 Δ^m 中与顶点 p相对的面的交集。对于满足 $0 \leqslant j < r$ 的每个 j，令 p_j 表示包含 $\Lambda_{j+1} \setminus \Lambda_j$ 的 Δ^m 的唯一面的指标。现在考虑包含 $X_j \to Y_j$。根据滤过（47）的构造，该包含由映射的推出得到

$$\begin{array}{c}\left(\Lambda_j^\triangleleft * \overline{\Lambda_j^\triangleleft(p_j)} \cup \Lambda_j^\triangleleft(p_j) * \overline{\Lambda_{j+1}^\triangleleft(p_j)}\right) \cup \left(\Lambda_j^\triangleleft(p_j) * \overline{\Lambda_j^\triangleleft} \cup \Lambda_{j+1}^\triangleleft(p_j) * \overline{\Lambda_j^\triangleleft(p_j)}\right) \\ \downarrow \\ \left(\Lambda_j^\triangleleft * \overline{\Lambda_{j+1}^\triangleleft(p_j)}\right) \cup \left(\Lambda_{j+1}^\triangleleft(p_j) * \overline{\Lambda_j^\triangleleft}\right).\end{array}$$

最后这个映射是映射 $(\Lambda_j^\triangleleft(p_j) \subseteq \Lambda_j^\triangleleft) \boxplus (\Lambda_j^\triangleleft(p_j) \subseteq \Lambda_{j+1}^\triangleleft(p_j))$ 与其对称映射的推出；因此，根据引理 A.9，它是一个内无害映射，正如所需。因此，f 可延拓为映射 $\tilde{f}\colon F_1^+(\Delta^m) \to \mathcal{O}^{\otimes,\natural}$。$\tilde{f}$属于子集 $\mathrm{Hom}^\sigma(F_1^+(\Delta^m) \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$这一事实，直接由 f 的类似假设得出；至此便完成了 $\mathcal{C}_1$ 是一个 ∞-范畴的证明。

对于 $\mathcal{C}_3$，也可以给出非常类似的证明，只需反转 Δ^m 中边的方向；因此我们省略细节。

现在转向 $\mathcal{C}_2$ 的情形。与前面一样，设 k，$m \in \mathbb{N}$ 且满足 $0 < k < m$。只需证明包含 $F_2^+(\Lambda_k^m) \to F_2^+(\Delta^m)$ 是内无害的。只需注意到，这一包含可以描述为依次向 $F_2^+(\Lambda_k^m) = (\Lambda_k^m)^{\triangleleft\triangleright}$ 添加内角 $\Lambda_k^{0\ldots m}$, $\Lambda_k^{\triangleleft 0\ldots m}$, $\Lambda_k^{0\ldots m\triangleright}$ 和 $\Lambda_k^{\triangleleft 0\ldots m\triangleright}$ 的填充子，从而证明该结论。 □

定理的证明4.1

4.3.1 证明策略

我们说明证明函子 i_0^*, i_1^* 和 i_2^*

$$\mathrm{Ext}(\sigma) \xleftarrow{i_0^*} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{i_1^*} \mathcal{C}_2 \xleftarrow{i_2^*} \mathcal{C}_3$$

来自之字形（46）的都是 ∞-范畴的等价。剩下的函子 $p^*\colon \mathcal{C}_3 \to \mathcal{B}\mathcal{O}_\sigma$ 情形将在第4.3.4节。

固定 $n \in \{1, 2, 3\}$，并考虑相应的自然变换 $i_n\colon F_a^+ \to F_b^+$，其中指标 a，$b \in \{0, 1, 2, 3\}$ 由 n 确定。

记号 4.6。令 $\mathcal{J}$ 表示自由同构（即以2 个对象构成的可缩群胚）的神经；它是 Joyal 模型结构的一个区间对象（参见 Cisinski 的著作 [Cis19]以及 [Cam21，附录 A]）。给定一个单纯集合 K，我们引入推出

$$F_{a,b,\mathcal{J}}^+(K) = F_a^+(K \times \mathcal{J}) \underset{F_a^+(K)^{\amalg 2}}{\amalg} F_b^+(K)^{\amalg 2}.$$

注意，$i_n(K)$ 可分解为以下复合

$$F_a^+(K \times \mathcal{J}) \xrightarrow{j_n} F_{a,b,\mathcal{J}}^+(K) \xrightarrow{k_n} F_b^+(K \times \mathcal{J}). \tag{48}$$

以下结果是我们方法的核心。

引理 *4.7*。令 $n \in \{1, 2, 3\}$。假设对于所有单纯集合 K，态射$i_n(K)\colon F_a^+(K) \to F_b^+(K)$ 是标记无穷小，且由分解 *(48)* 得到的诱导态射 $k_n\colon F_{a,b,\mathcal{J}}^+(K) \to F_b^+(K \times \mathcal{J})$ 是单态射，并且在 *0*-单形上为双射。那么诱导映射

$$i_n(K)^*\colon \pi_0 \mathrm{Map}(K, \mathcal{C}_b) \to \pi_0 \mathrm{Map}(K, \mathcal{C}_a)$$

对所有 K 都是双射。

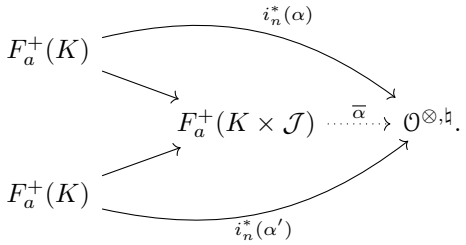
证明。利用标记无害态射相对于下列形式的态射所具有的左提升性质$X^\natural \to *$对于 X 一个 ∞-范畴（引理 A.6），我们得到映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{sSet}^+}(F_b^+(K), \mathcal{O}^{\otimes,\natural}) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{sSet}^+}(F_a^+(K), \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$$

是满射。因此它的商也是满射

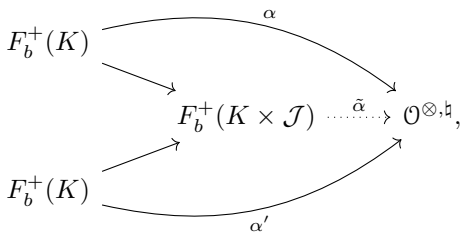
$$i_n(K)^*\colon \pi_0 \operatorname{Map}(K, \mathcal{C}_b) \to \pi_0 \operatorname{Map}(K, \mathcal{C}_a).$$

现在证明 $i_n(K)^*$ 也是单射。设 α，$\alpha'\colon F_b^+(K) \to \mathcal{O}^{\otimes,\natural}$ 满足 $i_n^*(\alpha) \simeq i_n^*(\alpha')$ 在 $\mathbf{Map}(K, \mathcal{C}_n)$ 中成立。利用 K 的标准范畴柱体 $K \amalg K \to K \times \mathcal{J} \to K$，后一条件意味着我们可以填充以下由实线构成的图表



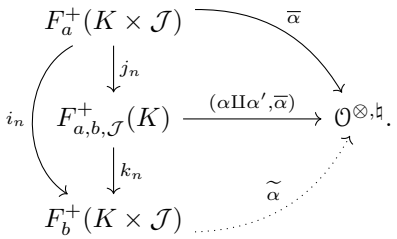
(49)

使得 α 满足条件 $(*)_{a,\sigma}$。要证明 $\alpha \simeq \alpha'$ 在 $\mathbf{Map}(K, \mathcal{C}_b)$ 中成立，我们必须证明对应于 F_b^+ 的图表，即



(50)

可以由一个映射 $\tilde{\alpha}\colon F_b^+(K) \to \mathcal{O}^{\otimes,\natural}$ 填充，并且该映射满足条件 $(*)_{b,\sigma}$。现在注意到 $i_n(K \times \mathbf{J})$ 经由推出 $F_a^+{}_{,b,\mathbf{J}}(K)$ 分解。根据假设，$i_n(K)$ 是标记无害态射，因此 j_n 也是如此。利用标记无害态射的右化简性质（命题 A.7），我们推得以下图表中存在一个提升 $\tilde{\alpha}$



(51)

由引理4.4可知，任何上述提升 $\tilde{\alpha}$ 都会自动满足条件 $(*)_{b,\sigma}$。这表明 α和 α' 作为 $\mathbf{Map}(K, \mathcal{C}_b)$中的点是等价的，正如所需。

□

我们将证明映射 i_0、i_1 和 i_2 是标记无穷小的，并利用上述引理推导出 ∞-范畴 $\mathrm{Ext}(\sigma)$、$\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{C}_3$ 等价。剩下的步骤是处理映射 p。它是标记等价，但不是标记无害态射，因此我们无法使用引理 4.7；所以我们将采用另一种论证，仔细分析 $\mathcal{C}_3$ 和 $\mathcal{BO}_\sigma$中的范畴柱体。

4.3.2 对映射 i_0 的研究

引理 4.8。对于每个单纯集合 K，态射 $k_0(K)$: F_0^+，1，$\mathcal{J}(K) \to F_1^+(K)$ 是一个单态射，并且在0-单形上是双射。

证明。设 $K \in$ 是单纯集合范畴。注意到 $i_0(K)$: $F_0^+(K) \to F_1^+(K)$ 在 0-单形上是一个双射。由于 K 是任意的，映射 $i_0(K \times \mathcal{J})$ 也具有这一性质。此外，映射 $j_0(K)$: $F_0^+(K \times \mathcal{J}) \to F_{0\,1,\ ,\ \mathcal{J}}^{+}(K)$ 也具有这一性质，因为它是 $i_0(K)^{\amalg 2}$ 的余基变换。由三取二性质可知，$k_0(K)$ 也具有这一性质。

下面证明 $k_0(K)$ 是一个单态射。设 t 和 t' 是 $F_{0\,1,\ ,\ \mathcal{J}}^{+}(K)$ 的两个 m-单形，它们在 $k_0(K)$ 下的像相同。我们分三种情况讨论：

(1) 要么 t 和 t' 都能提升为 $F_0^+(K \times \mathcal{J})$ 的单形；要么

(2) 两者都提升到 $F_1^+(K)^{\amalg 2}$，或者

(3) t 提升到 $F_0^+(K \times \mathcal{J})$ 中的一个单纯形，而 t' 提升到 $F_1^+(K)^{\amalg 2}$ 中的一个单纯形。

对于第一种情况，注意到 $j_0(K \times \mathcal{J})$ 定义为一个单态射的推出，因此它是一个单态射，所以 $t = t'$ 正如所需。对于第二种情况，设 t 和 t' 分别是 t 和 t' 在 $F_1^+(K)^{\amalg 2}$ 中的提升，我们很容易看出，$\widetilde{t}$ 和 $\widetilde{t'}$ 要么属于 $F_1^+(K)$ 的两个副本中的同一个，要么它们经过 $(\Delta^{\triangleleft})^{\amalg 2}$ 分解。最后，对于第三种情况，单形 t 和 t' 必须经过 $F_0^+(K)$ 的两个副本之一分解；由于 $F_0^+(K) \to F_1^+(K \times \mathcal{J})$ 是单态射，单形 t 和 t' 必定重合。 □

命题 4.9。对于每个单纯集合 K，映射 i_0： $F_0^+(K) \to F_1^+(K)$ 都是标记无穷小的。

证明。回想一下这些单纯集合上的标记：在 $F_0^+(K) = K^{\triangleleft} \times \Delta^1$ 上，标记边是形如 $\triangleleft \to y$ 的边，其中 $y \in K$；而对于 $\bar{F}_1^+(K) = \operatorname{colim}_{\Delta^m \to K^{\triangleleft}} (\Delta^m * \Delta^m)$，所有边 $x \to y$ 其中 $x \to y$ 属于 $K^{\triangleleft}$ 的边都被标记。态射 i_0 经过标记单纯集合 $F_0^+(K)$，它由 $F_0^+(K)$ 进一步标记边 $(x,\ 1) \to (y,\ 1)$ 得到，其中 $x \to y$ 属于 $K^{\triangleleft}$。所得包含 $F_0^+(K) \to \tilde{F}_0^+(K)$ 显然是标记无穷小的。

令 $\tilde{i}_0$: $\tilde{F}_0^+(K) \to F_1^+(K)$ 表示由 i_0 诱导的映射。我们将证明它也是标记无穷小的。根据 i_0 作为余极限的构造，只需对 $K = \Delta^{m-1}$ 证明该断言；此时态射 $\tilde{i}_0$ 是典范包含 $\Delta^m \times \Delta^1 \to \Delta^m * \Delta^m$，其中非平凡标记出现在 Δ^m 的第二份中。因此，我们只需证明以下组合结果。 □

引理 4.10. 对于每个 $m \in \mathbb{N}$，考虑典范包含 $\tilde{i}_0$： $\Delta^m \times \Delta^1 \to \Delta^m * \Delta^m$，其中两个单纯集合都赋予最小标记，使得 $(\Delta^m)^\sharp \times \{1\}$ 是它们的一个标记单纯子集。那么 i_0 是标记拟同构。

证明。注意，包含 i_0 可分解为经过单纯集合

$$A^m = (\Delta^m \times \Delta^1) \underset{\Delta^{\overline{01}\ldots\overline{m}} \underset{\Delta^{\overline{m}}}{\cup} \Delta^{m\overline{m}}}{\cup} \Delta^{m\overline{01}\ldots\overline{m}}. \tag{52}$$

首先，我们要证明包含 $A^m \to \Delta^m * \Delta^m$ 是标记拟同构。为此，我们考虑包含 s_m: $S_m \to \Delta^m * \Delta^m$，其中 S_m 表示脊 $\mathrm{Sp}^{0\ldots m0\ldots m}$，并赋予最大标记，使得 s_m 成为标记单纯集合的一个态射。由于 s_m 显然是标记拟同构，且可分解为经过 A^m，只需证明包含 $S_m \to A^m$ 是标记拟同构。A^m 的底层单纯集合是由若干个维数为（$m+1$）的 $m+2$ 单形组成的并，记为 $\tau_0, \ldots, \tau_m, \tau$，定义如下：

- 对于 $0 \leqslant k \leqslant m$，单纯形 τ_k 定义为 $\Delta^{01\ldots k\,k(k+1)\ldots m,}$
- 单纯形 τ 是 $\Delta^{m0\,1\ldots\overline{m}}$。

在每种情况下，标记都由 A^m 的标记诱导而来。将 T_k 记作 $S_m \cup \tau \cup \tau_m \cup \cdots \cup \tau_k$，我们得到 A^m 的一个形如以下的滤过

$$S_m \subset S_m \cup \overline{\tau} \subset T_m \subset T_{m-1} \subset \ldots \subset T_0 = A^m. \tag{53}$$

我们将证明，在每一步中，该包含都是标记无害态射。对$S_m \subset S_m \cup \tau$而言，这显然成立。第二个包含 $S_m \cup \tau \subset T_m$ 是通过推出得到的

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Sp}^{0\ldots m\overline{m}})^{\flat} & \longrightarrow & S_m \cup \overline{\tau} \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \tau_m & \longrightarrow & T_m \end{array} \tag{54}$$

因此它是标记无害的，因为左侧的垂直映射也是如此。现在我们证明，对于每个 $0 < k \leqslant m$，包含 $T_k \subset T_{k-1}$ 都是标记无害的。我们引入标记单纯集合 $\tau_k\langle k\rangle$，将其定义为 τ_k中与顶点 k 相对的面，或者更明确地说，定义为 $\Delta^{0\ldots(k-1)k\ldots m}$，并赋予其诱导标记。交集 $\tau'_k = T_k \cap \tau_{k-1}$ 于是可表示为

$$\tau'_k = \tau_k\langle k\rangle \underset{(\Delta^{\overline{k}\ldots\overline{m}})^{\sharp}}{\cup} (\Delta^{\overline{(k-1)}\,\overline{k}\ldots\overline{m}})^{\sharp} \tag{55}$$

并且包含 $T_k \subset T_{k-1}$ 是以下推出

$$\begin{array}{ccc} \tau'_k & \longrightarrow & T_k \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \tau_{k-1} & \longrightarrow & T_{k-1}. \end{array} \tag{56}$$

为了证明 $T_k \to T_{k-1}$ 是标记无害的，只需证明 $\tau'_k \to \tau_{k-1}$ 具有这一性质。观察等式（55），我们注意到，后一个包含具有如下形式：$(I_0 \subset I) \boxtimes (J_0 \subset J)$，其中 $I_0 = \emptyset$，$I = [k-1]$，$J_0 = \{k, \ldots, m\}$ 且 $J = J_0 \cup \{(k-1)\}$。由引理 A.10，我们得出该映射是标记无害的，证毕。

还需证明包含 $\Delta^m \times \Delta^1 \to A^m$ 是标记无穷小。根据方程（52），只需证明包含 $\Delta^{0\ldots m} \cup \Delta^{mFm}$，$\to \Delta^{m0\ldots m}$ 是标记无穷小。记作$B_i = \Delta^{0\ldots m} \cup \Delta^{mi\ldots m}$，后一个 Map 可写成复合

$$B_m \subset B_{m-1} \subset \ldots \subset B_0.$$

每个包含 $B_{i+1} \subset B_i$ 都由其限制 $B_{i+1} \cap \Delta^{mi\ldots m} \subset B_i \cap \Delta^{mi\ldots m}$诱导，而根据引理 A.9 并取 $I_0 = \emptyset$，$I = \{m\}$、$J = \{i, \ldots\ldots, m\}$ 以及 $J_0 = J \setminus \{i\}$，该限制是标记无穷小；因此 Map$\Delta^m \times \Delta^1 \to A^m$也是如此。这就完成了引理 4.10的证明。 □

4.3.3 对 Map i_1 和 i_2的研究

引理 4.11。对于 K单纯集合，态射 $k_1(K)$： $F_2^+(K) \to F_{2,1,\mathcal{J}}^+(K)$ 以及 $k_2(K)$： $F_2^+(K) \to F_{2,3,\mathcal{J}}^+(K)$ 是单态射，并且在 0-单形上是双射。

证明。论证与引理 4.8 的证明完全类似。 □

引理 4.12。对于任意单纯集合 K，映射 i_1： $F_2^+(K) \to F_1^+(K)$ 和 i_2： $F_3^+(K) \to F_2^+(K)$ 是标记无穷小。

证明。我们只证明 i_1 的情形，映射 i_2 的情形非常类似。回想一下，i_1 的定义是对所有单形 $\Delta^m \to K^{\triangleleft}$ 上的态射 $i_{1,m}\colon (\Delta^m)^{\triangleright} \to F_1^+(K)$ 取余极限，将 Δ^m 映到它在 $(\Delta^m)^{*2} \subseteq F_1^+(K)$ 中的第一份，并将 $\triangleright$ 映到 $\triangleleft$。注意，我们可以将余极限限制在包含锥点 $\triangleleft$ 的那些单形 Δ^m 上，此时映射 $i_{1,m}$ 经过 $(\Delta^m)^{*2}$ 分解。设 $\Delta^m \to K^{\triangleleft}$ 是这样的单形；现在只需证明分解后的映射 $i_{1,m}\colon (\Delta^m)^{\triangleright} \to (\Delta^m)^{*2}$ 是标记无穷小。

在本证明余下部分中，我们将 $\triangleleft$ 重新标记为 $\mathsf{0}$，这样就可以将 $i_{1,m}$ 识别为 $(\Delta^m)^{\triangleright} \cong \Delta^{0\dots m0}$ 到 $(\Delta^m)^{*2} \cong \Delta^{\overline{0}\dots m0\dots m}$ 的显然包含。现在，该映射是以下序列的复合

$$\Delta^{0\dots m\overline{0}} \subset \Delta^{0\dots m\overline{01}} \subset \dots \Delta^{0\dots m\overline{01}\dots\overline{j}} \subset \dots \Delta^{0\dots m\overline{01}\dots\overline{m}}.$$

由于形如 $\ell \to p$ 的所有边都已标记，由引理 A.10 可知，这些包含映射都是标记无穷小，因此结论成立。□

4.3.4 对映射 p 的研究

本小节致力于完成之字形（46）中所述比较的最后一步，即证明以下结果。

命题 4.13。 *由自然变换 $p\colon G^+ \to F_3^+$ 诱导的函子 $p^*\colon \mathcal{C}_3 \to \mathcal{BO}_\sigma$ 是一个等价。*

我们先给出一些预备结果。

引理 4.14。 *函子 F_3, G: 单纯集合范畴 $\to$ 单纯集合范畴 都保单态射。*

证明。 由于 s_* 和 $(-)^{\triangleleft}$ 保持单态射不变，因此它们的复合 F_3也保持单态射不变。现在转向 G的情形。令 $\varphi\colon A \to B$ 为单纯集合的一个单态射，并令 $n \in \mathbb{N}$。设 a_0 和 a_1是 $G^+(A)$的两个 n-单形，它们在 $G^+(\varphi)$下的像重合。我们希望证明 $a_0 = a_1$。由于 $s_*(A \times \Delta^1) \to G^+(A)$是一个满态射，我们可以在 $(s_*(A \times \Delta^1))_n$ 中选取这两个单形的提升 $\widetilde{a_0}$ 和 $\widetilde{a_1}$。下面的论证分为几种情形。

(1) 如果 $\widetilde{a_0}$ 和 $\widetilde{a_1}$ 都属于子集 $(s_*A)_n$，那么它们的公共像 $\varphi(a_0) = \varphi(a_1)$实际上属于 $(s_*\{0\})_n$，而后者是 $G^+(A)_n$的子集，因此 $a_0 = a_1$。(2) 如果 $\widetilde{a_0}$ 和 $\widetilde{a_1}$ 都不属于子集 $(s_*A)_n$，由于 $s_*(A \times \Delta^1)_n \setminus s_*(A)_n \to G^+(B)_n$ 是一个包含，我们推得 $\widetilde{a_0} = \widetilde{a_1}$，从而再次得到 $a_0 = a_1$。(3) 最后，$\widetilde{a_0}$ 和 $\widetilde{a_1}$ 中恰有一个属于 $s_*(A)_n$ 的情形是不可能的：事实上，根据 $G^+(A)$的构造，子集 $s_*(A)_n$及其在 $s_*(A \times \Delta^1)_n$ 中的补集在商 $G^+(A)_n$中仍然不相交，因此在 $G^+(B)_n$中也不相交。

□

引理 4.15。 *对于每个单纯集合 K，态射 $p(K)\colon G^+(K) \to F_3^+(K)$ 是标记单纯集合之间的等价。*

证明。 令 $\mathcal{U}$ 为满足以下条件的单纯集合类 $X\colon p(X)$ 是等价。我们将证明$\mathcal{U} = \mathsf{sSet}$，方法是证明 $\mathcal{U}$ 包含每个可表对象 Δ^m，并且在同构、小余积、沿单态射的推出以及沿单态射的序列余极限下保持不变。换言之，我们将证明$\mathcal{U}$ 在单态射意义下是饱和的，即 [Cis19中的定义 1.39]所述的包含所有可表对象的类。

我们首先证明所有标准单纯形都属于$\mathcal{U}$。令 $m \in \mathbb{N}$，并考虑 $p(\Delta^m)\colon G^+(\Delta^m) \to F_3^+(\Delta^m)$。该态射具有一个节 e，关于变量 $[m] \in \Delta$非自然地，其底层单纯集合态射定义为以下复合

$$e\colon F_3(\Delta^m) = s_*\Delta^{\triangleleft 0\dots m} \cong s_*\Delta^{00,01,\dots,0m} \subset s_*(\Delta^m \times \Delta^1) \to G(\Delta^m).$$

其中，维数为 $m+1$ 的单形的中间识别将 $\triangleleft$ 映为 $\mathsf{00}$，并将顶点 i 映为 $0i$（沿用第 4.2.2 节和第 4.2.3节的记号）。令 D_i 为包含边 $i0 \to i1$ 的 $\Delta^m \times \Delta^1$ 的非退化 $m+1$ 单形，并约定包含在 $\Delta^m \times\{\mathsf{0}\}$ 中的所有边均为标记边。令 $D_{i,i+1}$ 表示 D_i 中与顶点 $i1$ 相对的面。于是，态射 e 经由一个滤过分解

$$F_3^+(\Delta^m) \xrightarrow{e_0} G_0^+ \xrightarrow{e_1} G_1^+ \longrightarrow \dots \xrightarrow{e_m} G_m^+ = G^+(\Delta^m),$$

其中， G_i^+ 是 $s_*(\bigcup_{j=0}^{i} D_j)$ 在商映射 $s_*(\Delta^m \times \Delta^1) \to G^+(\Delta^m)$ 下的像，并带有诱导标记。由于边 $i0 \to (i+1)0$ 是标记边，包含 $s_*(D_{i,i+1}) \to s_*(D_{i+1})$ 是标记无穷小的，因此它的推出也是如此

$$s_* \bigcup_{j=0}^{i} D_j \xrightarrow{\sim} s_* \bigcup_{j=0}^{i+1} D_j.$$

因此我们得到一个图表

$$\begin{array}{ccccc} s_*\{0\} & \longleftarrow & s_*\Delta^{00,01,\dots,i0} & \rightarrowtail & s_*\bigcup_{j=0}^{i} D_j \\ \| & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ s_*\{0\} & \longleftarrow & s_*\Delta^{00,01,\dots,(i+1)0} & \rightarrowtail & s_*\bigcup_{j=0}^{i+1} D_j \end{array}$$

其中每一行都在图表范畴 $\mathrm{Fun}(\bullet \leftarrow \bullet \to \bullet$，单纯集合范畴$^+)$上的投射模型结构中定义了一个余纤维化图表。取推出可得一个弱等价 $e_i\colon G_i \xrightarrow{\sim} G_{i+1}$。这证明了 e 是一个标记等价，从而 $\Delta^m \in \mathcal{U}$。

It $\mathcal{U}$ 在同构下稳定是显然的。考虑形如 $K = \coprod_{i\in J}$ 的单纯集合 K_i，其中 $\mathcal{U}$中的所有 K_i。由于 $(-)^\triangleleft$: 单纯集合范畴 $\to$ 单纯集合范畴$_*$ 和 s_* 都保持余极限，我们可以计算

$$\begin{aligned} F_3^+(K) &= s_*\left(\left(\coprod_{i\in J} K_i\right)^\triangleleft\right) \\ &\cong s_*\left(\left(\coprod_{i\in J} K_i^\triangleleft\right) / \coprod_{i\in J} \triangleleft_i\right) \\ &\cong \operatorname{colim}\left(\coprod_{i\in J} s_*(K_i^\triangleleft) \longleftarrow \coprod_{i\in J} s_*\{\triangleleft_i\} \longrightarrow s_*\{*\}\right) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} G^+(K) &\cong \operatorname{colim}\left(\coprod_{i\in J} s_*(K_i \times \Delta^1) \longleftarrow \coprod_{i\in J} s_*(K_i \times \{0\}) \longrightarrow s_*\{0\}\right) \\ &\cong \operatorname{colim}\left(\coprod_{i\in J} G^+(K_i) \longleftarrow \coprod_{i\in J} s_*\{0\} \longrightarrow s_*\{0\}\right). \end{aligned}$$

由于每个映射 $p(K_i)\colon G^+(K_i) \to F_3^+(K_i) = s_*(K_i^\triangleleft)$ 都是标记等价，且这些图表都是余纤维化的，我们推出 $p(K)$ 也是一个等价。这证明了 $\mathcal{U}$ 在小余极限下稳定。

现在设 K 是一个推出 $B \coprod_A C$，其中 A、B 和 C 属于 $\mathcal{U}$，且 $A \to B$ 是一个单态射。我们将证明 $K \in \mathcal{U}$。和之前一样，重写余极限可得同构

$$F_3^+(K) \cong F_3^+(B) \coprod_{F_3^+(A)} F_3^+(C) \qquad \text{and} \qquad G^+(K) \cong G^+(B) \coprod_{G^+(A)} G^+(C).$$

要证明 $p(K)$ 是一个弱等价，只需证明推出图表 $F_3^+(B) \leftarrow F_3^+(A) \to F_3^+(C)$ 和 $G^+(B) \leftarrow G^+(A) \to G^+(C)$ 是纤维化的。这是因为 F_3^+ 和 G^+ 都保持单态射；对于第一种情况，这是显然的，而对于后一种情况，则由引理 4.14 给出。最后，证明 U 在沿单态射的序列余极限下稳定的方法与此类似，因此略去证明。 □

回顾4.6 中关于$\mathcal{J}$ 作为标准区间对象的记号。我们将使用这样一个事实：可以按照 Cisinski 的方法，利用 单纯集合范畴中的 Joyal 模型结构，将 $\mathcal{J} \times(-)$ 作为精确圆柱[Cis19]来构造。

引理 4.16. 对于每个单纯集合 K，范畴等价 $q\colon K\times J \to K$在函子 F_3^+和 G^+ 下的像是一个标记等价。

证明。令 U_F（分别令 U_G）为满足以下条件的单纯集合类： X使得 $F_3^+(q)\colon F_3^+(X\times \mathsf{J}) \to F_3^+(X)$（分别为 $G^+(q)\colon G^+(X\times \mathsf{J}) \to G^+X$）是标记等价。我们旨在证明 $\mathrm{U}_F = \mathrm{U}_G = \mathrm{sSet}$。采用与引理 4.15 证明中类似的论证，容易证明 U_F 和 U_G 在同构、小余积、沿单态射作出的推出以及沿单态射的序列余极限下均封闭。因此，只需证明 U_F和 U_G 包含每个可表对象 Δ^m。关键在于注意到， F_3 和 G都将 sSet 中由 1-范畴的脉络函子给出的本质像全子范畴映到其自身。更确切地说，我们有

$$F_3(\Delta^m\times \mathcal{J}) \cong N\left(s_*([m]\times \mathsf{J})^{\triangleleft}\right)$$

and

$$G(\Delta^m\times \mathcal{J}) \cong N\left(s_*([m]\times \mathsf{J}\times[1]) \coprod_{s_*([m]\times \mathsf{J}\times\{0\})} s_*\{0\}\right),$$

由此很容易验证， $F_3^+(q)$ 和 $G^+(q)$ 是 1-范畴等价在脉络函子下的像，因此是标记等价。

□

现在我们转而证明比较 $\mathcal{BO}_\sigma$ 和 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 的最后一步，即证明 $p^*\colon \mathcal{C}_3 \to \mathcal{BO}$ 是 ∞-范畴之间的等价。

命题 4.13 的证明。设 K 是一个单纯集合。回忆一下， $\mathcal{BO}_\sigma$ 的定义是：在 K 中自然地将集合 $\mathrm{Hom}(K, \mathcal{BO}_\sigma)$ 与 $\mathrm{Hom}^\sigma(G^+(K)\ \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$ 的子集等同起来；这个子集由 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{sSet}^+}(G^+(K)\ \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$ 中满足条件 $(\star)_{G,\sigma}$ 的态射组成。类似地，$\mathrm{Hom}(K,\mathcal{C}_3)$ 与集合 $\mathrm{Hom}^\sigma(F_3^+(K)\ \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$ 等同。由于 $p(K)$ 保持条件 $(\star)_{G,\sigma}$，映射

$$p(K)^*\colon \mathrm{Hom}(F_3^+(K), \mathcal{O}^{\otimes,\natural}) \to \mathrm{Hom}(G^+(K), \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$$

可限制为映射 $\mathrm{Hom}^\sigma(F_3^+(K)\ \mathcal{O}^{\otimes,\natural}) \to \mathrm{Hom}^\sigma(G^+(K)\ \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$。

我们需要考虑这些 Hom 集合的两个商集，其对应的等价关系记作 $\sim$ 和 $\approx$。它们分别对应于 $\mathrm{Fun}(K, \mathcal{C}_3)$ 和 $\mathrm{Map}^\flat(F_3^+(K)\ \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$ 中的同伦关系。我们只描述 $\mathrm{Hom}^\sigma(F_3^+(K)\ \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$ 情形下的这两个关系；$\mathrm{Hom}^\sigma(G^+(K)\ \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$ 的情形类似。

- （$\sim$的定义）。首先，我们考虑连通分支集合 $\pi_0\,\mathrm{Map}(K, \mathcal{C}_3)$，它定义为函子 ∞-范畴 $\mathrm{Fun}(K, \mathcal{C}_3)$ 中 $\mathrm{Hom}(F_3^+(K)\ \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$ 关于同伦等价关系 $\sim$ 的商。

- （$\approx$的定义）。其次，我们考虑连通分支集合 $\pi_0\mathrm{Map}^\natural(F_3^+(K)\ \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$，即 $\mathrm{Hom}(F_3^+(K)\ \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$ 关于函子 ∞- 范畴 $\mathrm{Map}^\flat(F_3^+(K)\ \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$ 中的同伦等价关系 $\approx$ 的商。

利用 ∞ 的函子 [Lur22 中等价的刻画，定理01KA]（更确切地说，是将这一结果稍作推广至带标记的单纯集合），我们可以更明确地重述 $\sim$ 和 $\approx$ 的定义。

令 f_0 和 f_1 为两个映射 $F_3^+(K) \to \mathcal{O}^{\otimes,\natural}$。

$\boxed{\sim}$ 以下两个条件中的任一个都等价于断言 $f_0 \sim f_1$。

($i_\sim$) 存在折叠映射 $(\mathrm{id}_K, \mathrm{id}_K)$ 的一个分解 $K\coprod K \to K \xrightarrow{\rho} K$，其中 ρ为范畴等价，并且图表中存在一个提升

$$\begin{array}{ccc} & & F_3^+(K)^{\amalg 2} \xrightarrow{(f_0,f_1)} \mathcal{O}^{\otimes,\natural} \\ & {\scriptstyle (F_3^+(i_0),F_3^+(i_1))}\downarrow & \nearrow_{\overline{f}} \\ & F_3^+(\overline{K}) & \end{array}$$

使得 f 满足条件 $(\star)_{G,\sigma}$。

($ii_{\sim}$) 对于折叠映射 $(\mathrm{id}_K,\mathrm{id}_K)$ 的每个分解，即 $K \coprod K \xrightarrow{(s_0,s_1)} K \to K$，其中 s_0 和 s_1 是不相交单态射，图表中存在一个提升

$$\begin{array}{ccc} F_3^+(K)^{\mathrm{II}2} & \xrightarrow{(f_0,f_1)} & \mathcal{O}^{\otimes,\natural} \\ {\scriptstyle (F_3^+(s_0),F_3^+(s_1))}\downarrow & \nearrow_{\overline{f}} & \\ F_3^+(\overline{K}) & & \end{array}$$

使得 f 满足条件 $(\star)_{\sigma}$。

$\boxed{\approx}$ 以下两个条件都等价于断言 $f_0 \approx f_1$。

($i_{\approx}$) 存在一个将折叠映射 $\left(\mathrm{id}_{F_3^+(K)},\mathrm{id}_{F_3^+(K)}\right)$ 分解为如下形式的分解

$$F_3^+(K) \coprod_{\Delta^1} F_3^+(K) \xrightarrow{\iota} \overline{F_3^+(K)} \xrightarrow{\rho} F_3^+(K),$$

其中 ρ 有一个笛卡尔等价（在 [Lur09]的意义下），以及图表中的一个提升

$$\begin{array}{ccc} F_3^+(K) \coprod_{\Delta^1} F_3^+(K) & \xrightarrow{(f_0,f_1)} & \mathcal{O}^{\otimes,\natural}. \\ {\scriptstyle \iota}\downarrow & \nearrow_{\overline{f}} & \\ \overline{F_3^+(K)} & & \end{array}$$

($ii_{\approx}$) 对于折叠映射 $\left(\mathrm{id}_{F_3^+(K)},\mathrm{id}_{F_3^+(K)}\right)$ 的每一个如下形式的分解

$$F_3^+(K) \coprod_{\Delta^1} F_3^+(K) \xrightarrow{\iota} \overline{F_3^+(K)} \xrightarrow{\rho} F_3^+(K),$$

其中 ι 是一个单态射，图表中存在一个提升

$$\begin{array}{ccc} F_3^+(K) \coprod_{\Delta^1} F_3^+(K) & \xrightarrow{(f_0,f_1)} & \mathcal{O}^{\otimes,\natural}. \\ {\scriptstyle \iota}\downarrow & \nearrow_{\overline{f}} & \\ \overline{F_3^+(K)} & & \end{array}$$

利用这些描述，很容易看出，$p(K)^*$ 在分别对等价关系 $\sim$ 和 $\approx$ 取商后诱导出映射，我们分别记为

$$\begin{aligned} p^*_{\sigma,\sim} &: \mathrm{Hom}^{\sigma}(F_3^+(K),\mathcal{O}^{\otimes,\natural})_{/\sim} \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\sigma}(G^+(K),\mathcal{O}^{\otimes,\natural})_{/\sim}, \\ p^*_{\sigma,\approx} &: \mathrm{Hom}^{\sigma}(F_3^+(K),\mathcal{O}^{\otimes,\natural})_{/\approx} \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\sigma}(G^+(K),\mathcal{O}^{\otimes,\natural})_{/\approx}. \end{aligned}$$

根据引理 4.15，我们知道 $p(K)$ 是标记弱等价，因此

$$p^*_{\approx}: \mathrm{Hom}(F_3^+(K),\mathcal{O}^{\otimes,\natural})_{/\approx} \longrightarrow \mathrm{Hom}(G^+(K),\mathcal{O}^{\otimes,\natural})_{/\approx}$$

是一个双射。容易看出，态射 $f: F_3^+(K) \to \mathcal{O}^{\otimes,\natural}$ 满足条件 $(\star)_{3,\sigma}$ 当且仅当 $f \circ p(K): G^+(K) \to \mathcal{O}^{\otimes,\natural}$ 满足相应的条件 $(\star)_{G,\sigma}$。因此，诱导映射 $p^*_{\sigma,\approx}$ 是一个双射。现在，$p^*_{\sigma,\sim}$ 是双射这一事实是以下结果的推论。

断言。 等价关系 $\sim$ 和 $\approx$ 在 $\mathrm{Hom}(F_3^+(K)\ \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$ 以及 $\mathrm{Hom}(G^+(K)\ \mathcal{O}^{\otimes,\natural})$ 上均一致。

我们证明函子 F_3^+ 的结论，G^+ 的情形类似。考虑两个态射 f_0，$f_1: F_3^+(K) \to \mathcal{O}^{\otimes,\natural}$。

$\boxed{\sim\Rightarrow\approx}$假设 $f_0 \sim f_1$。根据假设（$ii_{\sim}$），图表中存在一个提升 $\bar{f}$

$$\begin{array}{ccc} & & F_3^+(K)^{\amalg 2} \xrightarrow{(f_0,f_1)} \mathcal{O}^{\otimes,\natural} \\ & {\scriptstyle (F_3^+(s_0),F_3^+(s_1))}\downarrow & \nearrow_{\bar{f}} \\ & F_3^+(K\times\mathcal{J}) & \end{array}$$

根据引理4.16，映射 $F_3^+（K\times\mathcal{J}）\to F_3^+（K）$是一个标记等价，因此条件（$i_{\approx}$）得到满足。

$\boxed{\sim\Leftarrow\approx}$假设 $f_0 \approx f_1$。我们将证明条件（$i_{\sim}$）成立。通过 q的分解： $K\times\mathcal{J}\to K$，将（id_K，id_K）分解，诱导出一个分解

$$\left(\mathrm{id}_{F_3^+(K)},\mathrm{id}_{F_3^+(K)}\right) : F_3^+(K)\coprod_{\Delta^1} F_3^+(K)\longrightarrow F_3^+(K\times\mathcal{J})\longrightarrow F_3^+(K)$$

其中第一个映射是单态射。因此，我们可以应用假设（$ii_{\approx}$），从而在图表中得到一个提升f

$$\begin{array}{ccc} & & F_3^+(K)^{\amalg 2} \xrightarrow{(f_0,f_1)} \mathcal{O}^{\otimes,\natural}. \\ & {\scriptstyle (F_3^+(s_0),F_3^+(s_1))}\downarrow & \nearrow_{\bar{f}} \\ & F_3^+(K\times\mathcal{J}) & \end{array}$$

现在只需证明 f 满足条件 $(\star)^{\urcorner}_{3,\ \sigma}$；这是由于 f_0和 f_1 都满足该条件，以及（$K\times\mathcal{J}$）$_0\cong$（$K\coprod^2$）$_0$这一事实的推论。

这证明了上述断言，从而完成了命题4.13的证明。

□

定理*4.1*的证明。结合引理4.7、命题4.9、引理4.12 和命题4.13，我们得到之字形46中的每个映射都是等价，因此Ext(σ）和 $\mathcal{BO}_\sigma$ 是等价的Kan 复形。

□

5 扩张空间的同伦类型

5.1 结果陈述

5.1.1 动机

设 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 是一个幺元的 ∞-幺半群，我们现在假设它是单色的，且其底层 ∞-范畴是一个 ∞-群胚。考虑一个元数为 n 的运算 $\sigma\in\mathcal{O}(n)$。

在上一节中，我们给出了 σ 的扩张空间的两种模型之间的一系列等价：一方面是 Mann–Robalo 的膜纤维化 π: $\mathcal{BO}\to$Tw(Env($\mathcal{O}$))$^{\otimes}$ 的纤维 $\mathcal{BO}_\sigma$，另一方面是 Lurie 的空间 Ext(σ)。但仍有一个问题：这两种模型都不适用于应用，因为计算它们的扩张空间的同伦类型十分困难，即使对于简单的 ∞-幺半群 也是如此。

L幸运的是，运算 σ 的扩张空间还有第三种可能的模型，名 ly the 同伦纤维

$$\mathcal{O}(n+1)\overset{\mathrm{h}}{\underset{\mathcal{O}(n)}{\times}}\{\sigma\}$$

由前合成给出的态射 i^*: $\mathcal{O}(n+1)\to\mathcal{O}(n)$，其中前合成使用了一个选定的原子映射 i。我们称之为扩张空间的 Toën 模型。

在本节中，我们将这个新模型与 Lurie 空间 Ext(σ) 进行比较。我们将说明，与人们可能预期的相反，除非一元运算的空间 $\mathcal{O}$(1) 可缩，否则这两个模型一般并不等价。更准确地说，我们将证明以下结果。

定理 5.1 (定理C)。 设 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 是一个单色的幺元 ∞-幺半群，其底层 ∞- 范畴 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-群胚，并且 $\sigma \in \mathcal{O}(n)$ 是一个元数为 n的运算。取一个原子态射$i\colon \langle n\rangle \to \langle n+1\rangle$ 于 $\mathcal{O}^{\otimes}$中。那么存在一个同伦笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(n+1) \underset{\mathcal{O}(n)}{\overset{\mathrm{h}}{\times}} \{\sigma\} & \longrightarrow & \mathrm{Ext}(\sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & B\mathcal{O}(1), \end{array} \tag{57}$$

在空间的同伦范畴中良定义，并且表明$\mathrm{Ext}(\sigma)$ 是$\mathcal{O}(n+1)$ $\underset{\mathcal{O}(n)}{\overset{\mathrm{h}}{\times}}${$\sigma$}在 $\mathcal{O}(1)$作用下的同伦商。

备注 5.2. 这里仅限于单色情形，只是为了使与 Toën 模型的比较更加清晰，并稍微简化记号。本节的结果很容易推广到一般情形，即可能带有颜色的幺元 ∞-幺半群。

记号 5.3. 在本节中，考虑具有唯一颜色 c 的单色 ∞-幺半群 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 时，我们将稍微滥用记号，把 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 的对象写成$\langle n\rangle$的形式，而不写作 $c^{\oplus n}$。

5.1.2 与现有文献的差异

定理 5.1 与以下陈述相矛盾： [Lur17，备注 5.1.1。10], 对于 ∞-幺半群，其一元运算空间不可缩。该陈述是 Lurie 证明小圆盘-幺半群 $\mathbb{E}_n$相干性的关键结果。不过请注意，该陈述仅用于这个 $\mathbb{E}_n$例子，而该例子满足 $\mathbb{E}_n(1) \simeq *$，因此我们的定理 5.1 实际上蕴含 Lurie 陈述的结论在这个特定情形下成立。

接下来，我们通过命题5.4 给出一个明确的 ∞-幺半群示例，其中 is 陈述是错误的，且无需借助上述定理5.1。

现在让我们解释 Lurie 的陈述。设 $\mathcal{O}_{\Delta}$ 是一个幺元的纤维化单纯运算子，其底层的 ∞-幺半群为 $\mathcal{O}^{\otimes} = \mathcal{N}^{\otimes}(\mathcal{O}_{\Delta})$。由幺元性，典范包含 $i_{\mathbb{F}_*}\colon \langle m\rangle \to \langle m+1\rangle$ 在$\mathbb{F}_*$ 中唯一地提升为一个态射 i，它在单纯范畴 $\mathcal{O}_{\Delta}^{\otimes}$ 中诱导出一个单纯集合映射

$$i^*\colon \mathrm{Map}^{\mathrm{act}}_{\mathcal{O}_{\Delta}^{\otimes}}(\langle m+1\rangle, \langle n\rangle) \to \mathrm{Map}^{\mathrm{act}}_{\mathcal{O}_{\Delta}^{\otimes}}(\langle m\rangle, \langle n\rangle).$$

给定一个活跃态射 $f\colon \langle m\rangle \to \langle n\rangle$ 于 $\mathcal{O}_{\Delta}^{\otimes}$，Lurie 在 [Lur17，记号 5.1.1.8] 中将严格扩张的空间 f记作$\mathrm{Ext}_{\Delta}(f)$，并将其定义为 i^* 在 f处的纤维。现在考虑一个 n-单纯形σ，它属于 $\mathcal{O}^{\otimes}$，对应于一列 n 可复合的活跃态射

$$\langle m_0\rangle \xrightarrow{f_1} \langle m_1\rangle \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} \langle m_n\rangle$$

在 $\mathcal{O}_{\Delta}^{\otimes}$ 中。在 [Lur17 的构造 5.1.1.9]，中，定义了一个比较映射 $\theta\colon \mathrm{Ext}_{\Delta}(f_n) \to \mathrm{Ext}(\sigma)$。随后， [Lur17 的注记 5.1.1.10] 指出， θ 可与典范映射 $\mathrm{fib}_{f_n}(i^*) \to \mathrm{hofib}_{f_n}(i^*)$ 等同。特别地，$\mathrm{Ext}(\sigma)$ 应当等价于 i^* 在 f_n 处的纤维。然而，定理 5.1 的推论表明，只有当一元运算群 $\mathcal{O}(1)$ 平凡时，这个等价才成立。

要为 [Lur17 的注记 5.1.1.10] 在 $\mathcal{O}(1)$ 6’ $*$时构造一个直接反例，考虑编码结合代数及其对合的幺半群$\mathcal{O}_{\Delta}$ =AssInv。它是由两个运算 $\mu \in \mathcal{O}_{\Delta}(2)$ 和 $\tau \in \mathcal{O}_{\Delta}(1)$ 自由生成、满足关系$\tau^2 =$ id 和 $\tau \circ \mu(a,b) = \mu(\tau b, \tau a)$ 的集合中的单色幺半群；也可将其描述为半直积 Ass $\rtimes \Sigma_2$。其同伦相干神经 $\mathcal{O}^{\otimes} = \mathcal{N}(\mathcal{O}_{\Delta}^{\otimes})$ 是一个幺元的单色离散 ∞-幺半群，其中从 hmi 到 hni 的态射由 $\mathbb{F}_*$ 中的映射 $\alpha\colon$ hmi $\to$ hni、每个原像 α^{-1}{i} 上的线性序，以及一个符号的选择 $\varepsilon\colon$ hmi $\to${+, –} 给出。前述态射将更简洁地记作

$$\left(k_{i1}^{\varepsilon(k_{i1})} \dots k_{im_i}^{\varepsilon(k_{im_i})}\right)_{i \in \langle n\rangle^{\circ}}, \text{ with } \alpha^{-1}\{i\} = \{k_{i1} < \dots < k_{im_i}\}.$$

复合的定义使得负号会反转线性序。

命题 5.4. 对于 $\mathcal{O}^{\otimes} = \mathcal{N}(\mathrm{AssInv})^{\otimes}$ 带对合的结合代数的 ∞-幺半群以及σ 唯一颜色 $h1i$ 上的恒等运算，扩张空间$\mathrm{Ext}(\sigma)$ 与严格扩张的空间$\mathrm{Ext}_{\Delta}(\sigma)$ 并非同伦等价。

证明。另一方面，由于 $\mathcal{O}_{\Delta}$ 是离散单纯运算子，同伦纤维$\mathcal{O}_{\Delta}(2) \overset{\times}{{}_{\mathrm{h}\mathcal{O}_{\Delta}\ 1\ ()}}\{\sigma\}$ 与实际纤维 $\mathrm{Ext}_{\Delta}(\sigma)$ 一致，后者是四元素集合$\{\mu(a,b)\ \mu(a,\tau b)\ \mu(b,a)\ \mu(\tau b,a)\}$。

另一方面，我们声称连通分支的集合 $\pi_0\mathrm{Ext}(\sigma)$ 只包含两个元素。为证明这一点，回顾式（ k-单形的 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 的描述，该描述见（2）。特别地，$\mathrm{Ext}(\sigma)$ 中的对象由交换方块给出

$$\begin{tikzcd} \langle 1\rangle \arrow[r, "\sigma=\mathrm{id}"] \arrow[d, hook, "i"'] & \langle 1\rangle \arrow[d, "\varphi"', "\sim"] \\ \langle 2\rangle \arrow[r, "\alpha"] & \langle 1\rangle. \end{tikzcd} \tag{58}$$

w其 i 为原子、 α 为活跃的，且 φ 为等价。$\mathrm{Ext}(\sigma)$ 中的态射由图表给出 s

$$\begin{tikzcd} \langle 1\rangle \arrow[r, "\sigma=\mathrm{id}"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dd, bend right=60, "i'"'] & \langle 1\rangle \arrow[d, "\varphi"', "\sim"] \arrow[dd, bend left=60, "\varphi'"', "\sim"] \\ \langle 2\rangle \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & \langle 1\rangle \arrow[d, "\psi"', "\sim"] \\ \langle 2\rangle \arrow[r, "\alpha'"] & \langle 1\rangle \end{tikzcd} \tag{59}$$

其中态射为活跃态射，且 f与扩张相容。考虑两个对象 $x=(i,\varphi,\alpha)$ 和 $x' = (i',\varphi',\alpha')$。存在唯一态射 ψ 使得 $\psi\varphi = \varphi'$，而始终有两个不同的态射 f 与扩张相容，并满足 $fi = i'$。要使这些数据 (f,ψ) 定义 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 中的态射，我们还需要满足等式 $\alpha' f = \psi\alpha$ 。但是，由于有 4 个活跃态射 $\langle 2\rangle \to \langle 1\rangle$ （即 1^+2^+、 1^+2^-、 2^+1^+ 和 2^+1^-），只有一半的配对 (x,x') 位于同一个连通分支中；至此计算完成。

□

5.2 Ext(σ) 和 $\mathcal{O}(n+1)$ 的同伦纤维 $\to \mathcal{O}(n$ 的辅助模型)

The 第一步是用空间的之字形来表示映射 i^*: $\mathcal{O}(n+1) \to \mathcal{O}(n)$，该映射仅在 th e homotopy 空间范畴中定义良好

$$\mathcal{O}(n+1) \xleftarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{O}(n+1)} \longrightarrow \mathcal{O}(n).$$

这将给出同伦纤维 $\mathcal{O}(n+1) \overset{\times}{{}_{\mathrm{h}\mathcal{O}\ n\ ()}}\{\sigma\}$ 的严格模型。

考虑子单纯集合

$$\Delta^2_2 = \Delta^{01} \coprod \Delta^{\{2\}}$$

Δ^2。利用 Λ^2_1 可以写成推出 $\Lambda^2_1 = \Delta^2_2 \coprod \Delta^{12}$, 这一点，我们得到映射空间 $_{\partial\Delta^{12}}\mathcal{O}(n+1)$ 同构于纤维

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(n+1) &:= \mathrm{Fun}(\Delta^{12}, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}) \underset{\mathrm{Fun}(\partial\Delta^{12},\mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})}{\times} \{(\langle n+1\rangle, \langle 1\rangle)\} \\ &\cong \mathrm{Fun}(\Lambda^2_1, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}) \underset{\mathrm{Fun}(\Delta^2_2,\mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})}{\times} \{(i, \langle 1\rangle)\}. \end{aligned}$$

同样地，将 Λ^2_0 写作 $\Delta^2_2 \coprod \Delta^{02}$，我们可以将 $\mathcal{O}(n)$ 识别为纤维$_{\partial\Delta^{02}}$

$$\mathcal{O}(n) \cong \mathrm{Fun}(\Lambda^2_0, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}) \underset{\mathrm{Fun}(\Delta^2_2,\mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})}{\times} \{(i, \langle 1\rangle)\}.$$

现在令 $\mathcal{O}(n+1)$ 表示该限制的纤维

$$\mathrm{Fun}(\Delta^2, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\Delta^2_2, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})$$

at $(i,\langle 1\rangle)$。由于 $\Delta^2_2 \hookrightarrow \Delta^2$ 同时通过 Λ^2_0 和 Λ^2_2 分解，我们得到一个交换图表

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(n+1) & \xleftarrow{\sim} & \widetilde{\mathcal{O}(n+1)} & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(n) \\
\downarrow{\scriptstyle (i,\mathrm{id})} & \llcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle (i,\mathrm{id})} \\
\mathrm{Fun}(\Lambda^2_1, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Fun}(\Delta^2, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Fun}(\Lambda^2_0, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}).
\end{array} \tag{60}$$

引理 5.5. 上述图表给出了纤维之间的等价

$$\mathcal{O}(n+1) \overset{\mathrm{h}}{\underset{\mathcal{O}(n)}{\times}} \{\sigma\} \simeq \widetilde{\mathcal{O}(n+1)} \underset{\mathcal{O}(n)}{\times} \{\sigma\} \cong \mathrm{Fun}(\Delta^2, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}) \underset{\mathrm{Fun}(\Lambda^2_0, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})}{\times} \{(i,\sigma)\}.$$

证明。在图表 (60) 中，注意到顶行是底行在 $\mathrm{Fun}(\Delta^2_2, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})$ 中的点 $(i, \mathrm{h1i})$ 处的纤维。因此，图表中的两个方块都是笛卡尔方块。特别地，由于右下方的态射是 Kan 纤维化，$\mathcal{O}(n+1) \to \mathcal{O}(n)$ 也是如此。同理，由于左下方的态射是平凡 Kan 纤维化，$\mathcal{O}(n+1) \to \mathcal{O}(n+1)$ 也是如此。这给出了该引理的第一个同伦等价。第二个等价是单纯集合的一个同构，它通过取右侧笛卡尔方块在对象 $\sigma \in \mathcal{O}(n)$ 处的纤维得到，该对象在 $\mathrm{Fun}(\Lambda^2_0, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})$ 中的像为 (i,σ)。

□

现在，我们用一个更方便的模型替代 $\mathrm{Ext}(\sigma)$，将其记作 $\mathrm{Ext}^{\square}(\sigma)$。该模型定义为函子 ∞-范畴 $\mathrm{Fun}(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})$ 的某个子范畴，其中的对象是由 $\mathcal{O}^{\otimes}$中的活跃映射构成的交换方块。这些方块的编号如下：

$$\begin{array}{ccc}
00 & \longrightarrow & 01 \\
\downarrow & & \downarrow \\
10 & \longrightarrow & 11.
\end{array}$$

我们要求左垂直映射是原子态射，右垂直映射是等价，顶部映射恰好是固定的态射 σ。为了定义 $\mathrm{Ext}^{\square}(\sigma)$，以下记号将很方便。

记号 5.6。令 $\mathrm{Atom}_{\mathcal{O}}$ 表示 $\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})$ 的非满子范畴，其对象是原子态射（见定义 2.4）。令 $\mathrm{Atom}_{\mathcal{O}}(n)$ 表示 $\mathrm{Atom}_{\mathcal{O}}$ 的全子范畴，其对象是余域为 $\langle n\rangle$ 的映射。

记号 5.7。由方块 $\Delta^1 \times \Delta^1$ 得到的标记单纯集合，在进一步标记边 $\Delta^1 \times \{1\}$ 后，记作 $\square$。

定义 5.8（$\mathrm{Ext}^{\square}(\sigma)$ 的定义）。将单纯集合 $\mathrm{Ext}^{\square}(\sigma)$ 定义为迭代纤维积

$$\mathrm{Ext}^{\square}(\sigma) = \lim \left(\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Atom}_{\mathcal{O}} & & \mathrm{Map}^{\flat}(\square, (\mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})^{\natural}) & & \{\sigma\} \\
\downarrow & \swarrow & & \searrow & \downarrow \\
\mathrm{Fun}(\Delta^1 \times \{0\}, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}) & & & & \mathrm{Fun}(\{0\} \times \Delta^1, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})
\end{array} \right)$$

其中两个对角态射是显然的限制映射。

换句话说，$\mathrm{Ext}^{\square}(\sigma)$ 是 $\mathrm{Fun}(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})$ 的子范畴，其

- **对象** 是交换图

$$\begin{array}{ccc}
\langle n\rangle & \xrightarrow{\sigma} & \langle 1\rangle \\
{\scriptstyle \mathrm{atom}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \wr} \\
\langle n+1\rangle & \longrightarrow & \langle 1\rangle
\end{array}$$

其中左侧垂直映射是原子的，右侧垂直映射是等价，

- **态射**与扩张相容，即保留新颜色$\langle n+1\rangle \setminus \mathrm{Im}(\langle n\rangle)$。

容易看出，$\mathrm{Ext}^{\square}(\sigma)$ 是一个 ∞-范畴。

引理 5.9. 空间 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 等价于 $\mathrm{Ext}^{\square}(\sigma)$。

证明. 检查定义 2.6可轻易验证，定义中涉及的所有图表都只包含活跃映射。因此，指向 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 的图表$\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})_{\sigma/}$ 都经过子范畴$\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{O}^{\otimes})_{\sigma/}$。现在回顾从 ∞-范畴的典范等价

$$\gamma\colon \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})_{\sigma/} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})^{\sigma/}$$

从切片到替代切片，后者定义为限制映射在 σ 处的纤维

$$\mathrm{Fun}(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\{0\} \times \Delta^1, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}).$$

γ 到 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 的限制经过显然的包含 $\mathrm{Ext}^{\square}(\sigma) \to \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})^{\sigma/}$。此外，通过检查这两个 ∞-范畴中的对象，可以看出该函子 $\gamma|_{\mathrm{Ext}(\sigma)}\colon \mathrm{Ext}(\sigma) \to \mathrm{Ext}^{\square}(\sigma)$ 是本质满的。因此，要证明该引理，只需证明 $\gamma|_{\mathrm{Ext}(\sigma)}$ 的全忠实性。给定两个扩张 $X, X' \in \mathrm{Ext}(\sigma)$，考虑交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{\mathrm{Ext}(\sigma)}(X, X') & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})_{\sigma/}}(X, X') \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma|_{\mathrm{Ext}(\sigma)}} & & \downarrow{\scriptstyle \wr\gamma} \\ \mathrm{Map}_{\mathrm{Ext}^{\square}(\sigma)}(\gamma(X), \gamma(X')) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})^{\sigma/}}(\gamma(X), \gamma(X')). \end{array}$$

由于 γ 是 ∞-范畴的等价，右侧的垂直映射是同伦等价。注意，给定两个等价的态射 $f_0 \simeq f_1\colon X \to X'$ in $\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})^{\sigma/}$，$f_0$ 与扩张相容，当且仅当 f_1 具有这一性质；对于态射 $\gamma(X) \to \gamma(X')$，情况也类似。因此，上图中的水平映射都是由扩张中新颜色的保持条件所确定的连通分支的包含映射。由此，限制 $\gamma|_{\mathrm{Ext}(\sigma)}$ 是同伦等价，证毕。

□

为比较 $\mathrm{Ext}^{\square}(\sigma)$ 与 $\mathcal{O}(n+1) \underset{\mathrm{h}\mathcal{O}(n)}{\times} \{\sigma\}$，我们先给出前者的另一种描述$\infty$-群胚。根据 $\mathrm{Atom}_{\mathcal{O}}(n)$ 的定义，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Atom}_{\mathcal{O}}(n) & & \longrightarrow & & \{\sigma\} \\ \downarrow & \overset{j}{\nearrow} & & & \downarrow \\ & & \mathrm{Fun}(\Lambda^2_0, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}) & \longrightarrow & \mathrm{Fun}(\{0\} \times \Delta^1, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}) \\ & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathrm{Atom}_{\mathcal{O}} & \longrightarrow & \mathrm{Fun}(\Delta^1 \times \{0\}, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}) & \longrightarrow & \mathrm{Fun}(\{0\} \times \{0\}, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}) \end{array} \tag{61}$$

其中两个方块都是笛卡尔的，这里使用了如下识别

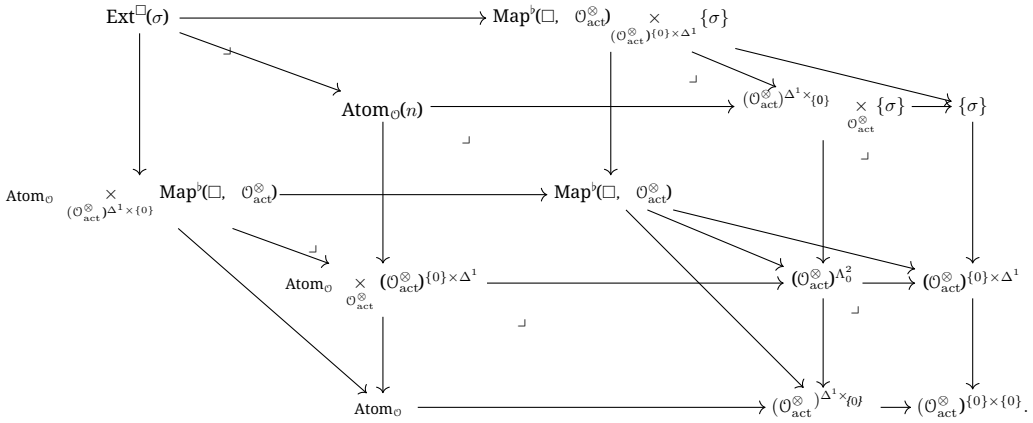
$$\Lambda^2_0 = \Delta^{01} \cup \Delta^{02} \cong \Delta^1 \times \{0\} \cup \{0\} \times \Delta^1, \tag{62}$$

且映射 j 由拉回的泛性质诱导。

引理 5.10。 存在一个典范同构

$$\mathrm{Ext}^{\square}(\sigma) \cong \mathrm{Map}^{\flat}(\square, (\mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})^{\natural}) \underset{\mathrm{Fun}(\Lambda^2_0, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})}{\times} \mathrm{Atom}_{\mathcal{O}}(n). \tag{63}$$

证明。 考虑下列交换图，它扩展了图表（61）：



在上文中，某些方块按构造即为笛卡尔方块，即：

- 所有箭头为竖直或水平的方块
- 包含 $\mathrm{Map}^\flat(\square, \mathcal{O}^\otimes_{\mathrm{act}})$ 以及 $\{\sigma\}$ 或 $\mathrm{Atom}_{\mathcal{O}}$ 的两个方块。

利用拉回方块的通常传递性规则，可以推出左上立方体中的任意方块都是笛卡尔的，由此即可得到所需的同构。 □

5.3 定理5.1 的证明

$\mathcal{O}(n+1) \to \mathcal{O}(n)$ 在 σ 处的同伦纤维可建模为 $\mathrm{fib}^{(i,\sigma)}(\mathrm{Fun}(\Delta^2, \mathcal{O}^\otimes_{\mathrm{act}}) \to \mathrm{Fun}(\Lambda^2_0, \mathcal{O}^\otimes_{\mathrm{act}}))$，它与 $\mathrm{Ext}^\square(\sigma)$ 有两点不同：

(1) $\mathrm{hofib}_\sigma(\mathcal{O}(n+1) \to \mathcal{O}(n))$ 的对象由 $\mathcal{O}^\otimes_{\mathrm{act}}$ 中的交换三角形 给出，而 $\mathrm{Ext}^\square(\sigma)$ 的对象则是交换方块，

(2) 在 $\mathrm{hofib}_\sigma(\mathcal{O}(n+1) \to \mathcal{O}(n))$ 中，映射 $\langle n \rangle \to \langle n+1 \rangle$ 是固定的态射 i，而在 $\mathrm{Ext}^\square(\sigma)$ 中，任何原子映射都可以。

正如我们将看到的，第一个差异不会影响这些空间的同伦类型，但第二个差异解释了为何要对 $\mathcal{O}(1)$的作用取商。为了使这一说明更加明确，我们将引入 $\mathrm{Ext}^\square(\sigma)$ 的若干变体，它们因前述两个参数而异。

考虑由偏序集映射 $[1] \times [1] \to [2]$ 诱导的态射 $r\colon \Delta^1 \times \Delta^1 \to \Delta^2$，该映射定义如下：

$$r(0,0) = 0, \quad r(0,1) = 1, \quad r(1,0) = 1, \quad r(1,1) = 2.$$

它诱导出一个标记单纯集合的态射 $\square \to (\Delta^2)^\flat$，，由此得到一个限制映射$r^*\colon \mathrm{Fun}(\Delta^2, \mathcal{O}^\otimes_{\mathrm{act}}) \to \mathrm{Map}^\flat(\square, \mathcal{O}^\otimes_{\mathrm{act}})$。此外， r 将识别式（62）扩展为一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \{0\} \times \Delta^1 \cup \Delta^1 \times \{0\} & \xrightarrow{\cong} & \Lambda^2_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^1 \times \Delta^1 & \xrightarrow{r} & \Delta^2. \end{array}$$

定义 5.11. 令 $\mathrm{Ext}^\triangle(\sigma)$ 和 $\mathrm{Ext}^\square(\sigma, i)$ 为以下图表中的 ∞-范畴

由笛卡尔方块组成

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(n+1) \underset{\mathcal{O}(n)}{\overset{\mathrm{h}}{\times}} \{\sigma\} & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{\triangleleft}(\sigma) & \longrightarrow & \mathrm{Fun}(\Delta^2, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}) \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle r^*} \\
\mathrm{Ext}^{\square}(\sigma, i) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{\square}(\sigma) & \longrightarrow & \mathrm{Map}^{\flat}(\square, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}) \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
* & \xrightarrow{i} & \mathrm{Atom}_{\mathcal{O}}(n) & \xrightarrow{j} & \mathrm{Fun}(\Lambda^2_0, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}}).
\end{array} \tag{64}$$

.....这一事实 $\mathcal{O}(n+1) \underset{\mathcal{O}(n)}{\overset{\mathrm{h}}{\times}} \{\sigma\}$ 以及 $\mathrm{Ext}^{\square}(\sigma)$ 能纳入上述图表，是对引理5.5 和 5.10的重新表述。

引理 5.12. 在图表 (64) 的左上方方块中

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}(n+1) \underset{\mathcal{O}(n)}{\overset{\mathrm{h}}{\times}} \{\sigma\} & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{\triangleleft}(\sigma) \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
\mathrm{Ext}^{\square}(\sigma, i) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{\square}(\sigma),
\end{array} \tag{65}$$

垂直映射均为等价。

证明。 简单计算表明， r 是标记单纯集合 $\square = (\Delta^1 \times \Delta^1, \Delta^1 \times \{1\}) \to (\Delta^2)^{\flat}$之间的等价。因此， r^* 是 ∞-范畴之间的等价。由于 $\mathrm{Map}^{\flat}(\square, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})$ 和 $\mathrm{Fun}(\Delta^2, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})$ 在 $\mathrm{Fun}(\Lambda^2_0, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})$ 上是纤维化的，沿着态射 j和σ: $* \to \mathrm{Fun}(\Lambda^2_0, \mathcal{O}^{\otimes}_{\mathrm{act}})$ 取拉回，即可得到所需的等价。 □

Le引理 5.13. 设 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 是一个单色的幺元的 ∞-幺半群。那么， ∞-范畴$\mathrm{Atom}_{\mathcal{O}}(n)$ *is equi*等价于 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 的底层 ∞-范畴 $\mathcal{O}$ 。

推论 5.14。 令 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 如上，并进一步假设其底层 ∞-范畴 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-群胚。那么 ∞-范畴原子$_{\mathcal{O}}(n)$ 等价于分类空间 $\mathrm{B}\mathcal{O}(1)$ ，即 $\mathcal{O}$ 中 $h1i$ 的自同构群的分类空间。

引理 *5.13* 的证明。 首先，固定一个原子态射 $\alpha\colon \langle n \rangle \to \langle n+1 \rangle$ 于 $\mathbb{F}_*$ ，并考虑由落在 α 上的态射构成的子范畴原子$^{\alpha}_{\mathcal{O}}(n)$。按定义，我们有一个笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Atom}^{\alpha}_{\mathcal{O}}(n) & \longrightarrow & \mathrm{Atom}_{\mathcal{O}}(n) \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
\{\alpha\} & \longrightarrow & \mathrm{Atom}_{\mathbb{F}_*}(n).
\end{array}$$

注意， ∞-范畴 $\mathrm{Atom}_{\mathbb{F}_*}(n)$ 是一个 1-范畴的神经，其中任意两个对象$j\colon \langle n \rangle \to S$和 $j'\colon \langle n \rangle \to S'$ 之间都存在唯一态射 $S \to S'$（也就是唯一一个在 j 的像上限制为 $j' \circ (j|^{\mathrm{im}(j)})^{-1}$ 的双射）。因此，这个（∞-）范畴是终端的，由此得到 ∞-范畴 $\mathrm{Atom}^{\alpha}_{\mathcal{O}}(n) \simeq \mathrm{Atom}_{\mathcal{O}}(n)$ 的典范等价。

现在，我们可以根据元数，使用引理3.9，将 $\mathrm{Atom}^{\alpha}_{\mathcal{O}}(n)$ 的原子态射分解为。所得结果是 ∞-范畴之间的一个等价

$$\mathrm{Atom}^{\alpha}_{\mathcal{O}}(n) \simeq \left(\mathcal{O}_{\langle 1 \rangle /}\right)^n \times \mathcal{O}_{\langle 0 \rangle /}$$

其中， ∞-范畴 $\mathcal{O}_{\langle 0 \rangle /}$ 是逗号范畴的一种记号

$$(\langle 0 \rangle \in \mathcal{O}^{\otimes}) \downarrow (\mathcal{O}^{\otimes} \supset \mathcal{O}).$$

由于假设 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-群胚，其切片 $\mathcal{O}_{\langle 1\rangle/}$也如此；后者有一个始对象，因此是可缩的。现在我们转而分析逗号范畴 $\mathcal{O}_{\langle 0\rangle/}$。根据定义，它符合由笛卡尔方块组成的交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{\langle 0\rangle/} & \longrightarrow & (\mathcal{O}^{\otimes})^{\langle 0\rangle/} & \longrightarrow & \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{O}^{\otimes}) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1)} \\ \{\langle 0\rangle\} \times \mathcal{O} & \hookrightarrow & \{\langle 0\rangle\} \times \mathcal{O}^{\otimes} & \hookrightarrow & \mathcal{O}^{\otimes} \times \mathcal{O}^{\otimes}. \end{array}$$

由于中间的垂直映射是余笛卡尔纤维化，左侧的垂直映射也是如此。该态射在对象 $X \in \mathcal{O}$ 处的纤维是 $\mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(\langle 0\rangle\ X)$；根据 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 是幺元的这一假设，该纤维可缩。因此，这个余笛卡尔纤维化是一个平凡纤维化 $\mathcal{O}_{\langle 0\rangle/} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}$，证明完毕。 □

定理 *5.1* 的证明。 同伦笛卡尔方形（57）是图表（64）中的左上方形，由引理 $\mathrm{Ext}^{\triangle}(\sigma) \simeq \mathrm{Ext}^{\square}(\sigma) \simeq \mathrm{Ext}(\sigma)$ 给出的等价 5.12 和 5.9 ，以及推论 $\mathrm{Atom}^{\sigma}_{\mathcal{O}}(n) \simeq \mathrm{B}\mathcal{O}(1)$ 给出的等价 5.14 得到。 □

6 应用

正如引言中所提到的，研究膜作用的一个重要动机来自弦拓扑：自由环空间上的 $\mathbb{E}_2$-代数结构源自于在 ∞-幺半群 $\mathbb{E}_2$ 的膜作用下给出的跨度图。更确切地说，我们的工作旨在运用膜作用的形式体系，沿着以下两个方向推广弦拓扑。

- 一方面，我们可以考虑基于高维球面的自由环空间 $\mathrm{Map}(S^{n-1}, X)$ 的类比：这就是膜拓扑的研究。回想一下，我们在这一背景下所期望的典型结构是 $\mathbb{E}_{\mathrm{fr}n}$-代数。因此，我们希望扩展膜拓扑已知的$\mathbb{E}_n$-结构，将圆盘同胚群的作用纳入考量。支配这类结构的 ∞-幺半群是小圆盘 ∞-幺半群 $\mathbb{E}_n$ 的变体，它们由 $\mathbb{E}_n$ 与一个拓扑群 G 的半直积给出；该拓扑群带有一个指向 ∞-群 $\mathrm{Top}(n)$（即 $\mathbb{R}^n$ 的自同胚群）的态射。

- 另一方面，我们希望获得膜拓扑结构，使其不仅适用于拓扑流形，也适用于其他几何背景，尤其是导出代数堆。值得注意的是，这一想法在 Toën 的原始工作中已初见端倪 [Toë13], ，其中给出了一个高阶形式性定理的证明纲要，该定理适用于如下形式的商栈： $[Y/G]$ 其中 G一个特征零域上的光滑线性代数群作用于一个有限表示的拟射影导出概形 Y。

本节余下部分将研究 B-框架化小圆盘 $\mathbb{E}_B$，这是一族 ∞-幺半群，它们推广了前文介绍的 ∞-幺半群 $\mathbb{E}_n^G$；我们将证明它们具有相干性，并由此构造完美导出叠的膜空间上的新运算。

6.1 小 B-框架化圆盘的 ∞-幺半群的相干性

本节中，我们定义 B-框架化小圆盘的 ∞-幺半群，并证明其具有相干性。该 ∞-幺半群依赖于一个 Kan 纤维化 $B \to \mathrm{BTop}(n)$，当 B 是 $\mathrm{Top}(n)$ 的某个子群 G 的分类空间时，它便还原为前文提及的小圆盘 ∞-幺半群的各种变体 $\mathbb{E}_n^G$。

我们回顾 ∞-幺半群 $\mathbb{E}_B^{\otimes}$ 在 [Lur17第 5.4 节中介绍的定义。2], 以下沿用其中的表述和记号。

记号 6.1. 给定两个拓扑空间 X 和 Y，我们用 $\mathrm{Emb}(X, Y)$ 表示开嵌入 $X \to Y$ 所构成的拓扑空间，其拓扑取自集合 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Top}}(X, Y)$ 上的紧开拓扑的子空间拓扑。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们用 $\mathrm{Top}(n)$ 表示$\mathbb{R}^n$的同胚所构成的拓扑空间，并将其视为 $\mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ 的子空间。

备注 6.2. Kister–Mazur 定理表明，包含 $\mathsf{Top}(n) \to \mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ 是同伦等价，对所有 $n \geqslant 0$ 均成立（参见 [Lur17，定理 5.4.1。5]）。

从现在起，我们固定一个自然数 n。

定义 6.3 ([Lur17，定义 5.4.2.1])。令 ${}^t\mathbb{E}^{\otimes}_{\mathrm{BTop}(n)}$ 表示一个拓扑范畴，其对象为有限带基点集合 $\langle m \rangle \in \mathbb{F}_*$，映射空间由以下公式给出

$$\mathrm{Map}_{{}^t\mathbb{E}^{\otimes}_{\mathrm{BTop}(n)}}(\langle m \rangle, \langle k \rangle) = \coprod_{\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_*}(\langle m \rangle, \langle k \rangle)} \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n \times \alpha^{-1}\{i\}, \mathbb{R}^n). \tag{66}$$

令 $\mathbf{BTop}(n)^{\otimes}$ 表示其同伦相干神经，即 ∞-范畴 $N\left({}^t\mathbb{E}^{\otimes}\ \mathbf{BTop}(n)\right)$。根据 [Lur17，命题 2.1.1. 27], $\mathbf{BTop}(n)^{\otimes}$ 构成一个 ∞-幺半群。我们将其底层∞-范畴记为 $\mathbf{BTop}(n)$，根据备注 6.2，它是拓扑群 $\mathsf{Top}(n)$ 的分类空间。

令我们固定一个 Kan复形 B 以及一个 Kan 纤维化 $B \to \mathbf{BTop}(n)$。

记号 6.4。回忆一下，给定一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，可以构造一个余笛卡尔 ∞-幺半群 $\mathcal{C}^{\amalg}$，其多重态射空间由以下公式给出 $\mathrm{Mul}_{\mathcal{C}^{\amalg}}(c_1, \ldots\ldots, c_m;\ c) = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(c_i,\ c)$(参见 [Lur17，第 2.4 节。3])。

定义 6.5 ([Lur17，定义 5.4.2。10])。令 $\mathbb{E}^{\otimes}_B$ 表示 ∞-幺半群

$$\mathbb{E}^{\otimes}_B = \mathbf{BTop}(n)^{\otimes} \underset{\mathbf{BTop}(n)^{\amalg}}{\times} B^{\amalg} \tag{67}$$

并称其为 ∞-幺半群，即 B-带框小圆盘的幺半群。

注意，$\mathbb{E}^{\otimes}_B$ 的底层 ∞-范畴与 Kan复形 B典范等价。特别地，可以将 $\mathbb{E}^{\otimes}_B$ 的对象与 B的对象等同起来。

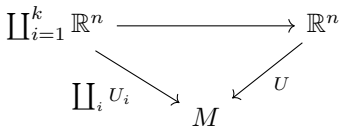
备注 6.6（示例）。• 对于一个可缩 Kan 复形 B，若它带有到 $\mathbf{BTop}(n)$ 的 Kan 纤维化，则相应的 ∞-幺半群 $\mathbb{E}^{\otimes}_B$ 退化为普通的 ∞-幺半群 $\mathbb{E}^{\otimes}_n$，即维数为n的小圆盘幺半群。

- 考虑一个拓扑群以及一个到 $\mathsf{Top}(n)$ 的映射。它在分类空间上诱导的态射，在等价意义下可由 Kan 纤维化 $B := \mathrm{B}G \to \mathbf{BTop}(n)$ 表示。于是，B-带框小圆盘的 ∞-幺半群 $\mathbb{E}^{\otimes}_B$ 等价于一个半直积$\mathbb{E}^{\otimes}_n \rtimes G$（意义见 [SW03]）。作为一个特例，对于 $G = SO(n)$，我们得到带框小圆盘 ∞-幺半群 $\mathbb{E}_{\mathrm{fr}n}$。

- 设 M 是一个维数为 n 的拓扑流形。参照 [Lur17，定义 5.4.5.1。], 令$\mathcal{C}_M$ 表示具有两个对象 M 和 $\mathbb{R}^n$的拓扑范畴，其映射空间为

$$\begin{aligned} &\mathrm{Map}_{\mathcal{C}_M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) && \mathrm{Map}_{\mathcal{C}_M}(\mathbb{R}^n, M) = \mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n, M) \\ &\mathrm{Map}_{\mathcal{C}_M}(M, \mathbb{R}^n) = \emptyset && \mathrm{Map}_{\mathcal{C}_M}(M, M) = \{\mathrm{id}_M\}. \end{aligned}$$

  定义 B_M为 Kan复形 $\mathbf{BTop}(n) \times_{\mathcal{N}(\mathcal{C}_M)} \mathcal{N}(\mathcal{C}_M)_{/M}$，并令 $\mathbb{E}^{\otimes}_M$表示 ∞-幺半群$\mathbb{E}^{\otimes}_{B_M}$。它是 ∞-幺半群 $\mathbb{E}^{\otimes}_n$ 的一个变体，其中颜色是圆盘的开嵌入 $U\colon \mathbb{R}^n \to M$，圆盘的维数为 n，嵌入到 M 中，而元数为 k 的运算是嵌入图表



  以及使三角形交换的一个同伦。注意，$\mathbb{E}_M$-代数可识别为 M上的局部常值因子化代数，依据定理 [Lur17，定理 5.4.5.9。]。

该 ∞小圆盘运算子的幺半群 $\mathbb{E}_n$ 对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 均由 [Lur17，定理 5.1.1。1]。我们将这一结果推广到 B带框情形。

定理 6.7。 ∞么半群 B带框小圆盘$\mathbb{E}_B^{\otimes}$ 是相干的。

证明依赖于定理 5.1 以及下面的计算。

引理 6.8。 设 $\sigma\colon (b_1,\dots,b_m)\to b$是 $\mathbb{E}_B^{\otimes}$中的一个活跃态射，其中 $b_1,\dots,b_m,b$属于 B，并选取另一个颜色 b_{m+1}属于 B。那么， σ在 $\mathbb{E}_B^{\otimes}$中的扩张空间的 *Toën* 模型由下式给出

$$\mathrm{Mul}_{\mathbb{E}_B}(b_1,\dots,b_{m+1};b)\underset{\mathrm{Mul}_{\mathbb{E}_B}(b_1,\dots,b_m;b)}{\overset{\mathrm{h}}{\times}}\{\sigma\}\simeq\begin{cases}\Omega_b B\times\bigvee^m S^{n-1} & \text{if } b_{m+1}\simeq b \text{ in } B,\\ \emptyset & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{68}$$

证明。 根据构造，等式（68）左侧等价于映射σ 在.....处的同伦纤维

$$\begin{array}{c}\mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n\times\langle m+1\rangle^{\circ},\mathbb{R}^n)\underset{\mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)^{m+1}}{\times}\prod_{i=1}^{m+1}\mathrm{Map}_B(b_i,b)\\ \downarrow\\ \mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n\times\langle m\rangle^{\circ},\mathbb{R}^n)\underset{\mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)^{m}}{\times}\prod_{i=1}^{m}\mathrm{Map}_B(b_i,b).\end{array}\tag{69}$$

将纤维积与同伦纤维交换后，我们得到空间

$$\left(\mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n\times\langle m+1\rangle^{\circ},\mathbb{R}^n)\underset{\mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n\times\langle m\rangle^{\circ},\mathbb{R}^n)}{\overset{\mathrm{h}}{\times}}\{\sigma\}\right)\underset{\mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}{\times}\mathrm{Map}_B(b_{m+1},b)\tag{70}$$

由于 B 是 Kan复形，当 b_{m+1} 和 b 属于不同的连通分支时，因子 $\mathrm{Map}_B(b_{m+1},b)$为空；否则，它等价于基点环路空间 $\Omega_b B$ 。另一方面，对于任意有限集 S，从空间 $\mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n\times S,\mathbb{R}^n)$到乘积 $\mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)^S\times\mathrm{Conf}(S,\mathbb{R}^n)$的显然映射是一个等价（参见 [Lur17，证明命题 5.4.2.8。]）。由此，我们得到一个等价

$$\mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n\times\langle m+1\rangle^{\circ},\mathbb{R}^n)\underset{\mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n\times\langle m\rangle^{\circ},\mathbb{R}^n)}{\overset{\mathrm{h}}{\times}}\{\sigma\}\simeq\mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\times\mathrm{Conf}(S,\mathbb{R}^n).\tag{71}$$

Subs在（71）中代入此等价，并利用 $\mathrm{Conf}(S,\ \mathbb{R}^n)\simeq\bigvee^m S^{n-1}$，我们得到结果 lt. □

引理 6.9. 设 $\sigma\colon (b_1,\dots,b_m)\to b$是 $\mathbb{E}_B^{\otimes}$ 中的一个活跃态射，其中 $b_1,\dots,b_m,b$属于 B。则 σ在 $\mathbb{E}_B^{\otimes}$中的扩张空间等价于$\bigvee^m S^{n-1}$。

证明。 根据定理 5.1，任取一个颜色 b_{m+1}，即可得到一个同伦笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Mul}_{\mathbb{E}_B}(b_1,\dots,b_{m+1};b)\underset{\mathrm{Mul}_{\mathbb{E}_B}(b_1,\dots,b_m;b)}{\overset{\mathrm{h}}{\times}}\{\sigma\} & \longrightarrow & \mathrm{Ext}(\sigma)\\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow\\ \{b_{m+1}\} & \longrightarrow & B,\end{array}\tag{72}$$

对 $\mathrm{Ext}(\sigma)\to B$ 沿着包含映射 $B_{[b]}\to B$ 进行基变换，其中该包含映射指向 b 的连通分支；再利用命题 A.23，方块（72）赋予等式（72）左上角的严格扩张空间一个 $\Omega_b B$-主 ∞-丛结构，其底空间为$\mathrm{Ext}(\sigma)$。

若 b_{m+1} 不属于 b 在 B中的连通分支，则$\mathrm{Ext}(\sigma)^{[b]}$ 在 $B_{[b]}$ 上的对应纤维为空。特别地，结构映射$\mathrm{Ext}(\sigma)\to B$ 经由 $B_{[b]}$分解。现在选取一点 $b_{m+1}\in B_{[b]}$。通过引理6.8给出的识别，严格扩张空间上的$\Omega_b B$作用，是$\Omega_b B\times\bigvee^m S^{n-1}$第一因子上的正则作用。对该作用取商后可知，空间$\mathrm{Ext}(\sigma)$等价于 $\bigvee^m S^{n-1}$。 □

定理*6.7*的证明。首先，显然 ∞-幺半群是$\mathbb{E}_B^{\otimes}$ 幺元的。并且，其底层∞-范畴B 根据假设是一个Kan复形。剩下需要证明定义(c)中的条件2.9。根据引理6.9，对于 $X \xrightarrow{\sigma} Y \xrightarrow{\tau} Z$ 中一列可复合活跃态射 $\mathbb{E}_B^{\otimes}$，其中 X， Y 且Z 的元数分别为 m， k 和1，图表（5）在空间的同伦范畴中等价于如下形式的交换方块：

$$\begin{array}{ccc} \coprod^{k} S^{n-1} & \longrightarrow & \bigvee^{k} S^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i=1}^{k} \bigvee_{p(\sigma)^{-1}\{i\}} S^{n-1} & \longrightarrow & \bigvee^{m} S^{n-1} \end{array} \tag{73}$$

容易看出它是同伦余笛卡尔的（与小圆盘 ∞-幺半群 $\mathbb{E}_n$的情形一样）。证明至此完成。

□

6.2 膜空间上的运算

正如我们刚刚证明的， ∞-幺半群 $\mathbb{E}_B^{\otimes}$ 是相干的（定理 6.7）；因此，根据定理 A，它具有膜作用。这就得到以下结果。

推论 6.10。采用与上文相同的记号，存在一个典范态射 ∞-幺半群之间的态射 $\mathbb{E}_B^{\otimes} \to \mathrm{Cospan}(\mathcal{S})^{\amalg}$，它将颜色 b 映射到空间 $\mathrm{Ext}(\mathrm{id}_b)$ ’ S^{n-1} ，并将运算$\sigma\colon (b_1, \dots, b_m) \to b$映射到一个余跨图

$$\mathrm{Ext}(\mathrm{id}_b)^{\amalg m} \longrightarrow \mathrm{Ext}(\sigma) \longleftarrow \mathrm{Ext}(\mathrm{id}_b) \tag{74}$$

其中间空间 $\mathrm{Ext}(\sigma)$ 等价于 m 个 S^{n-1}球面的楔和。

按照 [Toë13, MR18]，前一个结果可应用于多个几何背景，从而在膜空间上构造运算。设 $\mathcal{X}$ 是一个 ∞-topos。存在典范函子 $(-)_{\mathrm{cst}}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{X}$，它将每个空间 Z 映射到对象 Z_{cst}；该对象是形状为 Z 、值为终对象 $*$的常值图表的余极限。换言之， Z_{cst} 是值为 Z的局部常值层，或者等价地说，是 Z 在 $\mathcal{X}$中的贝蒂形状。通过此函子，我们从推论 6.10 的 $\mathbb{E}_B$-代数结构得到 Cospan($\mathcal{X}$) 这一 ∞-范畴中的相应代数。

给定任意对象 $X \in \mathcal{X}$，现在我们可以在 $\mathcal{X}$ 中使用内部 Hom 对象，并应用函子 Map($-$, X)$\colon \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{X}$到 Ext($\sigma$)$_{\mathrm{cst}}$。由此可在对象 Map(($S^{n-1}$)$_{\mathrm{cst}}$， X) 上得到 Span($\mathcal{X}$) 中的 $\mathbb{E}_B$-代数结构；Toën 将其称为 X 的空间 $\mathbb{E}_B$膜。总而言之，我们得到以下结果。

推论 6.11。对于 $\mathcal{X}$中的任意对象 X，内部于 $\mathcal{X}$的 $\mathbb{E}_B$-膜空间 $\mathrm{Map}((S^{n-1})_{\mathrm{cst}}, X)$ 具有典范的 $\mathbb{E}_B$-代数结构，取值于 $\mathrm{Span}(\mathcal{X})$；其结构态射将一个元数为 m 的运算σ 映到以下 ***Span***

$$\mathrm{Map}((S^{n-1})_{\mathrm{cst}}, X)^m \longleftarrow \mathrm{Map}(\mathrm{Ext}(\sigma)_{\mathrm{cst}}, X) \longrightarrow \mathrm{Map}((S^{n-1})_{\mathrm{cst}}, X). \tag{75}$$

注6.12。上述构造的优点在于其一般性：可以说，在$\mathbb{E}_B$-代数结构Map((S^{n-1})$_{\mathrm{cst}}$， X) 属于Span($\mathcal{X}$)中，这种结构是动机的，意思是它在施加任何类型的线性不变量（链、上同调、拟凝聚层、 K 理论等）之前就已存在。这类似于 Gromov–Witten不变量的情形：作者在MR18], 中利用膜作用，以纯几何的方式构造 Gromov–Witten不变量，随后便能够应用 K 理论或普通上同调函子，以更经典的形式恢复枚举不变量。 [

特别地，当专门考虑 B =BSO(n) 这一情形时， ∞-幺半群 $\mathbb{E}_B^{\otimes}$ 恢复为带框小圆盘 $\mathbb{E}_n^{\mathrm{fr}}$ 的幺半群，因此上述推论给出以下结果。

推论 6.13. 设 X 为一个同伦类型。则膜空间 $\mathrm{Map}(S^{n-1}, X)$ 在 $\mathrm{Span}(\mathcal{S})$中具有一个$\mathbb{E}_n^{\mathrm{fr}}$-代数结构。

要恢复经典的弦拓扑和膜拓扑运算，需要对这些空间取奇异链，将前面在跨度中的 $\mathbb{E}_n^{\mathrm{fr}}$-代数结构转化为链复形中的相应结构。本节余下部分将专门讨论这一线性化过程。

6.2.1 反转跨度

在许多应用中，将跨度中出现的反向态射“反转”，从而在更易处理的 ∞-范畴（例如链复形范畴或谱范畴）中获得代数结构，是很有用的。为了更精确地描述这一构造，我们将依赖 Stefanich 在 [Ste20] 中确立的跨度范畴的泛性质（另见 [GR17]，其中较早地描述了这一泛性质）。

给定一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 且其中存在拉回，我们首先需要考虑$(\infty,2)$-增强$\mathrm{Span}_2(\mathcal{C})$，即 ∞-范畴$\mathrm{Span}(\mathcal{C})$ 中由 $\mathcal{C}$ 构成的跨度（参见 [Hau18] 或 [Ste20]，以了解精确构造）。接下来，我们定义 Beck–Chevalley 条件。

定义 6.14 (伴随方块，[Ste20，定义 3.4。1])。设D 是一个$(\infty,2)$-范畴。一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} d' & \xrightarrow{\alpha'} & d \\ \downarrow{\scriptstyle \beta'} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ e' & \xrightarrow{\alpha} & e \end{array} \tag{76}$$

在 D 中称为垂直右伴随可延拓，如果 β 和 β' 存在右伴随 β^R 和 β'^R，并且典范 2-态射

$$\alpha'\beta'^R \to \beta^R\alpha \tag{77}$$

由单位 $\mathrm{id}_d \to \beta^R\beta$ 和余单位 $\beta'^R\beta' \to \mathrm{id}_{e'}$ 构造而成，是一个同构。

如果该方块的转置垂直右伴随可延拓，则称该方块水平右伴随可延拓。如果它既垂直右伴随可延拓，又水平右伴随可延拓，我们就简称该方块为右伴随可延拓。

定义 6.15 (Beck–Chevalley条件，[Ste20，定义 3.4。5])。设 $\mathcal{C}$ 是一个带拉回的 ∞-范畴，且 D 是一个 $(\infty,2)$-范畴。若函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{D}$ 对每个余跨度都满足左 Beck–Chevalley $x \to s \leftarrow y$ 在 $\mathcal{C}$中所诱导的交换方块$\mathcal{D}$

$$\begin{array}{ccc} F(x \times_s y) & \longrightarrow & F(y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(x) & \longrightarrow & F(s) \end{array}$$

是右伴随可延拓的。

利用这些定义，可以刻画从（∞，2）-跨度范畴出发的2-函子。

定理 *6.16*（跨度的*2*-范畴普适性质，[*Ste20*，定理 *3.4.*18]）。设 $\mathcal{C}$ 为一个具有拉回的∞-范畴，且D为一个（∞，*2*）-范畴。通过典范函子$\mathcal{C} \to \mathit{Span}_2(\mathcal{C})$进行前合成，可将*2*-函子$\mathit{Span}_2(\mathcal{C}) \to D$的空间识别为$\mathit{Map}_{\mathrm{Cat}_\infty}(\mathcal{C}, D)$的子空间，该子空间由满足左*Beck–Chevalley*条件的函子 $\mathcal{C} \to D$构成。

注记 6.17。给定一个满足左Beck–Chevalley条件的函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{D}$，与之关联的 2-函子 $\mathrm{Span}_2(\mathcal{C}) \to \mathrm{D}$ 将一个 Span $x \xleftarrow{f} s \xrightarrow{g} y$映射为态射 $f^R \circ g\colon F(x) \to F(y)$。

我们简要讨论两种可应用上述结果的几何背景：导出堆 $\mathcal{X} = \mathrm{dSt}_k$ 的情形，以及空间 $\mathcal{X} = \mathcal{S}$的情形。

6.2.2 代数几何背景

设 k 为特征为 0 的域，dSt_k 为 ∞ 上导出 étale 叠的 k-范畴 .

为了将膜作用产生的导出叠对应求逆，我们需要将注意力限制在一类性质特别良好的空间上，即 Ben-Zvi–Francis–Nadler 在 [BZFN10] 中引入的完美叠。

定义 6.18（完美叠，[BZFN10]）。若一个导出堆 X 的对角态射是仿射的，且 $\mathrm{QCoh}(X)$ 是其完美复形全子范畴的归纳完备化，则称该导出堆为完美的。我们用 $\mathcal{P}$ 表示完美叠上的 $\mathrm{d}\mathcal{S}\mathrm{t}_k$ 的全子范畴。

例 6.19. 完美叠这一类包含许多有趣的例子。例如，拟射影导出概形 Y 在仿射群 G 的线性作用下的每个商 Y/G 都是完美的。此外，完美叠在纤维积下封闭；若 $X \in \mathcal{P}$，则对每个有限单纯集合 K，$\mathrm{Map}((K)_{\mathrm{cst}}, X)$ 也如此。

考虑由（可能是大型的）k-线性可呈示 dg-范畴及保持小余极限的函子作为态射构成的 $(\infty,2)$-范畴 $\mathrm{dg}\mathcal{C}\mathrm{at}_k^{\mathrm{L}}$。令 $\mathrm{QCoh}:\mathrm{d}\mathcal{S}\mathrm{t}_k \to \mathrm{dg}\mathcal{C}\mathrm{at}_k^{\mathrm{L}}$ 表示如下函子：它将每个导出堆映到其拟凝聚层的导出 ∞- 范畴。

根据 [BZFN10，命题 3。10], QCoh 在 上的限制 $\mathcal{P}$ 满足左 Beck–Chevalley 性质，因此可扩张为一个 2-函子

$$\mathrm{QCoh}\colon \mathsf{Span}_2(\mathcal{P}) \to \mathrm{dg}\mathcal{C}\mathrm{at}_k^{\mathrm{L}},$$

利用定理 6.16。此外，利用 2-函子 QCoh ，我们可以将其提升为对称幺半函子；依据 [Ste20，推论 1.2。2]。结合推论 6.11，可得以下结果。

推论 6.20。设 X 是一个完美叠。其膜空间上的拟凝聚层的 ∞-范畴 $\mathrm{Map}((S^{n-1})_{\mathrm{cst}}, X)$ 在 $\mathrm{dg}\mathcal{C}\mathrm{at}_k^{\mathrm{L}}$ 中带有一个典范的 $\mathbb{E}_B$-代数结构。

这一结果推广了 Toën 的结果 [Toë13，推论 5。1]以及 Ben-Zvi–Francis–Nadler 的结果[BZFN 10], ，后者对应于 $\mathbb{E}_n$-幺半群（即 $\mathbb{E}_B$ 对于 $B \simeq *$ 的特殊情形）。

6.2.3 拓扑背景

我们希望将上述构造推广到拓扑空间的情形，以恢复经典弦拓扑运算，并更一般地，在膜空间上的链上得到猜想中的 $\mathbb{E}_n^{\mathrm{fr}}$-代数结构。

然而，随即就会遇到如何定义函子性 umkehr（或 Gysin）映射于链层级的问题。特别是，这要求处理产生从合适的子范畴 $\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{S}$ 的链复形范畴（或其适当变体）的函子所需的全部相干性数据。困难之一在于，子范畴 $\mathcal{P}$ 必须包含自由环空间$\mathcal{L}X$，而它们是无穷维流形；并且，所寻求的到链复形的函子在取同调后必须特化为经典的 Thom–Pontryagin 构造所给出的 umkehr 映射。迄今似乎尚无此类构造见诸文献。作者计划在未来工作中重新探讨这一问题。

A 附录

附录分为两部分。第一部分给出本文中用到的标记单纯集的定义和结果。第二部分汇集了高阶范畴语境下群作用的一些标准事实，并不声称这些内容具有原创性。

A.1 关于标记单纯集的一些结果

本节汇集了定理 B证明中用到的关于标记单纯集的各种事实。这些结果都是标准且广为专家熟知的，或许命题 A.7除外。该命题指出，拟同构态射满足一种较弱形式的右简化性质，而这一结果似乎尚未见于文献。最后这个结果或许具有独立的研究价值。

A.1.1 标记单纯集的一些性质

定义 A.1. 一个标记单纯集合是一个有序对 (X, mX)，其中 X 是一个单纯集合，mX 是 X_1 的一个子集，且包含所有退化边。标记单纯集合的态射 $(X, mX) \to (Y, mY)$ 是一个单纯集合的态射 $f\colon X \to Y$，满足 $f(mX) \subseteq mY$。

标记单纯集合范畴记作单纯集合范畴$^+$。

记号 A.2。 给定一个单纯集合 X，可以与三个标记单纯集合相关联:

- 仅由退化边组成的最小标记 $X^{\flat}$, ,
- 笛卡尔标记 $X^{\natural}$ ，其中一个边当且仅当它是等价时才被标记,
- 最大标记 $X^{\sharp}$，包含所有边。

给定标记单纯集合 e 中的一个边 Y，记 $Y[e]$ 为通过进一步标记 e而得到的标记单纯集合。换言之，$Y[e]$ 是底层单纯集合为 Y且满足典范映射 $Y \to Y[e]$ 和 $e\colon\ \Delta^{1,\sharp} \to Y[e]$ 都是标记单纯集合的态射的初始标记单纯集合。

给定一个范畴 $\mathcal{C}$ 以及 $\mathcal{C}$中的一类态射 S，如果 S 包含所有同构，并且在余基变换、超限复合、余积和回缩下封闭，我们就称 S 是弱饱和的。包含 S 的最小弱饱和类记为 S ，称为 S的饱和化。

我们在单纯集合范畴和单纯集合范畴$^{+}$中引入若干态射类:

- 态射类 Cell $=\{\partial\Delta^n \subset \Delta^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
- 态射类 InnHorn $=\{\Lambda^n_k \subset \Delta^n \mid 0 < k < n, \quad n \geqslant 2\}$,
- 态射类 Cell$^{\flat}$ $=\{\Lambda^{n,\ {}^{\flat}}_{k} \subset \Delta^{n,\flat} \mid 0 \leqslant k < n,\ n \geqslant 1\}$,
- 态射类 InnHorn$^{\flat}$ $=\{\Lambda^{n,\ {}^{\flat}}_{k} \subset \Delta^{n,\flat} \mid 0 < k < n,\ n \geqslant 2\}$,
- 态射类 LHorn$^{\sharp}$ $=$ InnHorn$^{\flat}$ $\cup\{\Lambda^{n,\ {}^{\flat}}_{0}[0 \to 1] \subset \Delta^{n,\flat}[0 \to 1] \mid n \in \mathbb{N}^*\}$,
- 类 RHorn$^{\sharp}$ $=$ InnHorn$^{\flat}$ $\cup\{\Lambda^{n,\ {}^{\flat}}_{n}[n-1 \to n] \subset \Delta^{n,\flat}[n-1 \to n] \mid n \in \mathbb{N}^*\}$。

Cell 和 InnHorn 的饱和化分别是单态射类和内无害态射类。现在我们引入带标记态射的无害态射概念，以适用于我们对第 4 节的计算。

定义 A.3 （标记无害态射）。标记无穷小类 Mark 定义为 LHorn$^{\sharp}$ 和 RHorn$^{\sharp}$ 的并的饱和化，再加上映射

$$\Lambda^{2,\sharp}_1 \coprod_{\Lambda^{2,\flat}_1} \Delta^{2,\flat} \longrightarrow \Delta^{2,\sharp}$$

以及对所有 Kan复形 K的映射 $K^{\flat} \to K^{\sharp}$ 。

备注 A.4（与 Lurie 的定义的区别）。请注意，前面的定义与 [Lur09，定义 3.1.11] 不同之处在于，我们的定义是对称的，而 Lurie 的定义包含 RHorn$^{\sharp}$ 但不包含 LHorn$^{\sharp}$。这种差异的概念性原因如下：Lurie 的标记无害态射是单纯集合范畴 sSet^{+}上的笛卡尔模型结构中的平凡余纤维化，而我们的标记无害态射应当是单纯集合范畴 sSet^{+}上某个适当的双纤维化模型结构中的平凡余纤维化。不过，就本文的目的而言，我们不需要这样一种模型结构的全部力量。

定义 A.5。 满足定义 [Lur09，定义 3.1.1 的态射。1] 在本文中称为 带标记右无害 。对偶的显然定义给出 带标记左无害态射。

引理 A.6。 每个标记无害态射都对所有形如 $X^{\natural} \to *$ 的 X 无穷范畴的态射具有左提升性质。

证明。 根据 [Lur09，命题 3.1.1。6], 标记的 右 无角化态射具有所需的提升性质。由对称性，标记的左无害态射也具有该性质。由于Mark 是由这两类无角化态射的并集生成的饱和化，我们由此得出结论。

□

在第 4节中，我们将用到这样一个事实：标记无角化态射类满足以下形式较弱的右消去性质。

命题 A.7（标记无害态射的右消去性质）。设 $i\colon A \to B$ 和 $j\colon B \to C$ 是标记单纯集之间的单态射。假设 i 和 $j \circ i$ 是标记无害态射，并且 j 在 0-单形上是双射。那么，对于任意 ∞-范畴 X，j 对所有形如 $X^{\natural} \to *$ 的态射都具有左提升性质。

证明。我们的证明只是将[Ste18 定理 15] 中的论证改编到标记单纯环境中。该定理指出，内无害映射类具有右消去性质。为求完整起见，我们在此给出细节。

设 X 是一个 ∞-范畴。我们将证明 j 对 $X^{\natural} \to *$ 具有左提升性质。假设给定一个标记单纯集态射 $u\colon B \to X$。由引理 A.6，$j \circ i$ 是标记无害态射，因此可取态射 $\varphi\colon C \to X$，满足 $\varphi \circ j \circ i = u \circ i$。这意味着 u 和 $\varphi \circ j$ 在映射 $i^*\colon \mathrm{Map}^{\sharp}(B, X^{\natural}) \longrightarrow \mathrm{Map}^{\sharp}(A, X^{\natural})$ 的同一纤维中。根据 [Lur09，命题 3.1.3.3 及其后续评注]（或者更准确地说，是将其推广到我们意义下任意标记无害映射），映射 i^* 是平凡 Kan 纤维化。于是，我们可以取 u 与 $\varphi \circ j$ 之间的同伦，使其覆盖它们在 i^* 下的共同像。此同伦具有如下态射形式$h\colon \Delta^{1,\sharp} \times B \to X^{\natural}$：

$$h|_{\{0\}\times B} = \varphi \circ j \qquad h|_{\{1\}\times B} = u \qquad h \circ (\mathrm{id}_A \times i) = u \circ i \circ \mathrm{proj}_A.$$

因此，h和 φ诱导出映射 $w = (\varphi,\ h)\colon \{0\} \times C \cup \Delta^{1,\sharp} \times B \to X^{\natural}$。问题因此归结为在图表中寻找提升 $d\colon \Delta^{1,\sharp} \times C \to X^{\natural}$

$$\begin{array}{ccc} \{0\} \times C \cup \Delta^{1,\sharp} \times B & \xrightarrow{w} & X^{\natural} \\ \downarrow & \nearrow_{d} & \\ \Delta^{1,\sharp} \times C & & \end{array}$$

因为这样一来，$d|_{\{1\}\times C}$ 便会给出所需的沿着 j对 u 的提升。利用 C上的骨架滤过，记$C(n) = B \cup \mathrm{sk}_n(C)$。注意，由于 j 在对象上是双射，因此有等式 $B = C(0)$。归纳进行即可，因此只需证明下列图表中存在提升：

$$\begin{array}{ccc} (\{0\} \times C(n+1)) \cup (\Delta^{1,\sharp} \times C(n)) & \longrightarrow & X^{\natural} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta^{1,\sharp} \times C(n+1), & & \end{array}$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$都成立。由于标记单纯集合的每个单态射都由细胞附加和边标记得到，证明归结为如下情形：包含 $C(n) \to C(n+1)$是 $\partial\Delta^{n+1,\flat} \to \Delta^{n+1,\flat}$ 或 $\Delta^{1,\flat} \to \Delta^{1,\sharp}$。利用 [Lur09，推论 3.1.1.7]，，容易看出$(\Delta^{1,\sharp} \times \Delta^{1,\flat}) \cup (\{0\} \times \Delta^{1,\sharp}) \to \Delta^{1,\sharp} \times \Delta^{1,\sharp}$是标记无穷小，因此后一种包含的情形结论成立。对于前一种包含，可以改写 [Ste18，引理 2.4]中的论证：将该包含分解为

$$(\{0\} \times \Delta^{n+1,\flat}) \cup (\Delta^{1,\sharp} \times \partial\Delta^{n,\flat}) \longrightarrow \Delta^{1,\sharp} \times \Delta^{n+1,\flat}$$

作为一列内角包含映射，依次添加不同的最高维单形，并与左标记角 $\Lambda^{n+1}_0[0 \to 1]$ 到 $\Delta^{n+1}[0 \to 1]$的包含映射复合。 □

A.1.2 推出连接的演算

给定单纯集合的映射 $i\colon A \to B$和 $j\colon K \to L$，定义推出连接 $i \boxtimes j$为映射

$$i \boxtimes j\colon A * L \coprod_{A*K} B * K \xrightarrow{(i*\mathrm{id}_L, \mathrm{id}_B * j)} B * L. \tag{78}$$

如果 i和 j改为标记单纯集合之间的映射，那么 $i \boxtimes j$ 也定义了一个标记单纯集合之间的映射。

引理 A.8. 设 S 和 T 为两个态射类，它们要么都属于 单纯集合范畴，要么都属于 单纯集合范畴$^+$。那么 $\overline{S} \circledast \overline{T} \subseteq \overline{S \circledast T}$。

证明。 对于单纯集合范畴，这见 [Rez22，命题 30。12]标记单纯集的情形是对其中论证的直接改编。 □

引理 A.9。 我们有单纯集合范畴 中的态射类以及单纯集合范畴 单纯集合范畴$^+$之间的以下包含映射 ：

$$\overline{\mathrm{RHorn}} \circledast \overline{\mathrm{Cell}} \subseteq \overline{\mathrm{InnHorn}} \quad and \quad \overline{\mathrm{Cell}} \circledast \overline{\mathrm{LHorn}} \subseteq \overline{\mathrm{InnHorn}},$$
$$\overline{\mathrm{Cell}^\flat} \circledast \overline{\mathrm{RHorn}^\sharp} \subseteq \overline{\mathrm{RHorn}^\sharp} \quad and \quad \overline{\mathrm{LHorn}^\sharp} \circledast \overline{\mathrm{Cell}^\flat} \subseteq \overline{\mathrm{LHorn}^\sharp}.$$

证明。 这些结果由引理 A.8 以及以下计算得出：对于 j， k， $n \in \mathbb{N}$满足 $0 \leqslant j \leqslant n$，存在典范同构

$$\begin{aligned}(\Lambda^n_j \subset \Delta^n) \circledast (\partial\Delta^k \subset \Delta^k) &\cong (\Lambda^{n+1+k}_j \subset \Delta^{n+1+k}),\\ (\partial\Delta^k \subset \Delta^k) \circledast (\Lambda^n_j \subset \Delta^n) &\cong (\Lambda^{n+1+k}_{k+1+j} \subset \Delta^n).\end{aligned}$$

□

以下计算将在第 4 节中起关键作用。

引理 A.10。 设 I 和 J 为有限线性序， $J_0 \subset J$ 为一个子序。分别用 i 和 j 表示包含映射 $\emptyset \subseteq I$ 和 $J_0 \subset J$。那么

(1) 包含映射

$$\mathrm{id}_I * j \colon (\Delta^I)^\flat * (\Delta^{J_0})^\sharp \to (\Delta^I)^\flat * (\Delta^J)^\sharp$$

(2) 和包含映射

$$i \circledast j \colon (\Delta^J)^\sharp \underset{(\Delta^{J_0})^\sharp}{\cup} ((\Delta^I)^\flat * (\Delta^{J_0})^\sharp) \to (\Delta^I)^\flat * (\Delta^J)^\sharp$$

都是标记无穷小的。

证明。 对于这两个断言，只需证明 $J = J_0 \cup \{y\}$ 的情形。

(1) 考虑包含映射 $\mathrm{id}_I * j$。我们对 I 的基数进行归纳。先假设 $I = \emptyset$。假设 y 不是 J 中的极值，令 y_- （分别令 y_+）表示满足 $x < y$ （分别满足 $x > y$）的元素 $x \in J$ 中的最大元（分别为最小元）。考虑脊包含 $\mathrm{Sp}^J \to \Delta^J$，它是内无害的。注意，该映射经过单纯集合 $T = \Delta^{J_0} \cup \Delta^{y_- y y_+}$ 分解为内随附包含 $\mathrm{Sp}^J \to T$。由于 $\Delta^{J_0} \to \Delta^J$ 也经过 T 分解，只需证明 $(\Delta^J_0)^\sharp \to T^\sharp$ 是标记无穷小的：这可由以下两个包含映射推出：$(\Delta^{y_- y_+})^\sharp \to (\Lambda^{y_- y y_+}_{y_+})^\sharp \to (\Delta^{y_- y y_+})^\sharp$ 均为标记无穷小。 y 是 J 的最大元（分别为最小元）的情形类似，只需将 T 替换为 $\Delta^{J_0} \cup \Delta^{y_- y}$（分别替换为 $\Delta^{J_0} \cup \Delta^{y y_+}$）。

对于 $I \neq \emptyset$，假设基数小于 I 的有限线性序的情形已成立。令 x 为 I 的最小元，并令 $I_0 = I \setminus \{x\}$。只需证明该包含

$$(\Delta^{I_0} \subset \Delta^I) \circledast (\Delta^{J_0} \subset \Delta^J) \colon (\Delta^{I_0} * \Delta^J) \underset{\Delta^{I_0} * \Delta^{J_0}}{\cup} (\Delta^I * \Delta^{J_0}) \to (\Delta^I * \Delta^J)$$

是内无害的。这由引理 A.9 得出，因为 $\Delta^{I_0} \subset \Delta^I$ 是右平凡上同伦的，而$\Delta^{I_0} \subset \Delta^I$ 是单态射。

(2) 现在转而考察包含 $i \circledast j$。若 $y > J_0$，则 j 是标记左平凡上同伦的；由引理A.9 可得 $i \circledast j$ 是内无害的，因此是标记等价。否则，我们可以将 J_0 分割为 $J_0^- \coprod J_0^+$，使得 $J_0^- < y < J_0^+$ 且 J_0^+非空。于是 j 分解为以下复合

$$\Delta^{J_0} \longrightarrow \Delta^{J_0} \coprod_{\Delta^{J_0^+}} \left(\Delta^y * \Delta^{J_0^+}\right) \longrightarrow \Delta^J$$

其中，第一个映射由包含 e： $\Delta^{J_0^+} \to \Delta^y * \Delta^{J_0^+}$ 诱导，第二个映射为$(\emptyset \subseteq \Delta^{J_0^-}) \circledast e$。由于 e 是带标记右无害的，利用引理A.9，我们推得 j也具有这一性质，因此 $i \circledast j$也如此，证毕。

□

A.2 回顾

A.2.1 关于笛卡尔纤维化和提升空间的说明

本节回顾函子笛卡尔性的一个有用刻画：它可用某个提升空间的可缩性来表述。该刻画摘自 [Lur17]。设 $p\colon\ X \to S$ 是一个 ∞-范畴之间的内纤维化。

定义 A.11 (p-笛卡尔边)。若态射 $f\colon\ x \to y$ in X 的典范映射是，则称其为笛卡尔

$$q_f : X_{/f} \longrightarrow X_{/y} \times_{S_{/py}} S_{/pf}$$

是平凡纤维化。

记号 A.12。给定态射 $f\colon\ x \to y$ 和对象 z in X，沿 $z\colon\ * \to X$ 对 q_f 进行基变换，可得到一个函子

$$q_z : X_{/f} \times_X \{z\} \longrightarrow \mathcal{D}_z,$$

其中 $\mathcal{D}_z$ 表示 ∞-范畴 $\left(X_{/y} \times_{S_{/py}} S_{/pf}\right) \times_X \{z\}$。$q_z$ 在对象 u 处的纤维记作 $\mathcal{L}$，并称为 u 沿 f 的提升空间；记号中省略了对 (f, z, u) 的依赖。该情形由以下∞-范畴的交换图概述

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{L} & \longrightarrow & X_{/f} \times_X \{z\} & \longrightarrow & X_{/f} \\
\downarrow{\scriptstyle q_u} & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle q_z} & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle q_f} \\
* & \xrightarrow{u} & \mathcal{D}_z & \longrightarrow & X_{/y} \times_{S_{/py}} S_{/pf} \\
 & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
 & & * & \xrightarrow{z} & X.
\end{array}$$

其中所有方块都是笛卡尔的。

我们将使用笛卡尔边的以下等价描述，这实质上是 [Lur09] 中命题 2.4.4.3 及其证明的另一种表述。

引理 A.13。设 $f\colon\ x \to y$ 是 X 中的一个态射。那么，当且仅当对于所有 $z \in X$，q_z 的每个纤维 $\mathcal{L}$ 都是可缩的，f 才是 p- 笛卡尔的。

证明。根据 [Lur09], 中的命题 2.1.2.1，态射 q_f 是右纤维化，因此 q_u 和 q_z 也都是右纤维化。现在注意到，q_f 的每个纤维都具有 $\mathcal{L}$ 的形式，其中对象 z 和 u 可任意选取。由于右纤维化当且仅当其每个纤维都可缩时才是平凡的，因此结论成立。 □

备注 A.14。证明还表明，$\mathcal{L}$ 是一个 Kan复形，因为 q_u 是一个右纤维化，其陪域是 Kan复形。这也说明了将 $\mathcal{L}$ 称为提升空间的合理性。

定义 A.15 (笛卡尔纤维化)。函子 $p\colon\ X \to S$ 是一个笛卡尔纤维化，若对所有$y \in X$，S 中的每个态射 $x \to p(y)$ 都存在沿着 $\overline{p}$ 的提升 $x \to y$，且该提升是 p-笛卡尔的。

A.2.2 主 ∞丛

本节回顾高阶范畴论中群胚对象、∞-群和主丛的一些定义及基本性质。我们基本遵循 [NSS15] 中的阐述，不声称具有原创性。

设 $\mathcal{T}$ 是一个 ∞-拓扑斯。

定义 A.16 ([Lur09，定义 6.1.2。7])。一个群胚对象在 $\mathcal{T}$ 中是一个单纯对象$G_\bullet\colon\ \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{T}$ 使得对每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及每个满足 $[k] \cup [k'] = [n]$ 的划分 $[k] \cap [k'] = \{*\}$，所诱导的图表

$$\begin{array}{ccc}
G_n & \longrightarrow & G_k \\
\downarrow & & \downarrow \\
G_{k'} & \longrightarrow & G_0
\end{array} \tag{79}$$

是 $\mathcal{T}$ 中的一个拉回。Fun(Δ^{op}, $\mathcal{T}$) 中由群胚对象构成的全子范畴记为 Grpd($\mathcal{T}$)。

定义 A.17. 对于 $f\colon X \to Y$ $\mathcal{T}$ 中的一个态射，它有一个相关的群胚对象 $\check{C}(X \to Y)$，属于 $\mathcal{T}$，称为 f 的切赫神经，在次数 n 处由 $(n+1)$ 重纤维积给出

$$\check{C}(X \to Y)_n = X \times_Y X \times_Y \cdots \times_Y X.$$

我们称 f 是一个有效满射，如果它是其切赫神经的余极限余锥，即我们可以写成

$$f\colon X \longrightarrow \check{C}(f).$$

令 $\mathbf{Eff}(\mathcal{T})$ 表示 $\mathbf{Fun}(\Delta^1, \mathcal{T})$ 中由有效满射构成的全子范畴。

命题 A.18 ([Lur09，推论 6.2.3。5])。 切赫神经构造给出了以下 ∞-范畴之间的一个等价

$$\check{C}\colon \mathrm{Eff}(\mathcal{T}) \simeq \mathrm{Grpd}(\mathcal{T}) \tag{80}$$

其逆将一个群胚 $G_\bullet$ 发送到余极限余锥 $G_0 \to \operatorname{colim} G_\bullet$。

定义 A.19。 $\mathcal{T}$ 中的一个 ∞-群 是指 $\mathcal{T}$ 中的一个群胚 $G_\bullet$，满足 $G_0 \simeq *$。$\mathbf{Grpd}(\mathcal{T})$ 中相应的全子范畴记作 $\mathbf{Grp}(\mathcal{T})$。我们通常将空间 G_1 写作 G，并且常常滥用记号，将 G 称为 ∞-群，而将其余的单纯结构 $G_\bullet$ 保持隐含。

现在我们回顾去环化等价。

命题 A.20 ([Lur09，引理 7.2.2。11])。 环路空间函子 Ω 可典范地扩展为一个函子，从 ∞-范畴 $\mathcal{T}_*$ 中 $\mathcal{T}$ 的基点对象到 $\mathbf{Grp}(\mathcal{T})$。它在连通基点对象上的限制给出 ∞-范畴的一个等价

$$\Omega\colon (\mathcal{T}_*)_{\geqslant 1} \simeq \mathrm{Grp}(\mathcal{T})\colon \mathrm{B}.$$

与 Ω 互逆的函子 B 称为去环化函子，或分类空间 函子。与一个 ∞-群 G 相关联的有效满射 $* \to \mathrm{B}G$ 是由单纯对象 诱导的

$$\cdots \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; G \times G \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; G \;\longrightarrow\; * \longrightarrow \mathrm{B}G$$

余极限余锥： $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{T}$。

定义 A.21 ([NSS15，定义 3.1])。 设 $G_\bullet \in \mathrm{Grp}(\mathcal{T})$ 是一个群对象，且 X 是 $\mathcal{T}$中的一个对象。一个 G 在 X 上的作用是一个群胚对象 $(X//G)_\bullet$，它位于 $\mathcal{T}$ 中，形式如下

$$\cdots \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; X \times G \times G \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; X \times G \;\underset{\mathrm{proj}}{\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}}\; X$$

使得逐次投影映射 $X \times G^n \to G^n$ 给出群胚对象的一个态射 $(X//G)_\bullet \to G_\bullet$。该作用的 ∞-商 是余极限对象 $X//G := \mathbf{colim}(X//G)$，位于 $\mathcal{T}$ 中。 ∞-范畴 $G\mathbf{Action}(\mathcal{T})$，即 G 中的作用范畴，是 $\mathbf{Grpd}(\mathcal{T})_{/G_\bullet}$ 中以 G-作用为对象的全子范畴。

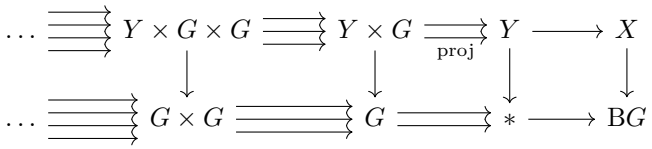
定义 A.22 （[NSS15，定义 3。4]）。 设 $G_\bullet \in \mathrm{Grp}(\mathcal{T})$ 是一个群对象，且 X 是 $\mathcal{T}$中的一个对象。一个 G-主 ∞-丛 在 X 上的对象是一个态射 $Y \to X$，位于 $\mathcal{T}$ 中，并且带有一个 G-作用于 Y上的作用，使得 $Y \to X$ 展现 X 为商 $Y//G$。
X 上的 G-主 ∞-丛的 G ∞-范畴 $\mathbf{Bun}(X)$，是商函子在 X 处的同伦纤维

$$G\mathrm{Action}(\mathcal{T}) \subseteq \mathrm{Grpd}(\mathcal{T})_{/G_\bullet} \longrightarrow \mathrm{Grpd}(\mathcal{T}) \xrightarrow{\mathrm{colim}} \mathcal{T}.$$

以下结果将在第 5 节中发挥作用。

命题 A.23 ([NSS15，命题 3。8])。 若 G 是一个 ∞-群，且 $X \to \mathrm{B}G$ 是$\mathcal{T}$中的一个态射，那么它在 $Y \to X$ BG 的指定点处的同伦纤维带有一个典范的 G-主 ∞-丛结构，底空间为 X。

通过考虑以下增强单纯对象之间的态射，可以得到 G-主 ∞-丛结构



其中所有矩形都是笛卡尔方块。

此外，所有主 ∞-丛都通过此构造得到，正如下一个结果所述。

定理 A.24（分类 G-主 ∞-丛，[NSS15，定理 3.17]）。对于所有 ∞-群 $G \in \mathrm{Grp}(\mathcal{T})$ 以及所有对象 $X \in \mathcal{T}$，存在一个自然等价：∞-群胚

$$G\mathrm{Bun}(X) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{T}}(X, \mathrm{B}G)$$

在对象上由以下构造给出：$(p\colon X \to \mathrm{B}G) \mapsto (\mathrm{hofib}(p) \to X)$ 命题 *A.23*。

参考文献

[Bar13] Clark Barwick. 关于正合拟范畴的 Q-构造. *arXiv* 电子预印本，页码 arXiv:1301.4725，2013 年。[BZFN10] David Ben-Zvi、John Francis 和 David Nadler. 导出代数几何中的积分变换与 Drinfeld 中心. 美国数学会杂志，23(4):909–966，2010 年。[Cam21] Alexander Campbell. Joyal 的圆柱猜想. 数学进展，389:107895，2021 年。[Cis19] Denis-Charles Cisinski. 高阶范畴与同伦代数，第 180 卷，收入 剑桥高等数学研究丛书。剑桥：剑桥大学出版社，2019 年。[Cos07] Kevin Costello. 拓扑共形场论与 Calabi–Yau 范畴. 数学进展，210(1):165–214，2007 年。[CV06] Ralph L. Cohen 和 Alexander A. Voronov. 弦拓扑札记. 载于弦拓扑与循环同调，巴塞罗那 CRM 数学高级课程，页 1–95。Birkhäuser，巴塞尔，2006 年。[Dug01] Daniel Dugger. 万有同伦理论. 数学进展，164(1):144–176，2001 年。[Gin17] Grégory Ginot. 高阶 *Hochschild (*上*)*同调中的 *Hodge* 滤过与运算及其在高阶弦拓扑中的应用，页 1–104。Springer 国际出版公司，Cham，2017 年。[GR17] Dennis Gaitsgory 和 Nick Rozenblyum. 导出代数几何研究。第一卷：对应与对偶，第 221 卷，收入 数学调查与专著。普罗维登斯，罗得岛州：美国数学会（AMS），2017 年。[GTZ12] Gregory Ginot、Thomas Tradler 和 Mahmoud Zeinalian. 高阶 Hochschild 上同调、膜拓扑与 E_n-代数映射的中心化子. *arXiv* 电子预印本，页码 arXiv:1205.7056，2012 年 5 月。[Hau18] Rune Haugseng. 迭代跨度与经典拓扑场论. 数学杂志，289(3-4):1427–1488，2018 年。[HHLN20]Rune Haugseng、Fabian Hebestreit、Sil Linskens 和 Joost Nuiten. 双变量纤维化、因子分解系统以及跨度的 ∞-范畴. *arXiv* 电子预印本，页码 arXiv:2011.11042，2020 年 11 月。

[Hu06] Po Hu. 一般空间上的高阶弦拓扑. 伦敦数学会会刊 (3)，93(2):515–544，2006 年。[Ker21] David Kern. 导出 Deligne–Mumford 叠的范畴化拟映射理论. 学位论文，昂热大学，2021 年 9 月。[Lur09] Jacob Lurie. 高阶拓扑斯理论，第 170 卷，数学年刊研究丛书. 普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009 年。[Lur17] Jacob Lurie. 高阶代数. 哈佛大学，2017 年。[Lur22] Jacob Lurie. Kerodon. https://kerodon.net，2022 年。[MR18] Etienne Mann 和 Marco Robalo. 膜作用、格罗莫夫–威滕理论的范畴化与量子 K 理论. 几何与拓扑，22(3):1759–1836，2018 年。[MR21] Etienne Mann 和 Marco Robalo. 运用导出代数几何的格罗莫夫–威滕理论. 载于《导出代数几何》，页 147–186。巴黎：法国数学会（SMF），2021 年。[NSS15] Thomas Nikolaus、Urs Schreiber 和 Danny Stevenson. 主 ∞-丛：一般理论. 同伦与相关结构杂志，10(4):749–801，2015 年。[Rez22] Charles Rezk. 关于拟范畴的一些内容，2022 年 6 月。讲义，网址：https://faculty.math.illinois.edu/~rezk/quasicats.pdf。[Ste18] Danny Stevenson. 重新审视内纤维化的稳定性. 范畴论及其应用，33:523–536，2018 年。[Ste20] Germán Stefanich. 高阶层理论 I：对应. arXiv 电子预印本，页码 arXiv:2011.03027，2020 年 11 月。[SW03] Paolo Salvatore 和 Nathalie Wahl. 带框架圆盘歌剧与 Batalin–Vilkovisky 代数. 季刊数学杂志，54(2):213–231，2003 年。[Toë13] Bertrand Toën. 膜导出模空间上的运算 . arXiv 电子预印本，页码 arXiv:1307.0405，2013 年 7 月。