arXiv:2302.12215v1 [math.LO] 23 Feb 2023

一种没有单色直角三角形的平面着色

巴拉兹·布尔西奇克·彼得·科姆亚特

2023年2月24日

摘要

我们对以下结果给出了一个完整且正确的证明，该结果此前曾在 [1] 中提出。如果连续统假设成立，那么存在一种使用可数多个颜色的平面着色，使得不存在单色直角三角形。

保罗·埃尔德什最喜爱的主题之一[1] 是应用选择公理来构造悖论集以及欧几里得空间的着色。在众多其他问题中，他提出了以下问题：是否存在一种使用可数多个颜色的平面着色，使得不存在单色直角三角形？在 [1] 中，已证明这等价于连续统假设。

最近，资深作者发现， [1] 中关于正向部分的证明并不完整。这里我们给出一个完整且正确的证明。

我们注意到，Schmerl 后来在 [2]中给出了另一种更一般的证明，但该证明不那么初等。

记号与定义。我们采用公理化集合论的记号和术语。序数均指冯·诺伊曼序数， ω_1 是最小的不可数序数。

T定理。（连续统假设）存在 $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \omega$，其中没有同色直角。

*部分得到匈牙利国家研究基金 OTKA K 131842[1]资助。2010 年数学主题分类：主要分类 03E50，次要分类 51M04、05D10。关键词与短语：连续统假设、欧几里得空间的拉姆齐理论

证明。利用连续统假设，我们将 $\mathbb{R}^2$ 和由平面直线与圆组成的集合 $\mathcal{E}$ 分解为递增的连续集合序列，记作 $\mathbb{R}^2 = \bigcup\{H_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 和 $\mathcal{E} = \bigcup\{\mathcal{E}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$，使得 $H_0 = \mathcal{E}_0 = \emptyset$ 并且

(1) 如果 $x \neq y \in H_\alpha$，那么它们的连线和泰勒斯圆都在 $\mathcal{E}_\alpha$ 中；(2) 如果 $x, y, z \in H_\alpha$ 不共线，那么它们的回路在 $\mathcal{E}_\alpha$ 中；(3) 如果 $e_0 \neq e_1 \in \mathcal{E}_\alpha$，那么 $e_0 \cap e_1 \subseteq H_\alpha$；(4) 如果 $x \in C \in \mathcal{E}_\alpha$, C 是一个圆，那么 x 在 C 中的对径点在 H_α 中；(5) 如果 $L \in \mathcal{E}_\alpha$ 是一条直线，$x \in H_\alpha \cap L$，那么垂直于 L 且也包含 $x \in L'$ 的直线 L' 也包含在 $\mathcal{E}_\alpha$ 中。

这可以通过常用的斯科伦型闭包论证来完成。

我们将通过对 $\alpha < \omega_1$ 进行超限递归，构造着色 $f : \mathbb{R}^2 \to \omega$ 和函数 $\varphi : \mathcal{E} \to [\omega]^\omega$，用于 $H_{\alpha+1} - H_\alpha$ 和 $\mathcal{E}_{\alpha+1} - \mathcal{E}_\alpha$，并满足以下条件：

(6) $f|(H_{\alpha+1} - H_\alpha)$ 是单射，(7) 如果 $x \in H_{\alpha+1} - H_\alpha$, $e \in \mathcal{E}_\alpha$, $x \in e$，那么 $f(x) \in \varphi(e)$，(8) 如果 $C \in \mathcal{E}$ 是一个圆，$i \in \varphi(C)$，$x, y \in C$, $f(x) = f(y) = i$，那么 x, y 不是对径的，(9) 如果 $C \in \mathcal{E}$ 是一个圆，$i \notin \varphi(C)$，那么 $|f^{-1}(i) \cap C| \leq 2$，(10) 如果 $L \in \mathcal{E}$ 是一条直线，$i \notin \varphi(L)$，那么 $|f^{-1}(i) \cap L| \leq 1$，(11) 如果 L, L' 是垂线，$\{x\} = L \cap L'$，那么 $f(x) \notin \varphi(L) \cap \varphi(L')$。

断言 1. 不存在由 f 同色的直角三角形。

证明。假设 x、y、z 构成一个直角三角形，直角位于 y，且 $i = f(x) = f(y) = f(z)$。设 C 为经过 x、y、z 的圆。若 $i \notin \varphi(C)$，则与 (9) 矛盾。若 $i \in \varphi(C)$，则与 (8) 矛盾，因为 x、z 是对径的。 □

断言 2. 若 $x \in H_{\alpha+1} - H_\alpha$，则至多存在一个 $e \in \mathcal{E}_\alpha$ 使得 $x \in e$。

证明。由 (3) 得证。 □

我们添加以下条件：

(12) 若 $x \in H_{\alpha+1} - H_\alpha$、$L$ 是一条直线，$x \in L \in \mathcal{E}_\alpha$、$L'$ 是在 x 处垂直于 L 的直线，且 $\{y\} = L' \cap H_\alpha$，则 $f(x) \neq f(y)$。

注意，根据 (3) 和 (5)，$L' \in \mathcal{E}_{\alpha+1} - \mathcal{E}_\alpha$；根据 (1)，$|L' \cap H_\alpha| \leq 1$。

假设 $f|H_\alpha$ 和 $\varphi|\mathcal{E}_\alpha$ 已经构造好，我们需要定义 $f|(H_{\alpha+1} - H_\alpha)$ 和 $\varphi|(\mathcal{E}_{\alpha+1} - \mathcal{E}_\alpha)$。

将 $H_{\alpha+1} - H_\alpha$ 枚举为 $\{x_j : j < \omega\}$。通过对 j 进行递归，定义 $f(x_j)$，使得

that

$$f(x_j) \geq \max\{f(x_0), \ldots, f(x_{j-1})\} + 2,$$

$f(x_j)$ 满足 (7)，且不同于 (12) 所排除的（可能的）颜色。显然，(6) 得到满足，而且 $\omega - f[H_{\alpha+1} - H_\alpha]$ 是无限的。

接下来，我们定义 φ 在 $\mathcal{E}_{\alpha+1} - \mathcal{E}_\alpha$中的回路上。若 C 是这样的一个回路，令 $A = C \cap H_\alpha$。由 (2)，我们有 $|A| \leq 2$。

情形 1. $|A| \leq 1$ 或 f 在 A的两个元素上取不同的值。在这种情形下，

令 $\varphi(C) = \omega - f[A]$。

情形 2. $|A| = 2$ 和 f 在 A的元素上取相同的值。

在这种情形下，令 $\varphi(C) = \omega$。

最后，我们定义 φ 在 $\mathcal{E}_{\alpha+1} - \mathcal{E}_\alpha$中的直线上。设 $L \in \mathcal{E}_{\alpha+1} - \mathcal{E}_\alpha$ 是一条直线。令 $B = L \cap H_\alpha$。注意，由 (1)， $|B| \leq 1$。若 B 非空，令 y为其唯一的点。

情形 1. $B = \emptyset$ 或 $f(y) \notin f[L \cap (H_{\alpha+1} - H_\alpha)]$。

于是令 $\varphi(L) = \omega - f[L \cap H_{\alpha+1}]$。

情形 2. $f(y) \in f[L \cap (H_{\alpha+1} - H_\alpha)]$。

Then set $\varphi(L) = (\omega - f[L \cap (H_{\alpha+1} - H_\alpha]) \cup \{f(y)\}$.

断言 3. $\varphi(e) \in [\omega]^\omega$ $(e \in \mathcal{E}_{\alpha+1} - \mathcal{E}_\alpha)$。

证明。若 $C \in \mathcal{E}_{\alpha+1} - \mathcal{E}_\alpha$ 是回路，则在情形 2 中这显然成立；而在情形 1 φ 中，(C) 除去至多 2 个元素后就是 ω。

若 $L \in \mathcal{E}_{\alpha+1} - \mathcal{E}_\alpha$ 是直线，则由于 $f[H_{\alpha+1} - H_\alpha]$ 是余无限集，该命题成立。 □

断言 4. φ 满足 (8)。

证明。假设 $C \in \mathcal{E}_{\alpha+1}$ 是圆， x、 $y \in C \cap H_{\alpha+1}$ 是对径的，且$f(x) = f(y) = i$。

情形 1. $C \in \mathcal{E}_\alpha$。

在这种情形下，根据 (6)， x、 y 中必有一个属于 H_α ，不妨设为 x 。然后根据 (4)， y 也属于 H_α，由归纳法即可得证。

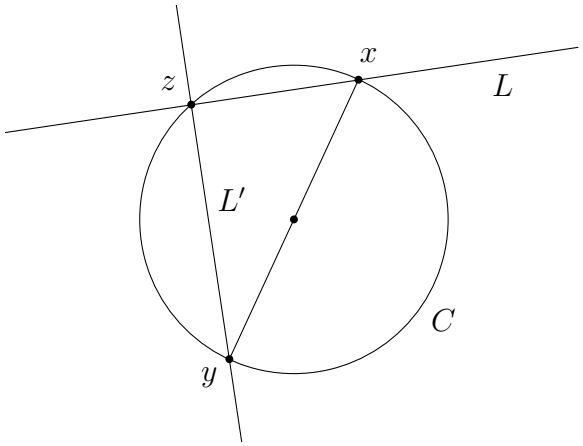
情形 2. $C \in \mathcal{E}_{\alpha+1} - \mathcal{E}_\alpha$。

若 x、 $y \in H_{\alpha+1} - H_\alpha$，则根据 (6)， f（x） $\neq f$（y）。

若 x、 $y \in H_\alpha$，则根据 (1)， $C \in \mathcal{E}_\alpha$ ，再次得到矛盾。

最后，假设 $x \in H_\alpha, y \in H_{\alpha+1} - H_\alpha$。如果在 $\varphi(C)$ 的定义中适用情形 1，那么 $i \notin \varphi(C)$。因此，我们可以假设情形 2 成立,

$H_\alpha \cap C = \{x, z\}$并且 $f(y) = f(z) = i$。令 L为 x与z的连线， L' 为 z 与 y的连线。



于是 $L \in \mathcal{E}_\alpha$ 由 (1) 得出，接着 $L' \in \mathcal{E}_\alpha$ 由 (5) 得出。此外，由 (10), $i \in \varphi(L) \cap \varphi(L')$；结合 $f(z) = i$，这与 (11) 矛盾。 □

断言 5. (9) 成立。

证明。假设 $C \in \mathcal{E}_{\alpha+1}$ 和 $i \notin \varphi(C)$。若 $C \in \mathcal{E}_\alpha$，则由 (7) 可知， $C \cap f^{-1}(i)$ 不包含来自 $H_{\alpha+1} - H_\alpha$ 的元素。若 $C \in \mathcal{E}_{\alpha+1} - \mathcal{E}_\alpha$ 且在 $\varphi(C)$ 的定义中情形 2 成立，则无需证明。最后假设 $C \in \mathcal{E}_{\alpha+1} - \mathcal{E}_\alpha$，且情形 1 成立。于是，若 $i \notin \varphi(C)$，则$C \cap f^{-1}(i)$ 在 H_α中至多有一个元素，在 $H_{\alpha+1} - H_\alpha$ 中由 (6) 可知至多有一个元素，也就是说至多有 2 个。 □

断言 6。(10)成立。

证明。假设 $L \in \mathcal{E}_{\alpha+1}, i \notin \varphi(L)$。若 $L \in \mathcal{E}_\alpha$，则 $L \cap f^{-1}(i)$ 在 $H_{\alpha+1} - H_\alpha$ 中不会增加。若 $L \in \mathcal{E}_{\alpha+1} - \mathcal{E}_\alpha$ 且 $B = L \cap H_\alpha$ 为空，则根据 (6)，$|L \cap f^{-1}(i)| \leq 1$。否则，根据 (1)， B 是单元素集，令 y 为其唯一元素。若 $f(y) \notin f[L \cap (H_{\alpha+1} - H_\alpha)],$，则再次有 $|L \cap f^{-1}(i)| \leq 1$；否则，我们处于 $\varphi(L)$ 定义中的情形 2，在该情形下，我们特意将 $f(y)$ 添加到了 $\varphi(C)$ 中。 □

断言 7。(11)成立。

证明。假设 $L, L' \in \mathcal{E}_{\alpha+1}$ 垂直， $L \cap L' = \{x\}, i = f(x) \in \varphi(L) \cap \varphi(L')$。

情形 1. $L, L' \in \mathcal{E}_\alpha$。

在这种情形下，根据 (3)，$x \in H_\alpha$，因此 (11) 中的构型已经出现在H_α，$\mathcal{E}_\alpha$中。

情形 2。$L \in \mathcal{E}_\alpha$，$L' \in \mathcal{E}_{\alpha+1} - \mathcal{E}_\alpha$。

由于 $i \in \varphi(L')$，根据后者的定义，存在 $y \in L' \cap H_\alpha$，$f(y) = i$。这正是根据 (12) 对 x 的着色所排除的情形。

情形 3。L，$L' \in \mathcal{E}_{\alpha+1} - \mathcal{E}_\alpha$。

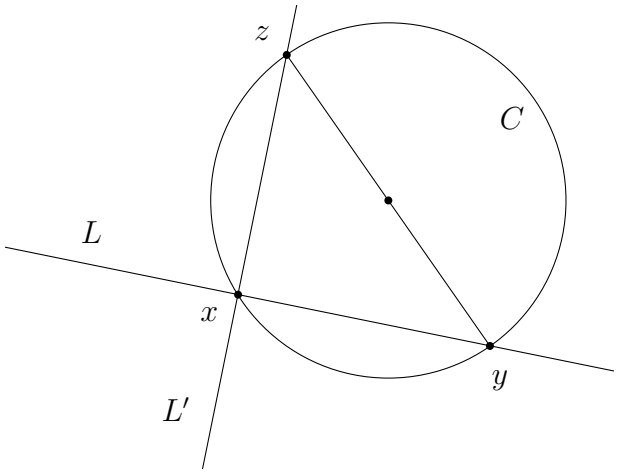
子情形 3.1。$x \in H_\alpha$。

由于 $i = f(x) \in \varphi(L)$，根据 $\varphi(L)$ 的定义，存在 $y \in L \cap (H_{\alpha+1} - H_\alpha)$，满足 $f(y) = i$。同样，存在 $z \in L' \cap (H_{\alpha+1} - H_\alpha)$，满足 $f(z) = i$。现在，y，z 是 $H_{\alpha+1} - H_\alpha$ 中的不同元素，并且 $f(y) = f(z)$，这与 (6) 矛盾。

子情形 3.2. $x \in H_{\alpha+1} - H_\alpha$。

由于 $i = f(x) \in \varphi(L)$，存在 $y \in L \cap H_\alpha$, $f(y) = i$。类似地，存在 $z \in L' \cap H_\alpha$, $f(z) = i$。

设 C 为包含 x, y, z的回路。



由于 L, L' 垂直，y 和 z 在 C中互为对径点。如 C 中所示，有 3 个颜色为 i的点，$i \in \varphi(C)$。但这与y 和 z的对径性矛盾。 □

定理的证明至此完成。 □

参考文献

[1] P. Erd˝os、P. Komj´ath：《$\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$的可数分解》，《离散与计算几何》，5（1990），325–331。

[2] James H. Schmerl：《欧几里得空间中的可避免代数子集》，《美国数学会汇刊》，352（1999），2479–2489。

Bal´azs Bursics 数学研究所 E¨otv¨os 大学 布达佩斯，P´azm´any P. s. 1/C 1117，匈牙利，电子邮箱：bursicsb@gmail.com

P´eter Komj´ath 数学研究所 E¨otv¨os 大学 布达佩斯，P´azm´any P. s. 1/C 1117，匈牙利，电子邮箱：peter.komjath@gmail.com