arXiv:2302.12230v1 [math.CO] 23 Feb 2023

等角直线与固定第二特征值的大重数

CARL SCHILDKRAUT

Abstract. 针对蒋和波利安斯基，以及蒋、蒂多尔、姚、张和赵提出的问题，我们证明存在无穷多个角 θ，使得在原点相交且两两夹角为 θ 的直线的最大数量超过$n+\Omega(\log\log n)$，但至多为 $n+o(n)$。为此，对于各种实数λ 和整数 d，我们构造了第二特征值恰为 λ 且第二特征值重数任意大的 d-正则图。我们的构造以二部图因子上的一种分布为核心，该分布具有集中性质。

1. Introduction

在 $\mathbb{R}^n$ 中，经过原点的一组直线若任意两条都相交成相同的角 θ，则称其为等角直线。给定维数下等角直线的最大数量是一个自然且研究充分的问题。Gerzon 的一个简短线性代数论证（见[LS73]）给出了维数为 n 时的上界 $\binom{n+1}{2}$；而 de Caen 的构造 [dC00]则给出了量级为n^2 的下界。

也可以考虑公共角固定的情形。对于一个 $\alpha \in (0,1)$，令 $N_\alpha(n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中任意两条直线的夹角均为 $\arccos\alpha$ 时，直线的最大条数。通过构造由向量张成的直线，这些向量生成的格拉姆矩阵在对角线上为 1，且非对角线元素为 α，可以看出，对于每个 α 和 n，$N_\alpha(n) \geq n$。另一方面，除非 $(1-\alpha)/(2\alpha)$ 是一个大于其所有伽罗瓦共轭的全实代数整数 [JP20, 命题 23]，否则 $N_\alpha(n) \leq n+2$。

关于 $N_\alpha(n)$ 的大量文献都关注极限 $\lim_{n\to\infty} N_\alpha(n)/n$。由于蒋、蒂多尔、姚、张和赵最近的一项结果 [JTY+21] 证实了蒋和波利安斯基的猜想 [JP20, 猜想 A],，这个极限（实质上）已被完全确定。我们首先陈述他们的结果，为此需要先给出一个定义。凡是提到图 G 的特征值时，我们指的是其邻接矩阵 A_G 的特征值。

定义 1.1. 对于正实数 λ，λ 的谱半径阶 $k(\lambda)$是指最大特征值恰为 λ的图的顶点数的最小值；若不存在这样的图，则为 ∞。

定理 1.2（[JTY+21，定理 1.2]）。固定 $\alpha \in (0,1)$，并令 $\lambda = (1-\alpha)/(2\alpha)$。

(a) 若 $k = k(\lambda)$有限，则对所有充分大的 n，$N_\alpha(n) = \lfloor k(n-1)/(k-1) \rfloor$。(b) 若 $k(\lambda) = \infty$，则 $N_\alpha(n) = n + o(n)$。

在情形 (b) 中，由 [JTY+21] 给出的 $o(n)$ 项约为 $n/\log\log n$，其来源是对有界度图邻接矩阵的第二大特征值重数的同一上界。该结果启发了人们对这一重数的界限展开研究。McKenzie、Rasmussen 和 Srivastava [MRS21] 将正则图情形下的上界改进为 $n/\log^{1/5-o(1)} n$，并且还给出了次线性上界

适用于度无界的情形。另一方面，海曼、希尔德克劳特、张和赵[HSZZ22] 给出了一个下界（即构造了第二特征值重数较大的有界度图）： $n^{1/2-o(1)}$。

虽然定理 1.2 确定了当 n 增大时 $N_\alpha(n)$ 的主项，但并未确定 $k(\lambda) = \infty$ 情形下次级项的阶。[JP20] 和 [JTY+21] 猜想以下界：

猜想 1.3（[JP20，猜想 B], [JTY+21，猜想 6.1]）。取定 $\alpha \in (0, 1)$，并令 $\lambda = (1-\alpha)/(2\alpha)$。若 $k(\lambda) = \infty$，则 $N_\alpha(n) = n + O_\alpha(1)$。

我们的主要结果是反驳猜想 1.3 对无穷多个 α 成立，并证明 $N_\alpha(n)$ 存在“中间”行为。

定理 1.4。对无穷多个 $\alpha \in (0, 1)$，函数 $N_\alpha(n)$ 满足

$$n + \Omega(\log\log n) \le N_\alpha(n) \le n + O(n/\log\log n).$$

我们通过构造一族有界度正则图得到这一结果；对于各种 λ，其第二特征值恰为 $\lambda = (1-\alpha)/(2\alpha)$。我们构造的第二特征值重数远小于 [HSZZ22] 中的重数。然而，据我们所知，这是首个在特征值固定时给出无界第二特征值重数的结果。

定理 1.5. 对于无限多个正实数 λ，存在无限多个连通 n顶点图，其度有界，且第二特征值恰为 λ，重数为 $\Omega(\log\log n)$。特别地，以下情形成立：

(a) λ 是充分大的整数，或 (b) 对于充分大的整数 u，
$\lambda = 2\sqrt{u^2+1} - 1$。

事实上，对于任何作为满足某些技术条件的对称整数矩阵最大特征值的实数 λ，我们都可以证明这一结果；参见定义 5.3 和推论 5.6。部分 (b) 的一个更精确版本——定理 5.8——足以推出定理 1.4。

2. 证明概述

本节概述如何构造满足定理 1.5 的图。受 Marcus、Spielman 和 Srivastava [MSS15], 的启发，该构造将通过 2-提升操作递归进行；Bilu 和 Linial [BL06]最早将其与特征值结合起来研究。我们构造一个图序列 $G_0, G_1, \ldots$，使得每个 G_i 都只有一个大于 λ 的特征值，并且 λ 是 G_i 的一个特征值，其重数至少为 i。

对于任意图 G，我们将其邻接矩阵记为 A_G，即 $V(G) \times V(G)$ 矩阵；对于 $v, w \in V(G)$，当且仅当 $vw \in E(G)$ 时，其条目 vw 为 1。对于任意平方矩阵 M 以及不超过 M 维数的正整数 i，我们令 $\lambda_i(M)$ 表示 M 的第 i 大特征值，其中特征值按重数计数。

整数第二特征值。当 λ 为整数时，即为了得到定理 1.5(a)，过程如下：

(1) 从二部图 $G_0 = K_{d,\ d}$ 开始，其中 d 略大于 λ。(2) 从 G_i出发，反复应用 2-提升，(i) 不增加新的大特征值，并且 (ii) 降低现有大特征值特征向量的 L^∞ 范数。为了构造这样的提升，我们使用 Marcus、Spielman 和 Srivastava [MSS15]的一个结果；

我们所需的确切性质在这里的推论 2.2 中陈述。将经过这些连续提升得到的图称为 G'_i。

(3) 完成这些提升后，从 G'_i 中按照适当的分布随机选取一个边子集（见第3节），使得 G'_i 的每个顶点都恰好与该子集中的 $a := (d-\lambda)/2$ 条边关联。该子集决定了 G'_i 的一种 2-提升G_{i+1}。对于这次提升，将 $V(G'_i)$ 的一份拷贝中的所有顶点赋值为 1，并将另一份拷贝中的所有顶点赋值为 -1 的向量，是 $A_{G_{i+1}}$ 的一个特征向量，其特征值为 $d-2a=\lambda$。假设 d 的选取恰当，那么以正概率，该特征值就是新增的最大特征值。

非整数第二特征值。为了证明定理 1.5(b)，我们沿用上述总体策略，但做了一些修改。在步骤 (1) 中，我们不再构造 d-正则二部图，而是使用 k-部图，其中每一对部之间的图都是正则二部图。在步骤 (2) 中，我们对每一对部之间的图分别进行 Marcus、Spielman 和 Srivastava 的 2-提升。最后，在 (3) 中，我们从每一对部之间选取一个边子集，使其构成指定度数的正则二部图。改变各部之间所选的度数，可以改变重复出现的特征值。关于如何选择各部之间度数的更详细概述，请见第 5 节开头。

2-提升。给定一个图 G，对 G 的符号赋值是一个映射 $s\colon E(G)\to\{\pm1\}$。每个符号赋值都有一个邻接矩阵 A_s，其中 A_G 中对应于边 e 的条目被替换为$s(e)$。对于 G 的任意符号赋值 s，都可以关联一个定义在加倍顶点集$\{v_0,v_1$上的图 $G\colon v\in V(G)\}$。其中，对每条边 $uv\in E(G)$，若 $s(uv)=1$，则在 $\tilde{G}$ 中画出边 u_0v_0和 u_1v_1；若 $s(uv)=-1$，则画出边 u_0v_1 和 u_1v_0。图 G 的邻接矩阵可写成分块形式：

$$A_{\tilde{G}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}A_G+A_s & A_G-A_s\\ A_G-A_s & A_G+A_s\end{pmatrix}.$$

这样的图 G 称为 G 的 2-提升，这是因为 2-覆盖映射 $G\to G$ 将v_0 和 v_1 映射到 v。我们作如下观察：

(1) $A_{\tilde{G}}$ 的特征值多重集是 A_G 的特征值多重集与 A_s的特征值多重集的不交并。若 x 是 A_G（分别为 A_s）对应特征值 μ的特征向量，则 $x\oplus x$（分别为$x\oplus -x$）是 $A_{\tilde{G}}$ 对应相同特征值 μ的特征向量。(2) 若顶点 $v\in V$（G）的度为 d_v，则 v 上方与之对应的顶点 v_0、$v_1\in V$（G）的度也为 d_v。(3) 若 G 是 k部图，其中 V（G）为 $=V_1\sqcup V_2\sqcup\cdots\sqcup V_k$，则 G 也是 k部图；对于每个 i，与 V_i 中的元素对应的顶点之间不存在边。

Ramanujan提升。Marcus、Spielman 和 Srivastava 定理的一个特殊情形表明，存在某些提升，从非常强的意义上说，它们不会增加任何较大的特征值。

定理 2.1（[MSS15，定理 5.3]）。每个 d-正则图都存在一种符号赋值，使其邻接矩阵 A_s 的第二特征值至多为 $2\sqrt{d-1}$。

在二部图的情形下，我们将使用以下等价表述。

推论 2.2. 对于每个 d-正则二部图 G，都存在一个 G 的 2-提升 G，使得对于 $A_{\tilde{G}}$的每个满足 $|\mu|>2\sqrt{d-1}$的特征值 μ，$A_{\tilde{G}}$的 μ-特征子空间与 A_G的对应特征子空间具有相同的维数。此外，若 $\{x_1,\dots,x_k\}$是 A_G的 μ-特征子空间的一组基，则 $\{x_1\oplus x_1,\dots,x_k\oplus x_k\}$是 A_G的 μ-特征子空间的一组基。

证明。令 s 为 G 的一个符号赋值，如定理 2.1 所述，使得 $\lambda_1(A_s) \leq 2\sqrt{d-1}$。由于 A_s 是二部图的符号赋值，其谱关于 0 对称，因此 $\|A_s\| \leq 2\sqrt{d-1}$。结论由关于 2-提升的观察 (1) 得出。□

重数递增提升与图因子。虽然我们需要 Ramanujan提升来确保不会出现过多的大特征值，但在增加第二特征值重数这一步中，我们将构造更专门的 2-提升。这类提升来自对适当 a-因子的选择。

定义 2.3。给定一个 d-正则图 G 和一个整数 $0 \leq a \leq d$， G 的 a-因子是 G 上以 $V(G)$为顶点集的 a-正则子图。等价地， a-因子由边集 $S \subset E(G)$的一个子集确定，其中 G 的每个顶点在 S中恰好关联 a 条边。

如方法概要（针对整数特征值的特例）所述，我们将通过一种符号赋值进行提升，使得每个顶点都关联相同数量的符号为 -1的边。令H 表示由两部分之间符号为 -1的边构成的图，这等价于 H 是 G的一个因子。考虑从某个分布中随机选取一个 d-正则图G 的 a-因子 H，其中每条边以相同概率出现在 H 中；再令 s 表示如下确定的符号赋值：当且仅当 $e \in E(H)$时， $s(e) = -1$。那么

$$\mathbb{E}[A_s] = \mathbb{E}[A_G - 2A_H] = \left(1 - \frac{2a}{d}\right) A_G.$$

给定任意 H， A_s 将具有一个特征向量（全一向量），其特征值为 $d - 2a$。另一方面，如果我们能够选择 H，使得 A_s 在谱范数意义下接近其期望，那么 A_G 的特征值应当在某个小误差范围内按因子 $1 - 2a/d$ “缩小”，而 $d - 2a$ 应当是 A_s的最大特征值。我们无法证明能够以这种方式选取 H。然而，为了实现这一目标，我们给出如下命题：在 d-正则二部图 G 的 a-因子上存在一个分布，使得对于形如 $u^\intercal A_H v$的 Lipschitz 函数，该分布除去一个小谱范数矩阵后表现出集中性。完成足够多次 Ramanujan提升后，这一集中性结果将足以证明存在一个符号赋值 s，使得 $\lambda_1(A_s) = d - 2a$。

命题 2.4. 设 a 和 d 为满足 $0 \leq a \leq d$的正整数。设 G 为一个定义在 n 个顶点上的二部d-正则图。存在定义在对 (H, M) 集合上的一个概率分布，其中 H是 G的一个 a-因子，且 M是满足 $\|M\| \leq 6\sqrt{d}$的一个 $n \times n$矩阵，使得对于任意向量 u、 $v \in \mathbb{R}^n$ 以及任意实数 $t \geq 0$,

$$\Pr\left[\left|u^\intercal \left(A_H - \frac{a}{d}A_G + M\right) v\right| > t(2+\sqrt{2})\sqrt{dn\lceil \log_2 n\rceil}\|u\|_\infty \|v\|_\infty\right] \leq 2(\log_2 d)e^{-t^2/2}.$$

矩阵 M 与其说是分布中不可或缺的组成部分，不如说是证明过程中的一种产物；我们应将命题中所述的分布理解为仅定义在 a-因子上的分布，并附带一些有助于分析的“额外数据”。

我们以概述本文余下部分作为本节的结尾。在第3节中，我们证明命题 2.4，并给出一个推论，使我们能够构造 a 因子，其邻接矩阵在 $\mathbb{R}^{V(G)}$ 的某些特定子空间上与 $(a/d)A_G$ 的谱范数相近。在第4节中，我们应用这一构造证明定理 1.5 的情形 (a)，从正则二部图中得到具有较大整数第二特征值的高重数。在第 5 节中，我们将这一构造推广到 k 部图，并证明定理 1.5(b) 的情形 (b)。随后，在第6节中，我们将定理 1.5(b) 中构造的图应用于等角直线问题，从而得到定理 1.4。

3. Random factors of graphs

本节中，我们证明命题 2.4。该命题给出了任意 d 正则二部图 G 的 a 因子上的一个分布；除去一个小谱范数矩阵后，该分布呈现出相对集中的特性。该分布按如下方式构造：

(1) 在 d 为偶数且 $a = d/2$ 的特殊情形下：

(a) 将 G 划分为边不相交的环，每一步都将剩余环中最小的一个加入划分。引理 3.1 表明，大环的并具有较小的谱范数。(b) 注意，划分中的所有环长度均为偶数。从每个含有 2ℓ 条边的环中，均匀随机地从两种可能中选取一个含 ℓ 条边的交替边集，并将该集合加入 H。对于大环，可以确定性地进行选择。例如，若其中一个环为 $v_1v_2v_3v_4v_5v_6$，则将边 $\{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6\}$ 或边 $\{v_2v_3, v_4v_5, v_6v_1\}$ 加入 H。

（2）以（1）为子程序，递归进行：(a) 在 $d = 1$ 的基例中，无需进行选择：G 有唯一的 0-因子和唯一的 1-因子。(b) 如果 $a > d/2$，则构造一个随机的（$d - a$）-因子，并在 G 中取其补图。(c) 如果 $a \le d/2$ 且 d 为偶数，则使用（1）构造 G 的一个随机（$d/2$）-因子 G'，然后构造 $d/2$-正则二部图 G' 的一个随机 a-因子。(d) 如果 d 为奇数，则从 G 中任意移除一个 1-因子（即一个完美匹配），形成一个（$d - 1$）-正则图 G'，然后求出 G' 的一个随机 a-因子。

步骤 1(b) 中由大环产生的项，以及 2(d) 中任意选取的完美匹配所产生的项，都被吸收到辅助矩阵 M 中。剩下的是许多“小型”随机选择之和，因此可以通过切尔诺夫型论证得到集中性。

为证明我们的集中性结果，我们首先需要下面的技术引理，该引理有助于界定 M 的谱半径。

引理 3.1. 设 G 是一个具有 n 个顶点的图，其最大度至多为 d，且不存在长度不超过 $2\lceil \log_2 n \rceil$ 的环。则 $\|A_G\| \le (2\sqrt{2})\sqrt{d}$。

证明. 令 $r = \lceil \log_2 n \rceil$。一方面，我们有

$$\operatorname{tr} A_G^{2r} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A_G)^{2r} \ge \lambda_1(A_G)^{2r}.$$

另一方面，$\operatorname{tr} A_G^{2r}$ 统计了 G 中长度为 $2r$ 的闭游走数量。由于否则将意味着存在长度至多为 $2r$ 的 G 环，每个这样的游走也都是 G 的万有覆盖上的游走。由于每个顶点的最大度为 d，从给定顶点出发的此类游走数量至多为 $d^r C_r \le (4d)^r$，其中 C_r 是一个卡特兰数。这给出

$$n(4d)^r \ge \lambda_1(A_G)^{2r},$$

因此

$$\lambda_1(A_G) \le n^{1/(2r)}\sqrt{4d} \le n^{\frac{1}{2\log_2 n}}\sqrt{4d} = (2\sqrt{2})\sqrt{d}. \qquad \square$$

现在我们陈述并证明上述提纲中步骤 (1) 的集中性结果。

引理 3.2. 设 d 是一个偶正整数。设 d 是一个具有 n 个顶点的二部正则图。存在一个（确定性的）$n \times n$ 矩阵 M，满足 $\|M\| \le \sqrt{2d}$，以及一个

在 G 的 $d/2$-因子 H 集合上的概率分布，使得对于任意向量 u、$v \in \mathbb{R}^n$ 和任意实数 $t \geq 0$,

$$\Pr\left[\left|u^\intercal\left(A_H - \frac{1}{2}A_G + M\right)v\right| \geq t\sqrt{dn\lceil\log_2 n\rceil}\|u\|_\infty\|v\|_\infty\right] \leq 2e^{-t^2/2}.$$

证明。首先，按如下方式将 G 的边 $E = E(G)$ 划分为集合 E_0 和 E_1：只要 G 中存在长度至多为 $2\lceil\log_2 n\rceil$ 的环，就将该环的边加入 E_1 并从 G 中移除；不存在这样的环后，将所有剩余的边加入 E_0。令 G_0 和 G_1 分别为顶点集与 G 相同、边集分别为 E_0 和 E_1 的图。根据引理 3.1，$\|A_{G_0}\| \leq 2\sqrt{2d}$。

我们通过对 E_0 进行确定性划分、对 E_1 进行随机划分来构造 H。由于 E_1 是若干环的并，每个顶点在 G_1 中的度均为偶数，因此在 G_0 中也为偶数，所以 E_0 的边可以划分为若干个环。对于每个这样的环，按照上文步骤 1(b) 任意选取该环的一个交替边集；将所得的边记为 E_0'，并令 H_0 为边集 E_0' 对应的图。每个顶点在 H_0 中的度是其在 G_0 中度的一半。令 $M = 1/2 \cdot A_{G_0} - A_{H_0}$；由于 M 是 G_0 的某个符号赋值的邻接矩阵的一半，因此 $\|M\| \leq (1/2)\|A_{G_0}\| \leq \sqrt{2d}$。

现在，G_1 是长度至多为 $2\lceil\log_2 n\rceil$ 的环的并。对于每个这样的环，从两种可能的选择中随机选择一个包含一半边的交替边集，并将其边加入 E_1'；令 H_1 为边集为 E_1'的图。令 H 为边集为 $E_0' \cup E_1'$的图；H是 G的一个 a-因子，并且

$$A_H - \frac{a}{d}A_G + M = A_{H_0} + A_{H_1} - \frac{1}{2}A_{G_0} - \frac{1}{2}A_{G_1} + \frac{1}{2}A_{G_0} - A_{H_0} = A_{H_1} - \frac{1}{2}A_{G_1}.$$

考虑随机变量

$$X = u^\intercal\left(A_{H_1} - \frac{1}{2}A_{G_1}\right)v.$$

令 $\mathcal{C}$ 为并集等于 E_1的环的集合，

$$X = \sum_{C\in\mathcal{C}} X_C u^\intercal\left(\frac{1}{2}\tilde{A}_C\right)v,$$

其中 $X_C \sim$ 服从均匀分布$(\{\pm 1\})$，而 A_C 是对 C 的一种符号赋值的邻接矩阵，其中相邻的边交替赋予符号。由于 $u^\intercal A_C v$ 是由 $2\,\mathrm{len}(C)$ 个形如 $\pm u_i v_j$ 的项之和，其中 i 和 j为整数，

$$\left|u^\intercal\left(\frac{1}{2}\tilde{A}_C\right)v\right| \leq \mathrm{len}(C)\|u\|_\infty\|v\|_\infty.$$

因此，有界差分不等式推出，对任意 $\mu \geq 0$,

$$\Pr\left[|X| \geq \mu\right] \leq 2\exp\left(\frac{-2\mu^2}{\sum_{C\in\mathcal{C}}\left(2\,\mathrm{len}(C)\|u\|_\infty\|v\|_\infty\right)^2}\right).$$

我们有

$$\sum_{C\in\mathcal{C}}\mathrm{len}(C)^2 \leq \left(\max_{C\in\mathcal{C}}\mathrm{len}(C)\right)\sum_{C\in\mathcal{C}}\mathrm{len}(C) \leq 2\lceil\log_2 n\rceil E(G) = dn\lceil\log_2 n\rceil,$$

so

$$\Pr\left[|X| \geq \mu\right] \leq 2\exp\left(\frac{-\mu^2}{2dn\lceil\log_2 n\rceil\|u\|_\infty^2\|v\|_\infty^2}\right).$$

令 $\mu = t\sqrt{dn\lceil\log_2 n\rceil}\|u\|_\infty\|v\|_\infty$，即可得到所需的集中。 □

如概要中的步骤 (2) 所述，我们将此引理作为黑箱使用，以证明命题 2.4。

命题 2.4 的证明。设 c_d 是由以下递归方式定义的序列：若 $d>1$ 是奇数，则为 $c_1=0$；若 d 是偶数，则为 $c_d=c_{d/2}+\sqrt{2d}$。我们对 d 使用强归纳法，证明存在关于 G 的 a 因子和 $n\times n$ 矩阵的对 (H,M) 的一个分布，其中 $\|M\|\le c_d$，并且对任意 $t\ge 0$ 和 u，有 $v\in\mathbb{R}^n$，

$$\Pr\left[\left|u^{\intercal}\left(A_H-\frac{a}{d}A_G+M\right)v\right|>t(2+\sqrt{2})\sqrt{dn\lceil\log_2 n\rceil}\|u\|_\infty\|v\|_\infty\right]\le 2(\log_2 d)e^{-t^2/2}.$$

在 $d=1$ 的基例中，选择余地不大；若 $a=0$，则 H 为空；若 $a=1$，则 $H=G$。两种情况下，我们都可以取 $M=0$，且 $u^{\intercal}(A_H-a/d\cdot A_G+M)v=0$ 总是成立。

对于归纳步骤，我们先处理 d 为偶数且 $a\le d/2$ 的情形。在这种情况下，我们分两步进行：

(1) 通过引理 3.2 构造一个 $d/2$-因子 G_1 of G，并令 M_1 为其关联矩阵。(2) 通过归纳假设构造一个 a-因子 H of G_1，并令 M_2 为其关联矩阵。

令 $M=M_2+2a/d\cdot M_1$。根据引理 3.2，我们有 $\|M_1\|\le\sqrt{2d}$；根据归纳假设，我们有 $\|M_2\|\le c_{d/2}$。由此得到

$$\|M\|\le\|M_2\|+(2a/d)\|M_1\|\le c_{d/2}+1\cdot\sqrt{2d}=c_d$$

and

$$A_H-\frac{a}{d}A_G+M=\left(A_H-\frac{a}{d/2}A_{G_1}+M_2\right)+\frac{2a}{d}\left(A_{G_1}-\frac{1}{2}A_G+M_1\right),$$

以及集中不等式

$$\Pr\left[\left|u^{\intercal}\left(A_{G_1}-\frac{1}{2}A_G+M_1\right)v\right|\ge t\sqrt{dn\lceil\log_2 n\rceil}\|u\|_\infty\|v\|_\infty\right]\le 2e^{-t^2/2}$$

$$\Pr\left[\begin{array}{l}\left|u^{\intercal}\left(A_H-\frac{a}{d/2}A_{G_1}+M_2\right)v\right|\\ \quad\ge t(2+\sqrt{2})\sqrt{(d/2)n\lceil\log_2 n\rceil}\|u\|_\infty\|v\|_\infty\end{array}\right]\le 2(\log_2(d/2))e^{-t^2/2}.$$

由并集界可知，$u^{\intercal}(A_H-a/d\cdot A_G+M)v$ 超过

$$t(2+\sqrt{2})\sqrt{(d/2)n\lceil\log_2 n\rceil}\|u\|_\infty\|v\|_\infty+\frac{2a}{d}\left(t\sqrt{dn\lceil\log_2 n\rceil}\|u\|_\infty\|v\|_\infty\right)$$

的概率至多为 $2(\log_2 d)e^{-t^2/2}$，因为这意味着上述两个事件之一发生。由于

$$(2+\sqrt{2})\sqrt{d/2}+\frac{2a}{d}\sqrt{d}\le(\sqrt{2}+1)\sqrt{d}+\sqrt{d}=(2+\sqrt{2})\sqrt{d},$$

这就足够了。

当 d 为偶数且 $a>d/2$ 时，我们首先构造一对 (H',M')，其中 H' 是 G 的一个 $(d-a)$-因子。令 H 为 G 中 H' 的补图，并令 $M=-M'$。由于

$$A_H-\frac{a}{d}A_G+M=(A_G-A_{H'})-\frac{a}{d}A_G-M'=-\left(A_{H'}-\frac{d-a}{d}A_G+M'\right),$$

关于 d-正则图的 $(d-a)$-因子的假设足以得出结论。

最后，我们处理 d 为奇数的情形。若 $a>d/2$，则可从 $a<d/2$ 情形出发，按上一段的方法进行，因此不妨假设 $a<d/2$。我们按如下步骤进行：

(1) 任取一个完美匹配 $H' \subset G$，令 G_1 为 G 中 H' 的补图，它是 G 的一个 $(d-1)$-因子。(2) 利用归纳假设构造 G_1 的一个 a-因子 H，并令 M_1 为其关联矩阵。

定义 $M = \frac{a}{d}A_{H'} - {}_d\,\frac{a}{(d-1)}A_{G_1} + M_1$。我们有

$$\begin{aligned} A_H - \frac{a}{d}A_G + M &= A_H - \frac{a}{d}A_G + \frac{a}{d}A_{H'} - \frac{a}{d(d-1)}A_{G_1} + M_1 \\ &= A_H - \frac{a}{d}A_{G_1} - \frac{a}{d(d-1)}A_{G_1} + M_1 \\ &= A_H - \frac{a}{d-1}A_{G_1} + M_1, \end{aligned}$$

以及

$$\|M\| \le \frac{a}{d}\|A_{H'}\| + \frac{a}{d(d-1)}\|A_{G_1}\| + \|M_1\| \le \frac{a}{d} + \frac{a}{d} + c_{d-1} \le c_{d-1} + 1$$

因此，$d-1$ 处的归纳假设足以推出结论。

剩下的只需证明，对所有 d，$c_d \le 6\sqrt{d}$。我们可以证明

$$\begin{aligned} c_d &\le (2+\sqrt{2})(\sqrt{2d}-1) + (\#\text{ of ones in the binary representation of } d) \\ &\le (2+\sqrt{2})(\sqrt{2d}-1) + \log_2 d \end{aligned}$$

通过对 d 使用归纳法，故结论由此得出

$$\log_2 d - (2+\sqrt{2}) \le (4-2\sqrt{2})\sqrt{d},$$

这很容易验证。 □

我们以命题 2.4 的一个推论结束本节。该推论表明，正则二部图的因子在具有标准正交基且 L^∞ 范数较小的子空间上具有集中性结果。这正是我们在构造重数递增提升时将要使用的结果。

推论 3.3。设 a 和 d 为满足 $0 \le a \le d$ 的正整数。设 G 为一个定义在 n 个顶点上的二部 d-正则图，并设 $1 \le K$、$m \le n$。设 S 为包含 $V(G)$ 的有限集，并设 $U \subset \mathbb{R}^S$ 为一个维数至多为 m、由两两正交的单位向量 u_1、u_2、...、$u_{m'}$ 张成的子空间，且对每个 $1 \le i \le m'$ 均满足 $\|u_i\|_\infty \le \sqrt{K/n}$。若 $m \ge \max(2\log_2 d, 15)$ 且 $n \ge K^3 m^6$，则存在一个 a-正则子图 $H \subset G$，其定义在 $V(G)$ 上，并满足

$$\left| v^\intercal \left(A_H - \frac{a}{d}A_G \right) v \right| \le 7\sqrt{d}$$

对每个单位向量 $v \in U$，其中 A_H 和 A_G 通过补零扩展为 $\mathbb{R}^{S\times S}$ 中的一个矩阵。

证明。对于每个 $1 \le i \le m'$，令 $\overline{u_i}$ 为 u_i 在 $\mathbb{R}^{V(G)}$ 上的限制；注意 $\|\overline{u_i}\|_\infty \le \|u_i\|_\infty$。设 $t = \sqrt{6.5 \ln m}$，于是

$$2(\log_2 d)e^{-t^2/2} \le m e^{-3.25 \ln m} < m^{-2}.$$

根据命题 2.4 和并集界，存在一个 a-正则子图 $H \subset G$，定义在 $V(G)$ 上，以及一个满足 $\|M\| \le 4\sqrt{d}$ 的 $n \times n$ 矩阵 M，使得

$$\begin{aligned}\left|u_i^\intercal \left(A_H - \frac{a}{d}A_G + M\right) u_j\right| &= \left|\overline{u_i}^\intercal \left(A_H - \frac{a}{d}A_G + M\right) \overline{u_j}\right| \\ &\le t(2+\sqrt{2})\sqrt{dn\lceil \log_2 n\rceil}\|u_i\|_\infty \|u_j\|_\infty \\ &< 9K\sqrt{\frac{d\ln m\lceil \log_2 n\rceil}{n}}\end{aligned}$$

对所有的 $1 \le i, j \le m'$ 均成立。现在，任取一个单位向量 $v \in U$。由于 $\{u_i\}_i$ 是 U的一组标准正交基，我们可以将 $v = \sum_{i=1}^{m'} c_i u_i$ 写成某些实数 $c_1, \dots, c_{m'}$ 的线性组合，且满足 $\sum c_i^2 = 1$。由此得到

$$\begin{aligned}\left|v^\intercal \left(A_H - \frac{a}{d}A_G + M\right) v\right| &\le \sum_{i=1}^{m'}\sum_{j=1}^{m'} |c_i||c_j| \left|u_i^\intercal \left(A_H - \frac{a}{d}A_G + M\right) u_j\right| \\ &< 9K(|c_1| + \cdots + |c_{m'}|)^2\sqrt{\frac{d\ln m\lceil \log_2 n\rceil}{n}} \\ &\le 9Km\sqrt{\frac{d\ln m\lceil \log_2 n\rceil}{n}},\end{aligned}$$

其中用到了柯西–施瓦茨不等式。由于 $n \ge 2$, $n/\lceil \log_2 n\rceil \ge n^{2/3}$，且由于 $m \ge 15$, $9\sqrt{\ln m} \le m$，因此这个界给出

$$\left|v^\intercal \left(A_H - \frac{a}{d}A_G + M\right) v\right| \le Km^2 n^{-1/3}\sqrt{d} \le \sqrt{d}$$

根据我们对 n 的界。由 $\|M\| \le 6\sqrt{d}$ 这一事实，证明得证。 □

4. Integer second eigenvalue

本节中，我们利用推论 3.3 构造固定度正则图，使其固定第二特征值的重数为 $\Omega(\log \log n)$；该固定特征值可以是任意充分大的整数。本节的主要结果是以下“递增”命题。反复应用该命题即可得到定理 1.5(a)。

命题 4.1. 设 $d \ge 22000$，并设 $a = \lceil 12\sqrt{d}\rceil$。假设 G 是一个具有 d 正则度、含有 n 个顶点的二部图，满足 $\lambda_2(A_G) \le d - 2a$，且设 ℓ 为 A_G 在 $d - 2a$ 中作为特征值的重数。那么，存在一个具有 d 正则度的二部图 $\tilde{G}$，其顶点数至多为 $4n^9$，且第二特征值 $d - 2a$ 的重数至少为 $\ell + 1$。

如第 2 节开头所述，整个过程将先进行多次不会引入新的大特征值的提升，然后使用推论 3.3，对 G 的随机 a 因子进行重数递增提升。该提升的性质将在下面的引理中描述。

引理 4.2. 设 $d \ge 22000$，并设 $a = \lceil 12\sqrt{d}\rceil$。设 G 是一个具有 d 正则度、含有 n 个顶点的二部图，满足 $\lambda_2(A_G) \le d - 2a$。假设大于 $2\sqrt{d-1}$ 的 G 特征值至多有 m 个，并且 A_G 存在一个标准正交特征基，其中这 $m' \le m$ 个最大特征值特征向量的每个分量的绝对值至多为 $\sqrt{m/n}$。那么，只要 $m \ge 2\log_2 d$ 且 $n > m^9$，就存在 G 的一个 a-因子 H，满足 $\lambda_1(A_G - 2A_H) = d - 2a$。

我们先利用该引理证明命题，然后再证明该引理。

命题 4.1 的证明。设 t 为一个正整数。通过应用推论 2.2 t 次，我们可以找到一个 d-正则二部图 G'，其顶点集为 n'，包含 $= n2^t$ 个顶点；对于 $A_{G'}$ 的每个特征值 μ，满足 $|\mu| \geq 2\sqrt{d-1}$ 时，$A_{G'}$ 的 μ-特征子空间恰好为

$$\left\{ \underbrace{x \oplus x \oplus \cdots \oplus x}_{2^t \text{ copies of } x} \colon A_G x = \mu x \right\}.$$

特别地，

$$\lambda_2(A_{G'}) \leq \max(\lambda_2(A_G), 2\sqrt{d-1}) \leq d - 2a,$$

并且 $A_{G'}$ 具有重数为 ℓ 的特征值 $d-2a$。此外，A'_G 至多具有 $| =n$ 个大于 $2\sqrt{d-1}$ 的 $|V(G)$ 特征值，以及一个包含

$$\left\{ \frac{1}{2^{t/2}}(x \oplus \cdots \oplus x) \colon x \text{ is in an orthonormal eigenbasis of } A_G \right\}$$

不具有特征值大于 $2\sqrt{d-1}$ 且存在某个分量的绝对值大于 $2^{-t/2} = \sqrt{n/n'}$ 的特征向量。因此，只要 $n \geq 2\log_2 d$（这成立是因为存在一个具有 n 个顶点的 d-正则图 G）并且 $n2^t > n^9$，我们就可以应用引理 4.2，找到一个 a-因子 H，其 G' 具有 $\lambda_1(A_{G'} - 2A_H)$ $= d - 2a$。令 s 为 G' 的相应符号赋值，并令 $\widehat{G}$ 为相应的 2-提升，则 G 的谱包含特征值 $d-2a$，其重数至少为 $\ell + 1$。取 t 为满足 $2^t > n^8$ 的最小正整数，即可完成证明。□

引理 4.2 的证明。令 U 为 A_G 的所有特征值大于 $2\sqrt{d-1}$ 且严格小于 d 的特征向量所张成的空间；注意到 $\dim U \leq m' \leq m$，并且 U 有一个标准正交基，其中每个向量的 L^∞ 范数至多为 $\sqrt{m/n}$。因此，根据推论 3.3（由于 $2\log_2 d > 15$，我们可以应用该推论），存在一个 G 的 a-因子 H，使得

$$\left| v^\intercal \left(A_H - \frac{a}{d} A_G \right) v \right| \leq 7\sqrt{d}$$

对每个单位向量 $v \in U$ 都成立。特别地，

$$(\star) \qquad v^\intercal A_H v \geq \frac{a}{d} v^\intercal A_G v - 7\sqrt{d}\|v\|^2 \qquad \text{for all } v \in U.$$

现在，由于 H 是 a-正则的，矩阵 $A_G - 2A_H$ 的特征值为 $d-2a$，且全一向量是其特征向量。我们需要证明不存在更大的特征值。为此，考虑任意一个与全一向量正交的向量 w；只需证明 $w^\intercal A_H w \leq d-2a$。设 $w = x+y$，其中 $x \in U$ 和 $y \in U'$ 分别是 A_G 中所有特征值不超过 $2\sqrt{d-1}$ 的特征向量所张成的空间。我们计算

$$\begin{aligned} w^\intercal A_H w &= x^\intercal A_H x + 2x^\intercal A_H y + 2y^\intercal A_H y \\ &\geq \frac{a}{d} x^\intercal A_G x - (7\sqrt{d})\|x\|^2 - 2\|x\|(ay) - a\|y\|^2 \end{aligned}$$

这里我们用到了（⋆）以及 $\|A_H\| = a$这一事实。现在，我们可以据此界定$w^\intercal$（$A_G - 2A_H$）$w = x^\intercal A_G x + y^\intercal A_G y - 2w^\intercal A_H w$

$$\begin{aligned}
&\le x^\intercal A_G x + (2\sqrt{d-1})\|y\|^2 - \frac{2a}{d} x^\intercal A_G x \\
&\qquad\qquad + (14\sqrt{d})\|x\|^2 + 2a\|y\|(2\|x\| + \|y\|) \\
&= \left(1 - \frac{2a}{d}\right) x^\intercal A_G x + (14\sqrt{d})\|x\|^2 + 4a\|x\|\|y\| + (2a + 2\sqrt{d-1})\|y\|^2 \\
&\le \left((d-2a)\left(1 - \frac{2a}{d}\right) + 14\sqrt{d}\right)\|x\|^2 + 4a\|x\|\|y\| + (2a + 2\sqrt{d-1})\|y\|^2.
\end{aligned}$$

这是关于 $\|x\|$ 和 $\|y\|$的二次型。在单位圆上，二次型 $Rx^2+2Sxy+Ty^2$ 的最大值很容易计算得出，为 $(R + T + \sqrt{(R-T)^2 + 4S^2})/2$。由于$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|w\|^2 = 1$，接下来只需证明，对于上述关于 $\|x\|$ 和 $\|y\|$的二次型，只要 $d \ge 22000$，其值至多为 $d - 2a$ 。这是一个简单的计算。□

我们以证明定理 1.5(a)来结束本节。

定理 1.5(a)的证明。设 $\ell \ge 20000$ 是一个正整数。我们将证明，对无穷多个 n，存在定义在 n 个顶点上的有界度正则图，其第二特征值恰为 ℓ，重数为 Ω(log log n)。

令 d 为一个大于 22000 的正整数，使得 $d - 2\lceil 12\sqrt{d}\rceil = \ell$，并令 $a = \lceil 12\sqrt{d}\rceil$，从而 $\ell = d - 2a$。设 $G_0 = K_{d,\,d}$ 和 $n_0 = 2d$，并递归地定义一个序列 (n_i)：$n_{i+1} = 4n_i^9$。注意，$\lambda_2(G_0) = 0 < d - 2a$。反复应用命题 4.1 可知，对每个 $i \ge 1$，都存在一个二部 d-正则图 G_i，使得

(i) G_i 至多有 n_i 个顶点，并且 (ii) $d - 2a$ 是 G_i 的第二特征值，且其重数至少为 i。

由于 $n_i = 2^{2^{\Theta(i)}}$，证明得以完成，因为 $i = \Theta(\log\log n_i)$。 □

注 4.3. 如果我们能够针对任意二部 d-正则图 G，找到一个 a-因子 H，使得

$$\left\| A_H - \frac{a}{d} A_G \right\| = o(a),$$

这将使我们能够去掉 Ramanujan提升步骤，并使第二特征值的重数达到 $\log n$ 量级。这个目标让人想起 Bilu 和 Linial 的一个结果 [BL06, Theorem 3.1]：存在这样一个图的符号赋值 s，使得其 $\|A_s\| = O(d^{1/2}\log^{3/2} d)$，但在我们的分布中，随机性似乎不足以采用他们的谱半径界定框架。

5. Non-integer second eigenvalue

本节将给出上一节框架的一个推广，并用它来证明我们的主要结果。我们先详细阐述第 2 节中提出的基于 k-部图的策略概要。为此，我们首先需要介绍一些术语。

定义 5.1. 回顾一下，若一个（不一定是简单图的）邻接矩阵为 M 的图是连通的，则称对称矩阵 M 不可约。（不可约性确保我们可以对 M 应用 Perron–Frobenius 定理。）给定一个对角线为零且条目为非负整数的对称不可约矩阵M：

- M 的图提升是邻接矩阵为 M 的非简单图的提升。换言之，它是一个 k 部图 G，其顶点集为 $V_1 \sqcup V_2 \sqcup \cdots \sqcup V_k$，并且对每个 $1 \leq i,\ j \leq k$ 都是一个 M_{ij} 正则二部图。

- 图 M的符号矩阵是一个对称整数矩阵 M'，满足 $M'_{ij} \equiv M_{ij}$(模 2)，并且对每个 $1 \leq i$，都有 $|M'_{ij}| \leq M_{ij}\ j \leq k$。
- 图 M 的图提升 G 的 M'-符号赋值，是指为 G 的每条边指定 $\{\pm 1\}$ 中的一个元素，使得对每个 $1 \leq i,\ j \leq k$：$V_i \sqcup V_j$ 中与 $G[V_i \sqcup V_j]$的每个顶点关联的边的标签之和等于 M'_{ij}。

例如，取

$$M = \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix},\ M' = \begin{pmatrix} 0 & d-2a \\ d-2a & 0 \end{pmatrix}$$

对于 $a = \lceil 12\sqrt{d} \rceil$。那么 M'是 M的符号矩阵，而 M的图提升恰好是 d-正则二部图。引理 4.2 证明了在某些条件下，这种图存在一个 M'-符号赋值，其最大特征值恰好为 $d - 2a$。现在我们证明以下引理，它给出了关于图提升和矩阵符号赋值的特征数据的信息。

引理 5.2。令 (M, M', G) 如定义 5.1 所述。

(a) A_G 的最大特征值为 $\lambda_1(M)$；若 v 是 M 的一个最大特征值特征向量，那么将 V_i 中每个顶点赋值为 v_i 所得到的向量，是 A_G 关于该特征值的一个特征向量。

(b) 考虑一个 M'-符号赋值 s：$E(G) \to \{\pm 1\}$。M' 的特征值是该符号赋值的邻接矩阵 A_s 的特征值，而且，它们的特征子空间张成了 $\mathbb{R}^{V(G)}$ 中满足以下条件的向量空间：这些向量在 k-划分的每个部分上均为常向量 v。

证明。对于 (a)，容易验证，$\lambda_1(M)$ 是 A_G 的一个特征值，且相应的特征向量正如上述构造。它是最大特征值这一事实，源于如下观察：由于 A_G 和 M 都具有非负项，v 是一个 Perron 特征向量，因此 $\lambda_1(M)$ 是 A_G 的 Perron特征值。对于 (b)，容易验证：若 w 是 M' 关于特征值 μ 的一个特征向量，那么将 V_i 中一个顶点赋值为 w_i 所得到的向量，也是 A_s 关于特征值 μ 的一个特征向量。□

由此引理可知，我们能够保证具有大重数的特征值是$\lambda_1(M')$。我们知道，它会出现在任何 M'-符号赋值中；接下来只需证明，在某些条件下不存在更大的特征值。我们先明确这些条件。

定义 5.3. 将满足以下条件的三元组 (M, M', β) 的集合记为 $\mathcal{M}$

(a) M 是一个不可约的 $k \times k$ 非负整数对称矩阵，对角线上的元素均为零，且 M'是 M的符号矩阵；(b) $\beta \in (0, 1/2)$；(c) 若 $D = (M - M')/2$, $\gamma = \lambda_1(|D - \beta M|)$（其中绝对值是逐项取的），且$\sigma = \sum_{i,\ j} \sqrt{M_{ij}}$，那么$\lambda_1 \begin{pmatrix} (1-2\beta)\lambda_1(M') + 2\gamma + 7\sigma & 2\lambda_1(D) \\ 2\lambda_1(D) & 2\lambda_1(D) + \sigma \end{pmatrix} \leq \lambda_1(M')$。

现在我们可以陈述下面这个推广命题 4.1 的命题。

命题 5.4. 假设 $(M, M', \beta) \in \mathcal{M}$。设 G 是 M的一个图提升，其顶点数为 n，且 $\lambda_2(A_G) \leq \lambda_1(M')$；设 ℓ 是 $\lambda_1(M')$作为 A_G的特征值时的重数。

那么，存在一个 G 的图提升 $\tilde{G}$，其顶点数至多为 $4n^9$，且第二特征值 $\lambda_1(M')$ 的重数至少为 $\ell+1$。

与命题 4.1 的证明一样，关键的技术环节是一个引理，它给出了重数递增提升的存在性。我们在每对部分之间进行足够多次 Ramanujan提升后，再应用这种提升。

引理 5.5. 假设 $(M, M', \beta) \in \mathcal{M}$，且令 G 为 M 在 n 个顶点上的图提升。令 m 为一个正整数。按照定义 5.3 定义 $\sigma = \sum_{i,j} \sqrt{M_{ij}}$。假设

(a) $\lambda_2(A_G) \le \lambda_1(M')$，(b) G 至多有 m 个特征值大于 σ，(c) A_G 存在一个标准正交特征基，其中一部分构成了这样一组向量的基：这些向量在 M 所给出的 $V(G)$ 的 k-划分的每个部分上均为常数；并且对于特征值大于 σ 的每个特征向量，其每个分量的绝对值都不超过 $\sqrt{m/n}$，以及 (d) $n > m^9$。

那么存在一个 M'-符号赋值 $s : E(G) \to \{\pm 1\}$，其邻接矩阵 A_s 满足$\lambda_1(A_s) = \lambda_1(M')$。

此引理中的每个条件都对应于引理 4.2 中的一个条件。特别是，条件 $(M, M', \beta) \in \mathcal{M}$ 类比于度数上界 $d \ge 22000$ 以及 $a = \lceil 12\sqrt{d} \rceil$ 的选取。证明与引理 4.2 的证明十分相似。

证明。与定义 5.3 中一样，定义 $D = (M - M')/2$和 $\gamma = \lambda_1(|D - \beta M|)$。令 $V_1 \sqcup V_2 \sqcup \cdots \sqcup V_k$为由 M 给出的 $V(G)$ 的 k-划分。令 $U_0 \subset \mathbb{R}^{V(G)}$为在每个 V_i 上均为常向量的空间。由引理 5.2 可知，G 的最大特征值为 $\lambda_1(M)$，其特征向量属于 U_0。同样由引理 5.2 可知，对于G 的任意 M'-符号赋值 s，存在 U_0 的一个基，它包含于 A_s的某个特征基中；该基中的一个向量对 A_s贡献特征值 $\lambda_1(M')$，且该基中没有向量贡献更大的特征值。因此，只需找到一个 M'-符号赋值 s，使得对于任意与 U_0 正交的向量 $w \in \mathbb{R}^{V(G)}$，$w^\intercal A_s w \le \lambda_1(M')$。

对于每一对 (i, j)，我们分别在 V_i 和 V_j 之间的边上构造此符号赋值。令 G_{ij}为顶点集 $V(G)$ 上的图 $G[V_i \sqcup V_j]$，使得

$$\sum_{1 \le i < j \le k} A_{G_{ij}} = A_G.$$

令 $v_2, \ldots, v_{m'}$ 为 (c) 中所述划分里的 A_G 的特征向量，其中对应的特征值大于 σ，且这些特征向量不属于 U_0；令 U_1 为它们张成的 $\mathbb{R}^{V(G)}$ 的子空间。

由 (b)，$\dim U_1 \le m' < m$。空间 U_1 满足推论 3.3 中关于 $K = m$ 的条件。因此，由于 $n \ge m^9$（条件 (d)），我们可以对每个 $1 \le i < j \le k$ 找到一个 D_{ij}-因子 H_{ij} of G_{ij}，使其满足

$$\left| v^\intercal \left(A_{H_{ij}} - \frac{D_{ij}}{M_{ij}} A_{G_{ij}} \right) v \right| \le 7\sqrt{M_{ij}} \|v\|^2$$

对每个 $v \in U_1$ 都成立。我们令 H 为由边集 H_{ij} 的并构成的图，并令 $B = \sum \frac{D_{ij}}{M_{ij}} A_{G_{ij}}$，从而得到

$$|v^\intercal (A_H - B) v| \le 7\|v\|^2 \left(\sum_{1 \le i < j \le k} \sqrt{M_{ij}} \right) = \frac{7}{2} \sigma \|v\|^2$$

对每个 $v \in U_1$ 都成立。令 s 为如下符号赋值：对于任意 (i,j)，将 H_{ij} 中的边赋值为 -1，其余所有边均赋值为 1。根据定义，s 是一个 M'-符号赋值；我们还有 $A_s = A_G - 2A_H$。

现在，令 $w \in \mathbb{R}^{V(G)}$ 为与 U_0正交的任意单位向量；写作 $w = x + y$，其中 $x \in U_1$和 y位于 $U_0 + U_1$的正交补中；注意 $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$。我们首先看到

$$\begin{aligned} w^\intercal A_H w &= x^\intercal A_H x + 2x^\intercal A_H y + y^\intercal A_H y \\ &\geq x^\intercal A_H x - 2\|x\|\|y\|\|A_H\| - \|y\|^2\|A_H\| \\ &\geq x^\intercal B x - \frac{7}{2}\sigma\|x\|^2 - (2\|x\|\|y\| + \|y\|^2)\|A_H\| \\ &\geq \beta x^\intercal A_G x - \left(\|B - \beta A_G\| + \frac{7}{2}\sigma\right)\|x\|^2 - (2\|x\|\|y\| + \|y\|^2)\|A_H\|. \end{aligned}$$

由于 H 是 D的图提升，且 D 的各项都是非负整数，引理 5.2(a) 蕴含 $\|A_H\| = \lambda_1(A_H) = \lambda_1(D)$。现在我们对 $\|B - \beta A_G\|$给出上界。对于任意单位向量 $u \in \mathbb{R}^{V(G)}$，写作 $u = u_1 + \cdots + u_k$，其中 u_i的支撑集为 V_i。与引理 5.2 的证明类似，我们有，

$$\begin{aligned} u^\intercal(B - \beta A_G)u &= \sum_{1 \leq i < j \leq k} \left(\frac{D_{ij}}{M_{ij}} - \beta\right) u^\intercal A_{G_{ij}} u \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq k} \left(\frac{D_{ij}}{M_{ij}} - \beta\right) 2M_{ij}\|u_i\|\|u_j\| \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} |D_{ij} - \beta M_{ij}|\|u_i\|\|u_j\| \leq \lambda_1(|D - \beta M|) = \gamma, \end{aligned}$$

因为 $\|u_1\|^2 + \cdots + \|u_k\|^2 = 1$。因此，$\|B - \beta A_G\| \leq \gamma$。这意味着

$$\begin{aligned} w^\intercal A_s w &= w^\intercal(A_G - 2A_H)w \\ &= x^\intercal A_G x + y^\intercal A_G y - 2w^\intercal A_H w \\ &\leq x^\intercal A_G x + \sigma\|y\|^2 - 2\beta x^\intercal A_G x + (2\gamma + 7\sigma)\|x\|^2 + 4\lambda_1(D)\|x\|\|y\| + 2\lambda_1(D)\|y\|^2 \\ &= (1 - 2\beta)x^\intercal A_G x + (2\gamma + 7\sigma)\|x\|^2 + 4\lambda_1(D)\|x\|\|y\| + \big(2\lambda_1(D) + \sigma\big)\|y\|^2 \\ &\leq ((1 - 2\beta)\lambda_1(M') + 2\gamma + 7\sigma)\|x\|^2 + 4\lambda_1(D)\|x\|\|y\| + \big(2\lambda_1(D) + \sigma\big)\|y\|^2, \end{aligned}$$

在最后一个界中，我们使用了条件 (a)，因为 $x \in U_0$。由于对于任意R、S、T以及任意满足 $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$的 $\|x\|$、$\|y\| \in \mathbb{R}$，都有

$$R\|x\|^2 + 2S\|x\|\|y\| + T\|y\|^2 = \begin{pmatrix}\|x\| & \|y\|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R & S\\ S & T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\|x\|\\ \|y\|\end{pmatrix} \leq \lambda_1\begin{pmatrix}R & S\\ S & T\end{pmatrix},$$

结论由 $\mathcal{M}$ 的定义立即得出。 □

命题 5.4 的证明。利用上述引理，证明过程将与命题 4.1 的证明非常相似。设 t 为一个非负整数。我们首先构造一个 M 的图提升 G_t，其顶点数为 $n_t := n2^t$，并且对于 A_{G_t} 的每个满足 $\mu \geq \sigma$ 的特征值 μ，A_{G_t} 的 μ-特征子空间恰好是

$$\left\{\underbrace{x \oplus x \oplus \cdots \oplus x}_{2^t \text{ copies of } x} \colon A_G x = \mu x\right\}.$$

事实上，从 $t = 0$ 时的 $G_0 = G$ 出发，我们可以通过在每一对部分之间依次应用拉马努金二重提升来构造这些图。设 $V_1 \sqcup V_2 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ 为 M 所给出的 $V(G_t)$ 的 k-划分。对于每个 $1 \le i < j \le k$，令 $s_{ij}\colon E(G_t[V_i \sqcup V_j]) \to \{\pm 1\}$ 为 M_{ij}-正则二部图 $G_t[V_i \sqcup V_j]$ 的一个符号赋值，其邻接矩阵的第二特征值不超过 $2\sqrt{M_{ij}-1} < 2\sqrt{M_{ij}}$；根据定理 2.1，这样的符号赋值保证存在（若 $M_{ij} = 0$，则 s_{ij} 是平凡的，且其邻接矩阵的第二特征值为 $0 = 2\sqrt{M_{ij}}$）。通过组合部分符号赋值 s_{ij}，构造符号赋值$s\colon E(G_t) \to \{\pm 1\}$，使得 $A_s = \sum_{1 \le i < j \le k} A_{s_{ij}}$ 的最大特征值不超过

$$\sum_{1 \le i < j \le k} \lambda_1(A_{s_{ij}}) \le \sum_{1 \le i < j \le k} 2\sqrt{M_{ij}} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \sqrt{M_{ij}} = \sigma.$$

那么，与 s 相关的 G_t 的 2-提升 G_{t+1} 没有大于 σ 且并非来自 A_{G_t}的特征值，因此 G_{t+1} 满足所需性质。特别地，对于每个 t,

$$\lambda_2(A_{G_t}) \le \max(\lambda_2(A_G), \sigma) \le \lambda_1(M'),$$

（根据 $\mathcal{M}$ 的定义中的条件 (c)，我们知道 $\sigma \le \lambda_1(M')$），并且 A_{G_t} 具有特征值 $\lambda_1(M')$，其重数为 k。与命题 4.1 的证明相同，G_t满足引理 5.5 的条件 (b) 和 (c)，因为我们已经描述了具有较大特征值的 A_{G_t} 的特征子空间。因此，我们可以应用该引理得到一个 M'-符号赋值 $s\colon E(G) \to \{\pm 1\}$，其中 $\lambda_1(A_s) = \lambda_1(M')$，只要 $2^j > n^8$。相关 2-提升的谱包含特征值 $\lambda_1(M')$，其重数至少为 $\ell + 1$。因此，取满足 $2^t > n^8$ 的最小正整数作为 t，即可完成证明。□

这些重数递增步骤使我们得到了第二特征值固定且重数较大的图。

推论 5.6. 假设 $(M, M', \beta) \in \mathcal{M}$，并且存在一个 G_0 的连通图提升，它是 M 的提升，且顶点数至多为 r，满足 $\lambda_2(A_{G_0}) \le \lambda_1(M')$。那么存在一个由正整数构成的无限序列 $r = n_0 < n_1 < \cdots$，其中每个数都满足 $n_{i+1} \le 4n_i^9$；对于这些数，存在一个具有 n_i 个顶点的图，其最大特征值为 $\lambda_1(M)$，第二特征值为 $\lambda_1(M')$，且重数至少为 $i = \Omega(\log\log n_i)$。此外，如果全一向量是 M 的特征向量，那么可以选择这些图为正则图。

证明. 这与定理 1.5(a) 的证明类似。上一节中，令 $n_0 = r$，并递归地定义序列 (n_i)，使得 n_{i+1} 是区间 $(2n_i^9, 4n_i^9]$ 中唯一一个使 n_{i+1}/n_i 为 2 的幂的整数。反复应用命题 5.4 可知，对每个 $i \ge 1$，都存在一个 G_i 的图提升，它是 M 的提升，使得

(i) G_i 有 n_i 个顶点，且 (ii) $\lambda_1(M')$ 是 G_i 的第二特征值，其重数至少为 i。

由于 G_i是 M的图提升，根据引理 5.2(a)，其最大特征值为 $\lambda_1(M)$。如果全 1 向量是 M 的特征向量，那么对于每个 i，它都是 A_{G_i} 的 Perron 特征向量（同样根据引理 5.2(a)）；因此（由于每个 G_i 都会是连通的），每个 G_i 都是度为 $\lambda_1(M)$ 的正则图。□

为了完成定理 1.5(b) 的证明，我们需要选取矩阵 M 和 M'，并证明它们满足所需的性质。我们将在下面的引理中完成这一点。

引理 5.7. 设 $t > u$ 为同奇偶性的正整数。定义矩阵

$$M = \begin{pmatrix} & t & t & 3 \\ t & & 3 & t \\ t & 3 & & t \\ 3 & t & t & \end{pmatrix},\ M' = \begin{pmatrix} & u & u & 1 \\ u & & -3 & u \\ u & -3 & & u \\ 1 & u & u & \end{pmatrix},$$

并令 $\beta = (t-u)/(2t)$。假设 $(5/6)t \le u \le t - 56\sqrt{t} - 62$。则

(a) $\lambda_1(M') = 2\sqrt{u^2+1} - 1$, (b) 存在一个（连通）图提升 G_0，它是 M 在 $4t$ 个顶点上的提升，且满足 $\lambda_2(A_{G_0}) \le \lambda_1(M')$，以及 (c) $(M, M', \beta) \in \mathcal{M}$。

证明。我们首先注意到，关于 u 的界意味着 $\beta \le 1/12$ 和 $t, u \ge 10^4$。为证明 (a)，只需显式计算出 M' 的特征值为

$$\left\{2\sqrt{u^2+1} - 1, 2\sqrt{u^2+1} - 1, 3, -1\right\}.$$

由于 $u \ge 2$，其中最大的一个是 $2\sqrt{u^2+1} - 1$。

为证明 (b)，我们构造这样一个图。在将由 t-正则二部图连接的各部分之间，放置完全二分图，从而构成图 $G_0^{(1)}$。然后，我们在其余两对部分之间任意放置 3-正则二部图（这是可行的，因为 $t \ge 3$）；将这两个 3-正则二部图的并记为 $G_0^{(2)}$。由于 $G_0^{(2)}$ 是 3-正则图，其邻接矩阵的谱范数至多为 3。因此，由韦尔不等式可知

$$\lambda_2(A_{G_0}) \le \lambda_2\left(A_{G_0^{(1)}}\right) + 3.$$

$G_0^{(1)}$ 的谱由 $\pm 2t$ 的一个副本和 $4t-2$ 个 0 组成。这表明 $\lambda_2(A_{G_0}) \le 3 \le \lambda_1(M')$，如所需。

最后，我们证明 (c)。显然，M' 是一个 M 的符号矩阵；其余部分需要一些计算。我们有以下矩阵

$$D := \frac{M - M'}{2} = \begin{pmatrix} & t\beta & t\beta & 1 \\ t\beta & & 3 & t\beta \\ t\beta & 3 & & t\beta \\ 1 & t\beta & t\beta & \end{pmatrix},\ D - \beta M = \begin{pmatrix} & & & 1-3\beta \\ & & 3-3\beta & \\ & 3-3\beta & & \\ 1-3\beta & & & \end{pmatrix};$$

由此得到 $\lambda_1(D) \le 2t\beta + 3$ 以及 $\gamma = \lambda_1(|D - \beta M|) \le 3$。此外，$\sigma = 8\sqrt{t} + 4\sqrt{3} < 8\sqrt{t} + 7$。由于增大正矩阵的元素只会使其最大特征值增大，因此只需利用 $2u - 1 \le \lambda_1(M') \le 2u$ 证明：

$$L := \lambda_1 \begin{pmatrix} (1-2\beta)(2u) + 56\sqrt{t} + 55 & 4t\beta + 6 \\ 4t\beta + 6 & 4t\beta + 8\sqrt{t} + 13 \end{pmatrix} \le 2u - 1.$$

根据最大特征值的次可加性，我们有

$$L \le \lambda_1 \begin{pmatrix} 56\sqrt{t} + 55 & 6 \\ 6 & 8\sqrt{t} + 13 \end{pmatrix} + t \cdot \lambda_1 \begin{pmatrix} 2(1-2\beta)^2 & 4\beta \\ 4\beta & 4\beta \end{pmatrix} \le 56\sqrt{t} + 61 + t(2 - 6\beta),$$

其中我们用到了如下计算结果：

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2(1-2\beta)^2 & 4\beta \\ 4\beta & 4\beta \end{pmatrix} \le 2 - 6\beta$$

对 $\beta \le 1/12$ 成立。因此我们需要

$$56\sqrt{t} + 62 \le 2\beta t = t - u,$$

这由假设成立。 □

我们以定理 1.5(b) 的证明作为结尾。事实上，我们接下来证明一个（稍微强一点的）命题；我们需要其精确性来证明定理 1.4。

定理 5.8. 设 $u \ge 10^5$ 是一个整数。存在某个整数 $d \le 5u/2$，使得对于一个正整数 $n_0 < n_1 < \cdots$ 的无限序列，其中每个数都满足 $n_{i+1} \le 4n_i^9$，均存在一个具有 n_i 个顶点的 d-正则图，其第二特征值恰为 $2\sqrt{u^2+1} - 1$，且重数为 $i = \Omega(\log \log n_i)$。

证明. 设 t 是一个与 u 同奇偶性且满足 $5t/6 \le u \le t - 56\sqrt{t} - 62$ 的正整数；这样的整数存在，因为 $u \ge 10^5$。定义

$$M = \begin{pmatrix} & t & t & 3 \\ t & & 3 & t \\ t & 3 & & t \\ 3 & t & t & \end{pmatrix}, \; M' = \begin{pmatrix} & u & u & 1 \\ u & & -3 & u \\ u & -3 & & u \\ 1 & u & u & \end{pmatrix},$$

且 $\beta = (t-u)/(2t)$. 根据引理 5.7，$\lambda_1(M') = 2\sqrt{u^2+1} - 1$，存在一个在 $4t$ 个顶点上的 M 的连通图提升 G_0，满足 $\lambda_2(A_{G_0}) \le \lambda_1(M')$，且 $(M, M', \beta) \in \mathcal{M}$。全一向量是 M 的特征值为 $2t + 3 \le 12u/5 + 3 \le 5u/2$ 的特征向量这一事实，足以通过应用推论 5.6 完成证明。□

6. 应用：等角直线

我们将定理 5.8 应用于固定角等角直线问题。回顾一下，如果 $\lambda = (1-\alpha)/(2\alpha)$ 的谱半径阶 $k(\lambda)$ 有限，那么对于某个 $\varepsilon > 0$ 和充分大的 n，$N_\alpha(n) \ge (1+\varepsilon)n$。因此，为证明定理 1.4，我们需要找到一个不是任何图的最大特征值、但仍可能是第二特征值的 λ。为此，我们先给出 $k(\lambda) < \infty$ 的一个必要条件。该条件见 [JP20]。

引理 6.1. 假设 λ 满足 $k(\lambda) < \infty$。那么 λ 是一个代数整数，其所有伽罗瓦共轭均为实数，且绝对值不超过 λ。

证明. 任取一个图 G，并考虑特征多项式 $p_G(t) = \det(tI - A_G)$。该多项式是 $|V(G)|$ 次首一多项式，且具有整数系数；这说明 (1) p_G 的每个根都是代数整数；(2) 若 λ 是 p_G 的根，则 λ 的每个伽罗瓦共轭也都是其根（λ 的最小多项式必定整除 p_G）。由于 A_G 是对称的，A_G 的每个特征值都是实数。引理的其余部分可由以下事实得出：由于 A_G 的每个元素都非负，A_G 的每个特征值的绝对值都不超过 $\lambda_1(A_G)$，因为 $\lambda_1(A_G)$ 是一个 Perron特征值。□

注 6.2. 这个条件并不充分。对于长度严格大于 4（分别为严格小于 4）的任意区间 $I \subset \mathbb{R}$，存在无穷多个（分别为有限多个）全实代数整数，使得它们的所有伽罗瓦共轭都落在 I [Rob62] 内。特别地，存在无穷多个全实代数整数，其所有共轭都落在 $[-1.995, 2.006]$ 内；其中除有限多个以外，其最大共轭都严格大于 2。另一方面，由于 [CDG82] 的一项结果（见 [CR90, 定理 2.3]及其附近的注记），没有无向图的最大特征值落在区间 $(2, 2.007]$。

我们的 λ 选取方式由以下推论描述。

推论 6.3. 若 t 是一个非平方数的正整数，则 $k(2\sqrt{t}-1) = \infty$。

证明。对于非平方数 t，$-2\sqrt{t}-1$ 是 $2\sqrt{t}-1$ 的伽罗瓦共轭，且其绝对值大于 $2\sqrt{t}-1$。□

现在，我们给出一个结果，借助它可以从我们构造的图中导出每个维数下的等角直线集。

引理 6.4. 假设存在一个 n 个顶点的 d-正则图 G，其第二特征值为 $\lambda > 0$，重数为 k，并设 $\alpha = 1/(2\lambda+1)$。

(a) 如果 $n \geq 2d$，那么 $N_\alpha(n-k) \geq n$。(b) 此外，如果 $\lambda \geq 2\sqrt{d-1}$ 且 $\lambda \geq 2d/3$，那么对于每个整数 $m \geq n-k$，$N_\alpha(m) \geq m+k$。

证明。令 A_G 为 G 的邻接矩阵；注意，由于 G 是 d-正则的，每个分量均为 $1/\sqrt{n}$ 的向量 v_1 是 A_G 的最大特征值特征向量，其特征值为 d。现在，令 J 为 $n \times n$ 阶全一矩阵，并考虑对称矩阵 $n \times n$

$$M = (1-\alpha)I + \alpha J - 2\alpha A_G.$$

由于 $J = nv_1v_1^\intercal$ 和 A_G 可同时对角化，M 的谱由一个与全一向量对应的 $1-\alpha+\alpha n-2\alpha d > 0$，以及对 A_G的每个特征值 $\mu < d$ 各对应一个 $(1-\alpha)-2\alpha\mu$ 组成，其重数等于 μ的重数。由于$\lambda_2(A_G) = \lambda = (1-\alpha)/(2\alpha)$，这意味着 M是半正定的，且特征值 0 的重数为 k。因此，M是向量 w_1、.....、$w_n \in \mathbb{R}^{n-k}$的格拉姆矩阵。根据其定义，M 的每个对角线元素都为 1，每个非对角线元素都为 $\pm\alpha$。因此，每个 w_i 都是单位向量，而由不同的 w_i 张成的直线两两相交成 $\arccos\alpha$角。至此，(a) 部分的证明完成。

现在证明 (b) 部分。根据上述论证，只需证明：对于每个整数$\ell \geq n$，都存在一个半正定 $\ell \times \ell$ 矩阵，其对角线元素全为 1，非对角线元素均为 $\pm\alpha$，且秩至多为 $\ell-k$。我们将证明，若存在一个满足引理陈述条件的 n顶点图 G，则对每个 $\ell \in [n, 2n)$，都存在这样的矩阵。接下来，只需注意：若存在这样的 n顶点图 $G = G_0$，则还存在一个 $2^i n$顶点图 G_i，对所有 $i \geq 0$也满足所需性质：根据定理 2.1 以及 $\lambda \geq 2\sqrt{d-1}$这一事实，我们可以选取 G_{i+1} 作为G_i的一个合适的 2-提升。

现在考虑上文所述的 $n \times n$矩阵 $M = (1-\alpha)I + \alpha J - 2\alpha A_G$；它是半正定的，且全一向量是 M的特征向量，对应的特征值为 $\alpha n - (2\alpha d - 1 + \alpha)$。对于每个整数 $\ell \in (n, 2n)$，定义矩阵 $\ell \times \ell$ M_ℓ：在 M上追加 $\ell - n$行和列，对角线填入 1，所有非对角线元素填入 α。如果 $Mv = 0$，那么$v \oplus (0, \ldots, 0)$ 是 M_ℓ的特征向量，对应的特征值为 0，因此 M_ℓ的秩至多为 $\ell - k$。此外，M_ℓ 的对角线元素全为 1，非对角线元素均为 $\pm\alpha$。因此，只需证明 M_ℓ 是半正定的。对于每个 r，令 1_r 为长度为 r的全一向量，并令 $t = \ell - n$；我们需要证明

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u^\intercal & v^\intercal \end{pmatrix} &\begin{pmatrix} M & \alpha 1_n 1_t^\intercal \\ \alpha 1_t 1_n^\intercal & \alpha 1_t 1_t^\intercal + (1-\alpha) I_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= u^\intercal M u + 2\alpha (u^\intercal 1_n)(v^\intercal 1_t) + \alpha (v^\intercal 1_t)^2 + (1-\alpha) v^\intercal v \geq 0\end{aligned}$$

对于每个 $u \in \mathbb{R}^n$ 和 $v \in \mathbb{R}^t$。事实上，由于 1_n 是 M 的特征向量，对应的特征值为 $1-\alpha+\alpha n-2\alpha d$,

$$\begin{aligned}(u\oplus v)^\intercal M_\ell(u\oplus v) &= u^\intercal Mu + 2\alpha(u^\intercal 1_n)(v^\intercal 1_t) + \alpha(v^\intercal 1_t)^2 + (1-\alpha)v^\intercal v\\ &\geq \left(\alpha - \frac{2\alpha d-(1-\alpha)}{n}\right)(u^\intercal 1_n)^2 + 2\alpha xy + \alpha y^2 + \left(\frac{1-\alpha}{t}\right)(v^\intercal 1_t)^2\\ &= \left(\alpha - \frac{2\alpha d-(1-\alpha)}{n}\right)x^2 + 2\alpha xy + \left(\alpha+\frac{1-\alpha}{t}\right)y^2,\end{aligned}$$

其中我们设 $x = u^\intercal 1_n$ 和 $y = v^\intercal 1_t$，并利用了 M 是半正定的。因此只需证明

$$\left(\alpha - \frac{2\alpha d-(1-\alpha)}{n}\right)\left(\alpha+\frac{1-\alpha}{t}\right) \geq \alpha^2.$$

左侧关于 t 单调递减，因此只需验证 $t=n$ 时的不等式。代入 $(1-\alpha)/\alpha = 2\lambda$ 后，充分条件变为

$$\left(1-\frac{2(d-\lambda)}{n}\right)\left(1+\frac{2\lambda}{n}\right) \geq 1.$$

这可化简为 $\frac{\lambda}{d-\lambda} - 1 \geq \frac{2\lambda}{n}$；由 $\lambda \geq 2d/3$ 和 $n \geq 2d \geq 2\lambda$ 即可验证此不等式。□

注记 6.5. 一般而言，$N_\alpha(n+1) \geq N_\alpha(n)+1$ 并不成立。事实上，$N_{1/3}(7) = \cdots = N_{1/3}(14) = 28$ [GSY21]。

最后，我们证明定理 1.4。

定理 1.4 的证明。设 $u \geq 10^5$ 为一个整数，并令

$$\alpha = \frac{1}{4\sqrt{u^2+1}-1}.$$

我们将证明 $n + \Omega(\log\log n) \leq N_\alpha(n) \leq n + O(n/\log\log n)$。

令 $\lambda = (1-\alpha)/(2\alpha) = 2\sqrt{u^2+1}-1$。关于 $N_\alpha(n)$ 的上界由定理 1.2 和推论 6.3 得出：由于 u^2+1 不是平方数，推论 6.3 给出 $k(\lambda) = \infty$，因此定理 1.2(b) 蕴含 $N_\alpha(n) = n + O(n/\log\log n)$。对于下界，我们使用定理 5.8 中的图。对于某个 $d \leq 5u/2 \leq 3\lambda/2$ 以及满足 $n_i \leq 4n_{i-1}^9$ 的某个序列 $n_0 < n_1 < \cdots$，存在定义在 n_i 个顶点上的 d-正则图，其第二特征值为 λ，且重数为 $\Omega(\log\log n_i)$。定义 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 为 $f(n) = 0$（当 $n < n_0$ 时），并在 $n_i \leq n < n_{i+1}$ 时令 $f(n) = i$，则有 $f(n) = \Omega(\log\log n)$。由于 $\lambda \geq 2d/3$，引理 6.4 给出，只要 $n \geq n_i - i$，就有 $N_\alpha(n) \geq n+i$；这意味着

$$N_\alpha(n) \geq n + f(n) \geq n + \Omega(\log\log n),$$

如所愿。 □

Acknowledgment

作者谨向 Yufei Zhao 致谢，感谢他给予指导、提出问题，并提供有益的评论和建议。

References

[BL06] 约纳坦·比卢和内森·利尼亚尔。提升、偏差与近乎最优的谱隙。 *Combinatorica* 26 5 495 2006 10 1007 00493 006 0029 7 , ( ) : – 519, 10月。doi: 。/s - - -。[CDG82] 德拉戈什·茨维特科维奇、迈克尔·杜布和伊万·古特曼。关于谱半径不超过 $(2+\sqrt{5})^{1/2}$的图。 *Ars Combinatoria*, 14: 225–239, 1982。[CR90] D. 茨维特科维奇和 P. 罗林森。图的最大特征值：一项综述。, (-) : – 10月。doi: 。/。[dC00] D. de Caen。欧几里得空间中的大型等角直线集。 *The Electronic Journal of Combinatorics* 7 2000 10 37236 1533 , : R55, 11月。doi: 。/。[GSY21] 加里·R·W·格里夫斯、杰文·夏特里亚迪和帕夫洛·亚齐纳。低维欧几里得空间中的等角直线。 *Combinatorica*, 41(6): 839–872, 2021年12月。doi:10.1007/s00493-020-4523-0。[HSZZ22] 米兰·海曼、CARL SCHILDKRAUT、张盛通和 Yufei Zhao。第二特征值重数较大的图。 *Bulletin of the London Mathematical Society*, 54(5): 1630–1652, 2022。doi:10.1112/blms.12647。[JP20] 蒋子林和亚历山大·波利安斯基。谱半径有界图的禁子图及其在等角直线中的应用。 *Israel Journal of Mathematics*, 236(1): 393–421, 2020年3月。doi:10.1007/s11856-020-1983-2。[JTY+21] 蒋子林、乔纳森·蒂多、姚远、张盛通和 Yufei Zhao。具有固定角的等角直线。 *Annals of Mathematics*, 194(3): 729–743, 2021年11月。doi:10.4007/annals.2021.194.3.3。[LS73] P. W. H. 莱门斯和 J. J. 塞德尔。等角直线。 *Journal of Algebra*, 24(3): 494–512, 1973年3月。doi:10.1016/0021-8693(73)90123-3。[MRS21] 西奥·麦肯齐、彼得·迈克尔·赖希施泰因·拉斯穆森和尼基尔·斯里瓦斯塔瓦。闭游走的支撑与图的第二特征值重数。载于*SIGACT Symposium on Theory of Computing* 2021, 396 407, *Proceedings of the 53rd Annual ACM* , ST OC, 第–页, 纽约, NY, 美国, 2021年6月。计算机协会。doi:10.1145/3406325.3451129。[MSS15] 亚当·马库斯、丹尼尔·斯皮尔曼和尼基尔·斯里瓦斯塔瓦。交错族 I：各度数的二分拉马努金图。 *Annals of Mathematics*, 第307–325页, 2015年7月。doi:10.4007/annals.2015.182.1.7。[Rob62] 拉斐尔·M·罗宾逊。包含无穷多个共轭代数整数集的区间。载于 *Studies in mathematical analysis and related topics*, 第305–315页。斯坦福大学出版社, 美国加利福尼亚州斯坦福, 1962年。

Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, USA*Email address*: carlsc@mit.edu