arXiv:2302.12298v1 [math.CA] 18 Feb 2023

若干 Hardy 型不等式的尖锐性

Lars-Erik Persson[1,2], **Natasha Samko**[1] **和 George Tephnadze**[3]

[1]挪威北极大学，邮政信箱 *385*，*N-8505*，纳尔维克，挪威，[2] 卡尔斯塔德大学，*65188* 卡尔斯塔德，瑞典，[3] 格鲁吉亚大学，梅拉布·科斯塔瓦街 *77a*，第比利斯，*0128*，格鲁吉亚。

摘要

摘要：本文以统一的凸性视角介绍并阐述了关于具有最佳常数的 Hardy 型不等式的最新进展。特别是，自然地可以用 Haar测度 dx/x. 替代勒贝格测度 dx。此外，本文还推导出了一些关于单调函数的新的双边Hardy型不等式，其中不仅两个常数均为最佳常数，而且所涉及的函数空间也更加理想。作为应用，文中指出了若干众所周知的和新颖的 Hardy 型不等式。进而，这些结果被用于推导关于洛伦兹空间中不同拟范数之间关系的尖锐性的若干新结论。

2020年数学主题分类：26D10, 46E30。
关键词和短语：不等式、Hardy 型不等式、最佳常数、最优目标函数、Lorentz 空间。

1 引言

1925年的连续Hardy不等式（见 [5]）告诉我们，如果 f 是$(0,\infty)$上的非负 p-可积函数，那么对于每个正的 x， f在区间$(0,x)$上可积，并且

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx, \ \ p>1. \tag{1.1}$$

著名的Hardy不等式在1906年至1928年间以离散形式和连续形式发展起来，这一发展有其自身的历史，或者如我们所称的前史。除G.H. Hardy之外，其他数学家的贡献在这里也十分重要，例如E. Landay、G. Polya、E. Schur和M. Reisz。这段前史已在 [9]中作了描述。

(1.1)的第一个加权版本由Hardy本人于1928年证明（见 [6]）：

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy\right)^p x^a dx \le \left(\frac{p}{p-1-a}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)x^a dx \tag{1.2}$$

其中 f i 是在 $(0,\infty)$ 上可测的非负函数，只要 $a<p-1, p>$ 1.

在如今称为 Hardy 型不等式的这一领域中，取得了令人瞩目的进一步发展；对于加权Lebesgue空间，通常使用勒贝格测度 dx （参见著作 [7], [8], [10] 和 [11] 及其中的参考文献）。本文的一个基本思路是利用凸性，因此改用测度 dx/x 会更加自然（当底层群为 $R+$时，=为Haar测度）。此外，这种考察问题的方式有助于我们更轻松地研究和描述

Hardy 型不等式的尖锐性。在 Hardy 型不等式理论中（即加权Lebesgue空间之间的不等式），我们通常可以得到最佳常数（= 算子范数或拟范数）的良好估计。然而，最佳常数在极少数情况下才是已知的。

本文在上述凸性（dx/x）框架下描述和／或推导了大部分这类 Hardy 型不等式。此外，我们还着重研究如何在单调函数锥中推导相应的反向不等式，并且仍使最佳常数成立。结果表明，我们的方法还意味着，在某些特殊情形下，尖锐性可以进一步提升：例如，不仅可以得到最佳常数，还可以通过引入更优的函数空间，有时甚至引入最优的所谓目标函数来提升尖锐性。为了阐明这一想法，我们给出下面这个入门示例：

例 1.1. 不等式 (1.2) 在区间 (0，∞) 被 (0，ℓ) $0<\ell\leq\infty$ 时仍然成立，且常数

$$C=\left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^p$$

是最佳的。然而，以下这个“更佳”的不等式也已为人所知（见 [13]，并参见该书 [11]中的定理 2.3 a）：

$$\int_0^\ell\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy\right)^p x^\alpha dx\leq\left(\frac{p}{p-1-a}\right)^p\int_0^\ell f^p(x)x^\alpha\left[1-\left(\frac{x}{\ell}\right)^{\frac{p-1-a}{p}}\right]dx, \tag{1.3}$$

其中 $\alpha<p-1$，$p>1$，并且常数 $C=\left(\frac{p}{p-1-a}\right)^p$ 仍为最佳。此外，我们注意到，对于非增函数锥，(1.2) 以相反方向成立，常数为 $C=1$。但事实上，只要 $\alpha>-1$，(1.3) 也以相反方向成立，且最佳常数为 $C=p/(p-1-a)>1$。参见定理 3.2 a)。在这种两个常数均为最佳的情况下，我们称所涉及的权函数

$$g(x):=1-\left(\frac{x}{\ell}\right)^{\frac{p-1-a}{p}}<1,\ x<\ell,$$

为“最优目标函数”。

本文的组织如下：第 2 节介绍上述用于推导幂加权Hardy型不等式的凸性方法及其一些推论。在本节以及后文中可以看出，采用 Haar测度 dx/x 而非勒贝格测度 dx 来表示此类不等式，是这种凸性方法所自然要求的。第 3 节推导单调函数锥上的一些新的最佳逆Hardy型不等式。第 4 节用于介绍和讨论一些新的应用，例如涉及双边Hardy型不等式的应用，其中两个常数都是最佳的；此外，通过指出所涉及的（更为）最优函数空间，还进一步强化了这些实际不等式。这些结果反过来又使得推导关于洛伦兹空间中不同范数之间比较的一些新结果成为可能。最后，第 5 节用于总结性评论，以及介绍和／或推导一些进一步的最佳Hardy型不等式。

2 运用凸性推导最佳幂加权 Hardy 型不等式的方法

凸性的概念可用于证明若干不等式——包括经典不等式和新不等式——这一事实当然早已为 Hardy 本人所知。例如，在著名的著作 [7]中，这一概念及与之或多或少等价的 Jensen 不等式曾被频繁使用。因此，令人惊讶的是，Hardy 本人从未发现，他著名的不等式，无论是原始形式（见（1.1））还是幂加权形式（例如见（1.2）），都可以或多或少直接地按照下文所述方式得到。关于凸性及其应用（例如用于证明不等式），可参阅近期著作[12], 、论文 [13], [14], 以及其中的参考文献。

2.1 重新审视不等式(1.1) 和(1.2)

观察 2.1. 我们注意到，对于 $p>1$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx,$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x g(y)dy\right)^p \frac{dx}{x} \le 1\cdot\int_0^\infty g^p(x)\frac{dx}{x}, \tag{2.1}$$

其中 $f(x) = g(x^{1-1/p})x^{-1/p}$.

这意味着 Hardy 不等式 (1.1) 对于 $p>1$ 等价于 (2.1)，因此 Hardy 不等式可以用以下简单方法证明（参见形式 (2.1)）：根据 Jensen不等式和 Fubini 定理，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x g(y)dy\right)^p \frac{dx}{x} &\le \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x g^p(y)dy\right)\frac{dx}{x} \\ &= \int_0^\infty g^p(y)\int_y^\infty \frac{dx}{x^2}dy = \int_0^\infty g^p(y)\frac{dy}{y}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

改为作如下代换

$$f(t) = g(t^{\frac{p-1-a}{p}})t^{-\frac{1+a}{p}}$$

在 (1.2) 中，我们还看到，这个不等式也等价于 (2.1)。这些事实尤其意味着:

(a) Hardy 不等式 (1.1)和(1.2)也适用于 $p<0$ （因为函数 $\varphi(u) = u^p$对于 $p<0$ 也是凸函数），而对于 $0<p<1$，不等式方向则相反（最佳常数分别为$\left(\frac{p}{1-p}\right)^p$和 $\left(\frac{p}{a+1-p}\right)^p$， $a>p-1$， ）。

(b) 不等式 (1.1) 和 (1.2) 等价，因为它们都等价于 (2.1)

(c) 不等式 (2.1) 对 $p=1$，等号成立，这使我们有可能进行插值，从而获得有关 Hardy 算子映射性质的更多信息。特别地，我们可以运用插值理论看出，实际上 Hardy 算子 H 将每个介于 $L_1\left((0,\infty)\frac{dx}{x}\right)$ 和 $L_\infty\left((0,\infty)\frac{dx}{x}\right)$ 之间的插值空间 B映射到 B, 也就是说，以下更一般的 Hardy 型不等式成立:

$$\|Hf\|_B \le C\|f\|_B.$$

2.2 第2.1节中提出的新观点的进一步推论

对于有限区间情形，我们需要在第 2.1 节介绍的基本（凸性）形式的 Hardy´不等式的以下扩展。

定理2.2。 设 g 是定义在$(0,\ell)\ 0<\ell\leq\infty$.上的非负可测函数。*a)* 若 $p<0$ 或 $p\geq 1$, 则

$$\int_0^\ell\left(\frac{1}{x}\int_0^x g(y)dy\right)^p\frac{dx}{x}\leq 1\cdot\int_0^\ell g^p(x)\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\frac{dx}{x}. \tag{2.3}$$

（在 $p<0$ 的情形下，我们假设 $g(x)\ >0, 0<x\leq\ell$。）
b) 若 $0<p\leq 1$，则(2.2) 以相反方向成立。

c) 常数 $C=1$在*a)*和*b)*中都是最佳的。

证 明。证明a) 证明只需对(2.2作显而易见的修改).
b) 由于 Jensen´ 不等式对于凹函数在相反方向上成立,

$$\phi(u)=u^p,\ \ 0<p\leq 1,$$

证明以同样的方式进行。
c) 假设将 (2.3) 中的常数 1 替换为某个常数 $C,\ 0<C<1.$。取测试函数 $g(x)\ =x^\alpha,\ 0\leq x\leq\ell,$ $a>0,$ 代入 (2.3)，经过简单计算可得

$$\frac{\alpha p+1}{(\alpha+1)^p}\leq C<1$$

因此，取 α 充分小，就会得到矛盾，关于 a) 的证明至此完成。通过对这一论证作显而易见的修改，即可证明 b) 的尖锐性，证明至此完成。□

通过进行与 [13] 中定理 2.4 的证明类似的计算（另见 [11] 一书中的定理7.10），或者直接进行适当的变换，我们得到这一等价性的如下对称形式定理:

定理 2.3。 设 $0<\ell\leq\infty$，设 $p\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$，且设 f 为非负函数。那么 *a)* 不等式

$$\int_0^\ell\left(\int_0^x f(y)dy\right)^p x^{-\alpha}\frac{dx}{x}\leq\left(\frac{p}{\alpha}\right)^p\int_0^\ell(xf(x))^p\,x^{-\alpha}\left[1-\left(\frac{x}{\ell}\right)^{\frac{\alpha}{p}}\right]\frac{dx}{x} \tag{2.4}$$

在以下情况下，对所有可测函数 f、每个 ℓ、 $0<\ell\leq\infty$ 以及所有 α，该结论均成立:

$$(a_1)\qquad p\geq 1,\alpha>0,$$

$$(a_2)\qquad p<0,\alpha<0.$$

b) 对于情形 $0 < p < 1$、 $\alpha > 0$，不等式 (2.4) 对所有 ℓ、 $0 < \ell \leq \infty$ 均以相反方向成立。*c)* 该不等式

$$\int_{\ell}^{\infty} \left(\int_{x}^{\infty} f(y)dy \right)^{p} x^{\alpha} \frac{dx}{x} \leq \left(\frac{p}{\alpha} \right)^{p} \int_{\ell}^{\infty} f^{p}(x) x^{\alpha} \left[1 - \left(\frac{\ell}{x} \right)^{\frac{\alpha}{p}} \right] \frac{dx}{x} \tag{2.5}$$

在以下情况下，对所有可测函数 f、每个 ℓ、$0 \leq \ell < \infty$ 以及所有 α，该结论均成立：

$$(c_1) \qquad p \geq 1, \alpha > 0,$$

$$(c_2) \qquad p < 0, a < 0.$$

d) 对于 $0 < p \leq 1$、 $\alpha > 0$ 的情形，不等式 (2.5) 对所有ℓ、 $0 \leq \ell < \infty$均以相反方向成立。

e) 以上所有不等式都是最佳的。*f)* 设 $p \geq 1$ 或 $p < 0.$ 。那么，对于所有允许的 α，*a)* 和 *c)* 中的陈述等价。 .

g) 设 $0 < p < 1.$ 。那么，对于所有允许的 $\alpha.$，*b)* 和 *d)* 中的陈述等价。

注2.4。 对于 $l = \infty$ 的情形，不等式 (2.4) 和 (2.5) 已在新书 [15] 中以这种凸性形式表述、证明并应用。这一事实进一步促使我们以这种凸性（dx/x）方式重新表述结果；这不仅有助于加深理解，也更适用于现代调和分析中的此类应用。

3 单调函数的相反方向最佳 Hardy 不等式

为证明本节的主要结果，我们需要以下引理 a:

引理 3.1. 设 $p > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，且 f 是在(a, b) $\infty \leq a < b \leq \infty.$上的非负可测函数

$a)$ 设 f 在(a, b) $\infty < a < b \leq \infty.$ 上非递增。若 $p \geq 1$，则

$$\left(\int_{a}^{b} f(y)\, dy \right)^{p} \geq p \int_{a}^{b} (y-a)^{p-1} (f(y))^{p} dy. \tag{3.1}$$

若 $0 < p \leq 1$，则(3.1) 在相反方向成立。

$b)$ 设 f 在(a, b) $-\infty \leq a < b < \infty.$ 上非递减。若 $p \geq 1$，则

$$\left(\int_{a}^{b} f(y)\, dy \right)^{p} \geq p \int_{a}^{b} (b-y)^{p-1} (f(y))^{p} dy. \tag{3.2}$$

若 $0 < p \leq 1$，则(3.2) 的不等式方向相反。

c) 这四个不等式中的常数 p 都是最佳的。事实上，对于某个 $c \in (a,b)$，且 $A > 0.$，函数 $f(y) = A\chi_{(a,c)}(y)$ 使(3.1)中等号成立。此外，若对于某个 $c \in (a,b)$，且 $A > 0.$，则(3.2)中等号成立：$f(y) = A\chi_{(c,b)}(y)$

这一引理各种变体的证明可在许多地方找到（例如，参见 [3]），但为方便读者起见，我们仅给出这一变体的一个简单证明。

证明。首先假设 $-\infty < a < b < \infty.$接下来我们注意到，通过令 $g(y) = f(a+b-y)$，即可将 b) 的证明归约为 a) 的证明。因此，只需证明 a)。此外，通过作适当的坐标变换，我们得出只需考虑情形 $(a,\ b) = (0。1)$。因此，我们考虑定义在 $(0,\ 1)$ 上的非负、可测且非递增函数 f。

Let

$$F(x) = \int_0^x f(y)\,dy.$$

于是 $F(0) = 0,$ 并且对几乎处处的 $x \in (0,\ 1)$，若 $p \geq 1$，则

$$\frac{d}{dx}(F(x))^p = pf(x)(F(x))^{p-1} \geq px^{p-1}(f(x))^p$$

从 0 积分到 1，我们得到

$$\left(\int_0^1 f(y)\,dy\right)^p = (F(1))^p \geq p\int_0^1 y^{p-1}f(y)\,dy.$$

同样的论证表明，如果 $0 < p \leq 1.$，则该不等式沿相反方向成立。我们得出 a) 和 b) 均已得到证明。显然，对于所述测试函数 $0 < p \leq 1$，不等式 (3.1) 和 (3.2) 及其相反方向的形式中的等号均成立。

$$f(y) = A\chi_{(a,c)}(y) \quad \text{and} \quad f(y) = A\chi_{(c,b)}(y),$$

分别。

情形 $a = -\infty$ 或 $b = \infty$ 的证明只需通过极限过程即可完成，因此证明完毕。□

首先考虑 f 非递增的情形，并注意到此时，只有当 $0 < \alpha < p$ 时，这样的反向不等式才有意义（否则，对于所有非平凡函数 f，相关积分都会发散）。

我们的第一个主要结果如下:

定理 3.2. 设 $p > 0, 0 < \alpha < p$，且 f 是定义在 $(0,\ell)\ 0 < l \leq \infty.$ 上的可测、非负且非递增函数

a) 若 $p \geq 1$，则

$$\int_0^\ell \left(\int_0^x f(y)\,dy\right)^p x^{-\alpha}\frac{dx}{x} \geq \frac{p}{\alpha}\int_0^x (xf(x))^p x^{-\alpha}\left(1-\left(\frac{x}{\ell}\right)^\alpha\right)\frac{dx}{x}. \tag{3.3}$$

b) 若 $0 < p \leq 1$，则(3.3)在相反方向上成立。

c) 常数 $C = p/\alpha$ 在 a) 和 b) 两种情形下都是最佳的，并且对每个函数$f(x) = A\chi_{(0,c)}(x)$，当某个 $c \in (0, l)$ 时，等号成立；并且 $A > 0$.

证明。 a) 利用引理 3.1 和 Fubini 定理，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^\ell \left(\int_0^x f(y)\, dy \right)^p x^{-\alpha} \frac{dx}{x} \\
\geq\ & p \int_0^\ell \left(\int_0^x y^{p-1} (f(y))^p dy \right) x^{-\alpha} \frac{dx}{x} \\
=\ & p \int_0^\ell (yf(y))^p \left(\int_y^\ell x^{-\alpha-1} dx \right) \frac{dy}{y} \\
=\ & \frac{p}{\alpha} \int_0^\ell (yf(y))^p \left(y^{-\alpha} - \ell^{-\alpha} \right) \frac{dy}{y} \\
=\ & \frac{p}{\alpha} \int_0^\ell (yf(y))^p y^{-\alpha} \left(1 - \left(\frac{y}{\ell} \right)^\alpha \right) \frac{dy}{y}.
\end{aligned}$$

b) 证明 a)时仅用到了一个不等式；根据引理 3.1，在此情形下该不等式在相反方向成立，因此 b) 也得到了证明。

c) 根据上述证明，利用引理 3.1 即可推出这一尖锐性结论，但我们也直接验证如下：设 $f(x) = A\chi_{(0,c)}(x)$ $c \in (0, l)$. 那么

$$\begin{aligned}
\frac{p}{\alpha} \int_0^\ell (xf(x))^p x^{-\alpha} \left(1 - \left(\frac{x}{\ell} \right)^\alpha \right) \frac{dx}{x} &= \frac{p}{\alpha} A^p \int_0^c x^{p-\alpha-1} \left(1 - \left(\frac{x}{\ell} \right)^\alpha \right) dx \\
&= A^p \frac{p}{\alpha} \left(\frac{c^{p-\alpha}}{p-\alpha} - \frac{1}{\ell^\alpha} \frac{c^p}{p} \right) := I
\end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell \left(\int_0^x f(y)\, dy \right)^p x^{-\alpha} \frac{dx}{x} &= A^p \int_0^c x^{p-\alpha-1} dx + A^p c^p \int_c^\ell x^{-\alpha-1} dx \\
&= A^p \frac{c^{p-\alpha}}{p-\alpha} + \frac{A^p c^p}{\alpha} \left(c^{-\alpha} - \ell^{-\alpha} \right) \\
&= A^p \frac{p}{\alpha} c^{p-\alpha} - A^p \frac{c^p}{\alpha} = I
\end{aligned}$$

我们得出结论：常数 p/α 在 a)和 b)中都是最佳的，且等号成立 fo r

$$f(x) = A\chi_{(0,c)}(x), \quad c \in (0, l),$$

因此也证明了 c)。

□

如前所述，当 $\alpha \geq p.$ 时，不等式 (3.3) 在非递增函数锥中没有意义。但若改为限制在非减函数锥中，情况则不同。不过在这种情况下，“目标函数”

$$f(x) = \left(1 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^{\alpha}\right)$$

与截断函数不同，定义如下： β_α

$$\beta_\alpha = \beta_\alpha(u, v) = \int_\alpha^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}, \ 0 \leq \alpha < 1.$$

特别地， β_0 与通常的函数 β $\beta(u.v)$。

我们的下一个主要结果如下:

定理 3.3。 设 $\alpha \geq p > 0$ ，且 f 是 $(0, \ell)$ $0 < \ell \leq \infty.$ 上一个可测、非负且非减的函数

a) 若 $p \geq 1$，则

$$\int_0^\ell \left(\int_0^x f(y)\, dy\right)^p x^{-\alpha} \frac{dx}{x} \geq \tag{3.4}$$

$$\geq \frac{p}{\alpha} \int_0^\ell (xf(x))^p x^{-\alpha} T(x) \frac{dx}{x},$$

其中

$$T(x) := \alpha \beta_{\frac{x}{\ell}}(p, \alpha - p + 1), \ x \leq l.$$

b）若 $0 < p \leq 1$，则 （3.4）在相反方向上成立。

c）常数 $\frac{p}{\alpha}$ 在 a）和 b）两种情况下都是最佳的，并且当

$$f(x) = A\chi_{(c,l)}(x) \quad \textit{for some} \quad c \in (0, l) \quad \textit{and} \quad A > 0.$$

证明。 a）再次利用引理 3.1 和 Fubini 定理，我们得到

$$I := \int_0^\ell \left(\int_0^x f(y)\, dy\right)^p x^{-\alpha} \frac{dx}{x} \geq p \int_0^\ell \int_0^x (x-y)^{p-1} (f(y))^p dy x^{-\alpha} \frac{dx}{x}$$

$$= p \int_0^\ell (f(y))^p \int_y^\ell (x-y)^{p-1} x^{-\alpha} \frac{dx}{x} dy.$$

我们对内积分作变换 $t=\frac{y}{x}$，得到

$$\begin{aligned} I &\geq p\int_0^{\ell}\left(f\left(y\right)\right)^p\int_{y/l}^{1}(1-t)^{p-1}\left(\frac{y}{t}\right)^{p-\alpha-1}\frac{dt}{t}dy \\ &= p\int_0^{\ell}\left(yf\left(y\right)\right)^p y^{-\alpha}\int_{y/l}^{1}(1-t)^{p-1}t^{\alpha-p}dt\frac{dy}{y} \\ &= \frac{p}{\alpha}\int_0^{\ell}\left(yf\left(y\right)\right)^p y^{-\alpha}T\left(y\right)\frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

b) 由于上述唯一使用的不等式在此情形下方向相反（见引理 3.1），因此 *b*) 的证明方法相同。

c) 选取测试函数

$$f\left(x\right)=A\chi_{(c,l)}\left(x\right),\ c\in\left(0,l\right).$$

那么，根据 对 *a*) 和 *b*) 的证明，对于任意 $p>0$，(3.4) 右边等于

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^{\ell}\int_0^{x}(x-y)^{p-1}A^p\left(\chi_{(c,l)}(y)\right)^p dyx^{-\alpha}\frac{dx}{x} \\ &= pA^p\int_c^{\ell}\int_c^{x}(x-y)^{p-1}dyx^{-\alpha}\frac{dx}{x} \\ &= A^p\int_c^{\ell}(x-c)^p x^{-\alpha}\frac{dx}{x} \end{aligned}$$

此外，(3.4) 左边等于

$$A^p\int_0^{\ell}\int_0^{x}\left(\chi_{(c,l)}\left(y\right)dy\right)^p x^{-\alpha}\frac{dx}{x}=A^p\int_c^{\ell}(x-c)^p x^{-\alpha}\frac{dx}{x}=I$$

so w我们在 (3.4) 中等号成立，并且对于所有 $p>$，$0<p\leq 1$ 满足反向不等式
0。证明完毕。 □

例 3.4。 对于情形 $l=\infty$，我们得到最佳不等式

$$\int_0^{\infty}\left(\int_0^{x}f\left(y\right)dy\right)^p x^{-\alpha}\frac{dx}{x}\geq pB(p,\alpha-p+1)\int_0^{\infty}\left(xf(x)\right)^p x^{-\alpha}\frac{dx}{x}$$

对所有非减函数 f 均成立。当 $0<p\leq$1 时，该不等式的方向相反，且此时常数也是最佳的。因此，只需改变记号，便可看出我们的结果也推广了 [3] 中的一个结果。

因此，我们已经考察了通常的（算术平均）Hardy 算子的所有情形，接下来转向对偶情形（参见定理 2.3 c）），而这里唯一非平凡的情形是研究非递增情形。

本情形的主要结果如下:

定理 3.5。 设 $p>0$、 $\alpha>0$ 和 f 是 $(\ell,\ \infty)$ $0\leq\ell<\infty$. 上的可测、非负且非递增函数

a）若 $p\geq 1$，则

$$\int_{\ell}^{\infty}\left(\int_{x}^{\infty}f(y)\,dy\right)^{p}x^{\alpha}\frac{dx}{x}\geq\frac{p}{\alpha}\int_{\ell}^{\infty}\left(xf(x)\right)^{p}x^{\alpha}T_{0}(x)\frac{dx}{x},\tag{3.5}$$

其中

$$T_{0}(x):=\alpha\beta_{\frac{\ell}{x}}(p,\alpha),\ \ x\geq l.$$

b）若 $0<p\leq 1$，则 (3.5)以相反方向成立。

c）该 c 常数 p/α 在 $a)$ 和 $b)$ 中都是最佳的，并且在 $a)$ 和 $b)$ 中均有等号成立，若

$$f(x)=A\chi_{(\ell,c)}(x)\quad \textit{for some}\quad c\in(\ell,\infty)\quad \textit{and}\quad A>0.$$

证明。 $a)$ 再次应用引理 3.1 和 Fubini´ 定理可得

$$\begin{aligned}I\ &:=\ \int_{\ell}^{\infty}\left(\int_{x}^{\infty}f(y)\,dy\right)^{p}x^{\alpha}\frac{dx}{x}\geq p\int_{\ell}^{\infty}(y-x)^{p-1}(f(y))^{\beta}dyx^{\alpha}\frac{dx}{x}\\ &=\ p\int_{\ell}^{\infty}(f(y))^{p}\int_{\ell}^{y}(y-x)^{p-1}x^{\alpha-1}dxdy\\ &=\ p\int_{\ell}^{\infty}(f(y))^{p}y^{p-1}\int_{\ell}^{y}\left(1-\frac{x}{y}\right)^{p-1}x^{\alpha-1}dxdy\end{aligned}$$

因此, 在内积分中作变换 $t=x/y$，即可得出 t

$$\begin{aligned}I\ &\geq\ p\int_{\ell}^{\infty}(f(y)\,y)^{p}y^{\alpha}\int_{l/y}^{1}(1-t)^{p-1}t^{\alpha-1}\frac{dy}{y}\\ &=\ \frac{p}{\alpha}\int_{\ell}^{\infty}(f(y)\,y)^{p}y^{\alpha}T_{0}(x)\frac{dy}{y}.\end{aligned}$$

$b)$ 证明方法相同，因为此时 $a)$ 中唯一用到的不等式在相反方向上仍然成立。

$c)$ 与定理 3.3 $c)$ 的证明类似，我们可以很容易地验证，对于每个函数，在不等式 (3.5) 中确实等号成立（而当 $0<p\leq 1$)时，反向不等式中也成立）

$$f(x)=A\chi_{(\ell,c)}(x),\ c\in(\ell,\infty)\ \text{and}\ A>0.$$

因此，尖锐性也得到了证明。 □

例 3.6. 设 f, p 和 α 如定理 3.5 中所定义。若 $p \geq 1$, 则

$$\int_0^\infty \left(\int_x^\infty f(y)\, dy \right)^p x^\alpha \frac{dx}{x} \geq p\beta(p, \alpha) \int_0^\infty (xf(x))^p x^\alpha \frac{dx}{x},$$

其中 $f(x)$ 是一个非负且非递增的函数。当 $0 < p \leq 1$ 时，不等式的方向相反，而常数 $p\beta(p, \alpha)$ 在两种情况下都是最佳的。因此，定理 3.5 也可视为 [3] 中另一结果的推广。

4 应用

结合定理 2.3 $a)$ $b)$ 和 $c)$ 与定理 3.2，我们得到以下最佳双侧估计：

定理 4.1.. 设 $p > 0, o < \alpha < p, 0 < \ell \leq \infty$，并设 f 是定义在 $(0, \ell)$ 上的可测、非负且非递增函数。

若 $p > 1$，则

$$\left(\frac{p}{\alpha}\right)^{1/p} I_1 \leq I_2 \leq \frac{p}{\alpha} I_1, \tag{4.1}$$

其中

$$I_1 = \left(\int_0^\ell (xf(x))^p x^{-\alpha} \left(1 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^\alpha\right) \frac{dx}{x} \right)^{1/p}$$

and

$$I_2 = \int_0^\ell \left(\int_0^x f(y)\, dy \right)^p x^{-\alpha} \frac{dx}{x}.$$

如果 $0 < p \leq 1$，则 (4.1) 以相反方向成立。此外，对于所有 $p > 0.$，两个常数 $(p/\alpha)^{1/p}$ 和 p/α 都是最佳的

注 4.2。 $a)$ 这意味着等价性 $I_2 \approx I_1$ 成立，并且相应的“最优目标函数”为

$$g(x) = 1 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^\alpha.$$

$b)$ 在下方的不等式中，我们甚至可以有等号成立，而在上述不等式中，尖锐性可通过选取一列非递增函数得到（这是 Hardy 型不等式理论中的一个众所周知的事实）。

注 4.3。 不同数学领域中许多重要对象都是非减的（例如洛伦兹空间、插值理论、逼近理论和调和分析中的对象）。因此，

定理 4.1 尤其可用于在这些领域中获得已知结果的一些更精确版本。我们仅在洛伦兹空间理论中阐释这一点，但也希望今后运用我们的结果，改进现代调和分析中的一些结果，相关内容见新书 [15]。

令 f^* 表示测度空间 $(\Omega\ \mu)$ 上函数 f 的非递增重排。洛伦兹空间 $L^{p,\ q},\ 0<p,\ q<\infty$ 由拟范数定义（当 $p>1,\ q\geq 1$ 时为范数）

$$\|f\|_{p,q}^{*}:=\left(\int_0^{\infty}\left(f^{*}(t)\,t^{1/p}\right)^{q}\frac{dt}{t}\right)^{1/q}. \tag{4.2}$$

众所周知，对于情形 $p>1$，该拟范数等价于以下由通常的 Hardy 算子所定义的拟范数：

$$\|f\|_{p,q}^{**}:=\left(\int_0^{\infty}\left(\int_0^{t}f^{*}(u)\,du\right)^{q}t^{-q/p'}\frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

此外，我们还有以下更精确的估计：

$$(p')^{1/q}\,\|f\|_{p,q}^{*}\leq\|f\|_{p,q}^{**}\leq p'\,\|f\|_{p,q}^{*} \tag{4.3}$$

若 $q>1$，则反向不等式在 $0<q\leq 1.$ 时成立。不过，利用定理 4.1，我们不仅能得到 (4.3) 中的最佳估计，还能得到以下更精确的结论：

推论 4.4。 在上述记号和假设下，$p>1$ 且 $0<\ell\leq\infty$，我们有

$$(p')^{1/q}I_{\ell}^{*}\leq I_{\ell}^{**}\leq p'I_{\ell}^{*}, \tag{4.4}$$

其中 $q>1$,

$$I_{\ell}^{*}:=\left(\int_0^{\ell}\left(f^{*}(t)\,t^{1/p}\right)^{q}\left(1-\left(\frac{t}{\ell}\right)^{q/p'}\right)\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

and

$$I_{\ell}^{**}:=\left(\int_0^{\ell}\left(\int_0^{t}f^{*}(u)\,du\right)^{q}t^{-q/p'}\frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

如果 $0<q\leq 1$，则 (4.4) 中的不等式成立方向相反。对于所有 $q>0.$，两个常数 $(p')^{1/q}$和 p' 都是最佳的

证明。只需将定理 4.1 中的 p 替换为 q，并将 α 替换为 $q/p'.$ □

注 4.5。 注意到，(4.3) 只需将 (4.4) 与 $l=\infty$，结合使用即可得到，因此 (4.3) 中的两个常数（以及 $0\leq q\leq 1$的反向不等式）都是最佳的。

注记4.6。 对于 $0<p\leq 1$，已知拟范数 $\|f\|_{p,q}^{*}$ 等价于以下拟范数 $\|f\|_{p}^{**}{}_{,q}$ 其配备了对偶 Hardy 算子：

$$\|f\|_{p,q}^{**}:=\left(\int_{0}^{\infty}\left(\int_{t}^{\infty}f^{*}(u)\,du\right)^{q}t^{-q/p'}\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

改为使用定理 2.3 c) d) 和 e)，并结合例 3.6 与 $l=0$，可得若 $0<p\leq 1$，则

$$(q\beta(q,-q/p'))^{1/q}\|f\|_{p,q}^{*}\leq\|f\|_{p,q}^{**}\leq -p'\|f\|_{p,q}^{*} \tag{4.5}$$

若 $q\geq 1$，则反向不等式在 $0<q\leq 1.$ 时成立。两个常数（$q\beta(q,\ -q/p')$)$^{1/q}$ 和 $-p'$ 对所有 $q>0$.都是最佳常数

注记4.7。 可以表述一个类似于推论 4.4 的更一般结论，其中两个不等式都涉及最佳常数 ∞ ∞，而积分 $\int$ 替换为积分 $\int_{0}$ ℓ $0\leq\ell<\infty.$。特别地，这给出了对 (4.5) 的类似推广。不过，在这种情况下，结果看起来不那么简洁，因为两个目标函数 $1-\left(\frac{x}{\ell}\right)^{\alpha}$ 和 $\alpha\beta_{\ell}{}_{x}(p,\ \alpha)$ 并不相同。

我们只给出下面这个与注记4.7及著名不等式有关的最后一个例子：若 $0<p<1$，则

$$\int_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_{x}^{\infty}f(y)\,dy\right)^{p}dy\leq\frac{\pi p}{\sin\pi p}\int_{0}^{\infty}f^{p}(x)\,dx \tag{4.6}$$

对定理 3.5 中定义的所有函数：

例4.8。设 $0<p<1$，且 f 是定义在 $(\ell,\ \infty)$ $0\leq l<\infty.$ 上的可测非负非递增函数。若 $0<p\leq 1$，则

$$\int_{\ell}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_{0}^{\infty}f(y)\,dy\right)^{p}dx\leq p\int_{\ell}^{\infty}f^{p}(x)\,\beta_{\frac{\ell}{x}}(p,1-p)\,dx,$$

且常数 p 是最佳的。这只是定理 3.5 b)，其中 $\alpha=1-p.$

特别地，对于 $l=\infty$，这个不等式与 (4.6) 一致，因为

$$\beta(p,1-p)=\pi/\sin\pi p,$$

因此，(4.6) 中的常数 $\frac{\pi p}{\sin\pi p}$ 是最佳的。

5 一些进一步的结果与最后的评述

首先，我们指出，例如，在极限情形下，Hardy 不等式 (2.4) 没有意义。 $\alpha = 0$.然而，将区间限制为 (0,1)，并引入一些适当的对数函数后，C. Bennett 于 1973年 在发展其著名的实插值理论、研究 (0,1) 上彼此相当接近的空间 L 和 $LLogL$ 之间的实插值时，成功证明了这样一个不等式，参见 [2] ，另请参阅 [3]。其他作者推广了这一结果，但迄今为止最精确的结果见 [1]。这里，我们用自己的 dx/x 术语陈述这一结果的一个稍微更一般的形式，并将区间 (0,1) 替换为 $(0, \ell)$ $0 < \ell < \infty$.

定理5.1. 设 α、$p > 0$ 和 f 是定义在$(0, \ell)$ $0 < \ell < \infty$.上的非负可测函数

(a) 若 $p > 1$，则

$$\begin{aligned} & \alpha^{p-1} \left(\int_0^\ell f(x)dx \right)^p + \alpha^p \int_0^\ell [\log(\ell/x)]^{\alpha p-1} \left(\int_0^x f(y)dy \right)^p \frac{dx}{x} \qquad (5.1) \\ \leq & \int_0^\ell x^p [\log(\ell/x)]^{(1+\alpha)p-1} f^p(x) \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

式(5.1) 中的两个常数 α^{p-1} 和 α^p 都是最佳的。

(b) 若 $0 < p < 1$，则(5.1) 反向成立，且常数 α^{p-1} 和 α^p 都是最佳的。

(c) 若 $p = 1$，则(5.1)中等号成立。

证明。只需逐步修改针对 $l = 1$. 情形的证明论证即可完成证明。□或者，也可以利用 [1]中的原始结果并作适当的变量代换来推导该结果。因此，我们省略细节。

注5.2. (5.1) 是我们所知为数不多的含有两个常数且二者均为最佳的不等式之一。在原论文 [2] 中，仅考虑了情形 (a)，且只涉及一个常数（遗漏了 (5.1) 中的第一项），完全没有讨论其尖锐性。

注5.3. 利用定理5.1，其中取 $f(x) = g(1/x)x^{-2}$ ，并作显然的变量变换及符号变更，还可得到以下“对偶”形式：

定理5.4. 设 α、$p > 0$ 和 f 是定义在 $(0, \ell)$ $0 < \ell < \infty$ 上的非负可测函数

(a) 若 $p > 1$，则

$$\begin{aligned} & \alpha^{p-1} \left(\int_\ell^\infty f(x)dx \right)^p + \alpha^p \int_\ell^\infty [\log(xe/\ell)]^{\alpha p-1} \left(\int_x^\infty f(y)dy \right)^p \frac{dx}{x} \qquad (5.2) \\ \leq & \int_\ell^\infty x^p [\log(xe/\ell)]^{(1+\alpha)p-1} f^p(x) \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

式(5.2) 中的两个常数 α^{p-1} 和 α^p 均为最佳。
(b) 如果 $0 < p \leq 1$，则 (5.2) 反向成立，并且在此处两个常数 α^{p-1} 和 α^p 都是最佳常数。

接下来我们声明，迄今为止所给出的所有最佳不等式都适用于 $q = p.$ 情形。关于其他情形的最佳常数，我们所知甚少。通过提及以下事实来说明这一问题：将 Hardy 型不等式的一般理论（例如参见著作 [11]）应用于幂加权情形，我们在 dx/x 框架下得到：

例 5.5。 不等式

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)dt\right)^q x^{-\alpha}\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty (xf(x))^p x^{-\beta}\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{5.3}$$

当且仅当对于 $1 < p \leq q < \infty$，存在某个有限常数 $C > 0$ 使得

$$\beta > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\alpha}{q} = \frac{\beta}{p}. \tag{5.4}$$

注 5.6。 对于 $p = q$ 情形，我们已经指出了最佳常数；但对于$1 < p < q < \infty$ 情形，这一直是一个持续了相当长时间的未解问题。G.A. Bliss 于 1930 年解决了 $\beta = p - 1$ 情形（见 [4]）。该问题最终于 2015 年在论文 [14] 中得到解决，在我们的 dx/x 框架下，他们的结果表述为：

定理 5.7。 设 $1 < p < q < \infty$，且参数 α 和 β 满足 (5.4)。那么，(5.3) 中的最佳常数为 $C = C^*_{pq}$，其中

$$C^*_{pq} = \left(\frac{p-1}{\beta}\right)^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}} \left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\frac{q-p}{p}\Gamma\left(\frac{pq}{q-p}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{q-p}\right)\Gamma\left(\frac{p(q-1)}{q-p}\right)}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{5.5}$$

注 5.8。 经过一些直接计算可得

$$C^*_{pq} \to \frac{p}{\beta} \text{ as } q \to p,$$

因此，当 $q \to p.$ 时，我们确实得到了最佳常数的预期连续性。在对偶情形下，我们有如下结果：

例 5.9。 不等式

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^q x^{\alpha}\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty (xf(x))^p x^{\beta}\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{5.6}$$

对 $1 < p \leq q < \infty$ 和某个有限常数 $C > 0$，成立，当且仅当

$$\beta > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\alpha}{q} = \frac{\beta}{p}$$

而且在这种情况下，最佳常数也是已知的（见[14]）。

注5.10。 此外，所有在 (5.3) 中等号成立且 $C = C^{\star}_{pq}$ 由 (5.5) 定义的情形，以及在 (5.6) 中等号成立的情形，也都是已知的（再次参见 [14]）。因此，如何在积分 $\int_0^{\infty}$ 被$\int_0^{\ell}$，$0 < \ell \leq \infty$ 或 $\int_{\ell}^{\infty}$，$0 \leq \ell < \infty$，分别替代时推导出相应的最佳结果，似乎是一个有趣的开放问题。我们计划在一篇后续论文中对此进行研究。借此机会，我们指出 [14] 中有一处印刷错误。[14], 中定理 4.1 和 4.2 的条件 $\frac{n+\alpha}{p} = \frac{n+\beta}{q}$ 应替换为 $\frac{n+\alpha}{q} = \frac{n+\beta}{p}$.

注5.11. 利用注5.3中指出的相同变换，我们可以将涉及积分 $\int_0^{\ell}$ 的不等式转化为涉及积分 $\int_{\ell}^{\infty}$. 的不等式。仅以此为例，我们将定理 3.2 改述如下：

定理5.12. 设 $p > 0, 0 < \alpha < p$，且 $f(x)x^2$ 是 $(0, \ell)$ $0 \leq \ell < \infty$. 上的可测、非负且非减函数

a) 若 $p \geq 1$，则

$$\left(\int_{\ell}^{\infty} \left(\int_{x}^{\infty} f(y)dy \right)^{p} x^{\alpha} \frac{dx}{x} \right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{p}{\alpha} \left(\int_{\ell}^{\infty} (xf(x))^{p} x^{\alpha} \left(1 - \left(\frac{\ell}{x} \right)^{\alpha} \right) \frac{dx}{x} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{5.7}$$

b) 若 $0 < p \leq 1$，则(5.7) 以相反方向成立。

c) 常数 p/α 在 ***a)*** 和 ***b)*** 中都是最佳的，并且对于某个 $c \in (\ell, \infty)$ $A > 0$，任意 $f(x) = Ax^{-2}\chi_{(c,\infty)}(x)$ 均可取等号。

注5.13。 定理5.12中的函数 f(x) 是所谓拟单调函数的一个例子，这意味着对于某个 $\alpha \in R.$，$f(x)x^{\alpha}$ 是非递增或非减的。研究我们关于单调函数的所有结果是否也适用于这种更一般的拟单调函数，是另一个有趣的开放问题。即使在区间无限的情况下，也会出现一些有趣的现象。关于一个特殊情形，请参见 [3] 及其中的参考文献。

参考文献

[1] S. Barza、L.-E. Persson 和 N. Samko. 利用凸性得到的一些新的最佳极限型Hardy不等式。*J. Inequal. Appl.*，6:11页，2014年。[2] C. Bennett. 中间空间与 L log^{+} L 类。*Ark.Mat.*，11:215–228，1973年。[3] J. Bergh、V. Burenkov 和 L.-E. Persson. 拟单调函数反向Hardy不等式的最佳常数。*Acta Sci.Math.(Szeged)*，59:221–239，1994年。[4] C.A. Bliss. 一个积分不等式。*J.London Math.Soc.*，5:40–46，1930年。[5] G.H. Hardy. 关于积分学若干问题的札记，LX。*Messengerof Math.*，54:150–156，1925年。

[6] G.H. Hardy. 关于积分学若干问题的札记，LXIV。关于积分不等式的进一步研究。*MessengerofMath.*，57:12–16，1928年。[7] G.H. Hardy、J. E. Littlewood 和 G. P´olya. 不等式。第二版，剑桥大学出版社，1952年。[8] V. Kokilashvili、A. Meshki 和 L.-E Persson. 乘积权下积分变换的加权范数不等式。Nova Scientific Publishers, Inc.，纽约，2010年。[9] A. Kufner、L. Maligranda 和 L.-E. Persson. Hardy不等式的前史。《美国数学月刊》，113(8):715–732，2006年。[10] A. Kufner、L. Maligranda 和 L.-E. Persson. *Hardy*不等式：其历史及若干相关结果，*Vydavatelsk´yServis,Plzeˇn*。Vydavatelsk´y Servis, Plzeˇn，2007年。[11] A. Kufner、L.-E. Persson 和 N. Samko. *Hardy*型加权不等式。World Scientific，第二版，新泽西州—伦敦等地，2017年。[12] C.P. Niculescu 和 L.-E. Persson. 凸函数及其应用。当代方法，第二版，CMS数学丛书。施普林格，2018年。[13] L.-E. Persson 和 N. Samko. 如果Hardy当年发现了这一点，会发生什么？*J.Inequal. Appl.*，29:11页，2012年。[14] L.-E. Persson 和 S. Samko. 关于若干Hardy不等式最佳常数的注记。《数学不等式》，9(2):437–447，2015年。[15] L.-E. Persson、G Tephnadze 和 F. Weisz. 鞅*Hardy*空间与一维*Vilenkin-Fourier*级数的可和性。书稿。Birkh¨auser/Springer，2022年。