arXiv:2302.12302v1 [math.CA] 18 Feb 2023

鞅Hardy空间中的 Walsh-Fourier级数费耶尔平均加权极大算子 $H_{1/2}$

NIKA ARESHIDZE、DAVIT BARAMIDZE、LARS-ERIK PERSSON、GEORGE TEPHNADZE

摘要。本文推导了由 $\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(|\sigma_k F|/A_k^2\right)$ 定义的 Walsh-Fourier级数 Fejér均值的受限加权极大算子，并证明该算子从鞅Hardy空间$H_{1/2}(G)$到 Lebesgue空间 $L_{1/2}(G)$有界。本文还证明了这一结果的锐性。由此我们得到了一些新的和众所周知的结果。

2020年数学主题分类。42C10。
关键词和短语：Walsh系统、Fejér均值、鞅Hardy空间、极大算子。

1. 引言

一维情形中，Schipp 与 Pál、Simon 研究了关于 Walsh系统的 Fejér 均值极大算子的弱 (1,1) 型不等式，该算子定义为

$$\sigma^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}} |\sigma_n f|$$

（参见 [1], [9] 和 [12]）。Fujii [3] 和 Simon [17] 证明了 σ^* 从 $H_1(G)$ 到 $L_1(G)$ 有界。Weisz [23] 推广了这一结果，并证明了当 $p > 1/2$ 时，σ^* 从鞅空间 H_p 到 Lebesgue空间 L_p 的有界性。Simon[16] 给出了一个反例，表明对于 $0 < p < 1/2.$ ，有界性并不成立。Goginava[5] 给出了关于 $p = 1/2$ 的一个反例。此外， [6] （另见 [19]）他证明存在一个鞅 $F \in H_p(G)$ $(0 < p \leq 1/2)$，使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sigma_n F\|_p = +\infty.$$

Weisz [26] 证明了，Fejér均值的极大算子 σ^* 从Hardy空间 $H_{1/2}$ 到空间 $weak - L_{1/2}$是有界的。Weisz [25] （另见[24]）还证明，对于任意 $F \in H_p$（G）（$p > 0$），极大算子

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\sigma_{2^n} F|$$

本研究由Shota Rustaveli国家科学基金会资助，项目编号为PHDF-21-1702。

从Hardy空间 H_p（G）到空间 L_p（G）是有界的，但（详情见 [13]）它并不能从Hardy空间 H_p（G）有界地映射到空间 H_p（G）。

为了研究 Fejér 均值子序列在鞅 Hardy 空间 $H_p(G)$ 中（ $0<p\leq 1/2$）的收敛性及其受限极大算子，核心在于这样一个事实：每个自然数 $n\in\mathbb{N}$ 都可以唯一地表示为

$$n=\sum_{k=0}^{\infty}n_j2^j,\quad n_j\in Z_2\ (j\in\mathbb{N}),$$

其中只有有限个 n_j 不为零，而其重要特征 $[n]$、$|n|$、$\rho(n)$ 和 $V(n)$ 定义如下

$[n]:=$最小$\{j\in\mathbb{N},n_j\neq 0\}$，$|n|:=$最大$\{j\in\mathbb{N},n_j\neq 0\}$，$\rho(n)=|n|-[n]$且

$$V\left(n\right):=n_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left|n_k-n_{k-1}\right|,\quad \text{for all}\quad n\in\mathbb{N}.$$

Persson 和 Tephnadze [11] 推广了这一结果，并证明：若$0<p\leq 1/2$ 且 $\{n_k:\ k\geq 0\}$ 是一个正数序列，满足

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\rho\left(n_k\right)\leq c<\infty,$$

则极大算子 $\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}$，定义为

$$\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}F:=\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sigma_{n_k}F\right| \tag{1}$$

是从 Hardy空间 $H_p(G)$ 到 Lebesgue空间 $L_p(G)$ 的有界算子。此外，若 $0<p<1/2$ 且 $\{n_k:\ k\geq 0\}$ 是一个正数序列，满足

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\rho\left(n_k\right)=\infty,$$

则存在一个鞅 $F\in H_p(G)$，使得

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|\sigma_{n_k}F\right\|_p=\infty.$$

在 [22] 中已证明，若 $F\in H_{1/2}(G)$，则存在一个绝对常数 c，使得

$$\left\|\sigma_nF\right\|_{H_{1/2}}\leq cV^2\left(n\right)\left\|F\right\|_{H_{1/2}}.$$

此外，如果 $\{n_k:\ k\geq 0\}$ 是正整数序列 $\mathbb{N}_+$ 的一个子序列，使得

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}V\left(n_k\right)=\infty$$

且 $\{\varphi_n\}$ 是任意满足条件$\Phi_n\uparrow\infty$ 且的非递减非负函数

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{V^2\left(n_k\right)}{\Phi_{n_k}}=\infty,$$

那么存在一个鞅 $F \in H_{1/2}(G)$，使得

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \frac{\sigma_{n_k} F}{\Phi_{n_k}} \right\|_{1/2} = \infty.$$

由此可知，若 $f \in H_{1/2}(G)$ 且 $\{n_k : \ k \geq 0\}$ 为任意正数序列，则 $\sigma_{n_k} f$ 从 Hardy空间 $H_{1/2}(G)$ 到空间$H_{1/2}(G)$ 有界，当且仅当存在某个 c,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} V\left(n_k\right) < c < \infty.$$

文献 [20] 证明了加权极大算子

$$\widetilde{\sigma}^{*} f := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\sigma_n f|}{\log^2\left(n+1\right)}$$

从 Hardy空间 $H_{1/2}\left(G\right)$ 到空间 $L_{1/2}\left(G\right)$ 有界。此外，还证明了分母中 $\{\log^2(n+1)\}$ 的增长速率无法进一步改善。

Baramidze 和 Tephnadze [2] 证明，若 $\{n_k : k \geq 0\}$ 为正数序列，且满足

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} A_{|n_k|} \leq c < \infty,$$

则极大算子 (1) 从 Hardy空间 $H_{1/2}(G)$ 到空间 $L_{1/2}(G)$ 有界。此外，若 $\{n_k : k \geq 0\}$ 为正数序列，且满足

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} A_{|n_k|} = \infty,$$

那么存在一个鞅 $F \in H_p(G)$，使得

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\sigma_{n_k} F\|_{1/2} = \infty.$$

本文研究如下定义的受限加权极大算子

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left(|\sigma_k F| / A_k^2\right)$$

该算子作用于 Walsh-Fourier级数的Fejér均值，并证明它从鞅Hardy空间 $H_{1/2}(G)$ 到 Lebesgue 空间 $L_{1/2}(G)$ 有界。由此，我们得到了一些新的和众所周知的结果。

本文结构安排如下：为避免影响后续讨论，定义与记号将在第2节中给出。主要结果及其若干推论见第3节。证明主要结果需要一些辅助命题，这些结果将在第4节中陈述。详细证明见第5节。

2. 定义与记号

令 $\mathbb{N}_+$ 表示正整数集， $\mathbb{N} := \mathbb{N}_+ \cup \{0\}$. 记 Z_2 为阶为2的离散循环群，即 $Z_2 := \{0,1\}$，其群运算为模2加法，且每个子集都是开集。 Z_2 上的Haar测度定义为单点集的测度为1/2。

将群 G 定义为群 Z_2 的完备直积，并赋予 Z_2 的离散拓扑之积。 G 的元素表示为序列 $x := (x_0, x_1, ..., x_j, ...)$，其中 $x_k = 0 \vee 1$.

容易给出 $x \in G$ 的邻域的一组基

$$I_0(x) := G, \quad I_n(x) := \{y \in G : y_0 = x_0, ..., y_{n-1} = x_{n-1}\} \ (n \in \mathbb{N}).$$

记 $I_n := I_n(0)$ $\overline{I_n} := G \setminus I_n$， 以及 $e_n := (0, ..., 0, x_n = 1, 0, ...) \in G$, 其中 $n \in \mathbb{N}$。那么容易证明

$$\overline{I_M} = \bigcup_{i=0}^{M-1} I_i \setminus I_{i+1} = \left(\bigcup_{k=0}^{M-2} \bigcup_{l=k+1}^{M-1} I_{l+1}(e_k + e_l) \right) \bigcup \left(\bigcup_{k=0}^{M-1} I_M(e_k) \right). \tag{2}$$

若 $n \in \mathbb{N}$，则每个 n 都能唯一表示为 $n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j 2^j$，其中 $n_j \in Z_2$ $(j \in \mathbb{N})$, 且只有有限个数的 n_j 不为零。每个 $n \in \mathbb{N}$ 也可以表示为 $n = \sum_{i=1}^{r} 2^{n_i}$, $n_1 > n_2 > ...n_r \geq 0.$。对于 $n \in \mathbb{N}$ 的这种表示，我们记这些数为

$$n^{(i)} = 2^{n_{i+1}} + ... + 2^{n_r}, i = 1, ..., r.$$

令 $2^s \leq n_{s_1} \leq n_{s_2} \leq ... \leq n_{s_r} \leq 2^{s+1}$, $s \in \mathbb{N}.$。对于这样的 n_{s_j}，它可以写成 $n_{s_j} = \sum_{i=1}^{s_j} \sum_{k=l_i^{s_j}}^{t_i^{s_j}} 2^k$，其中 $0 \leq l_1^{s_j} \leq t_1^{s_j} \leq l_2^{s_j} - 2 < l_2^{s_j} \leq t_2^{s_j} \leq ... \leq l_{r_{s_j}}^{s_j} - 2 < l_{r_{s_j}}^{s_j} \leq t_{r_{s_j}}^{s_j}$，我们记

$$\begin{aligned} A_s &:= \bigcup_{j=1}^{r} \left\{ l_1^{s_j}, t_1^{s_j}, l_2^{s_j}, t_2^{s_j}, ..., l_{r_{s_j}}^{s_j}, t_{r_{s_j}}^{s_j} \right\} \\ &= \bigcup_{j=1}^{r} \left\{ l_1^{s_j}, l_2^{s_j}, ..., l_{r_{s_j}}^{s_j} \right\} \bigcup_{j=1}^{r} \left\{ t_1^{s_j}, t_2^{s_j}, ..., t_{r_{s_j}}^{s_j} \right\} \\ &= \left\{ l_1^s, l_2^s, ..., l_{r_s^1}^s \right\} \bigcup \left\{ t_1^s, t_2^s, ..., t_{r_s^2}^s \right\} = \left\{ u_1^s, u_2^s, ..., u_{r_s^3}^s \right\}, \end{aligned}$$

这里 $u_1^s < u_2^s < ... < u_{r_s^3}^s$. 我们注意到，对于 $j = 1$、2、.....、 $r.$，有 $t_{r_{s_j}}^{s_j} = s \in A_s$

我们将集合 A_s 的基数记为 $|A_s|$，即

$$card(A_s) := |A_s|.$$

显然， $|A_s| = r_s^3 \leq r_s^1 + r_s^2$. 此外， $r_3^s = card(A_s) < \infty$ 当且仅当 $r_s^1 < \infty$ 且 $r_s^2 < \infty.$。注意，若 $|A_s| < \infty$，则每个 n_{s_j} 都有有界变差

$$V(n_{s_j}) < c < \infty, \quad \text{for each} \quad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{3}$$

且 $r_s^1 < \infty$、 $r_s^2 < \infty$和 $r_s^3 < \infty$. 。因此，若我们考虑块（区间）

(4) $$[u_1^s, u_1^s], [u_1^s, u_2^s], ..., [u_1^s, u_{r_s^3}^s], [u_2^s, u_2^s], [u_2^s, u_3^s], ..., [u_2^s, u_{r_s^3}^s] \dots [u_{r_s^3}^s, u_{r_s^3}^s],$$

那么很容易看出，它包含 $\left(r_s^3(r_s^3+1)\right)/2$ 个不同的块。因此，包含式 (4) 中各块的不同自然数的二进制表示至多为 $2^{\frac{r_s^3(r_s^3+1)}{2}} - 1$，这是一个有限数；并且对于所有 $s \in \mathbb{N}_+$，集合 $\{n_{s_1}, n_{s_2}, ...n_{s_r}\}$ 都是有限的，由此可得

(5) $$s_r < \infty, \quad \text{for all} \quad s \in \mathbb{N}.$$

综上，我们可以得出，$\sup_{s\in\mathbb{N}} |A_s| < \infty$ 当且仅当对于所有 $s \in \mathbb{N}_+$，集合 $\{n_{s_1}, n_{s_2}, ..., n_{s_r}\}$ 都是有限的，且每个 n_{s_j} 都有有界变差，即条件 (3) 和 (5) 成立。

空间 L_p 和弱 $-L_p$（$0 < p < \infty$）的范数（或准范数）分别定义为

$$\|f\|_p^p := \int_G |f|^p \, d\mu \quad \text{and} \quad \|f\|_{\text{weak}-L_p}^p := \sup_{\lambda>0} \lambda^p \mu(f > \lambda).$$

第 k 个拉德马赫函数定义为

$$r_k(x) := (-1)^{x_k} \qquad (x \in G, \ k \in \mathbb{N}).$$

现在，定义 G 上的 Walsh 系统 $w := (w_n : n \in \mathbb{N})$:

$$w_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) = r_{|n|}(x) (-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_k} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Walsh 系统在 $L_2(G)$ 中是正交归一且完备的（参见 [14]）。

若 $f \in L_1(G)$，则可以按通常方式定义傅里叶系数、傅里叶级数部分和、费耶尔均值、狄利克雷核和费耶尔核:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &:= \int_G f w_n d\mu, \ (n \in \mathbb{N}), \\
S_n f &:= \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) w_k, \ (n \in \mathbb{N}_+, S_0 f := 0), \\
\sigma_n f &:= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k f, \\
D_n &:= \sum_{k=0}^{n-1} w_k, \\
K_n &:= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} D_k, \quad (n \in \mathbb{N}_+).
\end{aligned}$$

回顾一下（参见 [8] 和 [14]）

(6) $$D_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^n & \text{if } x \in I_n \\ 0 & \text{if } x \notin I_n. \end{cases}$$

令 $n=\sum_{i=1}^{r}2^{n_i},\quad n_1>n_2>...>n_r\geq 0.$，则（参见 [4] 和 [14]）

$$nK_n=\sum_{A=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{A-1}w_{2^{n_j}}\right)\left(2^{n_A}K_{2^{n_A}}+n^{(A)}D_{2^{n_A}}\right).$$

由区间 $\{I_n(x):\ x\in G\}$ 生成的 σ-代数记作 $\zeta_n(n\in\mathbb{N})$。记 $F=(F_n,\ n\in\mathbb{N})$ 为关于 $\zeta_n(n\in\mathbb{N})$ 的鞅（详情见例如 [24]）。鞅的极大函数 F^* F 定义为 $F^*:=\sup_{n\in\mathbb{N}}|F_n|$.

在 $f\in L_1(G)$ 的情形下，极大函数 f^* 也可表示为

$$f^*(x):=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{\mu(I_n(x))}\left|\int_{I_n(x)}f(u)\,d\mu(u)\right|\right).$$

对于 $0<p<\infty$，Hardy 鞅空间 $H_p(G)$ 由满足下列条件的所有鞅组成:

$$\|F\|_{H_p}:=\|F^*\|_p<\infty.$$

若存在一个区间I，使得下列条件成立，则有界可测函数 a 是一个 p-原子:

$$\operatorname{supp}(a)\subset I,\quad \int_I a\,d\mu=0,\quad \|a\|_\infty\leq\mu(I)^{-1/p}.$$

容易验证，对于每个鞅 $F=(F_n,n\in\mathbb{N})$ 以及每个$k\in\mathbb{N}$，极限

$$\widehat{F}(k):=\lim_{n\to\infty}\int_G F_n(x)\,w_k(x)\,d\mu(x)$$

存在，并称其为 $F.$ 的第 k 个 Walsh-Fourier系数

$f\in L_1(G)$ 的 Walsh-Fourier系数与由 f 得到的鞅 $(S_{2^n}f,n\in\mathbb{N})$ 的 Walsh-Fourier系数相同。

3. The Main Result and its Consequences

我们的主要结果如下:

定理 1. </style}令 (G) 和 $\{n_k:\ k\geq 0\}$ 是一个正数序列。那么，加权极大算子 $\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}$,定义为

$$\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}F:=\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{|\sigma_{n_k}F|}{A^2_{|n_k|}},$$

是从 ***Hardy***空间 $H_{1/2}$ 到 ***Lebesgue***空间 $L_{1/2}$的有界算子。

b)（锐性）令

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}|A_{n_k}|=\infty \tag{7}$$

且 $\{\varphi_n\}$ 是满足该条件的非递减序列

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{A^2_{|n_k|}}{\varphi_{|n_k|}}=\infty.$$

那么，存在一个鞅 $f \in H_{1/2}(G)$，使得极大算子

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|\sigma_{n_k}F|}{\varphi_{|n_k|}}$$

不能从 ***Hardy***空间 $H_{1/2}$（G）有界地映射到 ***Lebesgue***空间 $L_{1/2}$（G）。

推论 1。 由下式定义的极大算子 $\widetilde{\sigma}^*$,

$$\widetilde{\sigma}^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\sigma_n f|}{\log^2(n+1)}$$

从 ***Hardy***空间 $H_{1/2}$（G）有界地映射到空间 $L_{1/2}$（G）。

b) 设 $\{\varphi_n\}$ 是一个满足以下条件的非递减序列

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log^2(n+1)}{\varphi_n} = +\infty.$$

则存在一个鞅 $f \in H_{1/2}$，使得极大算子

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\sigma_n f|}{\varphi_n}$$

不是从 ***Hardy***空间 $H_{1/2}(G)$ 到 ***Lebesgue***空间 $L_{1/2}(G)$.有界的。

为了能够与文献中的一些其他结果进行比较（见注 **1**），我们也陈述如下结果:

推论 2. 设 $f \in H_{1/2}(G)$。则由下式定义的受限极大算子$\widetilde{\sigma}^*_{,i}{}^{\nabla}$，$i = 1$, 2,3,

$$\widetilde{\sigma}_1^{*,\nabla} F := \sup_{k\in\mathbb{N}} |\sigma_{2^k} F|, \tag{8}$$

$$\widetilde{\sigma}_2^{*,\nabla} F := \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\sigma_{2^k+1} F\right|, \tag{9}$$

$$\widetilde{\sigma}_3^{*,\nabla} F := \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\sigma_{2^k+2^{[k/2]}} F\right|, \tag{10}$$

其中 $[n]$表示 n的整数部分，这些算子均从 ***Hardy***空间$H_{1/2}(G)$ 到 ***Lebesgue***空间 $L_{1/2}(G)$有界。

注 1. 在 [11] 中已证明，若 $0 < p < 1/2,$，则由(9) 和(10)定义的受限极大算子 $\widetilde{\sigma}^*_{,2}{}^{\nabla}$ 和 $\widetilde{\sigma}^*_{,3}{}^{\nabla}$，不是从 ***Hardy***空间 $H_p(G)$ 到 ***Lebesgue***空间 $weak - L_p(G)$有界的。

另一方面，文献 [11] 证明了，若 $0 < p \leq 1/2$，则由(8)定义的受限极大算子 $\widetilde{\sigma}^*_{,1}{}^{\nabla}$ 是从 ***Hardy***空间 $H_p(G)$ 到 ***Lebesgue***空间 $L_p(G)$。

推论 3. 设 $f \in H_{1/2}(G)$ 和 $\{A_k^s \colon 0 \leq k \leq s-1\}$ 是由下式定义的正数序列

$$\alpha_0^s = 2^s + 2^0, \quad \alpha_1^s = 2^s + 2^0 + 2^1, ..., \alpha_{s-1}^s = 2^s + 2^0 + 2^1 + ... + 2^{s-1}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

那么，由下式定义的受限极大算子 $\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}_{,4}$，

$$\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}_{4}F:=\sup_{s\in\mathbb{N}}\sup_{0\leq k\leq s-1}\frac{\left|\sigma_{\alpha^s_k}F\right|}{\log^2\alpha^s_k},$$

是从 *Hardy*空间 $H_{1/2}$ 到 *Lebesgue*空间 $L_{1/2}$.上的有界算子

推论4。 设 $f\in H_{1/2}(G)$ 和 $\{A^s_k\colon 0\leq k\leq s-1\}$ 是由下式定义的正数序列

$$\beta^s_{s-1}=2^s+2^{s-1},\quad \beta^s_{s-2}=2^s+2^{s-1}+2^{s-2},...,\beta^s_0=2^s+2^{s-1}+...+2^0.$$

则受限极大算子 $\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}_{,5}$,定义如下:

$$\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}_{5}F:=\sup_{s\in\mathbb{N}}\sup_{0\leq k\leq s-1}\frac{\left|\sigma_{\beta^s_k}F\right|}{\log^2\beta^s_k},$$

是从 *Hardy*空间 $H_{1/2}(G)$ 到 *Lebesgue*空间 $L_{1/2}(G)$。

注2。 设 $f\in H_{1/2}(G)$ 、 $\{\alpha^s_k\colon 0\leq k\leq s-1\}$ 和 $\{\beta^s_k\colon 0\leq k\leq s-1\}$是推论*3*和推论*4*中定义的正数序列。那么存在绝对常数 c_1 和 c_2 ，使得

$$\left\|\sigma_{\alpha^s_k}F\right\|_{H_{1/2}}\leq c_1\left\|F\right\|_{H_{1/2}}\qquad and\qquad \left\|\sigma_{\beta^s_k}F\right\|_{H_{1/2}}\leq c_2\left\|F\right\|_{H_{1/2}}$$

对于任意的 $0\leq k\leq s-1$ 和 $s\in\mathbb{N}.$

我们注意到，这些结果已在 [22] 中得到证明，并且由以下事实可知

$$V(\alpha^s_k)\leq 6\quad and\quad V(\beta^s_k)\leq 4,\quad for\ any\ \ 0\leq k\leq s-1\ and\ s\in\mathbb{N}.$$

推论5。 设 $f\in H_{1/2}(G)$ 和 $\{A^s_k\colon 0\leq k\leq s-1\}$ 是由下式定义的正数序列

$$\alpha^s_0=2^s+2^0,\quad \alpha^s_1=2^s+2^0+2^1,...,\alpha^s_{[\sqrt[n]{s}]-1}=2^s+2^0+2^1+...+2^{[\sqrt[n]{s}]-1},\quad s\in\mathbb{N},$$

其中 $[n]$ 表示 $n.$ 的整数部分。则受限极大算子$\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}_{,6}$ ， 定义为

$$\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}_{6}F:=\sup_{s\in\mathbb{N}}\sup_{0\leq k\leq s-1}\frac{\left|\sigma_{\alpha^s_k}F\right|}{\log^{2/n}\alpha^s_k},$$

从 *Hardy*空间 $H_{1/2}(G)$ 到 *Lebesgue*空间 $L_{1/2}(G)$。

推论6。 设 $f\in H_{1/2}(G)$ 和 $\{A^s_k\colon 0\leq k\leq s-1\}$ 是由下式定义的正数序列

$$\beta^s_{s-1}=2^s+2^{s-1},\quad \beta^s_{s-2}=2^s+2^{-1}+2^{s-2},...,\beta^s_{s-[\sqrt[n]{s}]-1}=2^s+2^{s-[\sqrt[n]{s}]-1}+...+2^0.$$

那么，受限极大算子 $\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}_{,7}$,定义为

$$\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}_{7}F:=\sup_{s\in\mathbb{N}}\sup_{0\leq k\leq s-1}\frac{\left|\sigma_{\beta^s_k}F\right|}{\log^{2/n}\beta^s_k},$$

从 *Hardy*空间 $H_{1/2}$（G）到 *Lebesgue*空间 $L_{1/2}$（G）。是有界的

4. 辅助引理

引理 1 （**Weisz** [25] **和 Simon** [18]）。 鞅 $F=\left(F_n,\ \ n\in\mathbb{N}\right)$ 属于 H_p （$0<p\leq 1$），当且仅当存在一个由 p-原子组成的序列 $\left(a_k,\ k\in\mathbb{N}\right)$ 以及一个由实数组成的序列 $\left(\mu_k,\ k\in\mathbb{N}\right)$，使得对于每个 $n\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k S_{2^n}a_k=F_n,\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left|\mu_k\right|^p<\infty. \tag{11}$$

此外， $\left\|F\right\|_{H_p}\backsim$ 下确界 $\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\mu_k\right|^p\right)^{1/p}$，其中下确界取遍所有形如（*11*）的 F 分解。

引理 2 （**Weisz** [24]）。假设算子 T 是 σ-线性的，并且

$$\int_{\overline{I}}\left|Ta\right|^p d\mu\leq c_p<\infty,\quad (0<p\leq 1)$$

对于每个 p-原子 a，其中 I 表示该原子的支撑。如果 T 从 L_∞ 到 L_∞ 有界，则

$$\left\|TF\right\|_p\leq c_p\left\|F\right\|_{H_p}.$$

引理 3 （例如参见 [8], [14]）。设 t、$n\in\mathbb{N}$. 则

$$K_{2^n}\left(x\right)=\begin{cases}2^{t-1},\ if\quad x\in I_n\left(e_t\right),\ n>t,\ x\in I_t\backslash I_{t+1},\\ \left(2^n+1\right)/2,\ if\quad x\in I_n,\\ 0,\ otherwise.\end{cases}$$

引理 4 （例如参见 [13], [22]）。 设

$$n=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=l_i}^{t_i}2^k,\quad where\ \ t_1\geq l_1>l_1-2\geq t_2\geq l_2>l_2-2>...>t_s\geq l_s\geq 0.$$

Then

$$\left|nK_n\right|\ \ \leq\ \ c\sum_{A=1}^{s}\left(2^{l_A}K_{2^{l_A}}+2^{t_A}K_{2^{t_A}}+2^{l_A}\sum_{k=l_A}^{t_A}D_{2^k}\right).$$

引理5 （例如参见 [13], [22]）。 设

$$n=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=l_i}^{t_i}2^k,\ where\ \ t_1\geq l_1>l_1-2\geq t_2\geq l_2>l_2-2>...>t_s\geq l_s\geq 0.$$

那么，对于任意 $i=1,2,...,s,$

$$n\left|K_n\left(x\right)\right|\geq 2^{2t_i-5},\quad for\quad x\in E_{t_i}:=I_{t_i+1}\left(e_{t_i+1}+e_{t_i+2}\right)$$

and

$$n\left|K_n\left(x\right)\right|\geq 2^{2l_i-5},\ \ for\ \ x\in E_{l_i}:=I_{l_i+1}\left(e_{l_i-1}+e_{l_i}\right),$$

其中 $I_1\left(e_{-1}+e_0\right)=I_2\left(e_0+e_1\right)$。

5. 定理 1 的证明

证明。由于 σ_n 从 L_∞ 到 L_∞是有界的，根据引理 2，只要证明下式，定理 1 的证明便告完成

$$\int_{\overline{I_M}}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{\sigma_{n_{s_k}}a\left(x\right)}{A^2_{\left|n_{s_k}\right|}}\right|\right)^{1/2}d\mu\left(x\right)\leq c<\infty,$$

对每个 1/2-原子 $a.$，我们可以假设 a 是任意一个 $1/2$-原子，其支撑为 I，$\mu\left(I\right)=2^{-M}$，且 $I=I_M.$。容易看出，当 $n<2^M.$ 时，$\sigma_n\left(a\right)$ =0。因此，我们可以假设 $n_{s_k}\geq 2^M.$。令 $x\in I_M$，并且 $2^s\leq n_{s_k}<2^{s+1}$，其中某个 $n_{s_k}\geq 2^M.$。由于 $\left\|a\right\|_\infty\leq 2^{2M}$ 且 $\left|s_k\right|=s$，利用引理 4 可得

$$\begin{aligned}(12)\ \frac{\left|\sigma_{n_{s_k}}a\left(x\right)\right|}{A^2_{\left|n_{s_k}\right|}} &\leq \frac{2^{2M}}{\left(A_s\right)^2}\int_{I_M}\left|K_{n_{s_k}}\left(x+t\right)\right|d\mu\left(t\right)\\ &\leq \frac{2^{2M}}{\left(A_s\right)^2 n_{s_k}}\sum_{A=1}^{r_{s_k}}\int_{I_M}2^{l_A^{s_k}}\left|K_{2^{l_A^{s_k}}}\left(x+t\right)\right|d\mu\left(t\right)\\ &+ \frac{2^{2M}}{\left(A_s\right)^2 n_{s_k}}\sum_{A=1}^{r_{s_k}}\int_{I_M}2^{t_A^{s_k}}\left|K_{2^{t_A^{s_k}}}\left(x+t\right)\right|d\mu\left(t\right)\\ &+ \frac{2^{2M}}{\left(A_s\right)^2 n_{s_k}}\sum_{A=1}^{r_{s_k}}\int_{I_M}2^{l_A^{s_k}}\sum_{k=l_A^{s_k}}^{\infty}D_{2^k}\left(x+t\right)d\mu\left(t\right)\\ &\leq \frac{2^M}{\left(A_s\right)^2 2^s}\left(2^M\sum_{A=1}^{r_s^1}\int_{I_M}2^{l_A^s}\left|K_{2^{l_A^s}}\left(x+t\right)\right|d\mu\left(t\right)\right)\\ &+ \frac{2^M}{\left(A_s\right)^2 2^s}\left(2^M\sum_{A=1}^{r_s^2}\int_{I_M}2^{t_A^s}\left|K_{2^{t_A^s}}\left(x+t\right)\right|d\mu\left(t\right)\right)\\ &+ \frac{2^M}{\left(A_s\right)^2 2^s}\left(2^M\sum_{A=1}^{r_s^1}\int_{I_M}2^{l_j^s}\sum_{k=l_j^s}^{\infty}D_{2^k}\left(x+t\right)d\mu\left(t\right)\right).\end{aligned}$$

如果我们记

$$\begin{aligned}II^1_{\alpha_A^s}\left(x\right) &:= 2^M\int_{I_M}2^{\alpha_A^s}\left|K_{2^{\alpha_A^s}}\left(x+t\right)\right|d\mu\left(t\right),\ \alpha=l,\ \text{or}\ \alpha=t\\ II^2_{l_A^s}\left(x\right) &:= 2^M\int_{I_M}2^{l_A^s}\sum_{k=l_A^s}^{\infty}D_{2^k}\left(x+t\right)d\mu\left(t\right),\end{aligned}$$

由（12）可得

$$\sup_{2^s\leq n_{s_k}<2^{s+1}}\frac{\left|\sigma_{n_{s_k}}a\left(x\right)\right|}{A^2_{\left|n_{s_k}\right|}}\leq\frac{2^M}{\left(A_s\right)^2 2^s}\left(\sum_{A=1}^{r_s^1}II^1_{l^s_A}\left(x\right)+\sum_{A=1}^{r_s^2}II^1_{t^s_A}\left(x\right)+\sum_{A=1}^{r_s^1}II^2_{l^s_A}\left(x\right)\right).$$

因此,

$$\begin{aligned}(13)\qquad &\int_{\overline{I_M}}\left(\sup_{2^s\leq n_{s_k}<2^{s+1}}\frac{\left|\sigma_{n_{s_k}}a\left(x\right)\right|}{A^2_{\left|n_{s_k}\right|}}\right)^{1/2}d\mu(x)\\ \leq\ &\frac{2^{M/2}}{2^{s/2}A_s}\left(\sum_{A=1}^{r_s^1}\int_{\overline{I_M}}\left|II^1_{l^s_A}\left(x\right)\right|^{1/2}d\mu\left(x\right)+\sum_{A=1}^{r_s^2}\int_{\overline{I_M}}\left|II^1_{t^s_A}\left(x\right)\right|^{1/2}d\mu\left(x\right)\right.\\ &\left.+\sum_{A=1}^{r_s^1}\int_{\overline{I_M}}\left|II^2_{l^s_A}\left(x\right)\right|^{1/2}d\mu\left(x\right)\right)\end{aligned}$$

由于

$$\sup_{s\in\mathbb{N}}r_s\leq A_s\ \text{ and }\ \sup_{s\in\mathbb{N}}r_s^2\leq A_s,$$

由此可得，若能证明.....，则定理 1 得证

$$\int_{\overline{I_M}}\left|II^2_{l^s_A}\left(x\right)\right|^{1/2}d\mu\left(x\right)\leq c<\infty,\quad A=1,...,r_s^1 \tag{14}$$

and

$$\int_{\overline{I_M}}\left|II^1_{\alpha^s_A}\left(x\right)\right|^{1/2}d\mu\left(x\right)\leq c<\infty, \tag{15}$$

对所有

$$\alpha^s_A=l^s_A,\quad A=1,...,r_s^1\quad and\quad \alpha^s_A=t^s_A,\quad A=1,...,r_s^2.$$

事实上，若（14）和（15）成立，由（13）可得

$$\begin{aligned}\int_{\overline{I_M}}\left(\sup_{n_{s_k}\geq 2^M}\frac{\left|\sigma_{n_{s_k}}a\left(x\right)\right|}{A^2_{\left|n_{s_k}\right|}}\right)^{1/2}d\mu(x)\ &\leq\ \sum_{s=M}^{\infty}\int_{\overline{I_M}}\left(\sup_{2^s\leq n_{s_k}<2^{s+1}}\frac{\left|\sigma_{n_{s_k}}a\left(x\right)\right|}{A^2_{\left|n_{s_k}\right|}}\right)^{1/2}\\ &\leq\ \sum_{s=M}^{\infty}\frac{c2^{M/2}}{2^{s/2}}\frac{1}{A_s}\left(2r_s^1+r_s^2\right)\\ &\leq\ \sum_{s=M}^{\infty}\frac{c2^{M/2}}{2^{s/2}}<C<\infty.\end{aligned}$$

剩下需要证明（14）和（15）。令 $t \in I_M$ 和 $x \in I_{l+1}(e_k+e_l)$。若 $0 \le k < l < \alpha_A^s \le M$ 或 $0 \le k < l < M < \alpha_A^s$，则 $x+t \in I_{l+1}(e_k+e_l)$，应用引理 3 可得

$$K_{2^{\alpha_A^s}}(x+t)=0 \quad \text{and} \quad II^1_{\alpha_A^s}(x)=0. \tag{16}$$

设 $0 \le k < \alpha_A^s \le l < M.$。那么 $x+t \in I_{l+1}(e_k+e_l)$，若使用引理 3，则可得

$$2^{\alpha_A^s}\left|K_{2^{\alpha_A^s}}(x+t)\right| \le 2^{\alpha_A^s+k}$$

因此

$$II^1_{\alpha_A^s}(x) \le 2^{\alpha_A^s+k}. \tag{17}$$

与 (17) 类似，可以证明，若 $0 \le \alpha_A^s \le k < l < M$，则

$$2^{\alpha_A^s}\left|K_{2^{\alpha_A^s}}(x+t)\right| \le 2^{2\alpha_A^s},\ t \in I_M,\ x \in I_{l+1}(e_k+e_l)$$

因此

$$II^1_{\alpha_A^s}(x) \le 2^{2\alpha_A^s},\ t \in I_M,\ x \in I_{l+1}(e_k+e_l), \tag{18}$$

设 $t \in I_M$，且 $x \in I_M(e_k)$。若 $0 \le k < \alpha_A^s \le M$ 或 $0 \le k < M \le \alpha_A^s$。由于 $x+t \in x \in I_M(e_k)$，并且应用引理 3，可得

$$2^{\alpha_A^s}\left|K_{2^{\alpha_A^s}}(x+t)\right| \le 2^{\alpha_A^s+k}$$

因此

$$II^1_{\alpha_A^s}(x) \le 2^{\alpha_A^s+k}. \tag{19}$$

设 $0 \le \alpha_A^s \le k < M.$ 由于 $x+t \in x \in I_M(e_k)$，若应用引理 3，则可得

$$2^{\alpha_A^s}\left|K_{2^{\alpha_A^s}}(x+t)\right| \le 2^{2\alpha_A^s}$$

and

$$II^1_{\alpha_A^s}(x) \le 2^{2\alpha_A^s}. \tag{20}$$

令 $0 \le \alpha_A^s < M, A = 1, ..., s.$。结合 (2) 与 (16)-(20)，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{\overline{I_M}}\left|II^1_{\alpha^s_A}(x)\right|^{1/2}d\mu(x)\\
=&\sum_{k=0}^{M-2}\sum_{l=k+1}^{M-1}\int_{I_{l+1}(e_k+e_l)}\left|II^1_{\alpha^s_A}(x)\right|^{1/2}d\mu(x)+\sum_{k=0}^{M-1}\int_{I_M(e_k)}\left|II^1_{\alpha^s_A}(x)\right|^{1/2}d\mu(x)\\
\le&\ c\sum_{k=0}^{\alpha^s_A-1}\sum_{l=\alpha^s_A}^{M-1}\int_{I_{l+1}(e_k+e_l)}2^{(\alpha^s_A+k)/2}d\mu(x)+c\sum_{k=\alpha^s_A}^{M-2}\sum_{l=k+1}^{M-1}\int_{I_{l+1}(e_k+e_l)}2^{\alpha^s_A}d\mu(x)\\
+&\ c\sum_{k=0}^{\alpha^s_A-1}\int_{I_M(e_k)}2^{(\alpha^s_A+k)/2}d\mu(x)+c\sum_{k=\alpha^s_A}^{M-1}\int_{I_M(e_k)}2^{\alpha^s_A}d\mu(x)\\
\le&\ c\sum_{k=0}^{\alpha^s_A-1}\sum_{l=\alpha^s_A+1}^{M-1}\frac{2^{(\alpha^s_A+k)/2}}{2^l}+c\sum_{k=\alpha^s_A}^{M-2}\sum_{l=k+1}^{M-1}\frac{2^{\alpha^s_A}}{2^l}\\
+&\ c\sum_{k=0}^{\alpha^s_A-1}\frac{2^{(\alpha^s_A+k)/2}}{2^M}+c\sum_{k=\alpha^s_A}^{M-1}\frac{2^{\alpha^s_A}}{2^M}\le C<\infty.
\end{aligned}
$$

类似地，我们可以证明 (15) 对于 $\alpha^s_A\ge M.$ 的情形也成立。因此，(15) 成立，接下来只需证明 (14)。

现在证明 $II^2_{l^s_A}$的有界性。令 $t\in I_M$ 和 $x\in I_i\backslash I_{i+1}.$ 。若$i\le l^s_A-1$, 由于 $x+t\in I_i\backslash I_{i+1}$，利用（6）可得

$$
II^2_{l^s_A}(x)=0. \tag{21}
$$

若 $l^s_A\le i<M$，利用（6）可得

$$
II^2_{l^s_A}(x)\le 2^M\int_{I_M}2^{l^s_A}\sum_{k=l^s_A}^{i}D_{2^k}(x+t)\,d\mu(t)\le c2^{l^s_A+i}. \tag{22}
$$

令 $0\le l^s_A<M.$，结合 (2)、(21) 和 (22)，可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\overline{I_M}}\left|II^2_{l^s_A}(x)\right|^{1/2}d\mu(x)\\
=&\left(\sum_{i=0}^{l^s_A-1}+\sum_{i=l^s_A+1}^{M-1}\right)\int_{I_i\backslash I_{i+1}}\left|II^2_{l^s_A}(x)\right|^{1/2}d\mu(x)\\
\le&\ c\sum_{i=l^s_A}^{M-1}\int_{I_i\backslash I_{i+1}}2^{(l^s_A+i)/2}d\mu(x)\\
\le&\ c\sum_{i=l^s_A}^{M-1}2^{(l^s_A+i)/2}\frac{1}{2^i}\le C<\infty.
\end{aligned} \tag{23}
$$

若 $M \leq l_A^s$，则 $i < M \leq l_A^s$，并应用 (21) 可得

$$\int_{\overline{I_M}} \left| II_{l_A^s}^2 (x) \right|^{1/2} d\mu (x) = 0, \tag{24}$$

此外，只需结合（23）和（24）即可证明(14)，因此 a) 部分得证，下面转而证明 b)。

在条件（7）下，存在一个递增的正整数序列 $\{\alpha_k : \ k \geq 0\} \subset \{n_k : \ k \geq 0\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left(|A_{|\alpha_k|}|\right)^{1/2}}{\varphi_{|\alpha_k|}^{1/4}} = \infty$$

and

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{|\alpha_k|}^{1/4}}{\left(|A_{|\alpha_k|}|\right)^{1/2}} \leq c < \infty. \tag{25}$$

Let

$$F_A := \sum_{\{k;\ |\alpha_k|<A\}} \lambda_k a_k,$$

其中

$$\lambda_k := \frac{\varphi_{|\alpha_k|}^{1/2}}{|A_{|\alpha_k|}|} \quad \text{and} \quad a_k := 2^{|\alpha_k|} \left(D_{2^{|\alpha_k|+1}} - D_{2^{|\alpha_k|}} \right).$$

由于

$$\operatorname{supp}(a_k) = I_{|\alpha_k|}, \quad \|a_k\|_\infty \leq 2^{2|\alpha_k|} = \mu(\operatorname{supp}\ a_k)^{-2}$$

and

$$S_{2^A} a_k = \begin{cases} a_k & |\alpha_k| < A, \\ 0 & |\alpha_k| \geq A, \end{cases}$$

如果应用引理 1 和（25），我们可以得出 $F = (F_1, F_2, ...) \in H_{1/2}$.容易证明

$$\widehat{F}(j) = \begin{cases} \left(2^{|\alpha_k|} \varphi_{|\alpha_k|}^{1/2}\right) / \left|A_{|\alpha_k|}\right|, & j \in \left\{2^{|\alpha_k|}, ..., 2^{|\alpha_k|+1} - 1\right\},\ k = 0, 1, ... \\ 0, & j \notin \bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{2^{|\alpha_k|}, ..., 2^{|\alpha_k|+1} - 1\right\}. \end{cases} \tag{26}$$

令 $2^{|\alpha_k|} < j < \alpha_k$. 利用（26）可得

$$S_j F = S_{2^{|\alpha_k|}} F + \sum_{v=2^{|\alpha_k|}}^{j-1} \widehat{F}(v) w_v = S_{2^{|\alpha_k|}} F + \frac{\left(D_j - D_{2^{|\alpha_k|}}\right) 2^{|\alpha_k|}}{\left|A_{|\alpha_k|}\right|} \tag{27}$$

令 $2^{|\alpha_k|}\leq\alpha_{s_n}\leq 2^{|\alpha_k|+1}$. 那么，利用（27）可得

$$\begin{aligned}(28)\quad &\sigma_{\alpha_{s_n}}F\\ =\;&\frac{1}{\alpha_{s_n}}\sum_{j=1}^{2^{|\alpha_k|}}S_jF+\frac{1}{\alpha_{s_n}}\sum_{j=2^{|\alpha_k|}+1}^{\alpha_{s_n}}S_jF\\ =\;&\frac{\sigma_{2^{|\alpha_k|}}F}{\alpha_{s_n}}+\frac{\left(\alpha_k-2^{|\alpha_k|}\right)S_{2^{|\alpha_k|}}F}{\alpha_{s_n}}+\frac{2^{|\alpha_k|}\varphi_{|\alpha_k|}^{1/2}}{\left|A_{|\alpha_k|}\right|\alpha_{s_n}}\sum_{j=2^{|\alpha_k|}+1}^{\alpha_{s_n}}\left(D_j-D_{2^{|\alpha_k|}}\right)\\ :=\;&III_1+III_2+III_3.\end{aligned}$$

由于

$$D_{j+2^m}=D_{2^m}+w_{2^m}D_j,\quad\text{when}\quad j<2^m$$

我们得到

$$\begin{aligned}(29)\qquad |III_3| &= \frac{2^{|\alpha_k|}\varphi_{|\alpha_k|}^{1/2}}{\left|A_{|\alpha_k|}\right|\alpha_{s_n}}\left|\sum_{j=1}^{\alpha_{s_n}-2^{|\alpha_k|}}\left(D_{j+2^{|\alpha_k|}}-D_{2^{|\alpha_k|}}\right)\right|\\ &= \frac{2^{|\alpha_k|}\varphi_{|\alpha_k|}^{1/2}}{\left|A_{|\alpha_k|}\right|\alpha_{s_n}}\left|\sum_{j=1}^{\alpha_{s_n}-2^{|\alpha_k|}}D_j\right|\\ &= \frac{2^{|\alpha_k|}\varphi_{|\alpha_k|}^{1/2}}{\left|A_{|\alpha_k|}\right|\alpha_{s_n}}\left(\alpha_{s_n}-2^{|\alpha_k|}\right)\left|K_{\alpha_{s_n}-2^{|\alpha_k|}}\right|\\ &\geq \frac{\varphi_{|\alpha_k|}^{1/2}}{2\left|A_{|\alpha_k|}\right|}\left(\alpha_{s_n}-2^{|\alpha_k|}\right)\left|K_{\alpha_{s_n}-2^{|\alpha_k|}}\right|.\end{aligned}$$

结合众所周知的估计（见 [13]）

$$\left\|S_{2^k}F\right\|_{H_{1/2}}\leq c_1\left\|F\right\|_{H_{1/2}}\quad\text{and}\quad\left\|\sigma_{2^k}F\right\|_{H_{1/2}}\leq c_2\left\|F\right\|_{H_{1/2}},\quad k\in\mathbb{N},$$

我们得到

$$\left\|III_1\right\|_{1/2}\leq C\quad\text{and}\quad\left\|III_2\right\|_{1/2}\leq C.$$

设 $2^{|\alpha_k|}\leq\alpha_{s_1}\leq\alpha_{s_2}\leq...\leq\alpha_{s_r}\leq 2^{|\alpha_k|+1}$ 为生成该集合的自然数

$$A_{|\alpha_k|}=\left\{l_1^{|\alpha_k|},l_2^{|\alpha_k|},...,l_{r_{|\alpha_k|}^1}^{|\alpha_k|}\right\}\bigcup\left\{t_1^{|\alpha_k|},t_2^{|\alpha_k|},...,t_{r_{|\alpha_k|}^2}^{|\alpha_k|}\right\}$$

并选取数值 $\alpha_{s_n}=\sum_{i=1}^{r_n}\sum_{k=l_i^n}^{t_i^n}2^k$，其中

$$t_1^{|\alpha_k|}\geq l_1^{|\alpha_k|}>l_1^{|\alpha_k|}-2\geq t_2^{|\alpha_k|}\geq l_2^{|\alpha_k|}>l_2^{|\alpha_k|}-2\geq...\geq t_{|\alpha_k|}^{|\alpha_k|}\geq l_{|\alpha_k|}^{|\alpha_k|}\geq 0,$$

对于某个 $1\leq n\leq r$，使得 $l_u^{|\alpha_k|}=l_i$，对于某个 $1\leq u\leq r_{|\alpha_k|}^1, 1\leq i\leq r_{|\alpha_k|}^1$.

由于 $\mu\{E_{l_i}\}\geq 1/2^{l_i+1}$，利用引理5可得

$$\begin{aligned}(30)\qquad \int_{E_{l_i}}\left|\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left|\sigma_{\alpha_{s_k}}F\right|}{\varphi_{|\alpha_{s_k}|}}\right|^{1/2}d\mu &\geq \int_{E_{l_i}}\left|\frac{\sigma_{\alpha_{s_n}}F(x)}{\varphi_{|\alpha_{s_n}|}}\right|^{1/2}d\mu\\ &\geq \frac{2^{(2l_i-6)/2}}{\sqrt{2}\left(\left|A_{|\alpha_k|}\right|\right)^{1/2}\varphi_{|\alpha_k|}^{1/4}}\frac{1}{2^{l_i+1}}\\ &\geq \frac{1}{2^5\left(\left|A_{|\alpha_k|}\right|\right)^{1/2}\varphi_{|\alpha_k|}^{1/4}}.\end{aligned}$$

另一方面，对于某个 $1\leq n\leq r$，我们也可以选取数 α_{s_n}，使得 $t_u^{|\alpha_k|}=t_i$，其中 $1\leq u\leq r_{|\alpha_k|}^2$，$1\leq i\leq r_{|\alpha_k|}^2$. 。根据 $\mu\{E_{t_i}\}\geq 1/2^{t_i+3}$ 这一事实，再次应用引理5，对于某个 α_k 和 $1\leq i\leq r_s^2$，我们还可得到

$$\begin{aligned}(31)\qquad \int_{E_{l_i}}\left|\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left|\sigma_{\alpha_{s_k}}F\right|}{\varphi_{|\alpha_{s_k}|}}\right|^{1/2}d\mu &\geq \int_{E_{t_i}}\left|\frac{\sigma_{\alpha_{s_n}}F(x)}{\varphi_{|\alpha_{s_n}|}}\right|^{1/2}d\mu\\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}\left(\left|A_{|\alpha_k|}\right|\right)^{1/2}\varphi_{|\alpha_k|}^{1/4}}2^{(2t_i-6)/2}\frac{1}{2^{t_i+3}}\\ &\geq \frac{1}{2^7\left(\left|A_{|\alpha_k|}\right|\right)^{1/2}\varphi_{|\alpha_k|}^{1/4}}.\end{aligned}$$

结合式 (28)-(31) 和引理5，当 α_k 足够大时，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_G\left|\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left|\sigma_{\alpha_{s_k}}F\right|}{\varphi_{|\alpha_{s_k}|}}\right|^{1/2}d\mu\\ &\geq \|III_3\|_{1/2}^{1/2}-\|III_2\|_{1/2}^{1/2}-\|III_1\|_{1/2}^{1/2}\\ &\geq \sum_{i=1}^{r_{|\alpha_k|}^1-1}\int_{E_{l_i}}\left|\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left|\sigma_{\alpha_{s_k}}F\right|}{\varphi_{|\alpha_{s_k}|}}\right|^{1/2}d\mu+\sum_{i=1}^{r_{|\alpha_k|}^2-1}\int_{E_{t_i}}\left|\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left|\sigma_{\alpha_{s_k}}F\right|}{\varphi_{|\alpha_{s_k}|}}\right|^{1/2}d\mu-2C\\ &\geq \frac{r_{|\alpha_k|}^1+r_{|\alpha_k|}^2}{2^7\left(\left|A_{|\alpha_k|}\right|\right)^{1/2}\varphi_{|\alpha_k|}^{1/4}}-2C\geq\frac{\left(\left|A_{|\alpha_k|}\right|\right)^{1/2}}{2^8\varphi_{|\alpha_k|}^{1/4}}\to\infty,\quad \text{as}\quad k\to\infty.\end{aligned}$$

因此，b）部分也已得到证明，证明完毕。 □

References

[1] *D. Baramidze*、*N. Nadirashvili*、*L.-E. Persson* 和 *G. Tephnadze*，维连金-诺伦德平均的一些弱型不等式及几乎处处收敛，《不等式及其应用》2023（即将出版）。

[2] D. Baramidze 和 G. Tephnadze，空间 $H_{1/2}$ 中 Walsh-Fourier级数的Fejér均值的受限极大算子，Banach 数学分析杂志（即将发表）。[3] N. J. Fujii，广义沃尔什-帕利群上 H_1 函数的一个极大不等式，美国数学会会刊 77（1979），111-116。[4] G. Gát，关于维连金系统中某些算子的研究，匈牙利数学学报 61（1993），131-149。[5] U. Goginava，二重沃尔什-傅里叶级数的Fejér均值极大算子。匈牙利数学学报 115（2007），333–340。[6] U. Goginava，二维共轭沃尔什-傅里叶级数的马尔钦凯维奇-费耶平均的鞅型 Hardy 不等式，Acta Math. Sinica 27（2011），1949-1958。[7] U. Goginava，费耶-沃尔什平均的极大算子。Acta Sci. Math.（Szeged）74（2008），615–624。[8] B. Golubov、A. Efimov 和 V. Skvortsov，沃尔什级数及其变换，Dordrecht、Boston、London，1991。Kluwer Acad. Publ.，1991。[9] N. Nadirashvili、G. Tephnadze 和 G. Tutberidze，三角系统和维连金系统的近似恒等算子与Fejér均值几乎处处收敛及范数收敛，A. Razmadze 数学研究所汇刊，2023（即将发表）。[10] J. Pál 和 P. Simon，关于导数概念的一种推广，匈牙利数学学报 29（1977），155-164。[11] L. E. Persson 和 G. Tephnadze，关于某些维连金-费耶平均极大算子的一个尖锐有界性结果，地中海数学杂志 13，4（2016），1841-1853。[12] L. E. Persson、G. Tephnadze 和 P. Wall，关于维连金-诺尔隆平均的极大算子，J. Fourier Anal. Appl. 21，1（2015），76-94。[13] L. E. Persson、G. Tephnadze 和 F. Weisz，鞅 Hardy 空间与维连金-傅里叶级数的可和性，书稿，Birkhäuser，2022，（即将出版）。[14] F. Schipp、W. Wade、P. Simon 和 J. Pál，沃尔什级数：二分谐波分析导论，Akadémiai Kiadó，布达佩斯-Adam Hilger，1990。[15] F. Schipp，沃尔什级数中的某些级数重排，数学札记，18（1975），193-201。[16] P. Simon，关于双参数沃尔什系统的切萨罗可和性，数学月刊 131，4（2000），321–334。[17] P. Simon，关于维连金系统的研究，Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 28（1985），87-101。[18] P. Simon，关于维连金系统中 Sunouchi 算子的一个注记，Annales Univ. Sci. Sect. Math. Budapest（2001）。[19] G. Tephnadze，维连金-傅里叶级数的Fejér均值，Stud. sci. math. Hung. 49（2012），79-90。[20] G. Tephnadze，关于维连金-费耶平均的极大算子，土耳其数学杂志 37（2013），308-318。[21] G. Tephnadze，关于 Hardy 空间上维连金-费耶平均的极大算子，Math. Inequal. Appl. 16，2（2013），301-312。[22] G. Tephnadze，关于空间 H_p 中 Walsh-Fourier级数的Fejér均值的收敛性，当代数学分析杂志 51，2（2016），90-102。[23] F. Weisz，一维和二维 Walsh-Fourier级数的切萨罗可和性，Anal. Math. 22（1996），229-242。[24] F. Weisz，鞅 Hardy 空间及其在傅里叶分析中的应用，Springer，柏林-海德堡-纽约，1994。[25] F. Weisz，多维傅里叶级数的可和性与 Hardy 空间，Kluwer Academic，Dordrecht，2002。[26] F. Weisz，沃尔什系统与有界 Ciesielski 系统的弱型不等式，Anal. Math. 30，2（2004），147-160。

18Nika Areshidze ，Davit Baramidze ，Lars-Erik Persson ，George Tephnadze

N. Areshidze，数学系，精确与自然科学学院，第比利斯国立大学，恰夫恰瓦泽街1号，第比利斯0128，格鲁吉亚电子邮箱地址：nika.areshidze15@gmail.com

D. Baramidze，佐治亚大学，科学与技术学院，梅拉布·科斯塔瓦街77a号，第比利斯0128，格鲁吉亚；以及计算机科学与计算工程系，UiT—挪威北极大学，邮政信箱385号，N-8505，纳尔维克，挪威。

电子邮箱: davit.baramidze@ug.edu.ge

Lars-Erik Persson，挪威北极大学 UiT，邮政信箱 385，N- 8505 纳尔维克，挪威；以及瑞典卡尔斯塔德大学数学与计算机科学系，65188 卡尔斯塔德。

电子邮箱: larserik6pers@gmail.com

GTephnadze，佐治亚大学科学与技术学院，梅拉布·科斯塔瓦街 77a，第比利斯 0128，格鲁吉亚。

电子邮箱: g.tephnadze@ug.edu.ge