arXiv:2302.12350v2 [math.CA] 5 Jun 2024

一维 ϕ-Laplacian 的凹凸型问题的正解*†‡

Uriel Kaufmann、Leandro Milne§

FAMAF，阿根廷科尔多瓦国立大学，科尔多瓦（5000）

2024年6月6日

摘要

设 $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $0 \leq m,n \in L^1(\Omega)$, $\lambda,\mu > 0$ 为实参数，且 $\phi:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个奇递增同胚。本文研究如下形式问题的正解是否存在:

$$\begin{cases} -\phi\left(u'\right)' = \lambda m(x) f(u) + \mu n(x) g(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 $f,g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是连续函数，粗略地说，它们相对于 ϕ分别是次线性和超线性的。我们对 ϕ, m 和 n 的假设，显著弱于以往研究中所要求的假设。本文采用的方法结合了 Guo-Krasnoselskiĭ 不动点定理、上下解方法，以及对相关非线性问题的一些估计。

1 引言

设 $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $m,n \in L^1(\Omega)$，且 $\lambda,\mu > 0$ 为实参数。本文研究如下形式的问题:

$$\begin{cases} -\phi\left(u'\right)' = \lambda m\left(x\right) f\left(u\right) + \mu n(x) g(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是奇递增同胚，而 $f,g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是连续函数，粗略地说，它们相对于 ϕ分别是次线性和超线性的。当非线性项 f 和 g 分别为凹函数和凸函数时，带有 $\phi(x) = x$ 的题目 (1.1) 最早由 Ambrosetti、

*2020 *Mathematics Subject Clasification*。34B15；34B18。

†*Key words and phrases*。一维椭圆问题，ϕ-拉普拉斯算子，正解。

‡部分由 Secyt-UNC 33620180100016CB 资助。§*E-mail addresses.* kaufmann@mate.uncor.edu（Uriel Kaufmann），lean- dro.milne@unc.edu.ar（Leandro Milne，通讯作者）。

Brezis 和 Cerami 在他们著名的论文 [1] 中进行了研究。更准确地说，在该文中，作者研究了 N 维问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p & x \in \Omega, \\ u > 0 & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $0 < q < 1 < p$，且 Ω 是 $\mathbb{R}^N$中的一个有界区域。他们证明了以下结论：存在 $\Lambda > 0$，使得：若 $\lambda \in (0, \Lambda)$，则 (1.2) 至少有两个正解；若 $\lambda = \Lambda$，则至少有一个正解；若 $\lambda > \Lambda$，则不存在正解。

有几位作者研究了 (1.2) 的推广形式，例如参见 [2, 11,14] 及其参考文献，其中考虑了相应的 p-拉普拉斯问题。此外，在 [12] 中，作者研究了 ϕ-拉普拉斯算子的 N维问题。

关于本文将要研究的一维 ϕ-拉普拉斯问题，Wang 在 [15, 定理 1.2] 和 [16, 定理 1.2] 中，研究了如下情形：$m = n \geq 0$，$m \not\equiv 0$在 Ω 的任意子区间上，$m \in C(\Omega)$ 且 $\lambda = \mu$。这些论文证明了存在 λ_0、$\lambda_1 > 0$，使得若 $\lambda \in (0, \lambda_0)$，则 (1.1) 至少有两个正解；若 $\lambda > \lambda_1$，则不存在正解。值得注意的是，[15, 16] 中对 ϕ 所作的假设远强于本文所要求的条件。更准确地说，Wang 假设

(Φ) 存在递增同胚 $\psi_1, \psi_2 : [0, \infty) \to [0, \infty)$，使得$\psi_1(t)\ \phi(x) \leq \phi(tx) \leq \psi_2(t)\ \phi(x)$ 对所有 $t, x > 0$.

另一方面，文献 [8] 也在 Ω 的任意子区间上考虑了式 (1.1)，其中 $m = n \geq 0$, $m \not\equiv 0$ 如 [15, 16] 中所示。然而，对 m 的正则性假设允许某些 $m \in L^1_{loc}(\Omega)$。关于对 ϕ 的假设，他们要求

(Φ′) 存在递增同胚 $\psi_1 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ 以及函数 $\psi_2 : [0, \infty) \to [0, \infty)$，使得 $\psi_1(t)\ \phi(x) \leq \phi(tx) \leq \psi_2(t)\ \phi(x)$ 对所有 $t, x > 0$.

作者证明，存在 $\lambda_1 \geq \lambda_0 > 0$，使得对于 $\lambda \in (0, \lambda_0)$，(1.1) 至少有两个正解；对于 $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$，有一个正解；而对于 $\lambda > \lambda_1$，没有正解。

本文采用上下解方法和 Guo-Krasnoselskiĭ 不动点定理，并结合相关问题的一些估计，证明在对 ϕ、m 和 n 的假设弱得多的情况下，对于 $\lambda \approx 0$ 至少存在两个正解。此外，作为定理4.4的推论，我们将看到 (Φ) 和 (Φ′) 实际上是等价的。

更确切地说，我们引入以下假设。

(F) 存在 c_0、t_0、$q > 0$，使得

$$f(t) \geq c_0 t^q \text{ for all } t \in [0, t_0] \quad \text{and} \quad \lim_{t \to 0^+} \frac{t^q}{\phi(t)} = \infty. \tag{1.3}$$

(G1) 存在 c_1、t_1、$r_1 > 0$，使得

$$g(t) \leq c_1 t^{r_1} \text{ for all } t \in [0, t_1] \quad \text{and} \quad \lim_{t \to 0^+} \frac{t^{r_1}}{\phi(t)} = 0. \tag{1.4}$$

(G2) 存在 c_2、t_2、$r_2>0$，使得

$$g(t)\geq c_2t^{r_2}\text{ for all }t\geq t_2\quad\text{and}\quad\lim_{t\to\infty}\frac{t^{r_2}}{\phi(t)}=\infty. \tag{1.5}$$

注意，当 $\phi(t)=|t|^{p-2}t$、$f(u)=u^q$ 且 $g(u)=u^r$ 时，(F) 和 (G1) 中的极限成立当且仅当 $0<q<p-1<r$。令 $\mathcal{C}_0^1(\Omega):=\{u\in\mathcal{C}^1(\Omega):u=0\text{ 于 }\partial\Omega\}$ 上，并且

$$\mathcal{P}^\circ:=\left\{u\in\mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}):u>0\text{ in }\Omega\text{ and }u'(b)<0<u'(a)\right\}.$$

我们的主要结果如下定理所述:

定理 1.1. 设 $0\leq m,n\in L^1(\Omega)$。

(I) 假设 $m\not\equiv 0$ 以及 (F) 和 (G1) 成立。那么对所有 $\mu>0$，存在 $\lambda_0(\mu)>0$，使得对于所有 $0<\lambda<\lambda_0(\mu)$，(1.1) 都有一个解 $u_\lambda\in\mathcal{P}^\circ$。此外，解 u_λ 可选取为满足

$$\lim_{\lambda\to0^+}\|u_\lambda\|_\infty=0. \tag{1.6}$$

(II) 假设 $n\not\equiv 0$ 以及 (G1) 和 (G2) 成立。那么对所有 $\mu>0$，存在 $\lambda_1(\mu)>0$，使得对于所有 $0<\lambda<\lambda_1(\mu)$，(1.1) 都有一个解 $v_\lambda\in\mathcal{P}^\circ$。此外，存在 $\rho>0$，使得对于所有 $0<\lambda<\lambda_1(\mu)$，$\|v_\lambda\|_\infty>\rho$。

(III) 假设 $\{\lambda>0:$ (1.1) 在 $\mathcal{P}^\circ\}\neq\emptyset$ 中有解，且对所有 $t_0>0$，(F) 均成立。令

$$\Lambda:=\sup\{\lambda>0:(1.1)\ \textit{has a solution in}\ \mathcal{P}^\circ\}.$$

那么，对于 $0<\lambda<\Lambda$，(1.1) 在 $\mathcal{P}^\circ$ 中至少有一个解。

作为上述定理的直接推论，我们有以下结果

推论 1.2. 设 $\mu>0$ 和 $0\leq m,\ n\in L^1(\Omega)$ 满足 $m,\ n\not\equiv 0$。假设 (F)、(G1) 和 (G2) 成立。那么，对于 $\lambda\approx0$，(1.1) 在 $\mathcal{P}^\circ$ 中至少有两个解。

本文其余部分安排如下。下一节陈述一些关于涉及 ϕ-Laplacian 的非线性问题的必要事实，第 3 节证明我们的主要结果。最后，在第 4 节中，我们介绍一些关于 Orlicz 空间指标的概念，并用它们证明定理4.4（特别是证明 (Φ) 与 (Φ′) 的等价性）；本节末尾还给出若干函数 ϕ 的例子，以说明我们的条件及其与以往研究中所用条件的关系。需要指出的是，例 (e) 中构造的所有 ϕ's 都满足条件 (F)、(G1) 和 (G2)，但不满足条件 (Φ)。

2 预备知识

设 $\phi:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个奇递增同胚。我们首先考虑如下形式的问题

$$\begin{cases}-\phi(v')'=h(x) & \text{in }\Omega,\\ v=0 & \text{on }\partial\Omega.\end{cases} \tag{2.1}$$

众所周知，对于所有 $h \in L^1(\Omega)$，(2.1) 都存在唯一解 $v \in C_0^1(\Omega)$，使得 $\phi(v')$ 绝对连续，且该方程在 $a.e.\ x \in \Omega$ 上逐点成立。此外，解算子 $\mathcal{S}_\phi$: $L^1(\Omega) \to C^1(\Omega)$ 连续且非递减，见 [3, 引理 2.1] 和 [6, 引理 2.2]。

现在我们引入一些记号。对于满足 $h \neq 0$ 的 $0 \leq h \in L^1(\Omega)$，令

$$\mathcal{A}_h := \{x \in \Omega : h(y) = 0 \ a.e.\ y \in (a, x)\},$$
$$\mathcal{B}_h := \{x \in \Omega : h(y) = 0 \ a.e.\ y \in (x, b)\},$$

and

$$\alpha_h := \begin{cases} \sup \mathcal{A}_h & \text{if } \mathcal{A}_h \neq \emptyset, \\ a & \text{if } \mathcal{A}_h = \emptyset, \end{cases} \qquad \beta_h := \begin{cases} \inf \mathcal{B}_h & \text{if } \mathcal{B}_h \neq \emptyset, \\ b & \text{if } \mathcal{B}_h = \emptyset, \end{cases}$$
$$\underline{\theta}_h := \min\left\{\frac{1}{\beta_h - a}, \frac{1}{b - \alpha_h}\right\}, \quad \overline{\theta}_h := \frac{\alpha_h + \beta_h}{2}. \tag{2.2}$$

注意到 $\underline{\theta}_h$ 定义良好，因为 $h \neq 0$，且 $\alpha_h < \beta_h$ （因此，$\overline{\theta}_h \in (\alpha_h, \beta_h)$）。我们还记

$$\delta_\Omega(x) := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = \min(x - a, b - x).$$

在下文中我们将多次用到以下估计。证明见 [6, 引理 2.3 和 (2.6)] 及 [7, 推论 2.2]。

引理 2.1。设 $0 \leq h \in L^1(\Omega)$ 满足 $h \not\equiv 0$。

(i) 在 $\overline{\Omega}$ 中，有

$$\underline{\theta}_h \min\left\{\int_a^{\overline{\theta}_h} \phi^{-1}\left(\int_y^{\overline{\theta}_h} h\right) dy, \int_{\overline{\theta}_h}^b \phi^{-1}\left(\int_{\overline{\theta}_h}^y h\right) dy\right\} \delta_\Omega$$
$$\leq \mathcal{S}_\phi(h) \leq \phi^{-1}\left(\int_a^b h\right) \delta_\Omega. \tag{2.3}$$

(ii) 在 $\overline{\Omega}$ 中，有

$$\mathcal{S}_\phi(h) \geq \underline{\theta}_h \|\mathcal{S}_\phi(h)\|_\infty \delta_\Omega. \tag{2.4}$$

（iii）对于 $M > 0$，存在一个不依赖于 M 的 $c > 0$，使得在 Ω 中有

$$\min\left\{\int_a^{\overline{\theta}_h} \phi^{-1}\left(\int_y^{\overline{\theta}_h} Mh\right) dy, \int_{\overline{\theta}_h}^b \phi^{-1}\left(\int_{\overline{\theta}_h}^y Mh\right) dy\right\} \geq c\phi^{-1}(cM). \tag{2.5}$$

注意，由于 $\overline{\theta}_h \in (\alpha_h, \beta_h)$，不等式 (2.3) 第一项中的常数严格为正。还需注意，由于 $\underline{\theta}_h \|\delta_\Omega\|_\infty \geq 1/2$，利用 (2.3) 的下界并考虑到无穷范数的单调性，我们得到

$$\frac{1}{2} \min\left\{\int_a^{\overline{\theta}_h} \phi^{-1}\left(\int_y^{\overline{\theta}_h} h\right) dy, \int_{\overline{\theta}_h}^b \phi^{-1}\left(\int_{\overline{\theta}_h}^y h\right) dy\right\} \leq \|\mathcal{S}_\phi(h)\|_\infty. \tag{2.6}$$

还需注意，对于引理 2.1 $\mathcal{S}_\phi(h)$ 中的 h，有 $\in \mathcal{P}^\circ$。

设 $h: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 Carath´eodory 函数（即，对于 $a.e.\ x \in \Omega$，$h(x,\cdot)$ 是连续的；而对所有 $\xi \in \mathbb{R}$，$h(\cdot,\xi)$ 是可测的）。现在我们考虑如下形式的问题：

$$\begin{cases} -\phi(u')' = h(x,u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

若存在有限集$\Sigma \subset \Omega$，使得对每个 $\tau \in \Sigma$，$v \in C(\Omega)$ 是 (2.7) 的下解，当且仅当 $\phi(v') \in AC_{loc}(\Omega \setminus \Sigma)$ $v'(\tau^+) := \lim_{x\to\tau^+} v'(x) \in \mathbb{R}$, $v'(\tau^-) := \lim_{x\to\tau^-} v'(x) \in \mathbb{R}$，并且

$$\begin{cases} -\phi(v')' \le h(x,v(x)) & a.e.\ x \in \Omega, \\ v \le 0 \text{ on } \partial\Omega, & v'(\tau^-) < v'(\tau^+) \text{ for each } \tau \in \Sigma. \end{cases} \tag{2.8}$$

如果将 (2.8) 中的不等式反向，我们就称 v 是 (2.7) 的上解。

为完整起见，我们陈述一个在存在有序的下解和上解时的存在性结果，以及著名的 Guo-Krasnoselskiĭ 不动点定理的一个特例（证明见例如 [13, 定理 7.16] 和 [4, 定理 2.3.4],）。

引理 2.2. 设 v 和 w 分别是 (2.7) 的下解和上解，且 $v \le w \in \Omega$。假设存在 $g \in L^1(\Omega)$，使得

$$|h(x,\xi)| \le g(x) \quad for\ a.e.\ x \in \Omega\ and\ all\ \xi \in [v(x), w(x)].$$

那么，存在 $u \in C_0^1(\Omega)$，它是 (2.7) 的解，且 $v \le u \le w \in \Omega$。

引理 2.3. 设 X 是一个 Banach 空间，K 是 X 中的一个锥。设 $\Omega_1, \Omega_2 \subset X$ 是两个开集，满足 $0 \in \Omega_1$ 且 $\Omega_1 \subset \Omega_2$。假设 $T: K \cap (\Omega_2 \setminus \Omega_1) \to K$ 是一个全连续算子，并且

$$\begin{aligned} \|Tv\| &\ge \|v\|, \quad for\ v \in K \cap \partial\Omega_2, \\ \|Tv\| &\le \|v\|, \quad for\ v \in K \cap \partial\Omega_1. \end{aligned}$$

那么，T 在 $K \cap (\Omega_2 \setminus \Omega_1)$ 中有一个不动点。

3 主要结果的证明

3.1 命题 (I) 的证明

本节首先给出两个关于下解和上解的引理，用于证明定理 1.1 的性质 (I)。

引理 3.1. 设 $m, n \in L^1(\Omega)$ 满足 $0 \not\equiv m + n \ge 0$。假设 (G1) 成立。那么对于所有 $\mu > 0$，存在 $\lambda_0(\mu) > 0$，使得对于每个 $0 < \lambda < \lambda_0(\mu)$，都存在 $w_\lambda \in \mathcal{P}^\circ$，它是 (1.1) 的上解。此外，

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \|w_\lambda\|_\infty = 0. \tag{3.1}$$

证明. 令 c_1, t_1, r_1 由 (G1) 给出。定义 $c_\Omega := \max_{\overline{\Omega}} \delta_\Omega$。由 ϕ^{-1} 的连续性以及 $\phi^{-1}(0) = 0$这一事实，存在 $K_0 > 0$ 使得

$$\phi^{-1}(\kappa \int_a^b m(s) + n(s)ds) \leq \frac{t_1}{c_\Omega} \quad \text{for all } \kappa \leq K_0. \tag{3.2}$$

我们注意到，根据 (1.4) 中的第二个条件，对于固定的 $\rho > 0$，有

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{[\phi^{-1}(\rho t)]^{r_1}}{t} = 0. \tag{3.3}$$

现在我们定义

$$\epsilon := \frac{1}{c_1 \mu c_\Omega^{r_1}}, \quad \rho := \int_a^b m(s) + n(s)ds.$$

由 (3.3) 可推得，存在 $K_1 = K_1(\epsilon, \rho) > 0$，使得

$$[\phi^{-1}(\kappa\rho)]^{r_1} \leq \kappa\epsilon \text{ for all } \kappa \leq K_1. \tag{3.4}$$

令 $C = \max_{[0,t_1]} f(t)$，并选择 $\lambda_0 > 0$，使得

$$\lambda_0 C \leq \min\{K_0, K_1\}. \tag{3.5}$$

此外，对每个 $0 < \lambda < \lambda_0$，取 κ_λ，使得

$$\lambda C \leq \kappa_\lambda \leq \min\{K_0, K_1\}, \tag{3.6}$$

并对这样的 κ_λ 定义 $w_\lambda := \mathcal{S}_\phi(\kappa_\lambda(m+n))$。由于 $\kappa_\lambda \leq K_0$，(2.3) 和 (2.2) 中的上界告诉我们 $\|w_\lambda\|_\infty \leq t_1$. 。考虑到 (3.4)、(3.5) 和 (3.6)，利用 (G1) 以及 (2.3) 中的上界，我们推得

$$\begin{aligned}
&\lambda m(x) f(w_\lambda) + \mu n(x) g(w_\lambda) \\
&\leq \lambda m(x) C + c_1 \mu n(x) w_\lambda^{r_1} \\
&\leq \kappa_\lambda m(x) + c_1 \mu n(x) \left[\phi^{-1}(\kappa_\lambda \int_a^b m(s) + n(s)ds) \delta_\Omega \right]^{r_1} \\
&\leq \kappa_\lambda (m(x) + n(x)) = -\phi(w_\lambda')' \quad \text{in } \Omega,
\end{aligned}$$

因此，w_λ 是 (1.1) 的上解。

为证明 (3.1)，我们选取满足 (3.6) 的 κ_λ，并使得当 $\lambda \to 0^+$ 时 $\kappa_\lambda \to 0$。因此，利用不等式 (2.3) 的第二个不等式，我们得到

$$0 \leq w_\lambda(x) = \mathcal{S}_\phi(\kappa_\lambda(m+n)) \leq \phi^{-1}\left(\int_a^b \kappa_\lambda(m+n) \right) \delta_\Omega(x) \to 0$$

当 $\lambda \to 0^+$ 时，在 Ω 上一致成立。因此，$\lim_{\lambda \to 0^+} \|w_\lambda\|_\infty = 0$。 □

引理 3.2. 设 $0 \leq m, n \in L^1(\Omega)$，且满足 $m \not\equiv 0$. 。假设 (F) 成立。那么对于所有 $\lambda, \mu > 0$，(1.1) 有一个下解 $v \in \mathcal{P}^\circ$。

证明. 设 $\lambda, \mu > 0$，并令 c_0, t_0, q 由 (F) 给出。回忆 $c_\Omega := \max_{\overline{\Omega}} \delta_\Omega$. 。由于 ϕ^{-1} 是连续的，且 $\phi^{-1}(0) = 0$，因此存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得

$$\phi^{-1}(\varepsilon \int_a^b m(s)\delta_\Omega^q(s)ds) \leq \frac{t_0}{c_\Omega} \quad \text{for all } \varepsilon \leq \varepsilon_0. \tag{3.7}$$

根据 (1.3) 中的第二个条件，对于 $\rho > 0$ 不动点

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{[\phi^{-1}(\rho t)]^q}{t} = \infty. \tag{3.8}$$

定义

$$M := \frac{1}{\lambda c_0 c^q},$$

其中， c 是 (2.5) 中满足 $h = m\delta^q \, \Omega$ 的常数。由 (3.8) 可知，存在 $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(M, \rho)$，使得

$$[\phi^{-1}(\varepsilon\rho)]^q \geq M\varepsilon \text{ for all } \varepsilon \leq \varepsilon_1. \tag{3.9}$$

取

$$0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\} \tag{3.10}$$

并对这样的 ε 定义 $v := \mathcal{S}_\phi(\varepsilon m \delta^q \, \Omega)$。由于 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$，引理 2.1 的上界和 (3.7) 告诉我们 $\|v\|_\infty \leq t_0$。因此，考虑到 (3.9) 和 (3.10)，利用 (F) 和 (2.5)，我们推出

$$\begin{aligned} &\lambda m(x) f(v) + \mu n(x) g(v) \geq \lambda c_0 m(x) v^q \\ &\geq \lambda c_0 m(x) [c\phi^{-1}(c\varepsilon)\delta_\Omega]^q \geq \varepsilon m(x) \delta_\Omega^q \quad \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

换言之， v 是 (1.1) 的下解。 □

定理 1.1（I）的证明。给定 $\mu > 0$，令 $\lambda_0(\mu)$ 如引理 3.1 所述。对于 $0 < \lambda < \lambda_0(\mu)$，令 $w_\lambda \in \mathcal{P}^\circ$ 为上述引理给出的一个上解，并令 $v_\lambda \in \mathcal{P}^\circ$ 为引理 3.2 给出的一个下解，其中选择 ε_λ，使得 $\varepsilon_\lambda m(x) \delta^q \, \Omega(x) \leq \kappa_\lambda(m(x) + n(x))$ 对于 $a.e. x \in \Omega$ 成立。由此可知， v_λ、 w_λ 是方程 (1.1) 的一对有序的下解和上解。因此，引理 2.2 给出了方程 (1.1) 的一个解 $u_\lambda \in \mathcal{P}^\circ$。此外，由 (3.1) 可得 (1.6)。 □

3.2 条目（II）的证明

定理 1.1（II）的证明。我们将使用引理 2.3，其算子为

$$Tv := \mathcal{S}_\phi(\lambda m(x) f(v) + \mu n(x) g(v)),$$

该锥

$$\mathcal{K} := \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \geq \underline{\theta}_n \|v\|_\infty \delta_\Omega\}$$

（$\underline{\theta}_n$ 如（2.2）所示）以及开球 $B_R(0)$ $B_\rho(0) \subset C(\Omega)$，其中 $\overline{0} < \rho < \underline{R}$.注意到 $C_0^1(\Omega) \cap (\mathcal{K} \setminus \{0\}) \subset \overline{\mathcal{P}^\circ}$，而且 T 的任何不动点都属于 $C^1(\Omega)$。

令 c_2、 t_2 和 r_2 由 (G2) 给出。我们考虑函数 $h := c_2 \mu (\underline{\theta}_n)^{r_2} \, n\delta^{r_2}\Omega$。考虑到 (2.5)，我们可以找到 $c = c(\mu) > 0$，使得对于所有 $M > 0$

$$\min\left\{\int_a^{\overline{\theta}_n} \phi^{-1}(M \int_y^{\overline{\theta}_n} h)dy, \int_{\overline{\theta}_n}^b \phi^{-1}(M \int_{\overline{\theta}_n}^y h)dy\right\} \geq c\phi^{-1}(cM). \tag{3.11}$$

另一方面，(G2) 中的第二个条件等价于

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\phi^{-1}(\rho t^{r_2})}{t}=\infty$$

对于所有不动点 $\rho>0$，存在 $\overline{t}>0$ 使得

$$\phi^{-1}(ct^{q_2})\geq\frac{2t}{c}\text{ for all }t\geq\overline{t}. \tag{3.12}$$

令 $R>\max\{t_2,\overline{t}\}$。考虑到 $\mathcal{S}_\phi$ 和 ϕ^{-1} 均为非递减函数，由不等式 (2.6)、(G2)、(3.11) 和 (3.12)，我们得到对于$v\in\mathcal{K}\cap\partial B_R(0)$,

$$\begin{aligned}
\|Tv\|_\infty=&\|\mathcal{S}_\phi(\lambda m(x)f(v))+\mu n(x)g(v))\|\geq\|S_\phi(\mu n(x)g(v))\|_\infty\\
\geq&\frac{1}{2}\min\left\{\int_a^{\overline{\theta}_n}\phi^{-1}\left(\int_y^{\overline{\theta}_n}\mu ng(v)\right)dy,\int_{\overline{\theta}_n}^b\phi^{-1}\left(\int_{\overline{\theta}_n}^y\mu ng(v)\right)dy\right\}\\
\geq&\frac{1}{2}\min\left\{\int_a^{\overline{\theta}_n}\phi^{-1}\left(c_2\mu\int_y^{\overline{\theta}_n}nv^{r_2}\right)dy,\int_{\overline{\theta}_n}^b\phi^{-1}\left(c_2\mu\int_{\overline{\theta}_n}^y nv^{r_2}\right)dy\right\}\\
\geq&\frac{1}{2}\min\left\{\int_a^{\overline{\theta}_n}\phi^{-1}\left(c_2\mu\left(\underline{\theta}_n\|v\|_\infty\right)^{r_2}\int_y^{\overline{\theta}_n}n\delta_\Omega^{r_2}\right)dy,\right.\\
&\left.\int_{\overline{\theta}_n}^b\phi^{-1}\left(c_2\mu\left(\underline{\theta}_n\|v\|_\infty\right)^{r_2}\int_{\overline{\theta}_n}^y n\delta_\Omega^{r_2}\right)dy\right\}\\
\geq&\frac{1}{2}c\phi^{-1}(c\|v\|_\infty^{r_2})\\
\geq&\|v\|_\infty.
\end{aligned}$$

也就是说，对于这样的 v，$\|Tv\|_\infty\geq\|v\|_\infty$

另一方面，令 $N:=c_1\int_a^b n.$。(G1) 中的第二个条件意味着存在 $\underline{t}>0$，使得对于所有 $t\in(0,\underline{t})$，$\phi(t/c_\Omega)>\mu Nt^{r_1}$。设 $C:=\max_{[0,R]}f(t)$，且 $M:=\int_a^b m$。令 $0<\rho<\min\{\underline{t},R/2,t_1\}$ 为不动点，并定义

$$\lambda_1:=\frac{\phi(\rho/c_\Omega)-\mu N\rho^{r_1}}{MC}. \tag{3.13}$$

请注意，根据我们对 $\underline{t}$ 的选取，$\lambda_1>0$。

现在，考虑到 (2.3)、(G1)、(3.13) 以及 ϕ^{-1}的单调性，我们可知，对于 $0<\lambda\leq\lambda_1$ 和所有 $v\in\mathcal{K}\cap\partial B_\rho(0)$,

$$\begin{aligned}
Tv\leq&\phi^{-1}\left(\int_a^b\lambda m(x)f(v)+\mu n(x)g(v)dx\right)\delta_\Omega\\
\leq&\phi^{-1}\left(\lambda C\int_a^b m(x)dx+c_1\mu\int_a^b n(x)v^{r_1}dx\right)\delta_\Omega\\
\leq&\phi^{-1}\left(\lambda_1MC+\mu N\rho^{r_1}\right)\delta_\Omega\\
\leq&\rho\text{ in }\Omega.
\end{aligned}$$

这表明，对于所有 $v\in\mathcal{K}\cap\partial B_\rho(0)$，$\|Tv\|_\infty\leq\rho=\|v\|_\infty$。

因此，引理 2.3 表明，T在 $\mathcal{K}\cap(B_R(0)\setminus B_\rho(0))$ 中有一个不动点。 □

3.3 命题 (III) 的证明

定理 1.1 的证明（III）。为证明（III），我们结合引理 3.2 和不等式（2.4）。令 $0 < \lambda < \Lambda.$ 。根据 Λ 的定义，存在 $\overline{\lambda} \in (\lambda、\ \Lambda]$ 和 $u_{\overline{\lambda}} \in \mathcal{P}^{\circ}$，它是与 $\overline{\lambda}$ 相关联的（1.1）的一个解。由于 $\lambda < \overline{\lambda}$，可知 $u_{\overline{\lambda}}$ 是与 λ 相关联的（1.1）的一个上解。现在，借助引理 3.2，存在 $\varepsilon > 0$，使得 $v = \mathcal{S}_{\phi}(\varepsilon m \delta^{q}\, \Omega)$ 是与 λ 相关联的（1.1）的一个下解。此外，如有必要，取更小的 ε，即可得到 $v \leq u_{\overline{\lambda}}$。现在，（III）由引理 2.2 得证。 □

4 关于假设的评论

我们来介绍一些关于 Orlicz 空间指标的概念。给定一个非有界、递增的连续函数 $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$，满足 $\phi(0) = 0$，定义

$$M(t, \phi) := \sup_{x>0} \frac{\phi(tx)}{\phi(x)}.$$

该函数是非递减且次乘法的，并且 $M(1, \phi) = 1$。因此，借助例如 $[9,$ 第 $11],$ 章中的结果，以下极限存在：

$$\alpha_{\phi} := \lim_{t \to 0^{+}} \frac{\ln M(t, \phi)}{\ln t}, \quad \beta_{\phi} := \lim_{t \to \infty} \frac{\ln M(t, \phi)}{\ln t},$$

此外，$0 \leq \alpha_{\phi} \leq \beta_{\phi} \leq \infty$。这些数称为 Orlicz 空间指标或 Matuszewska-Orlicz 指标，它们由其提出于 $[10]$。

通常，若存在 $k > 0$ 使得 ϕ 满足 Δ_2 条件，则称

$$\phi(2x) \leq k\phi(x) \quad \text{for all } x \geq 0.$$

注 4.1。

(i) 对于 $\varepsilon > 0$，存在 $t_1 > 0$，使得对于所有 $x > 0$，$\phi(tx) \leq t^{\alpha_{\phi} - \varepsilon} \phi(x)$ 且 $t \in [0, t_1]$。

(ii) 假设 $\beta_{\phi} < \infty$。那么，对于 $\varepsilon > 0$，存在 $t_2 > 0$，使得对于所有 $x > 0$ 和 $t \in [t_2, \infty)$，$\phi(tx) \leq t^{\beta_{\phi} + \varepsilon} \phi(x)$。因此，若 $\beta_{\phi} < \infty$，则 ϕ满足 Δ_2 条件。

(iii) 若对于所有 $x > 0$，$x^{-p} \phi(x)$ 非递减，则 $\alpha_{\phi} \geq p$。

(iv) 若对于所有 $x > 0$，$x^{-p} \phi(x)$ 非递增，则 $\beta_{\phi} \leq p$。

(v) ϕ 和 ϕ^{-1}的Orlicz空间指标满足以下关系：

$$\beta_{\phi} = \frac{1}{\alpha_{\phi^{-1}}} \quad \text{and} \quad \alpha_{\phi} = \frac{1}{\beta_{\phi^{-1}}}.$$

按照惯例，我们令 $1/0 = \infty$ 和 $1/\infty = 0$。

为了证明下文的定理4.4，我们需要用到以下两个有用的引理。

引理4.2（$[5],$第34页）。若 $0 < \alpha_{\phi} \leq \beta_{\phi} < \infty$，则存在 C、p、$q > 0$，使得

$$C^{-1} \min\{t^{p}, t^{q}\} \phi(x) \leq \phi(tx) \leq C \max\{t^{p}, t^{q}\} \phi(x) \quad \textit{for all } t, x \geq 0.$$

引理4.3（[9], 定理11.7）。函数 ϕ 满足 Δ_2 条件，当且仅当常数 β_ϕ 有限。

定理4.4. 关于 ϕ的以下假设彼此等价：

(i)
$0 < \alpha_\phi \le \beta_\phi < \infty.$
(ii) (Φ)。(iii) (Φ')。

证明。显然，(ii) 蕴含 (iii)，而引理4.2表明 (i) 蕴含 (ii)。下面证明 (iii) 蕴含 (i)。

由于$\alpha_\phi = 1/\beta_{\phi^{-1}}$，引理4.3和注4.1 (v) 告诉我们，$\alpha_\phi > 0$ 当且仅当 ϕ^{-1} 满足 Δ_2。下面验证 (Φ') 中的第一个不等式蕴含 ϕ^{-1} 满足 Δ_2. 。事实上，考虑到

$$\psi_1(t)\phi(x) \le \phi(xt) \quad \text{for all } t, x > 0,$$

令 $y = \phi(x)$且 $s = \psi(t)$，我们得到

$$sy \le \phi(\psi_1^{-1}(s)\phi^{-1}(y)) \quad \text{for all } s, y > 0.$$

由于 ϕ^{-1} 是递增的，因此可得

$$\phi^{-1}(sy) \le \psi_1^{-1}(s)\phi^{-1}(y) \quad \text{for all } s, y > 0.$$

这意味着 ϕ^{-1} 满足 Δ_2。因此，$\alpha_\phi > 0$。此外，(Φ') 中的第二个不等式意味着 ϕ 满足 Δ_2。于是，$\beta_\phi < \infty$。 □

以下两个引理将有助于根据我们在第 1 节中陈述的假设 (F)、(G1) 和 (G2)，比较指标 α_ϕ 和 β_ϕ。

引理 4.5. 设 $q > 0$。

(i) If $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t^q}{\phi(t)} = 0$ *then* $\alpha_\phi \le q$.

(ii) If $\lim\limits_{t\to \infty} \dfrac{t^q}{\phi(t)} = 0$ *then* $\beta_\phi \ge q$.

(iii) If $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t^q}{\phi(t)} = \infty$ *then* $\beta_\phi \ge q$.

(iv) If $\lim\limits_{t\to \infty} \dfrac{t^q}{\phi(t)} = \infty$ *then* $\alpha_\phi \le q$.

证明. 我们先证明 (i)。若 $\alpha_\phi > q$，根据注 4.1 (i)，存在 $t_1 > 0$使得

$$\phi(tx) \le t^q\phi(x) \quad \text{for all } x > 0 \text{ and } t \in (0, t_1).$$

令 $C = \phi(1)^{-1}$ 并固定 $x = 1$。利用上述不等式，我们有$C \le \frac{t^q}{\phi\, t()}$ 对所有 $t \in (0, t_1)$均成立，这与 $\lim^{t\to 0^+} \frac{t^q}{\phi\, t()} = 0$. 矛盾。因此，我们必须有 $\alpha_\phi \le q$。（ii）项可类似地推出。事实上，若 $\beta_\phi < q$，由注 4.1（ii）可知，存在 $t_1 > 0$ 使得

$$\phi(tx) \le t^q\phi(x) \quad \text{for all } x > 0 \text{ and } t > t_1.$$

现在我们再次定义 $C = \phi(1)^{-1}$ 并固定 $x = 1$。利用上述不等式，我们有 $C \le \frac{t^q}{\phi\, t\,()}$ 对所有 $t > t_1$均成立，这与 $\lim^{t\to\infty} \frac{t^q}{\phi\, t\,()} = 0$. 矛盾。因此，$\beta_\phi \ge q$.

我们证明 (iii)。首先注意到

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^q}{\phi(t)} = \infty \quad \text{if and only if} \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{1/q}}{\phi^{-1}(t)} = 0. \tag{4.1}$$

事实上，若对每个满足 $0 < t_k \to 0$ 的序列 $\{t_k\}$，都有 $\frac{t_k^q}{\phi\ t_k}() \to \infty$，则第一个极限成立。因此，取 $s_k = \phi(t_k)$，可得 $0 < s_k \to 0$ 且 $[\phi^{-1}(s_k\ ]^q \to \infty$)。由于 $h(t) = t^{1/q}$ 连续，并且当 $t \to \infty$ 时收敛到 ∞，可知 $\frac{s_k}{\phi^{-1}(s_k)} \to \infty$，这等价于 $\frac{s_k^{1/q}}{\phi^{-1}\ s_k}() \to 0$。由于对所有 $t > 0$ 都有 $0 \le \frac{t^{1/q}}{\phi^{-1}\ t}()$，可知 $\lim_{t\to 0^+} \frac{t^{1/q}}{\phi^{-1}\ t}() = 0$。现在，由 (4.1) 和 (i) 可推得 $\alpha_{\phi^{-1}} \le 1/q$；再回顾注 4.1 (v)，便有 $\beta_\phi \ge q$，于是 (iii) 得证。类似地，考虑到

$$\lim_{t\to \infty} \frac{t^q}{\phi(t)} = \infty \quad \text{if and only if} \quad \lim_{t\to \infty} \frac{t^{1/q}}{\phi^{-1}(t)} = 0,$$

并再次利用注 4.1 (v)。 □

引理 4.6. 设 $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是一个无界、递增的连续函数，且 $\phi(0) = 0$。

(i) If $q < \alpha_\phi$ *then* $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{t^q}{\phi(t)} = \infty.$

(ii) If $q > \beta_\phi$ *then* $\lim_{t\to \infty} \dfrac{t^q}{\phi(t)} = \infty.$

(iii) If $q < \alpha_\phi$ *then* $\lim_{t\to \infty} \dfrac{t^q}{\phi(t)} = 0.$

(iv) If $q > \beta_\phi$ *then* $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{t^q}{\phi(t)} = 0.$

请注意，上述引理中 (i) 和 (ii) 两条的逆命题并不成立，见下文的例 (e.1)。

证明。先证明 (i)。设 $\varepsilon > 0$ 使得 $\alpha_\phi - \varepsilon > q$。由注 4.1 (i)，存在 $t_1 > 0$ 使得对于所有 $x > 0$和 $t < t_1$，均有 $\phi(tx) \le t^{\alpha_\phi - \varepsilon}\phi(x)$。取 $x = 1$，得到 $\frac{1}{t^{\alpha_\phi - \varepsilon}} \le \frac{\phi}{\phi(1)\ (t)}$，其中 $t < t_1$。两边乘以 t^q，并令 $t \to 0^+$，取极限可得

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^q}{t^{\alpha_\phi - \varepsilon}} \le \lim_{t\to 0^+} \frac{\phi(1)t^q}{\phi(t)}.$$

由于 $q < \alpha_\phi - \varepsilon$，第一个极限为无穷大，第二个极限也因此为无穷大。于是，(i) 得证。

类似地，令 $\varepsilon > 0$ 使得 $\beta_\phi + \varepsilon < q$。由注 4.1 (ii)，存在$t_1 > 0$ 使得 $\phi(tx) \le t^{\beta_\phi - \varepsilon}\phi(x)$，对所有的 $x > 0$ 和 $t > t_1$均成立。取 $x = 1$，我们

有 $\frac{1}{t^{\beta_\phi-\varepsilon}} \leq \frac{\phi}{\phi(1)\,(t)}$，当 $t < t_1$时。两边乘以 t^q，并令 $t \to \infty$ 取极限，我们得到

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^q}{t^{\beta_\phi+\varepsilon}} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{\phi(1)t^q}{\phi(t)}.$$

由于 $q > \beta_\phi + \varepsilon$， 第一个极限为无穷，因此第二个极限也为无穷。

另一方面，注意到，(iii)由(ii)得出。

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^q}{\phi(t)} = 0 \quad \text{if and only if} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1/q}}{\phi^{-1}(t)} = \infty,$$

，并考虑到 $\alpha_\phi > q$ 当且仅当 $\beta_{\phi^{-1}} < 1/q$，即可由 (ii) 得出 (iii)。类似地，注意到，即可由 (i) 得出 (iv)。

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^q}{\phi(t)} = 0 \quad \text{if and only if} \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{1/q}}{\phi^{-1}(t)} = \infty,$$

并回想一下， $\beta_\phi < q$ 当且仅当$\alpha_{\phi^{-1}} > 1/q$。 □

推论 4.7。设 q、 r_1 和 r_2 分别由 (F)、(G1) 和 (G2) 给出。

1. 假设 α_ϕ 为正。

   (a) 若 $q < \alpha_\phi$，则 (F) 中的极限成立。

2. 假设 β_ϕ 为有限值。

   (a) 若 $r_1 > \beta_\phi$，则 (G1) 中的极限成立。
   (b) 若 $r_2 > \beta_\phi$，则 (G2) 中的极限成立。

4.1 示例

最后，我们用一些函数 ϕ 的例子来结束本文。我们假设$x \geq 0$，并将该函数作奇延拓。

a. 设

$$\phi(x) = x^{p_1} + x^{p_2}, \quad \text{with } p_1 \geq p_2 > 0.$$

由于 $\phi(x)/x^{p_1}$ 非递增，而 $\phi(x)/x^{p_2}$ 非递减，我们可知 $\beta_\phi < \infty$ 且 $\alpha_\phi > 0$。

b. 设

$$\phi(x) = \frac{x^{p_1}}{1 + x^{p_2}}, \quad \text{with } p_1 > p_2 > 0.$$

由于 $\phi(x)/x^{p_1}$ 非递增，而 $\phi(x)/x^{p_1-p_2}$ 非递减，我们得到 $\beta_\phi < \infty$ 且 $\alpha_\phi > 0$。

c. 令

$$\phi(x) = x\left(|\ln x| + 1\right).$$

我们有 $\phi(x)/x^2$ 是非递增的。于是， $\beta_\phi < \infty$. 此外，给定 $p \in (0,1)$，存在 $T > 0$ 使得

$$\phi(tx) \leq t^p \phi(x) \quad \text{for } t \in [0, T] \text{ and all } x \geq 0.$$

这个不等式意味着 $\alpha_\phi \geq 1$.

d. 令

$$\phi(x) := x - \ln(x+1).$$

与上面的例子一样， $\phi(x)/x^2$ 是非递增的，因此 $\beta_\phi < \infty$.此外，存在 C、$T > 0$ 使得

$$\phi(tx) \le Ct\phi(x) \quad \text{for } t \in [0,T] \text{ and all } x \ge 0.$$

由上面的不等式可得 $\alpha_\phi \ge 1$. 此外，由于

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^q}{\phi(t)} = \infty \quad \text{for all } q > 1,$$

根据引理 4.5 (iv)，我们可推得 $\alpha_\phi = 1$。

e. 令 $h : (0,\infty) \to (1,\infty)$为一个递增可微函数，满足$\lim_{t\to 0^+} h(t) = 1$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{qt^{q-1}h(t)}{h'(t)} = \infty \quad \text{for all } q > 0, \tag{4.2}$$

且存在 $p_1 > 0$ 使得

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{qt^{q-1}h(t)}{h'(t)} = \begin{cases} 0 & \text{if } q > p_1, \\ \infty & \text{if } q < p_1. \end{cases} \tag{4.3}$$

定义

$$\phi(x) := (\ln(h(x))^p, \quad \text{with } p > 0.$$

根据 (4.2)， ϕ 满足 (G2) 中的极限条件。此外，由引理 4.5 (iv) 可推知， $\alpha_\phi = 0$. 于是 ϕ 不满足引言中的假设 (Φ)（以及 (Φ′)）。由于 (4.3) 成立，因此可得

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^q}{\phi(t)} = \begin{cases} 0 & \text{if } q > pp_1. \\ \infty & \text{if } q < pp_1. \end{cases}$$

因此， ϕ 满足 (F) 和 (G1) 中的极限条件。下面列举几个具体情形。

e.1 设

$$\phi(x) := (\ln(x+1))^p, \quad \text{with } p > 0.$$

简单计算可得， $h(x) = x + 1$ 满足 (4.2) 和 (4.3)。此外，我们可以看到， $\phi(x)/x^p$ 是非递增的，因此 $\beta_\phi \le p$，并且由于

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^q}{\ln(t+1)} = \infty \quad \text{for all } q < 1,$$

由引理 4.5 可得， $\beta_\phi = p$。这表明，引理 4.6 中 (i) 和 (ii) 的逆命题并不成立。

e.2 设

$$\phi(x) := \operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right).$$

可以看出， $h(x) = \sqrt{x^2+1} + x$ 满足 (4.2) 和 (4.3)。

e.3 令

$$\phi(x) := \ln(\ln(x+1)+1).$$

可以验证， $h(x) =$ 自然对数$(x+1) + 1$ 满足 (4.2) 和 (4.3)。

参考文献

[1] A. Ambrosetti、H. Brezis、G. Cerami，《某些椭圆问题中凹凸非线性项的综合效应》，《函数分析杂志》122 (1994)，519–543。[2] A. Ambrosetti、J. Garcia Azorero、I. Peral，《某些非线性椭圆方程的多重性结果》，《函数分析杂志》137 (1996)，219–242。[3] H. Dang、S. Oppenheimer，《某些非线性边值问题的存在性与唯一性结果》，《数学分析及其应用杂志》198 (1996)，35–48。[4] D. Guo、V. Lakshmikantham，《抽象锥中的非线性问题》。数学、科学与工程笔记与报告，第5卷。Academic Press, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，(1988)。[5] J. Gustavsson、J. Peetre，《Orlicz 空间的插值》，《数学研究》60 (1977)，33–59。[6] U. Kaufmann、L. Milne，《涉及一维 ϕ-Laplacian 的非线性问题的正解》，《数学分析及其应用杂志》461 (2018)，24–37。[7] U. Kaufmann、L. Milne，《通过上下解求广义非线性逻辑斯蒂方程的正解》，《数学分析及其应用杂志》471 (2019)，653–670。[8] Y.-H. Lee、X. Xu，《带参数的广义 Laplacian 问题的存在性与多重性结果》，《马来西亚数学科学学会通报》43 (2020)，403–424。[9] L. Maligranda，《Orlicz 空间与插值》。巴西圣保罗州坎皮纳斯：坎皮纳斯州立大学数学系，1989。′数学[10] W. Matuszewska、W. Orlicz，《关于 Φ 函数的某些性质》，《波兰科学院通报》8 (1960)，439–443。[11] N. Papageorgiou、G. Smyrlis，《参数型 p-Laplacian 方程的正解》，《纯粹与应用分析通讯》15 (2016)，1534–1570。[12] N. Papageorgiou、P. Winkert，《凹凸非线性项非线性非齐次 Dirichlet 问题的正解》，《正性》20 (2016)，945–979。[13] I. Rachnkov、S. Stanek、M. Tvrdy，《Orlicz 空间与插值。常微分方程非线性奇异问题的可解性》。当代数学及其应用，第5卷。Hindawi Publishing Corporation，纽约，2008。[14] J. S´anchez、P. Ubilla，《具有凹凸非线性项的一维椭圆方程》，《电子微分方程杂志》2000 (2000)，第50期，第1–9页。[15] H. Wang，《非线性系统正解的数量》，《数学分析及其应用杂志》281 (2003)，287–306。[16] H. Wang，《环形区域中拟线性方程正径向解的结构》，《微分方程进展》8 (2003)，111–128。