arXiv:2302.12358v2 [math.PR] 9 Jan 2025

将 Wormald 微分方程方法扩展至单侧界

Patrick Bennett* Calum MacRury †

摘要

在本文中，我们提出了 Wormald 微分方程方法的一个“单侧”版本。在标准的“双侧”方法中，给定一族随时间演化的随机变量，并且这些随机变量满足若干条件，其中包括对每个变量在一个时间步内的期望变化量进行精确估计。这些对单步变化的期望值所作的估计表明，这些变量应当接近某个微分方程组的解，而标准方法的结论确实证明了这一点。对于另一种情形，我们给出了相应结果：不再要求对每个变量的期望单步变化量进行精确估计，而只需给出一个上界。我们的证明非常简单，并且具有足够的灵活性：如果改为假设对这些变量有精确估计，那么便可恢复标准微分方程方法的结论。

1 引言

在 Wormald 微分方程方法最基本的设定中，给定一个随机变量序列 $(Y(i))_{i=0}^{\infty}$，它源自某个逐步演化的随机过程。随机变量 $(Y(i))_{i=0}^{\infty}$ 都隐式依赖于某个 $n \in \mathbb{N}$，目标是理解当 $n \to \infty$ 时它们的典型行为。

我们的贯穿示例基于顶点集 $[n]$ 上的 Erd˝os–R´enyi 随机图过程 $(G_i)_{i=0}^{m} := \{1, \dots, n\}$ 其中 $G_i = ([n], E_i)$ 且 $m, n \in \mathbb{N}$。这里 $G_0 = ([n], E_0)$ 是空图，而 G_{i+1} 由 G_i 构造而成：从 $\binom{[n]}{2} \setminus E_i$ 中均匀随机抽取一条边 e_{i+1}（u.a.r.），并令 $E_{i+1} := E_i \cup \{e_{i+1}\}$。假设我们希望了解贪心算法在 $(G_i)_{i=0}^{m}$ 上执行时生成的匹配大小。更具体地说，当 e_{i+1} 到来时，如果 e_{i+1} 的端点此前均未被匹配，贪心算法就会将 e_{i+1} 加入当前匹配。我们令 $m = cn$，也就是说，我们将加入线性数量的随机边。注意，如果 $Y(i)$ 表示算法匹配的边数

*西密歇根大学数学系（patrick.bennett@wmich.edu）。本研究部分由西蒙斯基金会资助，基金编号 #426894。

†美国纽约哥伦比亚大学商学院，cm4379@columbia.edu。作者大部分关于这篇论文的工作是在其隶属于多伦多大学计算机科学系期间完成的。

G_i，那么 $Y(i)$ 是 $e_1, \ldots, e_i$ 的函数（形式上，$Y(i)$ 是 $\mathcal{H}_i$-可测的，其中 $\mathcal{H}_i$ 是由 $e_1, \ldots, e_i$ 生成的 σ-代数）。那么对于 $i < m$,

$$\mathbb{E}[\Delta Y(i) \mid \mathcal{H}_i] = \frac{\binom{n-2Y(i)}{2}}{\binom{n}{2} - i} = \left(1 - \frac{2Y(i)}{n}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{1}$$

其中 $\Delta Y(i) := Y(i+1) - Y(i)$，且渐近行为是 $n \to \infty$（本文余下部分均如此）。将 $Y(i)_{i=0}^{m}$ 按 n缩放后，可以将 (1) 的左侧理解为在 i/n 处对 $Y(i)/n$ 求得的“导数”。这提示我们考虑以下微分方程：

$$y'(t) = (1 - 2y(t))^2, \qquad y(0) = 0 \tag{2}$$

其初始条件为 $y(0) = 0$。Wormald 微分方程方法使我们能够得出结论：以高概率（即，当 $n \to \infty$ 时概率趋于 1，以下简写为 w.h.p.），

$$Y(m) = (1 + o(1))y(m/n), \tag{3}$$

其中 $y(t) := t/(1+2t)$ 是方程 (2) 的唯一解。

回到微分方程方法的一般设定，假设给定一个随机变量序列 $(Y(i))_{i=0}^{\infty}$，它隐式地依赖于 $n \in \mathbb{N}$。假设单步变化有界，即存在常数 $\beta \geq 0$，使得对每个 $i \geq 0$，$|\Delta Y(i)| \leq \beta$。此外，假设每个 $Y(i)$ 都由某个 σ-代数 $\mathcal{H}_i$ 确定，且其期望单步变化由某个 Lipschitz 函数 $f = f(t, y)$ 描述。也就是说，对每个 $i \geq 0$,

$$\mathbb{E}[\Delta Y(i) \mid \mathcal{H}_i] = f(i/n, Y(i)/n) + o(1). \tag{4}$$

如果 $Y(0) = (1 + o(1))\widetilde{y}n$ 对某个常数 $\widetilde{y}$ 成立，且 $m = m(n)$ 不太大，那么微分方程方法允许我们得出结论：以高概率，$Y(m)/n = (1 + o(1))y(m/n)$，其中 y 满足由 (4) 所提示的微分方程，即

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

其初始条件为 $y(0) = \widetilde{y}$。在本文中，我们考虑用不等式代替 (4) 的情形。我们的研究动机之一是在线算法的应用：在这些应用中，人们希望对任意在线算法的性能给出上界，而非仅针对某个特定算法。（关于在线匹配在 $(G_i)_{i=0}^{m}$ 中的一个例子，以及对其他应用的一些讨论，请参见第 1.1 节。）我们的另一个动机是存在一些确定性结果，我们希望为其证明随机类比。例如，考虑以下 Petrovitch 的经典结果 [10]:

定理 m 1. 假设 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是利普希茨连续的，且 $y = y(t)$ 满足

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad y(c) = y_0.$$

假设 $z = z(t)$ 可微且满足

$$z'(t) \leq f(t, z(t)), \qquad z(c) = z_0 \leq y_0.$$

那么，对于所有 $t \geq c$，$z(t) \leq y(t)$。

鉴于上述结果（以及标准的微分方程方法），我们自然会想知道，关于满足以下条件的随机变量序列 $(Z_i)_{i=1}^{\infty}$

$$\mathbb{E}[\Delta Z_i \mid \mathcal{H}_i] \le f(i/n, Z_i/n)$$

而不是等式形式 (4)。更确切地说，如果 $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ 满足 (4)，且 $Z_0 < Y_0$，那么对于所有 $i \ge 0$，我们是否可以推断出 $Z_i \le Y_i$（或许还需加上一个相对较小的误差项）？

我们简要指出，如果 f 关于其第二个变量单调不增，那么上一段所述的问题就容易得多。事实上，只要随机变量满足 $Z_i - Y_i \le 0$，它也是一个超鞅。更确切地说，当 $Z_i \le Y_i$ 时，我们有

$$\mathbb{E}[\Delta(Z_i - Y_i) \mid \mathcal{H}_i] \le f(i/n, Z_i/n) - f(i/n, Y_i/n) \le 0$$

根据单调性假设。在这种情况下，假设初始差距 $|Z_0 - Y_0|$ 足够大，就可以使用标准的鞅技巧来界定超鞅 $Z_i - Y_i$ 变为正值的概率。然而，我们希望处理不满足这一单调性假设的应用。例如，在我们的贯穿示例中，$f(t,z) = (1-2z)^2$ 并非关于 z 单调递增。

当然，通常来说，微分方程方法处理的是由随机变量构成的方程组（以及相关的微分方程组）。那么，对于导数满足不等式而非等式的确定性函数方程组，可以得出什么结论呢？事实证明，若要将定理 1 推广到方程组情形，函数必须是合作的。我们称函数 $f_j : = \mathbb{R}^{a+1} \to \mathbb{R}, 1 \le j \le a$ 为合作的（分别称为竞争的），如果每个 f_j 除了第一个输入以及第（$j+1$）个输入之外，对所有 $a+1$ 输入都是非递减的（分别为非递增的）。换言之，$f_j(t, y_1, \dots y_a)$ 除了可能对 t 和 y_j 之外，对所有变量都是非递减的。请注意，有些资料将具有合作性质的方程组称为拟单调的。注意，在一维情形 $a = 1$ 下，每个函数都是合作的/具有合作性。以下定理是众所周知的结果（相关背景见 [12]，证明见第 3 节）：

定理 2. 假设 $f_j : \mathbb{R}^{a+1} \to \mathbb{R}, 1 \le j \le a$ 是利普希茨连续且合作的，并且 y_j 满足

$$y_j'(t) = f_j(t, y_1(t), \dots, y_a(t)), \qquad 1 \le j \le a, \quad t \ge c.$$

假设 $z_j, 1 \le j \le a$ 可微且满足 $z_j(c) \le y_j(c)$ 和

$$z_j'(t) \le f_j(t, z_1(t), \dots, z_a(t)), \qquad 1 \le j \le a, \quad t \ge c.$$

那么对于所有 $1 \le j \le a, t \ge c.$，都有 $z_j(t) \le y_j(t)$

从某种意义上说，协同性是必要的：如果不具备协同性，就可以为函数 y_j, z_j 选择初始条件，使定理 2 的结论不成立。确实，假设不具备协同性，即存在 j, j'，满足 $j' \ne j+1$，以及一些点 $\mathbf{p}$、$\mathbf{p}' \in \mathbb{R}^{a+1}$，它们除 j'^{th} 坐标外处处相同；在该坐标上，我们有 $p_{j'} > p'_{j'}$，且 $f_j(\mathbf{p}) < f_j(\mathbf{p}')$。考虑以下初始条件：

$$\Big(c, y_1(c), \dots, y_a(c)\Big) = \mathbf{p}, \qquad \Big(c, z_1(c), \dots, z_a(c)\Big) = \mathbf{p}'.$$

于是我们有 $z_j(c) = y_j(c) = p_{j+1} = p'_{j+1}$。此外，$z'_j(c)$ 可以达到 $f_j(\mathrm{p}') > f_j(\mathrm{p}) = y'_j(c)$，此时显然对于某个 $t > c$，有 $z_j(t) > y_j(t)$。

本文的主定理——定理 3——本质上是定理 2 的随机类比。在给出其正式表述之前，我们先进一步说明它为何有助于证明在线算法的不可能性／困难性结果。如果读者想先阅读定理 3，也可以放心跳过第 1.1 节。

1.1 应用动机

本节讨论的例子与第二作者 Ma 和 Grammel 在 [9] 的定理 5 中针对在线随机匹配问题证明的 $1/2$-不可能性（或困难性）结果密切相关。事实上，定理 3 被直接用于证明这一结果，在 [8] 的定理 1.4 中也以类似方式加以运用。我们的定理还可用于简化 Fu、Tang、Wu、Wu 和 Zhang 提出的 $\frac{1}{2}(1+e^{-2})$-不可能性结果（ [6]中的定理 2），以及 Fata、Ma 和 Simchi-Levi 提出的 $1-\ln(2-1/e)$-不可能性结果（ [3]中的引理 5）的证明。上述论文都证明了各种在线随机优化问题的不可能性结果——更具体地说，是关于在线竞争消解方案 [4] 或针对“事前松弛” [7]的先知不等式的困难性结果。我们认为，定理 3 将在这一领域作为一种技术工具得到进一步应用。

现在让我们回到 Erd˝os–R´enyi 随机图过程 $(G_i)_{i=0}^m$ 的定义，如第 1 节所述，其中我们再次假设 $m = cn$ 对某个常数 $c > 0$ 成立。回忆一下，(3) 表明：如果 $Y(m)$ 表示在 $(G_i)_{i=0}^m$ 上执行贪心匹配算法所构造的匹配的大小，那么以高概率 $Y(m)/n = (1+o(1))y(c)$，其中 $y(c) = c/(1+2c)$。事实上，(3) 可以以概率 $1-o(1/n^2)$ 成立，因此取期望后有 $\mathbb{E}[Y(m)]/n = (1+o(1))c/(1+2c)$。

贪心匹配算法是 $(G_i)_{i=0}^m$ 上在线（匹配）算法的一个例子。在线算法从 G_0 上的空匹配开始，其目标是构造一个大小为 G_m 的匹配。虽然它预先知道 $(G_i)_{i=0}^m$ 的分布，但它会依次获知各条边的具体实例，并且必须在线执行。在形式上，在每一步 $i \geq 1$ 中，算法会获得 e_i，然后根据 e_1、……、e_{i-1} 以及此前的匹配决策，不可撤销地决定是否将 e_i 纳入当前匹配。其输出是匹配 M_m，目标是最大化 $\mathbb{E}[|M_m|]$。这里的期望是对 $(G_i)_{i=1}^m$ 以及算法所作的任何随机决策取的。

假设我们希望证明贪心算法在渐近意义下是最优的。也就是说，对于任意在线算法，若 M_m 是它在 G_m上输出的匹配，则 $\mathbb{E}[|M_m|] \leq (1+o(1))\mathbb{E}[Y(m)]$。要直接证明这一点，必须将任意在线算法的性能与贪心算法进行比较。这样论证并不方便，因为存在一些罕见的 $(G_i)_{i=0}^m$ 实例，在这些实例中，采用贪心算法显然不是最优的。

相反，我们将任意在线算法的性能上界表示为 $(1+o(1))y(c)n$。设 $(M_i)_{i=0}^m$ 是任意在线算法在执行 $(G_i)_{i=0}^m$时构造的匹配序列。为简单起见，假设该算法是确定性的，因此 M_i是 $\mathcal{H}_i$-可测的。在这种情况下，我们可以将（1）替换为不等式。也就是说，如果 $Z(i) := |M_i|$，那么对于 $i < m$，

$$\mathbb{E}[\Delta Z(i) \mid \mathcal{H}_i] \leq \left(1 - \frac{2Z(i)}{n}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5}$$

现在回顾微分方程方法背后的直觉。如果将（$Z(i))_{i=0}^{n}$ 按n进行缩放，那么我们可以将（5）的左端解释为在i/n处对 $Z(i)/n$ 求得的“导数”。这启发出以下微分不等式：

$$z' \leq (1-2z)^2,$$

初始条件为 $z(0)=0$。通过将定理 3 应用于 $(Z(i))_{i=0}^{m}$，我们得到

$$Z(m)/n \leq (1+o(1))y(c)$$

其发生的概率为 $1-o(n^{-2})$。因此， $\mathbb{E}[Z(m)] \leq (1+o(1))y(c)n$，所以我们可以得出结论：贪心算法是渐近最优的。

2 主定理

对于任意一列 $(Z(i))_{i=0}^{\infty}$ 随机变量和 $i \geq 0$，我们将使用记号 $\Delta Z(i) := Z(i+1) - Z(i)$。注意，给定一个滤子 $(\mathcal{H}_i)_{i=0}^{\infty}$ （即一列递增的 σ-代数），如果对于每个 $i \geq 0$， Z_i 都是 $\mathcal{H}_i$-可测的，我们就称 $(Z_j(i))_{i=0}^{\infty}$ 适应于 $(\mathcal{H}_i)_{i=0}^{\infty}$。最后，如果对于每个 $i \geq 0$，事件$\{I=i\}$ 都是 $\mathcal{H}_i$-可测的，我们就称停时 I 适应于 $(\mathcal{H}_i)_{i=0}^{\infty}$。

给定 $a \in \mathbb{N}$，设 $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{a+1}$ 是一个有界区域，并且对于 $1 \leq j \leq a$，令 f_j： $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$。我们假设以下条件对每个 j 均成立：

a) f_j 在 $\mathcal{D}$ 上是 L-利普希茨的，即

$$|f_j(t,y_1,\dots,y_a) - f_j(t',y_1',\dots,y_a')| \leq L \cdot \max\{|t-t'|,|y_1-y_1'|,\dots,|y_a-y_a'|\}$$

b) $|f_j| \leq B$ 在 $\mathcal{D}$ 上，并且

c) $(f_j)_{j=1}^{a}$ 是合作的。

给定 $(0,\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_a) \in \mathcal{D}$，假设 $y_1(t)\dots,y_a(t)$ 是该方程组的（唯一）解：

$$y_j'(t) = f_j(t,y_1(t),\dots,y_a(t)), \qquad y_j(0)=\tilde{y}_j \tag{6}$$

对所有 $t \in [0,\sigma]$ 均成立，其中 σ 为任意正值。

定理 3. 假设对于每个 $1 \leq j \leq a$，我们都有一个随机变量序列 $(Z_j(i))_{i=0}^{\infty}$，它适应于某个滤子 $(\mathcal{H}_i)_{i=0}^{\infty}$。设 $n \in \mathbb{N}$，并且 $\beta,b,\lambda,\delta > 0$ 是满足 $\lambda \geq \max\{\beta+B, \frac{L+BL+\delta n}{3L}\}$ 的任意参数。给定一个适应于 $(\mathcal{H}_i)_{i=0}^{\infty}$ 的任意停时 $I \geq 0$，假设对于每个 $0 \leq i < \min\{I,\sigma n\}$，以下性质成立：

1. “有界性假设”：$\max_j |\Delta Z_j(i)| \leq \beta$，且 $\max_j \mathbb{E}[(\Delta Z_j(i))^2 \mid \mathcal{H}_i] \leq b$
2. “趋势假设”：$(i/n, Z_1(i)/n, \dots Z_a(i)/n) \in \mathcal{D}$ 且

$$\mathbb{E}[\Delta Z_j(i) \mid \mathcal{H}_i] \leq f_j(i/n, Z_1(i)/n, \dots Z_a(i)/n) + \delta$$

对于每个 $1 \leq j \leq a$。

3. “初始条件”： $Z_j(0) \le y_j(0)n + \lambda$ 对所有 $1 \le j \le a$。
那么，以至少 $1 - 2a\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2(b\sigma n + 2\beta\lambda)}\right)$ 的概率，

$$Z_j(i) \le ny_j(i/n) + 3\lambda e^{2Li/n}$$

对所有 $1 \le j \le a$ 和 $0 \le i \le \min\{I, \sigma n\}$。

注释 4（简化参数）。通过取 $b = \beta^2$ 和 $I = \lceil \sigma n \rceil$，我们可以得到一个更简单的定理版本，它足以用于许多应用，包括第 1.1 节中的启发性示例。

注释 5（停止时间选择）。设 $0 \le \gamma \le 1$ 是定理 3 的一个附加参数。停时 I 最常按以下方式应用。假设 $(\mathcal{E}_i)_{i=0}^{\infty}$ 是一个适应于 $(\mathcal{H}_i)_{i=0}^{\infty}$ 的事件序列，并且对每个 $0 \le i < \sigma n$，仅当 $\mathcal{E}_i$ 成立时，条件 1 和条件 2 才得到验证。此外，假设 $\mathbb{P}[\cap_{i=0}^{\sigma n-1}\mathcal{E}_i] = 1 - \gamma$。将 I 定义为使得 $\mathcal{E}_i$ 不发生的最小 $i \ge 0$，定理 3 推出，以至少 $1 - 2a\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2(b\sigma n + 2\beta\lambda)}\right) - \gamma$ 的概率，

$$Z_j(i) \le ny_j(i/n) + 3\lambda e^{2Li/n}$$

对于所有 $1 \le j \le a$ 和 $0 \le i \le \sigma n$。

注释 6（竞争函数）。定理 3 为随机变量族给出了上界。对于下界，也有一个对称的定理，其中所有相应的不等式方向都反转，并且函数 f_j 是竞争的，而非合作的。

我们以定理 3 的一个推论结束本节，该推论对定理作了有用的扩展。粗略地说，这一扩展表明，在时刻 $0 \le i \le \min\{\sigma n, I\}$验证条件 1 和条件 2 时，假设（3）成立并无妨。

推论 7（定理 3 的推论）。假设按照定理 3 中的术语，条件 1 和条件 2 仅对每个满足 $Z_{j'}(i) \le ny_{j'}(i/n) + 3\lambda e^{2Li/n}$（对所有 $1 \le j' \le a$）的 $0 \le i \le \min\{I, \sigma n\}$ 得到验证。在这种情况下，定理 3 的结论仍然成立。也就是说，以至少 $1 - 2a\exp\left(-\frac{\lambda^2}{(b\sigma n + 2\beta\lambda)}\right)$ 的概率，

$$Z_j(i) \le ny_j(i/n) + 3\lambda e^{2Li/n}$$

对所有 $1 \le j \le a$ 和 $0 \le i \le \min\{I, \sigma n\}$。

推论 7 的证明。令 I^* 为满足以下条件的第一个 $i \ge 0$

$$Z_{j'}(i) > ny_{j'}(i/n) + 3\lambda e^{2Li/n}$$

对于某个 $1 \le j' \le a$。显然， I^* 是相对于 $(\mathcal{H}_i)_{i=0}^{\infty}$ 适应的停时。此外，根据推论的假设，条件 1 和条件 2 对每个 $0 \le i \le \min\{I^*, I, \sigma n\}$ 和$1 \le j \le a$均成立。因此，由定理 3 可知，概率至少为 $1 - 2a\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2(b\sigma n + 2\beta\lambda)}\right)$，

$$Z_j(i) \le ny_j(i/n) + 3\lambda e^{2Li/n}$$

对所有 $1 \le j \le a$ 和 $0 \le i \le \min\{I, I^*, \sigma n\}$ 均成立。由于前述事件成立当且仅当$I^* > \min\{I, \sigma n\}$，推论得证。

□

3 定理3的证明

在继续证明定理 3 之前，我们先通过给出确定性情形（即定理 2）的证明，说明我们方法的一些直观思路。我们有意选择了这种证明的符号和结构，以便与定理 3 证明中采用的类似方法相呼应。此外，我们证明的主要结论可以看作定理 2 的近似版本，其中 $z_j(0)$ 和 z_j' 的上界仅在加性常数 $\delta > 0$ 的误差范围内成立。

定理 2 的证明。设 $c = 0$ 为定义域边界，L 为合作函数 $(f_j)_{j=1}^a$的利普希茨常数。我们将证明如下结论：任取 $\delta > 0$，若

$$z_j'(t) \le f(t, z_j(t)) + \delta, \qquad z_j(0) \le y_j(0) + \delta \tag{7}$$

对所有 $1 \le j \le a$ 和 $t \ge 0$均成立，则

$$z_j(t) \le y_j(t) + \delta e^{Lt} \tag{8}$$

对每个 $1 \le j \le a$ 和 $t \ge 0$均成立。由于在定理 2 的假设下，(7) 对每个 $\delta > 0$ 均成立，因此 (8) 也必然成立。这意味着，对每个 $1 \le j \le a$ 和 $t \ge 0$，$z_j(t) \le y_j(t)$，从而完成证明。

为了证明 (7) 推出 (8)，定义

$$g(t) := 2\delta e^{Lt}, \qquad s_j(t) := z_j(t) - (y_j(t) + g(t)), \qquad I_j(t) := [y_j(t), y_j(t) + g(t)).$$

只需证明对所有 $t \ge 0$，$\max_{1\le j\le a} s_j(t) \le 0$。首先注意，对所有 $1 \le j \le a$，$s_j(0) = z_j(0) - y_j(0) - g(0) \le -\delta < 0$。反设存在某个 $1 \le j' \le a$，使得对某个 $t > 0$，$s_{j'}(t) > 0$。在这种情况下，必存在某个值 t_1，满足 $s_{j'}(t_1) = 0$，且对所有 $t < t_1$，$\max_{1\le j\le a} s_j(t) < 0$。此外，必存在某个 $t_0 < t_1$，使得对所有 $t_0 \le t < t_1$，$s_{j'}(t) \in [-g(t), 0)$。因此，对于 $t_0 \le t < t_1$，我们有

$$-g(t) \le z_{j'}(t) - [y_{j'}(t) + g(t)] < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y_{j'}(t) \le z_{j'}(t) < y_{j'}(t) + g(t), \tag{9}$$

因此

$$\begin{aligned} f_{j'}\Big(t, z_1(t), \dots z_a(t)\Big) &\le f_{j'}\Big(t, y_1(t) + g(t), \dots, z_{j'}(t), \dots, y_a(t) + g(t)\Big) \\ &\le f_{j'}\Big(t, y_1(t), \dots, y_a(t)\Big) + Lg(t) \end{aligned} \tag{10}$$

其中，第一行是由函数的协同性得出的，f_j 第二行则是将利普希茨性应用于（9）所得，$f_{j'}$ 因此，对于所有 $t \in [t_0, t_1)$，

$$\begin{aligned} s_{j'}'(t) &= z_{j'}'(t) - y_{j'}'(t) - g'(t) \\ &= f_{j'}\Big(t, z_1(t), \dots, z_a(t)\Big) - f_{j'}\Big(t, y_1(t), \dots, y_a(t)\Big) - g'(t) \\ &\le Lg(t) - g'(t) = 0 \end{aligned}$$

其中最后一行使用了式（10）。但现在我们得到了矛盾：$s_{j'}(t_0) \in [-g(t_0), 0)$，因此它为负；$s_{j'}'(t) \le 0$ on $[t_0, t_1)$，然而 $s_{j'}(t_1) = 0$。

□

我们对定理 3 的证明部分基于临界区间方法。Telcs、Wormald 和 Zhou [11]，以及 Bohman、Frieze 和 Lubetzky [2]（我们在此采用他们的术语）也使用过类似的思想。若想对该方法有一个较为浅显的了解，可参阅第一作者与 Dudek 合著的论文 [1]。粗略地说，临界区间方法使我们能够假设：在我们最关注这些变量的那些步骤中，关键变量都有良好的估计。从历史上看，这种方法一直与更标准的微分方程方法应用相结合，以利用自校正随机变量，即具有如下性质的变量：当它显著偏离其轨迹时，其期望单步变化使其很可能向轨迹方向移回。对于这样的随机变量，如果知道它位于严格高于（或低于）轨迹的某个区间内，就能对其期望单步变化给出更有利的估计。在我们的情形中，我们使用该方法的原因类似但有所不同。特别是，由于我们只能期望得到单侧界，因此当随机变量远离其界时，我们不妨忽略它们（无论如何，在所有变量都远离其界的步骤中，我们既没有也不需要对它们的期望单步变化等给出良好估计）。

我们来作一个类比。定理 2 的粗略证明思路如下：为了使 $z_j(t) > y_j(t)$，对于某个 t，必定存在一个时间区间，在此期间 $z_j \approx y_j$，并且在该区间内，z_j 的增长速度必须显著快于 y_j，这与我们对其导数的了解相矛盾。定理 3 的类似证明思路如下：为了使 $Z_j(i)$ 超出其上界，它必须先进入一个临界区间，我们将其定义为上界附近的区间；随后，Z_j 必须在接下来的若干步中显著增长（增长幅度超过我们的预期）。虽然这有可能发生，但发生的概率很低。我们的概率界将由 Freedman 不等式推出，下面陈述该不等式。

定理 8（Freedman 不等式 [5]）。设 $(\mathcal{H}_i)_{i=0}^{\infty}$ 是递增的σ-代数序列（即，对所有 $i \geq 1$，都有 $\mathcal{H}_{i-1} \subseteq \mathcal{H}_i$。）此外，设 $(M_i)_{i=0}^{\infty}$ 是一个适应于 $(\mathcal{H}_i)_{i=0}^{\infty}$ 的随机变量序列（即，每个 M_i 都是 $\mathcal{H}_i$-可测的）。回顾一下，$\Delta M_i := M_{i+1} - M_i$，且对 $i \geq 0$，$\mathrm{Var}(\Delta M_i \mid \mathcal{H}_i) := \mathbb{E}[\Delta M_i^2 \mid \mathcal{H}_i] - \mathbb{E}[\Delta M_i \mid \mathcal{H}_i]^2$。固定 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\beta, b \geq 0$。假设对每个 $0 \leq i < m$，都有 $\mathbb{E}[\Delta M_i \mid \mathcal{H}_i] = 0$，$|\Delta M_i| \leq \beta$，且 $\mathrm{Var}(\Delta M_i \mid \mathcal{H}_i) \leq b$。那么，对任意 $0 < \varepsilon < 1$，

$$\mathbb{P}(\exists\, 0 \leq i \leq m : |M_i - M_0| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2(bm + \beta\varepsilon)}\right).$$

此外，如果 I 是一个相对于 $(\mathcal{H}_i)_{i=0}^{\infty}$ 适应的任意停时（即，对于每个 $i \geq 0$，$\{I = i\}$ 都是 $\mathcal{H}_i$-可测的），并且上述关于 $(M_i)_{i=0}^{\infty}$ 的条件仅对所有 $0 \leq i < \min\{I, m\}$ 得到验证，那么

$$\mathbb{P}(\exists\, 0 \leq i \leq \min\{I, m\} : |M_i - M_0| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2(bm + \beta\varepsilon)}\right).$$

定理 3 的证明。固定 $0 \leq i \leq \sigma n$，并设 $m := \sigma n$, $t = t_i = i/n$，且 $g(t) := 3\lambda e^{2Lt}$ for

为方便起见。定义

$$S_j(i) := Z_j(i) - (ny_j(t) + g(t)), \quad X_j(i) := \sum_{k=0}^{i-1} \mathbb{E}[\Delta S_j(k) \mid \mathcal{H}_k],$$

$$M_j(i) := S_j(0) + \sum_{k=0}^{i-1} \left(\Delta S_j(k) - \mathbb{E}[\Delta S_j(k) \mid \mathcal{H}_k]\right),$$

使得 $S_j(i) = X_j(i) + M_j(i)$, $(M_j(i))_{i=0}^m$ 是一个鞅，且 $X_j(i)$ 是 $\mathcal{H}_{i-1}$-可测的（即 $(X_j(i) + M_j(i))_{i=0}^m$ 是 $(S_j(i))_{i=0}^m$ 的 Doob 分解）。注意，我们可以将 $S_j(i)/n$ 视为定理 2 证明中 $s_j(t) = m_j(t) + x_j(t)$ 的随机类比。在先前的确定性情形下，分解 $s_j(t) = m_j(t) + x_j(t)$ 是多余的，因为 $m_j(t) = s_j(0)$，因此 $x_j(t)$ 与 $s_j(t)$ 相差一个常数。相比之下，$M_j(i)$ 是 $S_j(0)$，再加上 $\sum_{k=0}^{i-1}(\Delta S_j(k) - \mathbb{E}[\Delta S_j(k) \mid \mathcal{H}_k])$；后者可以视为引入了一些随机噪声。我们通过证明 $M_j(i)$ 通常会因 Freedman 不等式（见定理 8）而集中在 $S_j(0)$ 附近，来处理这种随机噪声。我们将此称为证明中的概率部分。假设这种集中性成立，我们可以通过与定理 2 的证明类似的论证，将 $Z_j(i)$ 上界为 $ny_j(t) + g(t)$。这是证明中的确定性部分。

从证明的概率部分开始，我们将注意力限制在 $0 \le i < \min\{I, m\}$。首先注意到

$$\begin{aligned}
\Delta M_j(i) &= \Delta S_j(i) - \mathbb{E}[\Delta S_j(i) \mid \mathcal{H}_i] \\
&= \Delta[Z_j(i) - (ny_j(t) + g(t))] - \mathbb{E}[\Delta[Z_j(i) - (ny_j(t) + g(t))] \mid \mathcal{H}_i] \\
&= \Delta Z_j(i) - \mathbb{E}[\Delta Z_j(i) \mid \mathcal{H}_i],
\end{aligned}$$

因此由条件1,

$$|\Delta M_j(i)| \le |\Delta Z_j(i)| + |\mathbb{E}[\Delta Z_j(i) \mid \mathcal{H}_i]| \le 2\beta.$$

此外，$\mathrm{Var}[\Delta M_j(i) \mid \mathcal{H}_i] = \mathbb{E}[(\Delta Z_j(i) - \mathbb{E}[\Delta Z_j(i) \mid \mathcal{H}_i])^2 \mid \mathcal{H}_i]$。因此,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}[\Delta M_j(i) \mid \mathcal{H}_i] &= \mathbb{E}[\Delta Z_j(i)^2 \mid \mathcal{H}_i] - \mathbb{E}[\Delta Z_j(i) \mid \mathcal{H}_i]^2 \\
&\le \mathbb{E}[\Delta Z_j(i)^2 \mid \mathcal{H}_i] \\
&\le b \qquad \text{由条件1。}
\end{aligned}$$

因此，我们可以应用定理 8 得到

$$\mathbb{P}(\exists\, 0 \le j \le a, 0 \le i \le \min\{I, m\} : |M_j(i) - M_j(0)| \ge \lambda) \le 2a \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2(bm + 2\beta\lambda)}\right). \quad (11)$$

假设上述事件没有发生，即对于所有的 $0 \le j \le a$、$0 \le i \le \min\{m, I\}$，都有 $|M_j(i) - M_j(0)| < \lambda$。我们将证明，对于所有的 $Z_j(i) \le ny_j(t) + g(t)$，以及所有的$0 \le i \le \min\{m, I\}$，同样有 $1 \le j \le a$（等价地，对于所有 $0 \le i \le \min\{m, I\}$，$\max_j S_j(i) \le 0$）。这一蕴含关系构成证明的确定性部分。将其与 (11) 中的概率界结合，即可完成定理 3 的证明。

为导出矛盾，假设 i' 是满足以下条件的最小整数： $0 \le i' \le \min\{m, I\}$，并且对于某个 j，有 $Z_j(i') > ny_j(t_{i'}) + g(t_{i'})$。定义临界区间

$$I_j(i) := [ny_j(t), ny_j(t) + g(t)]\,.$$

首先注意，由于 $g(0) := 3\lambda > \lambda$，条件 3. 意味着 $i' > 0$ (因此 $i' - 1 \ge 0$.)。我们声称 $Z_j(i' - 1) \in I_j(i' - 1)$。事实上，注意到根据 i' 的最小性，我们有 $Z_j(i' - 1) \le ny_j(t_{i'-1}) + g(t_{i'-1})$。另一方面，$|y_j'| = |f_j| \le B$，因此每个 y_j 都是 B-利普希茨的。因此，由于 $\lambda \ge \beta + B$ （根据假设），

$$\begin{aligned} Z_j(i' - 1) \ge Z_j(i') - \beta &> ny_j(t_{i'}) + g(t_{i'}) - \beta \\ &\ge ny_j(t_{i'-1}) + 3\lambda - \beta - B \\ &\ge ny_j(t_{i'-1}). \end{aligned}$$

因此， $Z_j(i' - 1) \in I_j(i' - 1)$。现在令 $i'' \le i' - 1$ 为满足如下性质的最小整数：对所有 $i'' \le i \le i' - 1$，都有 $Z_j(i) \in I_j(i)$。于是 $Z_j(i'' - 1) \notin I_j(i'' - 1)$，并且根据 i' 的最小性，我们必有 $Z_j(i'' - 1) < ny_j(t_{i''-1})$。再次利用 y_j 是 B-利普希茨的这一事实，

$$Z_j(i'') \le Z_j(i'' - 1) + \beta < ny_j(t_{i''-1}) + \beta \le ny_j(t_{i''}) + \beta + B. \tag{12}$$

现在，由于 $Z_j(i') > ny_j(t_{i'}) + g(t_{i'})$，我们可以应用 (12) 得到

$$\begin{aligned} S_j(i') - S_j(i'') &= (Z_j(i') - ny_j(t_{i'}) - g(t_{i'})) - (Z_j(i'') - ny_j(t_{i''}) - g(t_{i''})) \\ &> g(t_{i''}) - \beta - B \\ &\ge 3\lambda - \beta - B. \end{aligned} \tag{13}$$

直观地说，(13) 表明 $S_j(i)$ 在步骤 i'' 和 i' 之间显著增加。现在我们将说明， $\mathbb{E}[\Delta S_j(i) \mid \mathcal{H}_i]$ 在步骤 i'' 和 i' 之间非正。粗略地说，将其按n缩放，并将 $\mathbb{E}[\Delta S_j(i) \mid \mathcal{H}_i]$视为 $S_j(i)/n$在 i/n 处的“导数”，即可让我们以类似于定理 2 证明最后一部分的方式导出矛盾。

首先注意，对每个 $i'' \le i \le i' - 1$，我们都有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta S_j(i) \mid \mathcal{H}_i] &= \mathbb{E}[\Delta Z_j(i) \mid \mathcal{H}_i] - \Delta n y_j(t) - \Delta g(t) \\ &\le f_j(t, Z_1(i)/n, \dots Z_a(i)/n) + \delta \\ &\qquad - f_j(t, y_1(t), \dots, y_a(t)) + (L + BL)n^{-1} - n^{-1}g'(t) \end{aligned} \tag{14}$$

其中，第一行是根据定义得到的，下面将证明式 (14)。前两项由条件 2 得出，因为 $(t, Z_1(i)/n, \dots Z_a(i)/n) \in \mathcal{D}$，并且

$$\mathbb{E}[\Delta Z_j(i) \mid \mathcal{H}_i] \le f_j(t, Z_1(i)/n, \dots Z_a(i)/n) + \delta.$$

对于式 (14) 的第三项和第四项，注意到

$$\begin{aligned}\Delta n y_j(t) = n[y_j(t_{i+1}) - y_j(t_i)] &= n\int_{t_i}^{t_{i+1}} y_j'(\tau)\, d\tau \\ &= n\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_j(\tau, y_1(\tau), \ldots, y_a(\tau))\, d\tau \\ &\geq n\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_j(t, y_1(t_i), \ldots, y_a(t_i)) - (L + BL)n^{-1}\, d\tau \qquad (15) \\ &= f_j(t, y_1(t_i), \ldots, y_a(t_i)) - (L + BL)n^{-1},\end{aligned}$$

其中 (15) 成立，是因为对所有 $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$，我们都有 $|y_j(\tau) - y_j(t_i)| \leq B|\tau - t_i| \leq Bn^{-1}$（因为 y_j 是 B-利普希茨的），而现在由于 f_j 是 L-利普希茨的，我们有

$$|f_j(\tau, y_1(\tau) \ldots, y_a(\tau)) - f_j(t, y_1(t_i), \ldots, y_a(t_i))| \leq L \cdot \max\{|\tau - t_i|, Bn^{-1}\} \leq L(1 + B)n^{-1}.$$

对于 (14) 的最后一项，我们有

$$\begin{aligned}\Delta g(t) = 3\lambda\left(e^{2Lt_{i+1}} - e^{2Lt_i}\right) &= 3\lambda e^{2Lt_i}\left(e^{2L/n} - 1\right) \\ &\geq 3\lambda e^{2Lt_i}\left(\frac{2L}{n}\right) = n^{-1}g'(t).\end{aligned}$$

现在注意到，根据协同性，$f_j(t, Z_1(i)/n, \ldots Z_a(i)/n)$ 的上界为

$$f_j\left(t, \frac{ny_1(t) + g(t)}{n}, \ldots, \frac{ny_{j-1}(t) + g(t)}{n}, \frac{Z_j(i)}{n}, \frac{ny_{j+1}(t) + g(t)}{n}, \ldots, \frac{ny_a(t) + g(t)}{n}\right). \qquad (16)$$

现在，由于 $Z_j(i) \in I_j(i)$，我们可以将 f_j 的利普希茨性质应用于 (16)，从而得到

$$f_j(t, Z_1(i)/n, \ldots Z_a(i)/n) \leq f_j(t, y_1(t), \ldots, y_a(t)) + Lg(t)/n. \qquad (17)$$

因此，将其应用于 (14)，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta S_j(i) \mid \mathcal{H}_i] &\leq f_j(t, Z_1(i)/n, \ldots Z_a(i)/n) + \delta - f_j(t, y_1(t), \ldots, y_a(t)) + (L + BL)n^{-1} - n^{-1}g'(t) \\ &\leq Ln^{-1}g(t) + \delta - n^{-1}g'(t) + (L + BL)n^{-1} \\ &= Ln^{-1}g(t) + \delta - n^{-1}2Lg(t) + (L + BL)n^{-1} \\ &\leq -[Lg(t) - (L + BL + \delta n)]n^{-1} \\ &\leq -[3L\lambda - (L + BL + \delta n)]n^{-1} \qquad (18) \\ &\leq 0, \qquad (19)\end{aligned}$$

其中最后一行是由 $\lambda \geq \frac{L+BL+\delta n}{3L}$ 得出的。

因此，对于 $i'' \leq i \leq i' - 1$，我们有

$$0 \geq \mathbb{E}[\Delta S_j(i) \mid \mathcal{H}_i] = \mathbb{E}[\Delta X_j(i) \mid \mathcal{H}_i] + \mathbb{E}[\Delta M_j(i) \mid \mathcal{H}_i] = \Delta X_j(i)$$

since $(M_j(i))_{i=0}^m$ 是一个鞅，且 $\Delta X_j(i)$ 是 $\mathcal{H}_i$-可测的。特别地，

$$X_j(i') \leq X_j(i''). \qquad (20)$$

此时，我们利用关于 $(M_j(i))_{i=0}^m$ 的假设事件（紧接在 (11) 之后），得到

$$M_j(i') - M_j(i'') \le |M_j(i') - M_j(0)| + |M_j(i'') - M_j(0)| \le 2\lambda. \tag{21}$$

但现在我们可以得出最终矛盾（解释如下）：

$$\begin{aligned} 3\lambda - \beta - B &< S_j(i') - S_j(i'') \\ &= X_j(i') - X_j(i'') + M_j(i') - M_j(i'') \\ &\le 2\lambda. \end{aligned}$$

事实上，第一行来自 (13)，第二行由 Doob 分解得到，最后一行则由 (20) 和 (21) 推出。但最后一行是矛盾的，因为我们选择了 $\lambda \ge \beta + B$。

□

注 9。我们可以放宽关于 f_j 的若干条件 a)-c) 以及定理 2 的条件 1 和条件 2，而结论仍然成立（特别是，我们给出的证明依然适用）。下面列出一些可能的放宽方式。

- 条件 a)：我们仅在 (15) 和 (17) 中用到这一条件，而且这两种情况下，我们都是在非常接近轨迹的点 $(t, z_1, \ldots, z_a)$ 处应用它。特别是，我们不必假设 f_j 在整个 $\mathcal{D}$上都是 L-利普希茨的；只需保证 f_j 在以下点集上是 L-利普希茨的

$$\mathcal{D}^* := \left\{(t, z_1, \ldots, z_a) \in \mathbb{R}^{a+1} : 0 \le t \le \sigma, y_{j'}(t) \le z_{j'} \le y_{j'}(t) + g(t) \text{ for } 1 \le j' \le a\right\} \subseteq \mathcal{D}.$$

- 条件 b)：我们只用这一条件来得出方程组 (6) 有唯一解，且这些解是 y_j B-利普希茨的。因此，无需采用条件 b)，只需直接验证 (6) 有唯一解，且该解是 B-利普希茨的。

- 条件 c)：我们只利用函数的协同性来得到第 (16) 行。在这种情况下，对于我们的点 $(t, z_1, \ldots, z_a)$，某个 z_j 位于其临界区间内（且所有 z_i 均低于各自的上界）。特别地，对于 (16)，无需假设完整的条件 c)，只需满足 $f_j(t, z_1, \ldots z_a)$ 有如下上界：

$$f_j\left(t, \frac{ny_1(t) + g(t)}{n}, \ldots, \frac{ny_{j-1}(t) + g(t)}{n}, z_j, \frac{ny_{j+1}(t) + g(t)}{n}, \ldots, \frac{ny_a(t) + g(t)}{n}\right)$$

只要对所有 j' 和 $z_j \ge y_j(t)$， $z_{j'} \le y_{j'}(t) + g(t)/n$。

- 条件 2.：我们只用这个条件来得到 (14)。在这种情况下，我们有一个 Z_j 处于其临界区间内（且所有 Z_i 都低于各自的上界）。无需条件 2.，只需满足以下条件：对每个 $1 \le j \le a$。如果对所有 $1 \le j' \le a$ 和 $Z_j \ge ny_j(i/n)$， $Z_{j'}(i) \le ny_{j'}(i/n) + g(i/n)$，那么 $(i/n, Z_1(i)/n, \ldots Z_a(i)/n) \in \mathcal{D}$ 且

$$\mathbb{E}[\Delta Z_j(i) \mid \mathcal{H}_i] \le f_j(i/n, Z_1(i)/n, \ldots Z_a(i)/n) + \delta.$$

4 恢复一个版本的 Wormald定理

本节我们重新推导 Wormald[14] 的标准（双侧）微分方程方法。该表述与 Warnke [13] 最近给出的版本相似：它不使用任何渐近记号，而是明确给出误差估计和失败概率的界。与 Warnke 的证明一样，我们的证明也包含概率部分和确定性部分。我们的概率部分与 Warnke 的方法大致相同：我们对 Doob 分解中的鞅部分应用偏差不等式（不过我们使用的是 Freedman定理，而不是 Azuma-Hoeffding不等式）。尽管如此，我们论证中的确定性部分与 Warnke 论证中的确定性部分截然不同。事实上，我们无法将 Warnke 的论证改用于单侧情形。

给定 $a \in \mathbb{N}$，假设 $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{a+1}$ 是一个有界区域，并且对于 $1 \le j \le a$，令 $f_j : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$。我们假设以下条件对每个 j 都成立：

1. f_j 是 L-利普希茨，
且 2. $|f_j| \le B$ 在 $\mathcal{D}$ 上。

给定 $(0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_a) \in \mathcal{D}$，假设 $y_1(t) \dots, y_a(t)$ 是方程组的（唯一）解

$$y_j'(t) = f_j(t, y_1(t), \dots, y_a(t)), \qquad y_j(0) = \tilde{y}_j.$$

对于所有 $t \in [0, \sigma]$，其中 σ 是一个正值。注意，与定理 3 不同，我们在下面的定理 10 中还对 σ 作了进一步假设。

定理 10. 假设对于每个 $1 \le j \le a$，我们都有一个随机变量序列 $(Y_j(i))_{i=0}^{\infty}$，它适应于滤子 $(\mathcal{H}_i)_{i=0}^{\infty}$。令 $n \in \mathbb{N}$，并设 $\beta, b, \lambda, \delta > 0$ 为满足 $\lambda \ge \frac{L+BL+\delta n}{3L}$ 的任意参数。此外，假设 $\sigma > 0$ 是任意一个值，使得 $(t, y_1(t) \dots, y_a(t))$ 对于所有 $t \in [0, \sigma)$，与 $\mathcal{D}$ 的边界之间的 ℓ^∞-距离至少为 $3\lambda e^{2Lt}/n$。给定一个适应于 $(\mathcal{H}_i)_{i=0}^{\infty}$ 的任意停时 $I \ge 0$，假设以下性质对每个 $0 \le i < \min\{I, \sigma n\}$都成立：

1. “有界性假设”：$\max_j |\Delta Y_j(i)| \le \beta$，且 $\max_j \mathbb{E}[(\Delta Y_j(i))^2 \mid \mathcal{H}_i] \le b$。

2. “趋势假设”：如果 $(i/n, Y_1(i)/n, \dots Y_a(i)/n) \in \mathcal{D}$，则

$$\left| \mathbb{E}[\Delta Y_j(i) \mid \mathcal{H}_i] - f_j(i/n, Y_1(i)/n, \dots Y_a(i)/n) \right| \le \delta$$

对于每个 $1 \le j \le a$。

3. “初始条件”：$|Y_j(0) - y_j(0)n| \le \lambda$ 对于所有 $1 \le j \le a$。
则以至少 $1 - 2a \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2(b\sigma n + 2\beta\lambda)}\right)$ 的概率，

$$|Y_j(i) - n y_j(i/n)| \le 3\lambda e^{2Li/n}$$

对所有 $1 \le j \le a$ 和 $0 \le i \le \min\{I, \sigma n\}$。

我们以定理 10 的一个扩展作为本节的结尾，该扩展类似于定理 3 的推论 7。证明与推论 7 的证明几乎完全相同，因此我们略去。

推论 11（定理 10 的推论）。假设按照定理 10 中的术语，条件 1 和条件 2 仅对每个满足 $|Y_{j'}(i) - ny_{j'}(i/n)| \le 3\lambda e^{2Li/n}$ 的 $0 \le i \le \min\{I, \sigma n\}$ 进行验证，其中对所有 $1 \le j' \le a$ 均成立。在这种情况下，定理 10 的结论仍然成立。即，以至少 $1 - 2a\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2(b\sigma n + 2\beta\lambda)}\right)$ 的概率，

$$|Y_j(i) - ny_j(i/n)| \le 3\lambda e^{2Li/n}$$

对所有 $1 \le j \le a$ 和 $0 \le i \le \min\{I, \sigma n\}$ 均成立。

定理 10 的证明。固定 $0 \le i \le \sigma n$，并再次为方便起见设 $m := \sigma n$, $t = t_i = i/n$，以及 $g(t) := 3\lambda e^{2Lt}$。定义

$$\begin{aligned} S_j^{\pm}(i) &:= Y_j(i) - (ny_j(t) \pm g(t)), \\ X_j^{\pm}(i) &:= \sum_{k=0}^{i-1} \mathbb{E}[\Delta S_j^{\pm}(k) \mid \mathcal{H}_k], \\ M_j^{\pm}(i) &:= S_j^{\pm}(0) + \sum_{k=0}^{i-1} \left(\Delta S_j^{\pm}(k) - \mathbb{E}[\Delta S_j^{\pm}(k) \mid \mathcal{H}_k]\right) \end{aligned}$$

因此，$(X_j^{\pm}(i) + M_j^{\pm}(i))_{i=0}^m$ 是 $(S_j^{\pm}(i))_{i=0}^m$ 的 Doob 分解。注意

$$\Delta S_j^{\pm}(k) - \mathbb{E}[\Delta S_j^{\pm}(k) \mid \mathcal{H}_k] = \Delta Y_j(k) - \mathbb{E}[\Delta Y_j(k) \mid \mathcal{H}_k],$$

因此，$M_j^+(i)$ 几乎与 $M_j^-(i)$ 相同。更准确地说，我们有

$$M_j^{\pm}(i) = M_j(i) \mp g(0)$$

其中

$$M_j(i) := Y_j(0) - ny_j(0) + \sum_{k=0}^{i-1} (\Delta Y_j(k) - \mathbb{E}[\Delta Y_j(k) \mid \mathcal{H}_k])$$

（它也是一个鞅）。与定理 3 的证明一样，我们有 $|\Delta M_j(i)| \le 2\beta$ 且 $\mathrm{Var}[\Delta M_j(i) \mid \mathcal{H}_i] \le b$。现在，由定理 8 可知

$$\mathbb{P}\Big(\exists\, 0 \le j \le a, 0 \le i \le m \text{ such that } |M_j(i) - M_j(0)| \ge \lambda\Big) \le 2a\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2(bm + 2\beta\lambda)}\right). \tag{22}$$

假设上面的事件没有发生，因此对所有 $0 \le j \le a, 0 \le i \le m$，都有 $|M_j(i) - M_j(0)| < \lambda$。我们将证明，对所有 $0 \le i \le m$，也有 $|Y_j(i) - ny_j(t)| \le g(t)$。注意，$y_j$ 与之前一样是 B-利普希茨函数。定义临界区间

$$I_j(i) := [ny_j(t) - g(t), ny_j(t) + g(t)]\,.$$

反设 i' 是满足 $0 \le i' \le m$ 且 $Y_j(i') \notin I_j(i')$ 的最小值，其中某个 j。我们考虑 $Y_j(i') > ny_j(t) + g(t)$ 的情形（$Y_j(i') <$ 的情形

$ny_j(t)-g(t)$ 的情形可类似处理，只需反转某些不等式）。换言之， $S_j^+(i') > 0$。首先注意到，由于 $g(0) := 3\lambda$，条件 3 推出 $S_j^+(0) \le -2\lambda$。特别地， $i' > 0$ 且

$$S_j^+(i') - S_j^+(0) > 2\lambda. \tag{23}$$

对于 $0 \le i < i'$，我们有（解释如下）

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Delta S_j^+(i) \mid \mathcal{H}_i] &= \mathbb{E}[\Delta Y_j(i) \mid \mathcal{H}_i] - \Delta n y_j(t) - \Delta g(t) \\
&\le f_j(t, Y_1(i)/n, \dots Y_a(i)/n) + \delta - f_j(t, y_1(t), \dots, y_a(t)) + (L + BL)n^{-1} - n^{-1}g'(t) \\
&\le Ln^{-1}g(t) + \delta + (L + BL)n^{-1} - n^{-1}g'(t) \\
&\le -[3L\lambda - (L + BL + \delta n)]n^{-1} \\
&\le 0.
\end{aligned}$$

事实上，第一行由定义可得，第二行的推导与式 (14) 完全相同，只需稍加注意：现在必须证明 $(t, Y_1(i)/n, \dots, Y_a(i)/n)$ 位于定义域 $\mathcal{D}$ 内，才能应用条件 2（回想一下，在定理 3 中这一点是直接假设的）。注意，根据 σ 的定义，$(t, y_1(t) \dots, y_a(t))$ 属于 $\mathcal{D}$，且与 $\mathcal{D}$ 的边界至少相距 ℓ^∞-距离 $g(t)/n$。另一方面，由于对所有 $1 \le j' \le a$ 都有 $Y_{j'}(i) \in I_{j'}(i)$，我们知道对所有 $1 \le j' \le a$ 都有$|Y_{j'}(i)/n - y_{j'}(t)| \le g(t)/n$。因此，$(t, Y_1(i)/n, \dots Y_a(i)/n) \in \mathcal{D}$，于是

$$\mathbb{E}[\Delta Y_j(i) \mid \mathcal{H}_i] \le f_j(t, Y_1(i)/n, \dots, Y_a(i)/n) + \delta$$

由条件 2 得出。其余论证与之前基本相同。由于 f_j 是L-利普希茨的，并且对所有 j'， $|Y_{j'}(i) - ny_{j'}(t)| \le g(t)$，因此我们有 $f_j(t, Y_1(i)/n, \dots Y_a(i)/n) \le f_j(t, y_1(t) \dots, y_a(t)) + Ln^{-1}g(t)$，于是第三行成立。第四行和第五行的推导与式 (18) 和式 (19) 相同。因此，对于 $0 \le i < i'$，我们有

$$0 \ge \mathbb{E}[\Delta S_j^+(i) \mid \mathcal{H}_i] = \mathbb{E}[\Delta X_j^+(i) \mid \mathcal{H}_i] + \mathbb{E}[\Delta M_j^+(i) \mid \mathcal{H}_i] = \Delta X_j^+(i)$$

因为 $(M_j^+(i))_{i=0}^\infty$ 是一个鞅，且 $\Delta X_j^+(i)$ 是 $\mathcal{H}_i$-可测的。特别地

$$X_j^+(i') \le X_j^+(0). \tag{24}$$

但现在我们可以得出最终矛盾（解释如下）：

$$\begin{aligned}
2\lambda &< S_j^+(i') - S_j^+(0) \\
&= X_j^+(i') - X_j^+(0) + M_j(i') - M_j(0) \\
&\le \lambda.
\end{aligned}$$

事实上，第一行来自式 (23)，第二行由 Doob 分解得出，最后一行则由式 (24) 以及我们的假设得出，即第 (22) 行所述事件不会发生。当然， $2\lambda < \lambda$ 是矛盾的，因此证明完毕。□

参考文献

[1] Patrick Bennett 和 Andrzej Dudek. 微分方程方法与动态集中的浅显介绍。《离散数学》，345(12)：论文编号 113071，共17页，2022年。

[2] Tom Bohman、Alan Frieze 和 Eyal Lubetzky. 随机三角形移除。Adv. Math., 280:379–438, 2015.[3] Elaheh Fata、Will Ma 和 David Simchi-Levi. 带库存约束的多阶段、多客户商品组合优化。CoRR, abs/1908.09808, 2019.[4]Moran Feldman、Ola Svensson 和 Rico Zenklusen. 在线竞争消解方案及其在贝叶斯选择问题中的应用。SIAM计算杂志, 50(2):255–300, 2021.[5] David A. Freedman. 鞅的尾概率。概率年刊, 3(1):100–118, 1975.[6] Hu Fu、Zhihao Gavin Tang、Hongxun Wu、Jinzhao Wu 和 Qianfan Zhang. 用于匹配的随机顺序顶点到达竞争消解方案及其应用。载于 Nikhil Bansal、Emanuela Merelli 和 James Worrell（编），第48届自动机、语言与编程国际研讨会（ICALP 2021），第198卷，莱布尼茨国际信息学会议论文集（LIPIcs），第68:1–68:20页，德国达格施图尔，2021年。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik.[7] Euiwoong Lee 和 Sahil Singla. 通过事前先知不等式实现最优在线竞争消解方案。载于 Yossi Azar、Hannah Bast 和 Grzegorz Herman（编），第26届欧洲算法年度研讨会（ESA 2018），第112卷，莱布尼茨国际信息学会议论文集（LIPIcs），第57:1–57:14页，德国达格施图尔，2018年。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.[8] Calum MacRury 和 Will Ma. 通过连续归纳实现随机顺序竞争消解：顶点到达情形下二分图匹配的紧性。载于 Bojan Mohar、Igor Shinkar 和 Ryan O’Donnell（编），第56届ACM计算理论年度研讨会论文集，STOC 2024，温哥华，不列颠哥伦比亚省，加拿大，2024年6月24日至28日，第1629–1640页。ACM，2024年.[9] Calum MacRury、Will Ma 和 Nathaniel Grammel. 关于图（特别是二分图）匹配多面体的（随机顺序）在线竞争消解方案。《运筹学》0(0)，2024年.[10]M. Michel Petrovitch. 关于一种将均值定理推广到一阶微分方程的方法。《数学年刊》，54:417–436，1901年.[11] Andr´as Telcs、Nicholas Wormald 和 Sanming Zhou. 由2过程生成的随机图的哈密顿性。《随机结构与算法》，31(4):450–481，2007年.[12] Wolfgang Walter. 微分不等式与极大值原理：理论、新方法及应用。载于第二届非线性分析世界大会论文集，第8部分（雅典，1996年），第30卷，第4695–4711页，1997年.[13] Lutz Warnke. 关于 Wormald 微分方程方法。已被《组合学、概率与计算》接收，abs/1905.08928，2019年。

[14]Nicholas C. Wormald。《随机过程与随机图的微分方程》。《应用概率年刊》，5(4):1217 – 1235，1995。