arXiv:2302.12375v1 [cs.CE] 24 Feb 2023

使用具有任意非结构化四边形布局的 G样条曲面进行等几何分析

Zuowei Wen[a]，Md. Sadman Faruque[a]，Xin Li[b]，Xiaodong Wei[c]，Hugo Casquero[a,*]

[a]密歇根大学迪尔伯恩分校机械工程系，*4901 Evergreen Road*，迪尔伯恩，*MI 48128-1491*，美国。[b]中国科学技术大学数学科学学院，中国合肥。[c]密西根大学-上海交通大学联合学院，上海交通大学，中国上海。

摘要

G样条是B样条的一种推广，通过在其辐条边上施加 G^1 约束来处理奇异点，从而在整个曲面上获得连续的切平面。采用等参概念和布勃诺夫-伽辽金法，利用G样条求解偏微分方程，可在物理空间中得到具有全局C^1 连续性的离散化。为了表示具有任意拓扑亏格的流形曲面，需要使用奇异点（EP）。在本研究中，我们允许存在内侧和边界奇异点，并且不限制奇异点之间的最小距离。要使带有奇异点的样条能够广泛应用于工程应用中复杂薄壁结构的设计-分析循环，就必须达到这种灵活性。据作者所知，本文提出的两种基于施加 G^1 约束的EP构造，是等几何分析（IGA）中最早同时具备以下显著特征的两种EP构造：（1）仅使用基于顶点的控制点，并将其作为几何形状控制柄；（2）控制网中的任意控制点都可能成为EP；（3）无需引入奇异性，即可在物理空间中获得全局 C^1 连续性；（4）EP周围的面不会被划分为多个单元，即可获得具有统一单元尺寸的B´ézier网格；（5）能够获得良好的曲面质量。本文开展的收敛性和曲面质量研究表明，与基于D-patch框架的EP构造相比，G样条更适合用于等几何分析。最后，我们使用G样条曲面表示B柱的加强筋、内侧部件和外侧部件，并分别采用Kirchhoff-Love和Reissner-Mindlin壳体理论求解特征值问题。将结果与双线性四边形网格进行比较后发现，G样条与传统有限元之间具有极好的一致性。总之，G样条是使用同一几何表示来设计和分析薄壁结构的可行替代方案，有助于简化设计-分析循环。

*通讯作者。电子邮箱：casquero@umich.edu（Hugo Casquero）

预印本已提交至《计算力学与工程方法》 *2023*年*2*月*27*日

关键词：等几何分析、非常点、G样条、曲面质量、收敛性、汽车工程

---

1. 引言

在计算机辅助设计（CAD）软件中，表示薄壁结构的行业标准是采用裁剪非均匀有理B样条（NURBS）曲面片；也就是说，通常会使用数百甚至数千个裁剪NURBS曲面片来表示复杂的结构部件。然而，在有限元分析（FEA）软件中，表示薄壁结构的行业标准是采用四边形主导网格，即主要由双线性四边形单元构成、但也包含一些线性三角形单元的网格。在CAD和有限元分析程序中表示薄壁结构的底层技术截然不同，这导致工程应用中复杂薄壁结构的设计-分析循环面临诸多互操作性问题。

等几何分析（IGA） [1] 旨在整个设计-分析循环中仅使用一种薄壁结构的几何表示，从而大幅缩短这一过程的总耗时 [2]。如果能找到一种同时满足CAD和有限元分析程序需求的样条，便可实现这一目标。作为第一步，研究表明，未裁剪NURBS曲面片不仅适用于分析 [3, 4, 5, 6], ，而且与拉格朗日多项式在单元边界处的 C^0 连续性相比，其在单元边界处具有更高的连续性，因而带来以下益处：能够更稳健地处理网格畸变 [7], ；提高谱分析的精度 [8, 9, 10], ；能够以原始形式求解四阶偏微分方程 [11, 12, 13, 14, 15]；能够获得 H^1协调离散化，其中包括散度协调或旋度协调离散化 [16, 17, 18, 19, 20], ，等等。NURBS曲面片（或B样条曲面片）定义在具有结构化四边形布局的控制网上。要构造定义在具有非结构化四边形布局的控制网上的光滑样条并非易事。非常点（EP）是指其周围控制网连通关系呈非结构化的控制点。40多年来，在CAD与计算机动画领域，开发处理非常点的不同策略一直是活跃的研究方向。 [21]中可查阅全面综述。自等几何分析问世以来，这一研究方向再次受到关注。迄今为止，用于求解偏微分方程（PDE）的含非常点样条包括以下类型

- G样条 [22, 23, 24]通过强制每个基函数在从 EP 发出的边上满足几何连续性，从而推广了 B样条。正如 [28],所示，采用等参概念和布勃诺夫-伽辽金法时，若基函数在单元边界两侧具有 k 阶（G^k 连续性）的几何连续性，则离散化后在物理空间中跨该单元边界具有 C^k 连续性。 [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36]使用 G样条求解了偏微分方程。

根据 [29, 30, 31, 32], 中所做的收敛性研究，可以得出结论：G样条构造通常无法达到最优渐近收敛率。 [32, 33, 34, 35, 36]定义了一个具有最优渐近收敛率的子集。然而，无法在该子集中设计自由曲面。渐近收敛率并非衡量函数空间逼近能力的唯一指标。收敛常数会显著影响粗网格上的精度。在大规模工业应用中，为了在合理的时间内完成计算，需要使用相对较粗的网格。因此，从工程角度来看，相对粗网格上所达到的精度至少与非常细的网格上所达到的精度同样重要。

• Catmull-Clark细分曲面（SubD） [37, 38, 39, 40] 通过无限递归公式折叠EP周围的面，从而在极限情况下达到全局 C^1 连续性。由于其构造具有奇异性，SubD的曲面质量受到限制 [41]。文献 [42, 43, 44, 45, 46, 47]使用Catmull-Clark SubD求解了偏微分方程。SubD面临的主要挑战是定义准确且高效的数值积分规则 [48, 49]。

• D-patch框架 [50] 通过折叠每个基函数在EP周围的一圈提取系数，实现 C^1 连续性。由于其构造具有奇异性，D-patch框架的曲面质量受到限制 [51]。文献 [52, 53, 54, 55, 56]使用D-patch框架求解了偏微分方程。

• 流形样条 [57, 58, 59, 60, 61] 使用单位分解法对样条进行平滑混合。流形样条中乘以基函数的系数不具备几何形状控制柄的特性。文献 [62, 63, 64]使用流形样条求解了偏微分方程。

• 具有 EP 的不同类型样条虽无法在物理空间中达到全局 C^1 连续性，但具有最优渐近收敛率 [65, 66, 67]。

在本研究中，我们构造了两种 G样条构造，它们同时满足以下显著特征

• 控制点的作用类似于几何形状控制柄。任何旨在满足 CAD 软件需求的 EP 构造都必须具备这一特性。

• 与迄今为止用于等几何分析的先前 G样条构造不同， [29, 30, 31, 32, 33,34, 35, 36], 该方法支持具有任意非结构化四边形布局的三维控制网，即允许存在内部和边界奇异点，并且对奇异点之间的距离没有限制。每个面上允许存在多个非常规点，这对于捕捉孔洞等小特征是必要的，无需引入非常小的单元；否则会缩短最大稳定时间步长。

获得了具有统一单元尺寸的• B´ezier网格，即 EP 周围的面不会被拆分为多个单元。

- 全局 C^1 无需引入任何奇异性，即可在物理空间中实现连续性。

为全面评估所提出的两种 EP构造的性能，我们开展了收敛性研究，考察了曲面质量，并针对复杂薄壁结构求解了特征值问题。此外，我们还与 D-patch框架和传统有限元进行了详细比较。

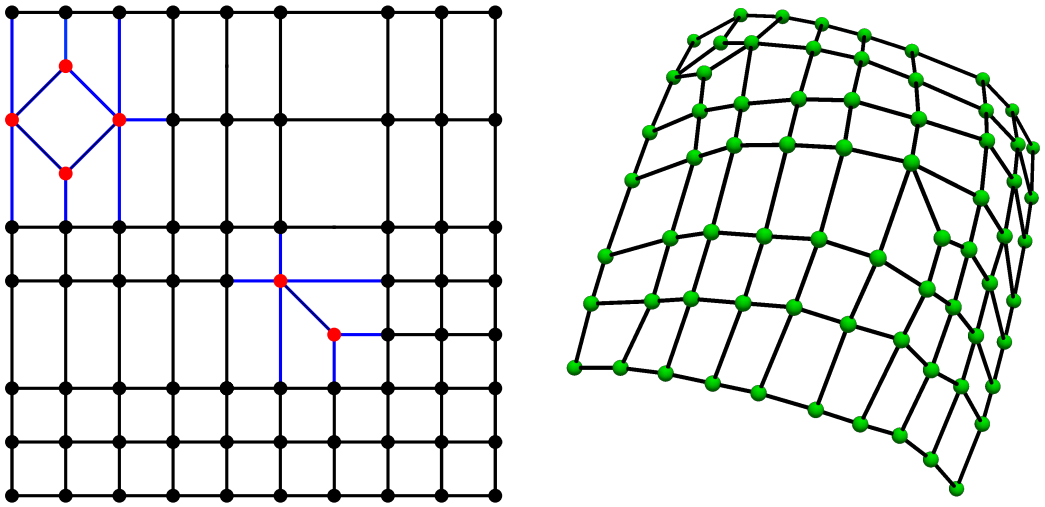
本文的结构如下。第 2 节详细介绍本文提出的两类 G样条。第 3 节研究使用 G样条求解二阶线性椭圆问题时的收敛性，并将其精度与 D-patch框架进行比较。第 4 节比较 G样条与 D-patch框架的曲面质量。第 5 节分别使用 G样条和双线性四边形求解汽车B柱的加强筋、内侧部件和外侧部件上的特征值问题。第 6 节给出结论。

2. G样条

本节将介绍如何在具有任意非结构化四边形布局的控制网上构造和细化 G样条曲面。

2.1. C 网

C 网是一种非结构化四边形布局，用于规定 G样条曲面的不同组成部分彼此关联或排列的方式（C 网中的 C 代表连通关系）。图 1(a) 展示了一个 C 网示例。在图 1(a) 中，C 网的顶点、边和面分别用圆圈、实线和白色区域表示。C 网的每个顶点都分配有一个控制点。控制点是 $\mathbb{R}^3$ 中的点。在 CAD 软件中，控制点被用作几何形状控制柄来构造曲面。控制点的总数记为 n_{cp}。控制网是通过对控制点进行双线性插值得到的非结构化四边形网。与图 1(a) 所示 C 网关联的一种可能控制网绘于图 1(b) 中。顶点的价是与该顶点共享的面的数量。奇异顶点包括价不等于四的内部顶点，或价大于二的边界顶点。图 1(a) 中用红色圆圈标出了奇异顶点。非常点（EP）是与奇异顶点关联的控制点。C 网的每条边都分配有一个长度为单位的节点区间。C 网的每个面都分配有一个单元。单元是基函数为多项式函数或有理函数的区域。因此，单元是每个基函数都可以用伯恩斯坦多项式表示的区域。单元的总数记为 n_{el}。辐条边是从奇异顶点发出的边。图 1(a) 中用蓝线标出了辐条边。EP 的一环面是与 EP 接触的面。对于 $m > 1$，EP 的 m 环面是所有接触 (m-1) 环面的面，且不属于 (m- 2) 环面的面。EP 的 0 环顶点集合仅包含 EP 本身。对于 $m > 0$,



(a) C 网　　(b) 控制网

图 1: （在线彩色）(a) 含有边界和内部奇异顶点的 C 网。奇异顶点和辐条边分别用红色圆圈和蓝色线条标出。(b) 与 (a) 中所示 C 网关联的一种可能的控制网。

EP 的 m 环顶点包含位于 m 环面上的所有顶点，且不属于 (m-1) 环顶点。

与先前的工作不同，[29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 52, 53, 54, 55, 56], 我们允许三维控制网中的任意控制点都可能成为奇异点。换言之，EP 之间的距离没有任何限制（一个面上的四个控制点都可能是 EP），并且允许存在内部和边界 EP。开发具有如此灵活性的 EP 构造，对于恰当地满足涉及薄壁结构的复杂工程应用中的设计与分析需求是必要的。

2.2. B´ézier 提取

限制在单元 e 上的每个参数方向次数为 p 的分片多项式基函数 N 可以表示为 ($p+1$)^2 个二元伯恩斯坦多项式的线性组合，即

$$N^e(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{p+1}\sum_{j=1}^{p+1}c_{i,j}^e b_{i,j}(\xi,\eta),\quad (\xi,\eta)\in[0,1]^2, \tag{1}$$

with

$$b_{i,j}(\xi,\eta)=\mathfrak{B}_i(\xi)\,\mathfrak{B}_j(\eta), \tag{2}$$

$$\mathfrak{B}_i(\xi)=\frac{p!}{(i-1)!(p-i+1)!}\xi^{i-1}(1-\xi)^{p-i+1}, \tag{3}$$

$$\mathfrak{B}_j(\eta) = \frac{p!}{(j-1)!(p-j+1)!}\eta^{j-1}(1-\eta)^{p-j+1}, \tag{4}$$

其中，$[0,1]^2$ 是父元素域，$\mathfrak{B}_i$ 和 $\mathfrak{B}_j$ 是一元伯恩斯坦多项式，$b_{i,j}$ 是一个二元伯恩斯坦多项式，而 $c^e_{i,j}$ 是一个提取系数。

将所有支撑在单元 e 上的基函数收集为一个列向量，即 $\boldsymbol{N}^e = (N^e_1, N^e_2, ..., N^e_{n^e})^T$，其中 n^e 是支撑在单元 e 上的基函数数量。我们还将二元伯恩斯坦多项式收集为一个列向量，即 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, ..., b_{(p+1)^2})^T$，其中 $b_k = b_{i,j}$，且 $k = (p+1)(j-1) + i$。对于单元 e，样条提取算子 $\boldsymbol{C}^e$ 是一个维度为 $n^e \times (p+1)^2$ 的矩阵，它将基函数与二元伯恩斯坦多项式联系起来，如下所示

$$\boldsymbol{N}^e(\xi,\eta) = \boldsymbol{C}^e\boldsymbol{b}(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in [0,1]^2. \tag{5}$$

类似地，对于每个单元，样条控制点 $\boldsymbol{P}^e = (\boldsymbol{P}^e_1, \boldsymbol{P}^e_2, ..., \boldsymbol{P}^e_{n^e})^T$ 可与贝塞尔控制点 $\boldsymbol{B}^e = (\boldsymbol{B}^e_1, \boldsymbol{B}^e_2, ..., \boldsymbol{B}^e_{(p+1)^2})^T$ 联系起来，其中 $\boldsymbol{B}^e_k = \boldsymbol{B}^e_{i,j}$，且 $k = (p+1)(j-1) + i$，如下所示

$$\boldsymbol{B}^e = (\boldsymbol{C}^e)^T \boldsymbol{P}^e, \tag{6}$$

其中，$\boldsymbol{P}^e$ 和 $\boldsymbol{B}^e$ 分别为维数为 $n^e \times 3$ 和 $(p+1)^2 \times 3$的矩阵。$\boldsymbol{E}^e = (\boldsymbol{C}^e)^T$ 是*B´ézier* 提取算子。隐式定义提取算子的一种常见方式，是建立 B´ézier 控制点与样条控制点之间的关系。

应用布勃诺夫-伽辽金法和等参概念时，如果多项式基函数 $\boldsymbol{N}^e$ 满足单位分解性质，即满足

$$\sum_{a=1}^{n^e} N^e_a(\xi,\eta) = 1, \quad \forall (\xi,\eta) \in [0,1]^2, \tag{7}$$

如果多项式基函数 $\boldsymbol{N}^e$ 不满足单位分解性质，则可定义以下有理基函数

$$R^e_a(\xi,\eta) = \frac{N^e_a(\xi,\eta)}{\sum_{b=1}^{n^e} N^e_b(\xi,\eta)}, \quad (\xi,\eta) \in [0,1]^2, \quad \forall a \in \{1,2,...,n^e\}. \tag{8}$$

这些有理基函数满足单位分解性质，在应用布勃诺夫-伽辽金法和等参概念时，可用于定义加权空间、试探空间和几何体。

2.3. 基函数

每个顶点均对应一个基函数。为便于定义基函数，我们将单元和基函数分类如下:

- 非规则单元是与 EP 的一环面相关联的单元。过渡单元是与 EP 的二环面相关联的单元。其余单元为规则单元。

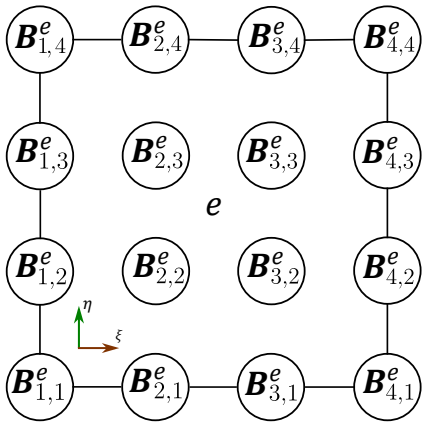


图 2：B´ézier 控制点分为面、边和顶点 Bézier 控制点。$B^e_{2,2}$, $B^e_{3,2}$,$B^e_{2,3}$ 和 $B^e_{3,3}$ 是面 Bézier 控制点。$B^e_{2,1}$, $B^e_{3,1}$, $B^e_{1,2}$, $B^e_{4,2}$, $B^e_{1,3}$, $B^e_{4,3}$, $B^e_{2,4}$ 和 $B^e_{3,4}$ 是边 Bézier 控制点。$B^e_{1,1}$, $B^e_{4,1}$, $B^e_{1,4}$ 和 $B^e_{4,4}$ 是顶点 Bézier 控制点。

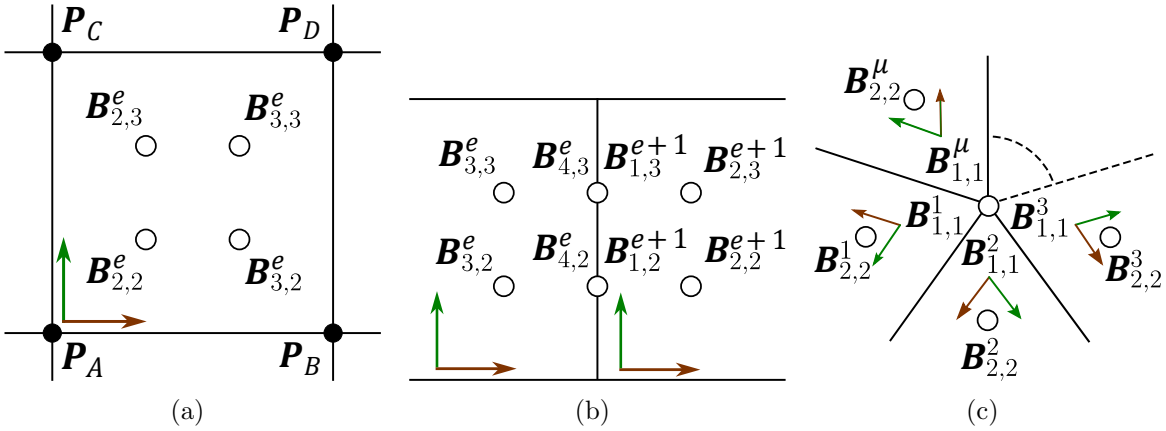


图 3：(a) 面 Bézier 控制点根据公式 (9)-(12) 由样条控制点定义。(b) 不位于边界上的边 Bézier 控制点根据公式 (13)-(14) 由相邻面 Bézier 控制点定义。(c) 不位于边界上的顶点 Bézier 控制点根据公式 (15) 由相邻面 Bézier 控制点定义。

- 非规则基函数是与 EP 的 0 环、1 环和 2 环顶点相关联的基函数。其余基函数为规则基函数。

规则基函数具有全局 C^2 连续性，而非规则基函数具有全局 G^1 连续性。两个非规则单元共享边界处的连续性为 G^1。非规则单元与过渡单元共享边界处的连续性为 C^1。其余单元边界处的连续性为 C^2。下文中，基函数由各单元中定义的提取算子指定。

2.3.1. 初步 C^0 构造

我们首先对所有单元使用双三次多项式。如图 2 所示，16 个 B´zier 控制点分为面、边和顶点 B´zier 控制点。面 B´zier 控制点根据均匀双三次B样条曲面的表达式，用样条控制点定义，即:

$$\boldsymbol{B}^e_{2,2} = \frac{4}{9}\boldsymbol{P}_A + \frac{2}{9}\boldsymbol{P}_B + \frac{2}{9}\boldsymbol{P}_C + \frac{1}{9}\boldsymbol{P}_D, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{B}^e_{3,2} = \frac{2}{9}\boldsymbol{P}_A + \frac{4}{9}\boldsymbol{P}_B + \frac{1}{9}\boldsymbol{P}_C + \frac{2}{9}\boldsymbol{P}_D, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{B}^e_{2,3} = \frac{2}{9}\boldsymbol{P}_A + \frac{1}{9}\boldsymbol{P}_B + \frac{4}{9}\boldsymbol{P}_C + \frac{2}{9}\boldsymbol{P}_D, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{B}^e_{3,3} = \frac{1}{9}\boldsymbol{P}_A + \frac{2}{9}\boldsymbol{P}_B + \frac{2}{9}\boldsymbol{P}_C + \frac{4}{9}\boldsymbol{P}_D. \tag{12}$$

公式 (9)–(12) 中使用的标记如图 3 a) 所示。内部边的 B´zier 控制点根据均匀双三次B样条曲面的表达式，用面 B´zier 控制点定义，即

$$\boldsymbol{B}^e_{4,2} = \boldsymbol{B}^{e+1}_{1,2} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^e_{3,2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^{e+1}_{2,2}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{B}^e_{4,3} = \boldsymbol{B}^{e+1}_{1,3} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^e_{3,3} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^{e+1}_{2,3}. \tag{14}$$

公式 (13)–(14) 中使用的标记如图 3 b) 所示。内部顶点的 B´zier 控制点通过推广均匀双三次B样条曲面的表达式，利用面 B´zier 控制点定义，从而满足单位分解，即

$$\boldsymbol{B}^1_{1,1} = \boldsymbol{B}^2_{1,1} = ... = \boldsymbol{B}^{\mu}_{1,1} = \frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{\mu}\boldsymbol{B}^j_{2,2}, \tag{15}$$

其中， μ 是该顶点的价。公式 (15) 中使用的标记如图 3 c) 所示。边界边的 B´zier 控制点根据均匀三次B样条曲线的表达式，用样条控制点定义，即

$$\boldsymbol{B}^e_{2,1} = \frac{2}{3}\boldsymbol{P}_A + \frac{1}{3}\boldsymbol{P}_B, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{B}^e_{3,1} = \frac{1}{3}\boldsymbol{P}_A + \frac{2}{3}\boldsymbol{P}_B. \tag{17}$$

式 (16)-(17) 中使用的标记如图 4 a) 所示。未置于角点的边界顶点B´ezier控制点，使用均匀三次B样条曲线的表达式，根据边界边B´ezier控制点定义，即:

$$\boldsymbol{B}^e_{4,1} = \boldsymbol{B}^{e+1}_{1,1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^e_{3,1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^{e+1}_{2,1}. \tag{18}$$

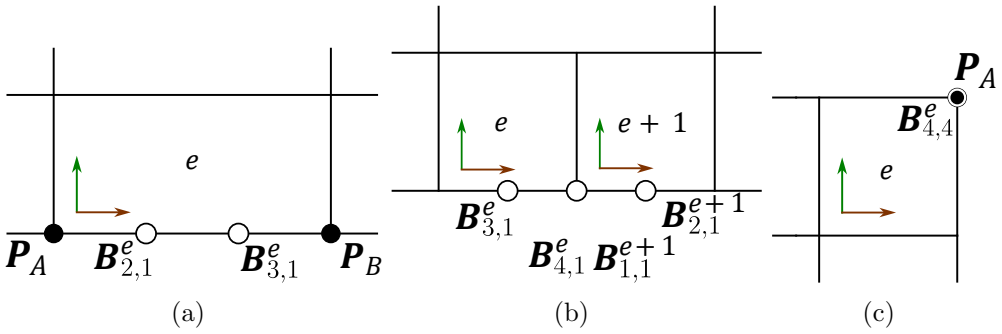


图4: （a）位于边界上的边界 B´ézier 控制点根据式（16）—（17），用相邻的样条控制点定义。（b）位于边界上且不在角点处的顶点 B´ézier 控制点根据式（18），用相邻的边界 B´ézier 控制点定义。（c）位于边界上且处于角点的顶点 B´ézier 控制点等于该角点处的样条控制点。

式 (18) 中使用的标记如图 4 b) 所示。置于角点的边界顶点B´ezier控制点，等于该角点处的样条控制点，即:

$$\boldsymbol{B}^e_{4,4} = \boldsymbol{P}_A. \tag{19}$$

式（19）中使用的标记如图4 c）所示。

上述 B´ézier 控制点与样条控制点之间的关系，给出了每个单元的样条提取算子的初步表达式。利用这些样条提取算子，样条基函数在辐条边上仅具有 C^0连续性，而在其他所有边上具有 C^2连续性。接下来，我们将逐一修改支撑于非规则单元上的基函数，以便在辐条边上实现 G^1 连续性。

2.3.2. G^1约束

施加方程以确保每个基函数在辐条边上满足 G^1 连续性时，非规则单元中基函数的提取系数是将要调整其取值以实现 G^1 连续性的自由度。为了提供满足 G^1 约束所需的额外自由度，每个非规则单元中的每个基函数都升阶两次，使其成为双五次基函数。对 Bézier 曲面应用两次升阶算法后，非规则单元 e 上的给定基函数 N 可表示为

$$N^e(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} \tilde{c}^e_{i,j} b_{i,j}(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in [0,1]^2. \tag{20}$$

给定一个在辐条边上具有 C^0 连续性的基函数 N，如 [23] 所示，如果两个索引分别为 e 和 $e-1$ 的非规则单元在共享边界上具有 G^1 连续性，则 N

$$\frac{\partial N^{e-1}}{\partial \xi}(0,v) + b(v)\frac{\partial N^e}{\partial \xi}(v,0) + \frac{\partial N^e}{\partial \eta}(v,0) = 0, \quad v \in [0,1], \tag{21}$$

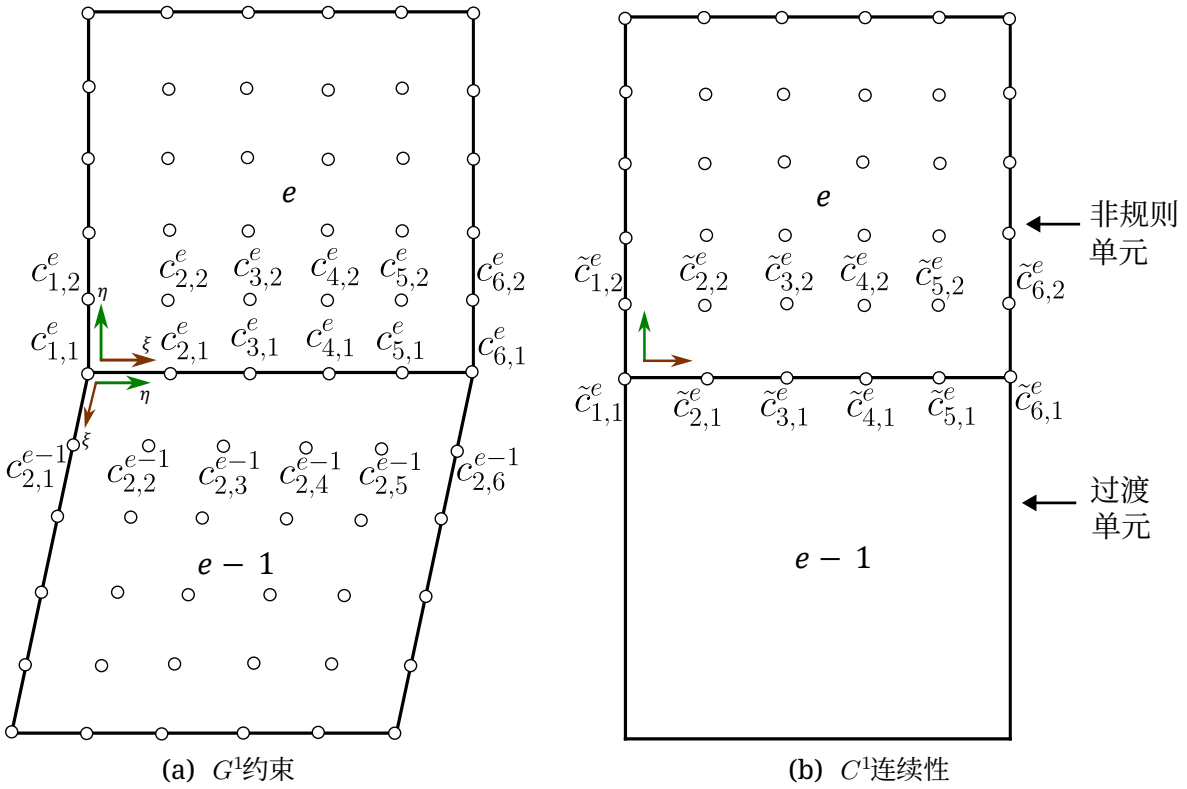


图 5：在辐条边处施加 G^1 约束，并在不规则单元与过渡单元之间的单元边界处保持 C^1 连续性。

其中，用于 N^{e-1} 和 N^e 的参数坐标轴绘制于图 5 a) 中。我们选择 $b(v)$ 为二次多项式，即：

$$b(v) = -2\omega_1(1-v)^2 + 2\omega_2 v^2, \quad v \in [0,1], \tag{22}$$

with

$$\omega_1 = \cos\left(\frac{a_1\pi}{\mu_1}\right), \ \omega_2 = \cos\left(\frac{a_2\pi}{\mu_2}\right), \tag{23}$$

其中，若顶点 1 是内部顶点，则 a_1 等于 2；若顶点 1 是边界顶点，则等于 1；若顶点 2 是内部顶点，则 a_2 等于 2；若顶点 2 是边界顶点，则等于 1； μ_1 和 μ_2 分别是顶点 1 和顶点 2 的价。使用图 5 a) 中指定的单元 e 的局部坐标轴，顶点 1 和顶点 2 的坐标分别为 $(\xi, \eta) = (0, 0)$ 和 $(\xi, \eta) = (1, 0)$。公式 22 得到的辐条边均匀分布在每个 EP 周围。如 [23], 所示，选择 $b(v)$ 为一次多项式，会在顶点 1 是非凡顶点而顶点 2 不是，或反之时，导致奇异参数化。

采用记号 $\langle c_1^e, c_2^e, ..., c_{p+1}^e\rangle^p(v) = \sum_{i=1}^{p+1} c_i^e \mathfrak{B}_i(v)$，其中 $\mathfrak{B}_i(v)$ 是第 i 个单变量

伯恩斯坦多项式 次数为 p 、关于 v 的多项式，式（21）中的各项可写为如下形式 s:

$$\frac{\partial N^{e-1}}{\partial \xi}(0,v) = 5\langle c_{2,1}^{e-1} - c_{1,1}^{e}, c_{2,2}^{e-1} - c_{2,1}^{e}, c_{2,3}^{e-1} - c_{3,1}^{e}, c_{2,4}^{e-1} - c_{4,1}^{e}, c_{2,5}^{e-1} - c_{5,1}^{e}, c_{2,6}^{e-1} - c_{6,1}^{e}\rangle^5(v), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} b(v)\frac{\partial N^{e}}{\partial \xi}(v,0) = \langle -2\omega_1, 0, 2\omega_2\rangle^2(v)\langle 5(c_{2,1}^{e} - c_{1,1}^{e}), 5/3(4c_{3,1}^{e} - 5c_{2,1}^{e} + c_{1,1}^{e}), \\ 5/3(5c_{5,1}^{e} - 4c_{4,1}^{e} - c_{6,1}^{e}), 5(c_{6,1}^{e} - c_{5,1}^{e})\rangle^3(v) \\ = \langle -10\omega_1(c_{2,1}^{e} - c_{1,1}^{e}), -\omega_1(8c_{3,1}^{e} - 10c_{2,1}^{e} + 2c_{1,1}^{e}), \\ -\omega_1(5c_{5,1}^{e} - 4c_{4,1}^{e} - c_{6,1}^{e}) + \omega_2(c_{2,1}^{e} - c_{1,1}^{e}), \\ -\omega_1(c_{6,1}^{e} - c_{5,1}^{e}) + \omega_2(4c_{3,1}^{e} - 5c_{2,1}^{e} + c_{1,1}^{e}), \\ \omega_2(10c_{5,1}^{e} - 8c_{4,1}^{e} - 2c_{6,1}^{e}), 10\omega_2(c_{6,1}^{e} - c_{5,1}^{e})\rangle^5(v), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{\partial N^{e}}{\partial \eta}(v,0) = 5\langle c_{1,2}^{e} - c_{1,1}^{e}, c_{2,2}^{e} - c_{2,1}^{e}, c_{3,2}^{e} - c_{3,1}^{e}, c_{4,2}^{e} - c_{4,1}^{e}, c_{5,2}^{e} - c_{5,1}^{e}, c_{6,2}^{e} - c_{6,1}^{e}\rangle^5(v). \quad (26)$$

公式 (21) 的左端是关于 v 的五次多项式，仅当满足以下六个方程时才为零

$$5(c_{2,1}^{e-1} - c_{1,1}^{e}) - 10\omega_1(c_{2,1}^{e} - c_{1,1}^{e}) + 5(c_{1,2}^{e} - c_{1,1}^{e}) = 0, \quad (27)$$

$$5(c_{2,2}^{e-1} - c_{2,1}^{e}) - \omega_1(8c_{3,1}^{e} - 10c_{2,1}^{e} + 2c_{1,1}^{e}) + 5(c_{2,2}^{e} - c_{2,1}^{e}) = 0, \quad (28)$$

$$5(c_{2,3}^{e-1} - c_{3,1}^{e}) - \omega_1(5c_{5,1}^{e} - 4c_{4,1}^{e} - c_{6,1}^{e}) + \omega_2(c_{2,1}^{e} - c_{1,1}^{e}) + 5(c_{3,2}^{e} - c_{3,1}^{e}) = 0, \quad (29)$$

$$5(c_{2,4}^{e-1} - c_{4,1}^{e}) - \omega_1(c_{6,1}^{e} - c_{5,1}^{e}) + \omega_2(4c_{3,1}^{e} - 5c_{2,1}^{e} + c_{1,1}^{e}) + 5(c_{4,2}^{e} - c_{4,1}^{e}) = 0, \quad (30)$$

$$5(c_{2,5}^{e-1} - c_{5,1}^{e}) + \omega_2(10c_{5,1}^{e} - 8c_{4,1}^{e} - 2c_{6,1}^{e}) + 5(c_{5,2}^{e} - c_{5,1}^{e}) = 0, \quad (31)$$

$$5(c_{2,6}^{e-1} - c_{6,1}^{e}) + 10\omega_2(c_{6,1}^{e} - c_{5,1}^{e}) + 5(c_{6,2}^{e} - c_{6,1}^{e}) = 0. \quad (32)$$

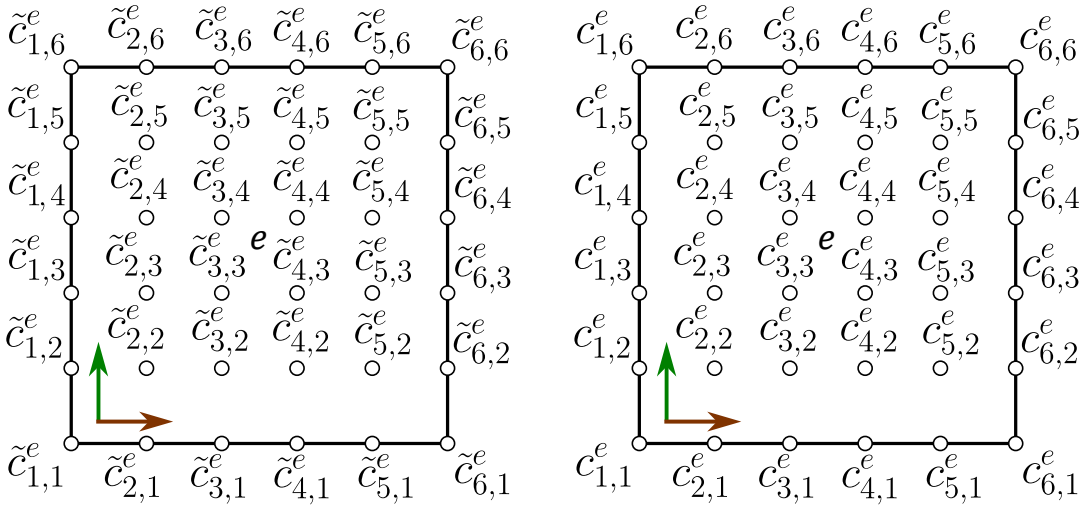
公式 (25) 假设共享边界曲线是四次多项式。通过强制共享边界曲线的五阶导数为零来施加这一条件，即:

$$-c_{1,1}^{e} + 5c_{2,1}^{e} - 10c_{3,1}^{e} + 10c_{4,1}^{e} - 5c_{5,1}^{e} + c_{6,1}^{e} = 0. \quad (33)$$

对于给定的基函数，将公式 (27)–(33) 应用于该基函数（如第 2.3.1 节所定义）具有支撑的非凡顶点的所有辐条边。如果这些辐条边延伸至新的非凡顶点，则同样将公式 (27)–(33) 应用于该非凡顶点的所有辐条边。递归地重复此操作。因此，在施加 G^1 连续性后，基函数的支撑可能会增大。

应用式 (27)-(33) 可能会导致非规则单元与过渡单元之间的单元边界处连续性丢失。为保持非规则单元与过渡单元之间的 C^1 连续性，位于非规则单元与过渡单元之间的单元边界处及距这些边界向内一层的非规则单元，其提取系数保持不变，即:

$$c_{1,1}^{e} = \tilde{c}_{1,1}^{e}, \quad c_{2,1}^{e} = \tilde{c}_{2,1}^{e}, \quad c_{3,1}^{e} = \tilde{c}_{3,1}^{e}, \quad c_{4,1}^{e} = \tilde{c}_{4,1}^{e}, \quad c_{5,1}^{e} = \tilde{c}_{5,1}^{e}, \quad c_{6,1}^{e} = \tilde{c}_{6,1}^{e}. \quad (34)$$



(a) 应用 G^1 约束前　　(b) 应用 G^1 约束后

图 6：光顺方程。

$$c^e_{1,2} = \tilde{c}^e_{1,2}, \quad c^e_{2,2} = \tilde{c}^e_{2,2}, \quad c^e_{3,2} = \tilde{c}^e_{3,2}, \quad c^e_{4,2} = \tilde{c}^e_{4,2}, \quad c^e_{5,2} = \tilde{c}^e_{5,2}, \quad c^e_{6,2} = \tilde{c}^e_{6,2}. \tag{35}$$

式 (34)-(35) 中使用的标记如图 5 b) 所示。

对于每个基函数，所有在辐条边处施加 G^1 连续性约束的方程（式（27）–（33）），以及所有在非规则单元与过渡单元之间的单元边界上施加 C^1 连续性约束的方程（式（34）–（35）），共同构成一个系数矩阵为 $\boldsymbol{G}$ 、右端向量为 $\boldsymbol{g}$的线性代数方程组。该线性代数方程组的未知数多于方程数，且部分方程线性相关。为了获得高质量曲面，需要使用光顺方程。由于在施加 G^1 约束之前，非规则单元内部的曲面质量已经较高，因此一种简单而高效的做法是选择光顺方程，使施加 G^1 约束前后提取系数的垂直和水平差异最小，即:

$$c^e_{i,j} - c^e_{i+1,j} = \tilde{c}^e_{i,j} - \tilde{c}^e_{i+1,j}, \quad 1 \le i \le 5, \quad 1 \le j \le 6, \tag{36}$$

$$c^e_{i,j} - c^e_{i,j+1} = \tilde{c}^e_{i,j} - \tilde{c}^e_{i,j+1}, \quad 1 \le i \le 6, \quad 1 \le j \le 5. \tag{37}$$

式（36）–（37）中使用的标记如图 6 所示。对于每个基函数，每个非规则单元的所有光顺方程共同构成一个系数矩阵为 $\boldsymbol{F}$ 、右端向量为 $\boldsymbol{f}$的线性代数方程组。

对于每个基函数，都需要求解一个约束最小二乘问题，以获得其提取系数，即:

$$\min_{\boldsymbol{c}} ||\boldsymbol{F}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{f}||_2 \quad \text{subject to} \quad \boldsymbol{G}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{g}. \tag{38}$$

从此以后，上述 EP 构造称为构造 G^1P。构造 G^1P 的多项式基函数满足单位分解。这一点

可分三步证明。首先，第 2.3.1 节中定义的基函数初步表达式满足单位分解，因为式 (9)–(19) 右端的系数之和为一。其次，升阶算法保持单位分解。第三，约束最小二乘问题也保持单位分解。由于对于给定的边，我们总是对所有基函数应用式 (27)–(33) 或式 (34)–(35)，因此，只需证明若所有 $\tilde{c}^e_{i,\ j}$ 均为一，则所有 $c^e_{i,\ j}$ 也均为一，即可证明第三步。若所有 $\tilde{c}^e_{i,\ j}$ 和所有$c^e_{i,\ j}$ 均为一，则式 (27)–(37) 均成立，因此上述条件确实成立。由于样条提取算子的每一列之和为一时，单位分解便成立，我们还通过数值验证了，使用该 EP 构造生成的所有网格均满足这一性质。

可以在不增加任何基函数支撑的情况下，强制每个基函数在辐条边处满足 G^1 连续性。具体做法是，仅对位于基函数支撑内部的辐条边（如第 2.3.1 节所定义）应用式（27）–（33），然后将式（34）–（35）不仅应用于非规则单元与过渡单元之间的单元边界，也应用于位于基函数支撑边界处的辐条边（如第 2.3.1 节所定义）。所有这些方程构成一个线性代数方程组，其系数矩阵为 $\boldsymbol{G}$，右端向量为 $\boldsymbol{g}$。光顺方程保持不变，并且需要像式（38）中那样求解一个约束最小二乘问题。下文将这种 EP 构造称为构造 G^1R。构造 G^1R的多项式基函数在非规则单元中并不严格满足单位分解。这是因为，对于给定的辐条边，式（27）–（33）应用于某些基函数，而式（34）–（35）则应用于其他基函数。为恢复单位分解，在此构造中按照式（8）将基函数有理化。

对采用构造 G^1P 和 G^1R 得到的基函数的线性无关性进行数学证明，超出了本研究的范围。不过，我们已通过求解边值问题和特征值问题，对这两种构造进行了广泛测试。所有数值结果均表明，这两种构造都满足线性无关性。

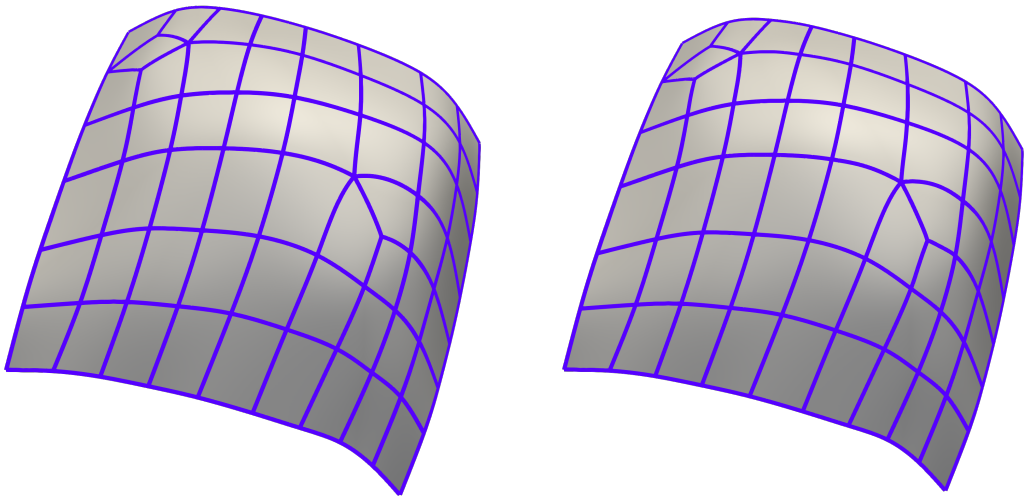
2.4. 几何映射

采用构造 G^1P，通过以下映射得到 G样条曲面

$$\boldsymbol{x}^e\left(\xi,\eta\right)=\sum_{a=1}^{n^e}\boldsymbol{P}_a^e N_a^e\left(\xi,\eta\right),\quad \forall e\in\{1,2,...,n_{el}\},\quad (\xi,\eta)\in[0,1]^2, \tag{39}$$

使用构造 G^1R 时，通过应用以下映射得到 G样条曲面

$$\boldsymbol{x}^e\left(\xi,\eta\right)=\sum_{a=1}^{n^e}\boldsymbol{P}_a^e R_a^e\left(\xi,\eta\right),\quad \forall e\in\{1,2,...,n_{el}\},\quad (\xi,\eta)\in[0,1]^2, \tag{40}$$



(a) 构造 G^1P　　(b) 构造 G^1R

图 7: （在线彩色）G样条曲面和 B´ezier 网格。

其中， $R_a^e = N_a^e$ 表示过渡单元和规则元素中的情形。通过在 G样条曲面上绘制单元边界，可得到 B´ézier 网格。图 7 a) 和 b) 分别绘出了采用构造 G^1P 和 G^1R、与图 1 (b) 所示控制网相对应的 B´ézier 网格。采用构造 G^1P 和 G^1R 得到的 G样条曲面和 B´ézier 网格在绘图比例下无法区分。因此，为简洁起见，本文余下部分仅绘制采用构造 G^1P 得到的 G样条曲面和 B´ézier 网格。

为了使用 G样条求解偏微分方程（PDEs），采用 Bubnov-Galerkin 方法和等参概念，即几何体、加权空间和试探空间使用相同的基函数。

2.5. 细化

簿记意味着需要追踪已执行的细化层级数量，因为用于执行下一个细化层级的算法取决于此前已执行的细化层级数量。簿记是构建 EP 构造细化算法的一种途径，其结果可以是嵌套空间 [53]，也可以是在细化过程中保持常参数化 [54, 55]。反过来，已知嵌套性或在细化过程中保持常参数化，都是实现最优渐近收敛率的途径。对简单几何体进行收敛性研究时，簿记不会造成任何缺点，因为该几何体可以用非常粗的网格精确表示，之后还可以执行多个细化层级。然而，在涉及薄壁结构的实际工程应用中，工程师通常希望保留所有尺寸大于其选定仿真单元尺寸的小特征（例如孔洞；在汽车工业中，该尺寸通常为 5 mm）。在这种情况下，无法采用簿记

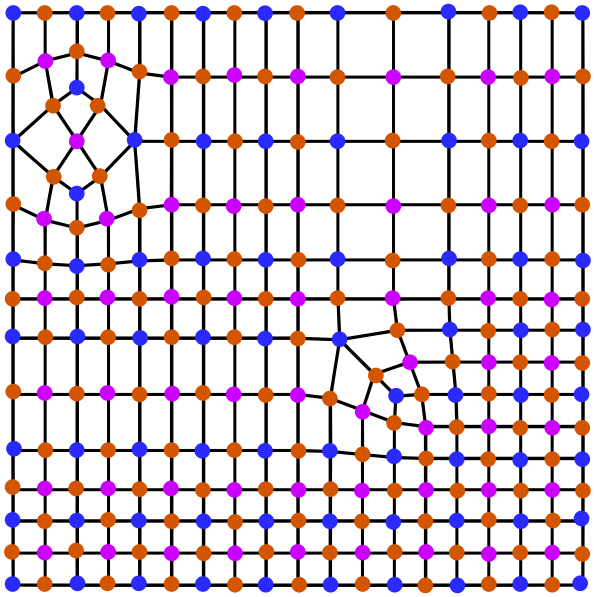


图 8: （在线彩色）对图 1 a) 所示的 C 网进行一层全局均匀细化后得到的 C 网。与新面控制点、新边控制点和新顶点控制点相关联的顶点，分别以紫色、棕色和蓝色圆圈标出。

因为无法用粗网格表示该几何体，再在之后对其进行多次细化。因此，我们决定不采用依赖簿记来细化 G样条的策略，而是选择一种不需要簿记、仅涉及基于顶点的基函数的简单细化策略。下文将对此策略进行说明。

在全局均匀细化的每一层中，C 网的每个面都会被分成四个面。图 8 展示了对图 1 a) 所示的 C 网进行一层全局均匀细化后得到的 C 网。细化过程中，奇异顶点的总数保持不变。由于不使用簿记，因此细化后 C 网顶点相关联的基函数按第 2.3 节所述的方法获得，也就是说，计算基函数的步骤与 C 网是否经过细化无关。细化后 C 网顶点相关联的控制点坐标，使用扩展Catmull-Clark细分的细化规则 [37, 68] 获得。为定义这些细化规则，新控制点被分为三组，即新面控制点、新边控制点和新顶点控制点。在图 8 中，与新面控制点、新边控制点和新顶点控制点相关联的顶点，分别以紫色、棕色和蓝色圆圈标出。细化规则如下

- 新面控制点。旧面上新增的控制点是定义该面的四个旧控制点的平均值。每个旧控制点的权重如图 9 a) 所示。

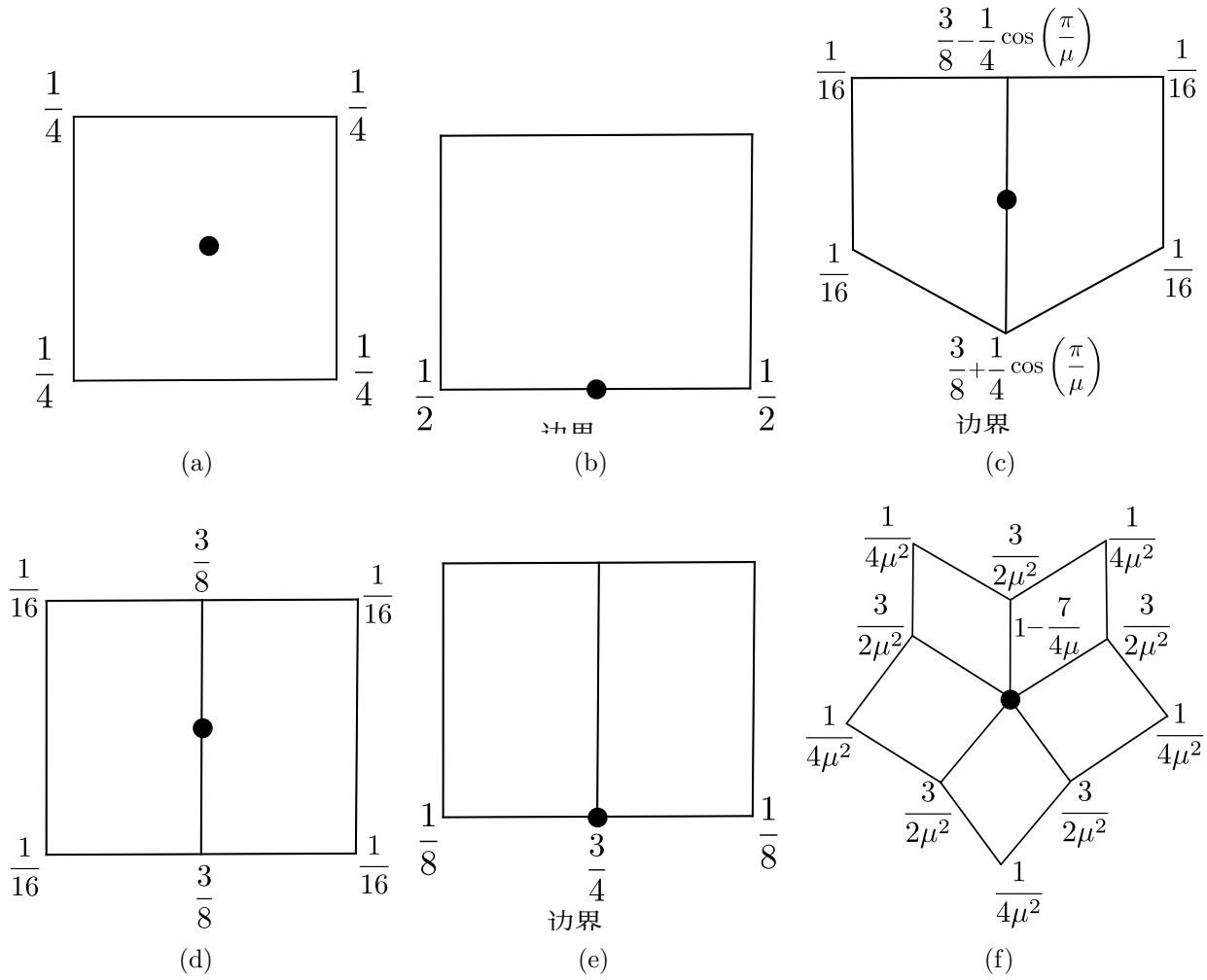
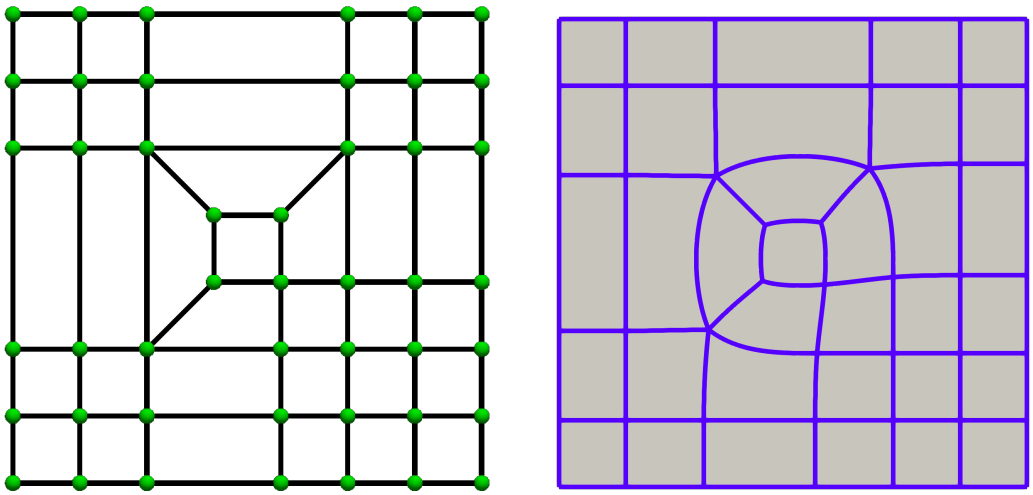


图9：细化规则。（a）新面控制点。（b）边界边上的新边控制点。（c）从边界顶点延伸出的、且不是边界边的边上的新边控制点。（d）不含边界顶点的边上的新边控制点。（e）边界顶点处的新顶点控制点。（f）内部顶点处的新顶点控制点。

- 新边控制点。分为三种情况

  – 边界边。旧边界边上新添加的控制点，是定义该边的两个旧控制点的平均值。每个旧控制点的权重如图9 b）所示。

  – 从边界顶点延伸出来且不是边界边的边。定义共享该旧边的两个旧面所需的六个旧控制点，会参与新添加控制点的计算。旧边界控制点的权重为 $3/8+(1/4)\cos(\pi/\mu)$，其中 μ是旧边界控制点的价。旧边另一端的旧控制点的权重为 $3/8-(1/4)\cos(\pi/\mu)$。其他四个旧控制



(a) 控制网　　(b) G样条曲面和 B´ézier 网格

图 10: （在线彩色）收敛性研究中使用的单位正方形。

点的权重为 1/16。每个旧控制点的权重如图 9 c 所示).

– 其余的边。定义共享旧边的两个旧面的六个旧控制点会参与新增控制点的计算。定义旧边的两个旧控制点的权重为 3/8。其余四个旧控制点的权重为 1/16。每个旧控制点的权重如图 9 d) 所示。

- 新顶点控制点。分为两种情况

  – 边界顶点。旧顶点上的控制点的新位置由其自身先前位置（权重为 3/4）与两个相邻旧边界控制点（权重为 1/8）相加得到。每个旧控制点的权重如图 9 e) 所示。– 内部顶点。定义共享该旧顶点的旧面的 $2\mu + 1$ 旧控制点会参与控制点新位置的计算。每个旧控制点的权重如图 9 f) 所示。

3. 收敛性研究

本节研究 G样条在一致全局细化下的收敛性。我们在具有齐次狄利克雷边界条件的单位正方形（$\Omega = [0,1]^2$）上求解泊松方程，即,

$$\Delta u = -2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{41}$$

$$u = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega. \tag{42}$$

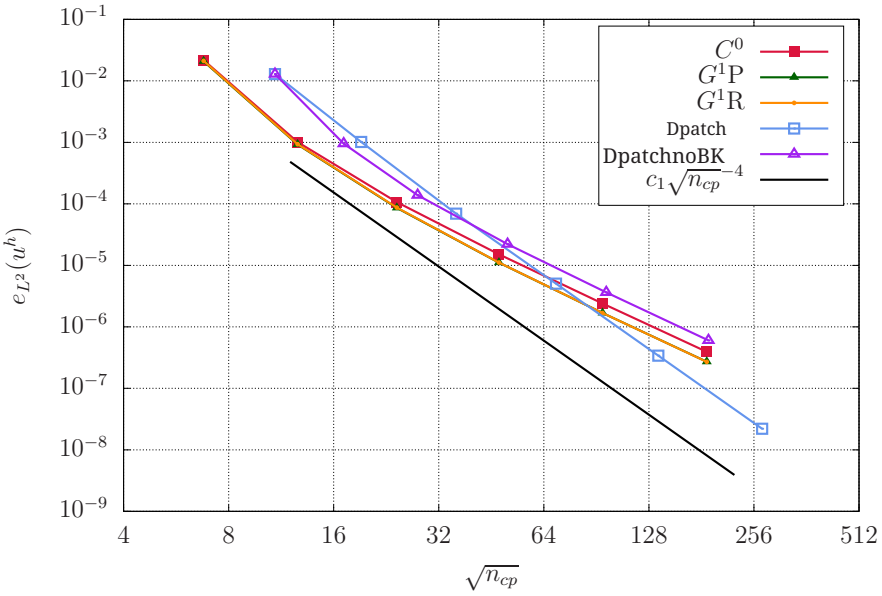


图11：（在线彩色）二阶线性椭圆边值问题的收敛性研究。不同 EP 构造在 L^2 范数下的收敛性。

上述边值问题的精确解为

$$u = \sin(\pi x)\sin(\pi y). \tag{43}$$

我们研究数值解在 L^2 范数、 L^∞ 范数和 H^1 范数下的收敛性。为此，我们定义数值解在 L^2 范数、 L^∞ 范数和 H^1 范数下的相对误差

$$e_{L^2}(u^h) = \frac{\sqrt{\int_\Omega (u^h - u)^2 \,\mathrm{d}\Omega}}{\sqrt{\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}\Omega}}, \tag{44}$$

$$e_{L^\infty}(u^h) = \frac{\max|u^h - u|}{\max|u|}, \tag{45}$$

$$e_{H^1}(u^h) = \frac{\sqrt{\int_\Omega (u^h - u)^2 \,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega (\frac{\partial u^h}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x})^2 \,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega (\frac{\partial u^h}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y})^2 \,\mathrm{d}\Omega}}{\sqrt{\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x})^2 \,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial y})^2 \,\mathrm{d}\Omega}}, \tag{46}$$

分别如下。本节使用的五种 EP 构造如下

- C^0：这是第 2.3.1 节中说明的 EP 构造。
- G^1P：这是第2.3.2节中解释的 EP 构造，其基函数为多项式函数。

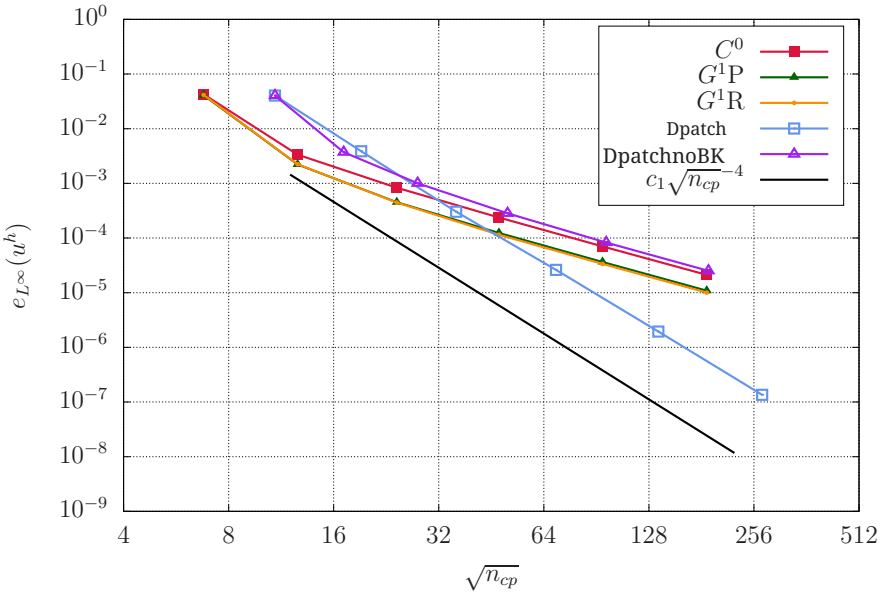


图12：（在线彩色）二阶线性椭圆边值问题的收敛性研究。不同 EP 构造在 L^∞ 范数下的收敛性。

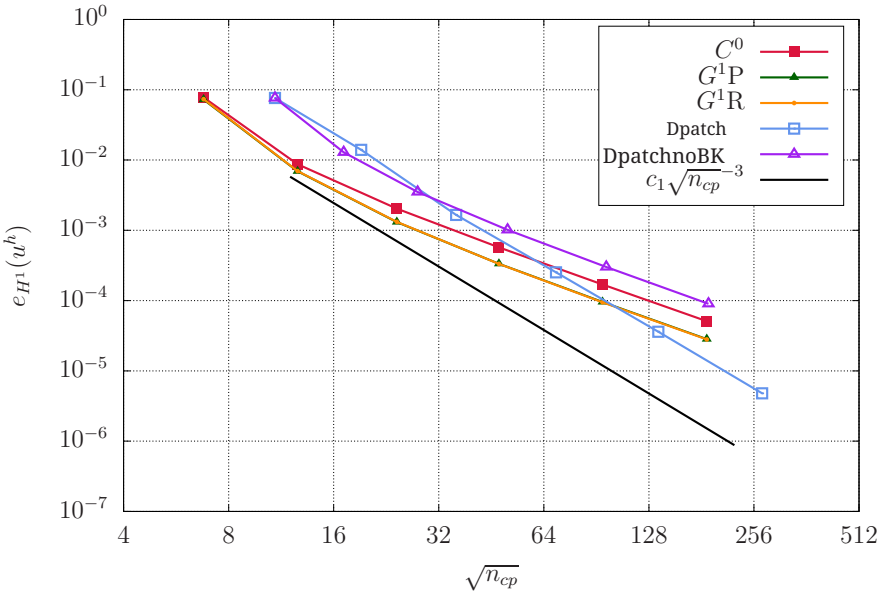


图13：（在线彩色）二阶线性椭圆边值问题的收敛性研究。不同 EP 构造在 H^1 范数下的收敛性。

- $G^1\mathrm{R}$：这是第2.3.2节中解释的 EP 构造，其基函数为有理函数。
- Dpatch：这是基于 D-patch框架 [50] 所解释的 EP 构造

其中 [55] 涉及簿记。

- DpatchnoBK：这是基于 D-patch框架 [50] 中所阐述的 EP 构造 [55]，不使用簿记，也就是说，在所有细化层级中始终保持一圈不规则单元。

由于 Dpatch 和 DpatchnoBK 构造无法处理边界奇异点，因此我们采用包含内部 EP、但不包含边界奇异点的控制网。构造 G^1P 所用的控制网和 B´ezier 网格如图 10 所示。构建完第 0 层后，我们进行五层全局均匀细化，以比较本节讨论的五种 EP 构造的精度。

采用五种 EP 构造时，L^2、L^∞ 和 H^1 范数下数值解的收敛性分别绘于图 11、12 和 13。如图 11、12 和 13 所示，构造 G^1P 和 G^1R 的精度在图示尺度下无法区分。对于所有网格分辨率，构造 G^1P 和 G^1R 的精度均优于构造 C^0 和 DpatchnoBK。对于粗网格和中等分辨率的网格，构造 G^1P 和 G^1R 的精度优于 Dpatch 构造。然而，对于细网格，Dpatch 构造的精度优于构造 G^1P 和 G^1R，因为 Dpatch 构造具有最优渐近收敛性。如第 2.5 节所述，在实际工程应用中，能够选择进行若干层带簿记的细化并不常见。此外，当 Dpatch 构造的精度超过构造 G^1P 和 G^1R 时，误差已经可以忽略；具体而言，L^2、L^∞ 和 H^1范数下的误差已分别小于 0.0003%、0.02% 和 0.01%。因此，这些结果表明，构造 G^1P 和 G^1R 更适用于实际工业应用。未来值得研究的方向是开发一种 EP 构造，使其在粗网格上的精度至少与构造 G^1P 和 G^1R 相当，同时还具有最优渐近收敛率。

4. 曲面质量

强制切平面连续的 EP 构造往往会产生曲面质量有限的曲面。EP 构造中使用的光顺方程旨在维持 EP 附近良好的曲面质量。为了避免在 CAD 软件中生成不美观的曲面，通常通过绘制高光线分布 [69] 或平均曲率和高斯曲率 [41, 70, 31]来评估 EP 构造的曲面质量。

具有材料非线性的壳体公式需要沿厚度方向进行数值积分。在有限元分析中使用带有 EP 的样条时，EP 附近有限的曲面质量可能导致厚度方向数值积分过程中，中面以外的求积点处出现无效面积单元。如果发现求积点处存在无效面积单元，则无法进行有限元分析仿真。因此，在有限元分析中，可以通过求得导致求积点处出现无效面积单元的最小厚度值来评估 EP 构造的曲面质量

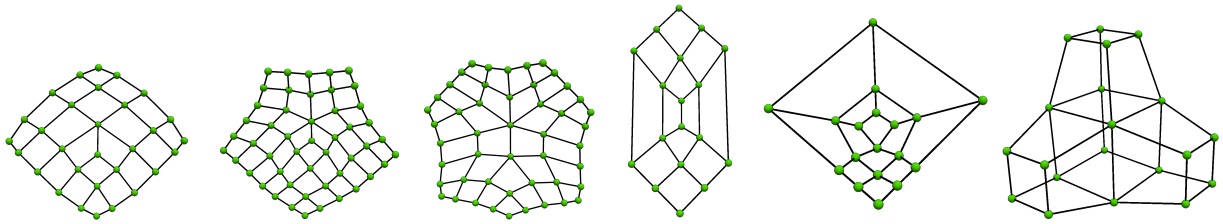


图14：用于研究曲面质量的控制网。(a) 同一面上价为3和5的EP。(b) 同一面上价为3和6的EP。(c) 同一面上价为5和6的EP。(d) 同一面上两个价为3的EP。(e) 同一面上三个价为3的EP。(f) 控制网的某些面上有四个价为3的EP，其他面上则组合了价为3、5和6的EP。

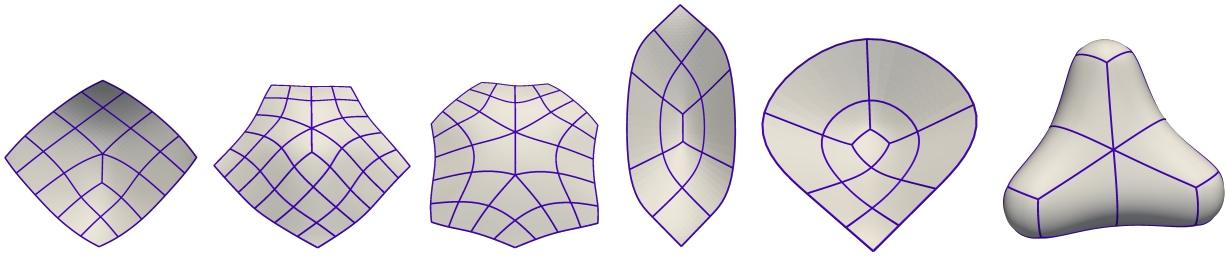


图15：与图14所示控制网对应的G样条曲面和B´ezier网格。(a) 同一面上有价为3和5的EP的曲面。(b) 同一面上有价为3和6的EP的曲面。(c) 同一面上有价为5和6的EP的曲面。(d) 同一面上有两个价为3的EP的曲面。(e) 同一面上有三个价为3的EP的曲面。(f) 某些面上有四个价为3的EP、其他面上组合有价为3、5和6的EP的曲面。

。本节中的所有长度均以毫米为单位。

本节比较 EP 构造 C^0、 G^1P、G^1R 和 D-patch 的曲面质量。为了计算求积点处的面积元，我们首先计算中面的非单位切向量，即：

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{x}^e}{\partial \xi}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{x}^e}{\partial \eta}. \tag{47}$$

我们按如下方式计算中面的单位法向量

$$\boldsymbol{a}_3 = \frac{\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2}{||\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2||}, \tag{48}$$

我们计算中面的协变度量系数以及中面的协变曲率

表1：对于每种几何体和每种 EP 构造，导致无效面积单元的最小厚度值。

	C^0	Dpatch	$G^1\mathrm{P}$	$G^1\mathrm{R}$
Val35	1.98	0.30	2.09	2.18
Val36	3.41	0.36	3.70	3.83
Val56	2.70	0.76	2.62	2.62
Val33	0.72	0.16	0.73	0.76
Val333	0.88	0.11	0.91	0.93
Val3456	0.34	0.06	0.29	0.29
B柱内侧部分	5.10	1.10	5.20	5.20
B柱外侧部分	2.40	0.40	2.60	2.60
B柱加强件	3.60	0.80	3.50	3.50

系数，计算公式如下：

$$a_{\alpha\beta} = \boldsymbol{a}_\alpha \cdot \boldsymbol{a}_\beta, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\}, \tag{49}$$

$$b_{\alpha 1} = \frac{\partial \boldsymbol{a}_\alpha}{\partial \xi} \cdot \boldsymbol{a}_3, \quad b_{\alpha 2} = \frac{\partial \boldsymbol{a}_\alpha}{\partial \eta} \cdot \boldsymbol{a}_3, \quad \alpha \in \{1, 2\}, \tag{50}$$

分别地。壳体中偏离中面的任意点都可以用以下位置向量来描述

$$\boldsymbol{r}^e = \boldsymbol{x}^e + \zeta \boldsymbol{a}_3, \tag{51}$$

其中， $\zeta \in [-t/2, t/2]$ 是厚度坐标， t 是厚度值。现在可以计算壳体的协变基向量和度量系数，分别为

$$\boldsymbol{g}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}^e}{\partial \xi}, \quad \boldsymbol{g}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{r}^e}{\partial \eta}, \tag{52}$$

$$g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{g}_\alpha \cdot \boldsymbol{g}_\beta = a_{\alpha\beta} - 2\zeta b_{\alpha\beta} + \zeta^2 \boldsymbol{a}_{3,\alpha} \cdot \boldsymbol{a}_{3,\beta}, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\}, \tag{53}$$

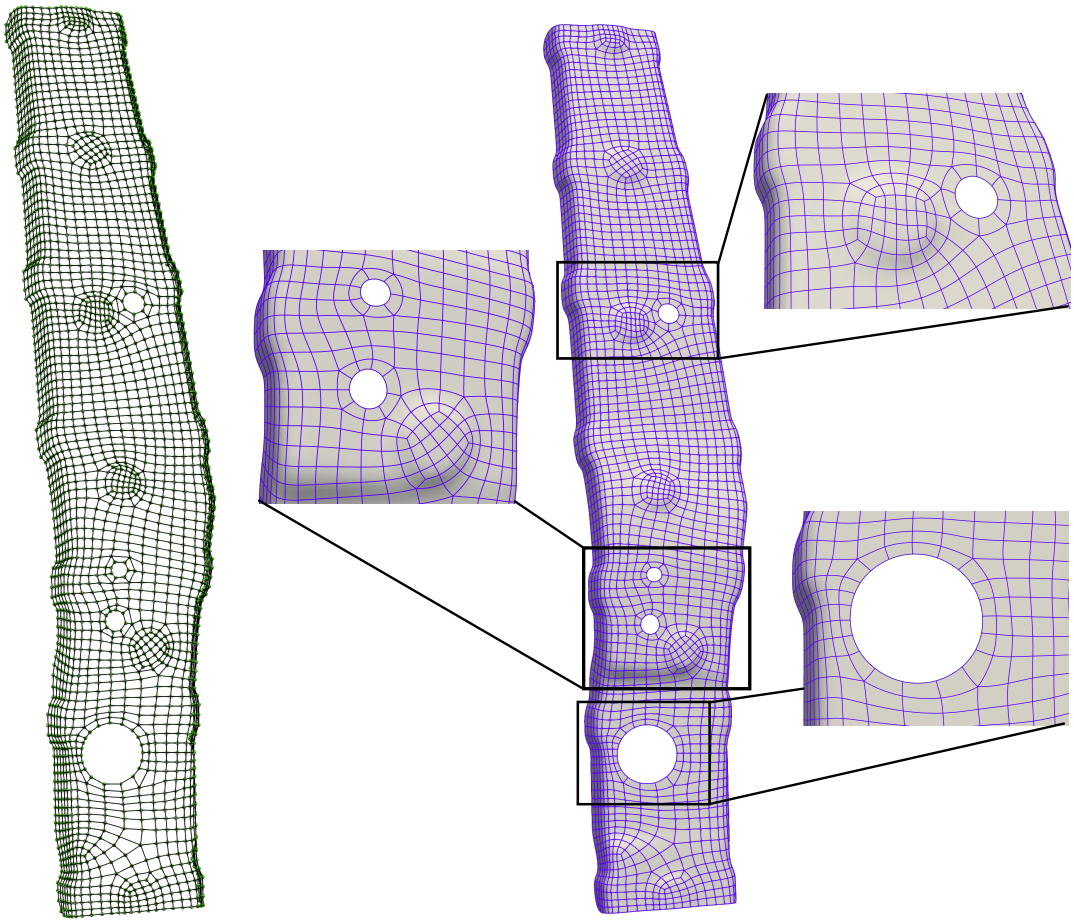
分别为。如 [71, 72], 中所述，忽略二次项，以获得沿厚度方向的线性应变分布。因此，

$$g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{g}_\alpha \cdot \boldsymbol{g}_\beta = a_{\alpha\beta} - 2\zeta b_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\}. \tag{54}$$

壳体中任意点处的面积元可表示为

$$g = \sqrt{|g_{\alpha\beta}|} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}. \tag{55}$$

如果任一求积点处的 $|g_{\alpha\beta}|$ 为负，则该面积单元无效，无法进行有限元分析仿真。在两个曲面方向上，我们



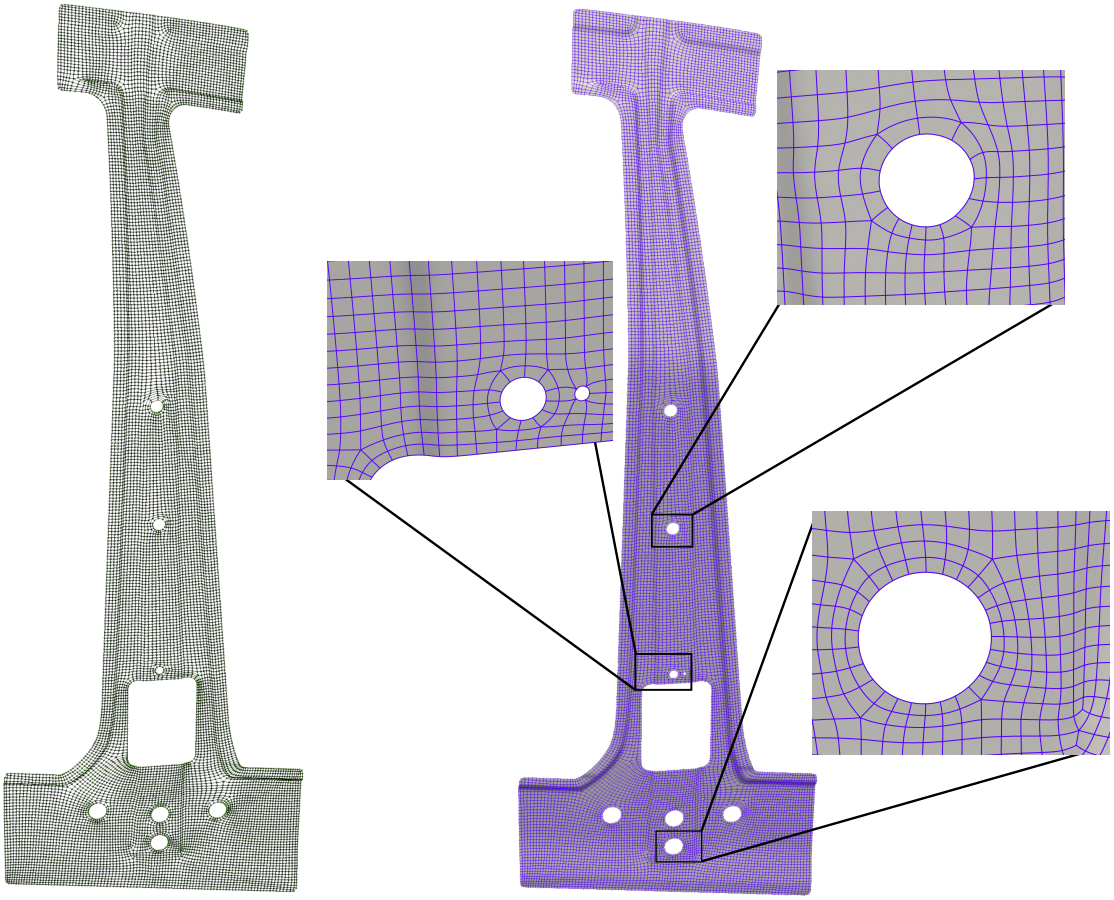
(a) (b)

图16：汽车B柱的加强筋。(a) 含有 2,785 个控制点的控制网。(b) G样条曲面和 B´zier 网格。该 B´zier 网格包含 2,633 个单元，平均单元尺寸为 5 mm。

采用每个方向包含 $p+1$ 个求积点的高斯-勒让德求积公式。在厚度方向上，我们采用包含 5 个求积点的高斯-洛巴托求积公式。对于给定的厚度，高斯-洛巴托求积公式最有可能出现包含无效面积单元的求积点，因为这类求积公式会在壳体的顶面和底面上设置求积点。

已知构造 C^0 能够在单元内部获得良好的曲面质量。构造 G^1P、 G^1R 和 D-patch 都需要在构造 C^0所需步骤的基础上增加额外步骤。因此，我们预计，这些旨在提高单元边界处曲面连续性的额外步骤，也能保持单元内部良好的曲面质量。

使用带有奇异点的样条表示拓扑亏格任意的流形曲面时，除价为 3、5 和 6 的内部EP以及价为 3 的边界奇异点外，其他类型的EP极少出现。因此，我们将在本次

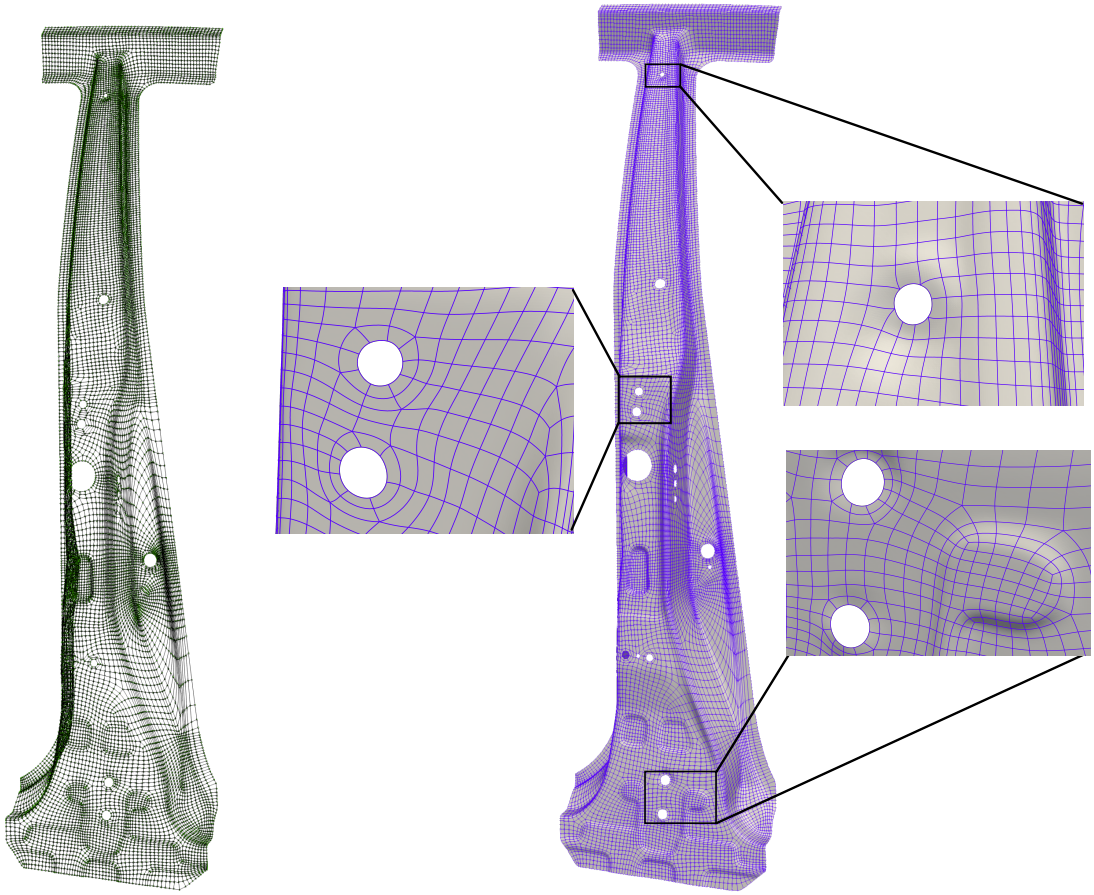


(a) (b)

图17：汽车B柱的内侧部件。(a) 包含 13,575 个控制点的控制网。(b) G样条曲面和 B´ezier 网格。该 B´ezier 网格包含 13,037 个单元，平均单元尺寸为 5 mm。

曲面质量研究中重点关注这些类型的EP。我们构造了六个控制网，其中每个面包含多个内部EP，且价的组合各不相同，如图14和图15所示。表1显示，构造 G^1P和 G^1R在单元内部保留了构造 C^0 的良好曲面质量，因为对于所考虑的六个控制网，这三种EP构造的无效面积单元最小厚度相近。然而，如表1所示，使用Dpatch构造时，无效面积单元的最小厚度比其他三种EP构造小数倍。这表明D-patch框架的曲面质量较差。

现在我们考虑B柱的加强筋、B柱的内侧部件和B柱的外侧部件。在 [55], 中，我们使用Autodesk Fusion360的T样条工具从头设计了B柱的外侧部件和侧外板。随后，我们导出它们的控制网，并将其作为输入用于我们的内部代码。我们也可以再次使用Autodesk Fusion360的T样条工具，或使用Rhinoceros 3D的细分曲面工具，采用相同类型的工作流程来获得控制网。这种工作流程最接近于使用当前商业软件工具所支持的、针对薄壁结构设计与分析的



(a) (b)

图18：汽车B柱的外侧部件。(a) 包含16,108个控制点的控制网。(b) G样条曲面和B´ezier网格。该B´ezier网格包含15,685个单元，平均单元尺寸为5 mm。

相同几何表示。不过，在此我们决定采用不同的方法，以说明一种替代工作流程：当已经存在使用裁剪NURBS表示薄壁结构的标准CAD文件时，即可使用该流程。加强筋、内侧部件和外侧部件均在商业CAD软件CATIA中使用裁剪NURBS创建。加强筋、内侧部件和外侧部件分别包含349、311和845个裁剪NURBS曲面片。随后，我们使用计算机动画软件3ds Max的重拓扑工具（即Retopology修改器的Reform选项），为这三个部件分别获得控制网。在计算机动画行业中，这些重拓扑工具用于将裁剪NURBS CAD文件或非常精细的三角形网格转换为细分曲面；但在我们的案例中，我们只关心获得控制网，并将其从Autodesk 3ds Max导出为.obj文件。这些控制网与使用这些控制网作为输入、通过我们的内部代码获得的G样条曲面和B´zier网格一起显示在图16、17和18中，该代码

表2：采用一致质量矩阵时，使用G样条和双线性四边形得到的加强筋特征值。

Mode	IGA K-L	IGA R-M	FEM
7	6.831958×10^{-1}	6.802610×10^{-1}	6.729194×10^{-1}
8	1.643057×10^{0}	1.625134×10^{0}	1.669634×10^{0}
9	3.837714×10^{0}	3.808307×10^{0}	3.806768×10^{0}
10	1.008562×10^{1}	9.985609×10^{0}	1.023542×10^{1}
11	1.655282×10^{1}	1.638740×10^{1}	1.652496×10^{1}
12	2.737640×10^{1}	2.715919×10^{1}	2.780284×10^{1}

为任意给定的控制网构造G样条曲面。加强筋、内侧部件和外侧部件分别有4、9和15个孔洞。在这三个部件中，平均单元尺寸均为5 mm，这是汽车工业碰撞仿真中最常用的单元尺寸。加强筋的G样条表示包含27个价为3的内部EP和39个价为5的内部EP。内侧部件的G样条表示包含18个价为3的内部EP、46个价为5的内部EP，以及4个价为3的边界奇异点。外侧部件的G样条表示包含67个价为3的内部EP、101个价为5的内部EP，以及14个价为3的边界奇异点。三个控制网的每个面上都有多个非常规点。这表明需要适用于等几何分析的EP构造，能够处理每个面上的多个非常规点，以及内部EP和边界奇异点。由于D-patch构造无法处理边界奇异点，我们手动更改了控制网的连通关系以移除边界奇异点，从而能够比较这三种复杂结构部件上的四种EP构造。如表1所示，构造 G^1P、 G^1R和 C^0 具有相近的无效面积单元最小厚度，但D-patch构造的无效面积单元最小厚度小了数倍。使用D-patch构造时，出现无效面积单元最小厚度的单元，在这三种几何形状中都是价为3的内部EP所对应的非规则单元；也就是说，该单元位于不受我们为使用D-patch构造而移除边界奇异点所作手动修改影响的区域内。内侧部件的实际厚度为1 mm，外侧部件和加强筋的实际厚度为1.6 mm。因此，使用D-patch构造时，外侧部件和加强筋的壳离散无效，无法进行有限元分析仿真。

5. 特征值测试

G样条曲面与其他任何可进行 B´ézier 提取的样条一样，都可以导入商用有限元分析软件 LS-DYNA。本节中，我们在 LS-DYNA 中使用 G样条求解特征值问题，并与传统有限元进行比较。所考虑的几何体分别为 B柱加强筋、B

表 3：使用 G样条和双线性四边形，并采用集中质量矩阵得到的加强筋特征值。

Mode	IGA K-L	IGA R-M	FEM
7	6.820109×10^{-1}	6.791284×10^{-1}	6.690467×10^{-1}
8	1.655572×10^{0}	1.637535×10^{0}	1.667858×10^{0}
9	3.829959×10^{0}	3.800838×10^{0}	3.784465×10^{0}
10	1.013302×10^{1}	1.003303×10^{1}	1.020809×10^{1}
11	1.651432×10^{1}	1.635013×10^{1}	1.642579×10^{1}
12	2.734857×10^{1}	2.713475×10^{1}	2.764796×10^{1}

表 4：使用 G样条和双线性四边形，并采用一致质量矩阵得到的内侧部件特征值。

Mode	IGA K-L	IGA R-M	FEM
7	1.707981×10^{-3}	1.711364×10^{-3}	1.672901×10^{-3}
8	1.086697×10^{-2}	1.089283×10^{-2}	1.054207×10^{-2}
9	1.545168×10^{-2}	1.546120×10^{-2}	1.509589×10^{-2}
10	4.470250×10^{-2}	4.483026×10^{-2}	4.387936×10^{-2}
11	7.676406×10^{-2}	7.688878×10^{-2}	7.640507×10^{-2}
12	9.107535×10^{-2}	9.122090×10^{-2}	9.131929×10^{-2}

表 5：使用 G样条和双线性四边形并采用集中质量矩阵得到的内侧部件特征值。

Mode	IGA K-L	IGA R-M	FEM
7	1.723343×10^{-3}	1.726760×10^{-3}	1.672105×10^{-3}
8	1.097192×10^{-2}	1.099804×10^{-2}	1.054039×10^{-2}
9	1.558502×10^{-2}	1.559465×10^{-2}	1.508588×10^{-2}
10	4.509849×10^{-2}	4.522745×10^{-2}	4.385520×10^{-2}
11	7.737074×10^{-2}	7.749579×10^{-2}	7.632417×10^{-2}
12	9.180853×10^{-2}	9.195564×10^{-2}	9.123395×10^{-2}

柱内侧部件，以及图 16、图 17 和图 18 所示的 B柱外侧部件。本节中，我们分别使用毫米、毫秒和千克作为长度、时间和质量单位，这也是汽车工业中较常用的单位制。密度、杨氏模量和泊松比分别为 $\rho = 7.8 \times 10^{-6}$、$E = 2.0 \times 10^{2}$、 $\nu = 0.3$。

表 6：采用一致质量矩阵时，使用 G样条和双线性四边形计算得到的外侧部件特征值。

Mode	IGA K-L	IGA R-M	FEM
7	2.111531×10^{-2}	2.107359×10^{-2}	2.075109×10^{-2}
8	1.439462×10^{-1}	1.437286×10^{-1}	1.419425×10^{-1}
9	4.161993×10^{-1}	4.157969×10^{-1}	4.164362×10^{-1}
10	5.400375×10^{-1}	5.393084×10^{-1}	5.413323×10^{-1}
11	1.093012×10^{0}	1.090889×10^{0}	1.095769×10^{0}
12	1.332509×10^{0}	1.330410×10^{0}	1.336470×10^{0}

表 7：采用集中质量矩阵时，使用 G样条和双线性四边形计算得到的外侧部件特征值。

Mode	IGA K-L	IGA R-M	FEM
7	2.128929×10^{-2}	2.124744×10^{-2}	2.073354×10^{-2}
8	1.450363×10^{-1}	1.448187×10^{-1}	1.417880×10^{-1}
9	4.196939×10^{-1}	4.192901×10^{-1}	4.161236×10^{-1}
10	5.430577×10^{-1}	5.423398×10^{-1}	5.400843×10^{-1}
11	1.098894×10^{0}	1.096792×10^{0}	1.093141×10^{0}
12	1.340526×10^{0}	1.338441×10^{0}	1.333670×10^{0}

等几何分析和有限元模拟均采用 5 mm 的单元尺寸。有限元模拟中，我们使用双线性四边形单元以及 LS-DYNA 的壳单元公式 ELFORM 16。等几何分析模拟中，我们使用构造 G^1P 和构造 G^1R，以及 LS-DYNA 的壳单元公式 ELFORM 3 和 ELFORM 2。ELFORM 3 是 Reissner-Mindlin（R-M）壳单元公式，ELFORM 2 是 Kirchhoff-Love（K-L）壳单元公式。本节所列所有特征值中，构造 G^1P 与构造 G^1R 的结果差异均可忽略不计（所有情况下均小于 0.02%）。因此，为简洁起见，本节表格仅列出采用构造 G^1P 得到的结果。

由于未施加 Dirichlet 边界条件，预期前六个振型和特征值与刚体运动有关；我们验证了所有运行的等几何分析和有限元模拟均符合这一预期。表 2 和表 3 分别列出了采用一致质量矩阵和集中质量矩阵时，通过有限元法、采用 R-M 壳单元的等几何分析以及采用 K-L 壳单元的等几何分析得到的加强筋第七至第十二个特征值。表 4 和表 5，以及表 6 和表 7，分别对内侧部件和外侧部件列出了相同结果。如表 2、3、4、5、6 和 7 所示，有限元法、采用 R-M 壳单元的等几何分析以及采用 K-L 壳单元的等几何分析所得结果均高度吻合

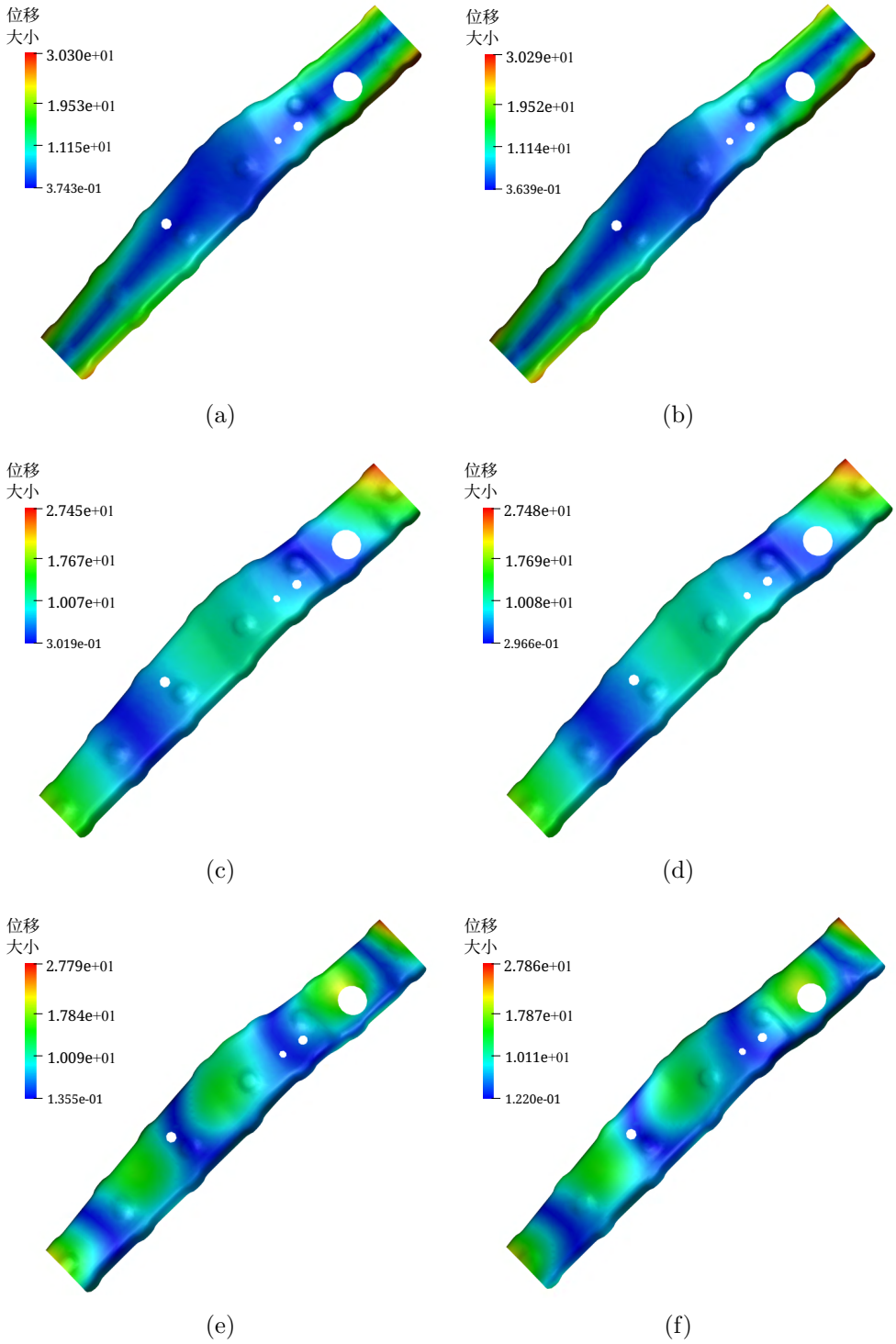


图19：B柱的加强筋。(a)、(c) 和 (e) 分别展示了采用 G样条和 Reissner-Mindlin壳得到的第七、第八和第十二阶振型。(b)、(d) 和 (f) 分别展示了采用传统有限元得到的第七、第八和第十二阶振型。

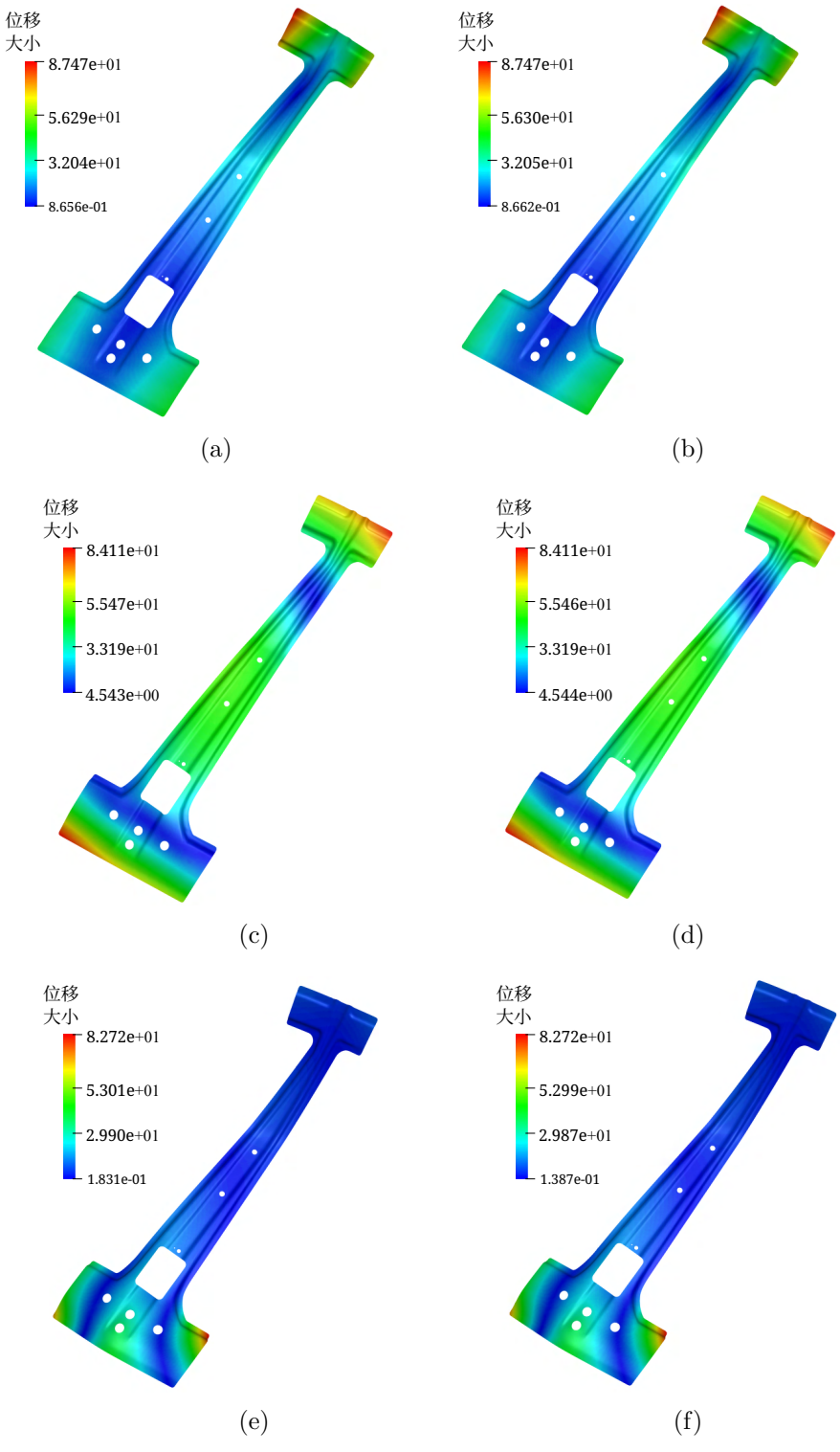


图20：B柱的内侧部件。(a)、(c)和(e)分别展示了使用G样条和Reissner-Mindlin壳计算得到的第七、第八和第十二阶振型。(b)、(d)和(f)分别展示了使用G样条和Kirchhoff-Love壳计算得到的第七、第八和第十二阶振型。

算例图 19 展示了采用集中质量矩阵时，分别通过有限元法和采用 R-M 壳单元的等几何分析得到的加强筋第七、第八和第十二阶振型。图 20 展示了采用集中质量矩阵时，通过采用 R-M 壳单元和 K-L 壳单元的等几何分析得到的内侧部件第七、第八和第十二阶振型。图 21 展示了采用集中质量矩阵时，分别通过有限元法和采用 K-L 壳单元的等几何分析得到的外侧部件第七、第八和第十二阶振型。图 19、20 和 21 中的所有振型均吻合良好。

最后，表 8 列出了本节所研究的三种几何形状采用有限元法、采用 R-M 壳单元的等几何分析以及采用 K-L 壳单元的等几何分析，并使用集中质量矩阵得到的最后一个特征值。如 [73]，中所述，最后一个特征值决定了显式动力学中的最大稳定时间步长（最后一个特征值越小，时间步长就可以越大）。如表 8 所示，在相同单元尺寸下，采用 R-M 壳单元的等几何分析所得最后一个特征值与有限元法相同或更小。正如预期，在相同单元尺寸下，采用 K-L 壳单元的等几何分析所得最后一个特征值显著更小，因为这种壳单元公式没有转动自由度。

表 8：使用 G样条和双线性四边形并采用集中质量矩阵获得的不同几何体的最后特征值。

	IGA K-L	IGA R-M	FEM
B柱内侧部分	9.664515×10^6	1.183618×10^{11}	1.183520×10^{11}
B柱外侧部分	1.042185×10^8	8.127251×10^{10}	1.340322×10^{11}
B柱加强件	1.398117×10^7	4.616443×10^{10}	4.617944×10^{10}

6. 结论

我们介绍了两种基于施加 G^1 约束的 EP 构造，可处理具有任意 非结构化四边形布局的控制网。除此之外，为了捕捉尺寸与单元尺寸相近的小特征（例如孔洞），还需要开发不受控制网中 EP 分布限制的 EP 构造。收敛性、曲面质量和特征值问题的研究表明，所提出的两种 EP 构造在性能方面没有显著差异。因此，用户可以自行决定选择哪一种：一种是在非规则单元中采用多项式基函数、但基函数支撑范围有所增加的 EP 构造（构造 G^1P）；另一种是在非规则单元中采用有理基函数、但施加 G^1 约束后基函数支撑范围不会增加的 EP 构造（构造 G^1R）。收敛性和曲面质量研究还表明，对于涉及薄壁结构的实际工程应用，G样条比基于 D-patch 框架的 EP 构造更为适用。由于

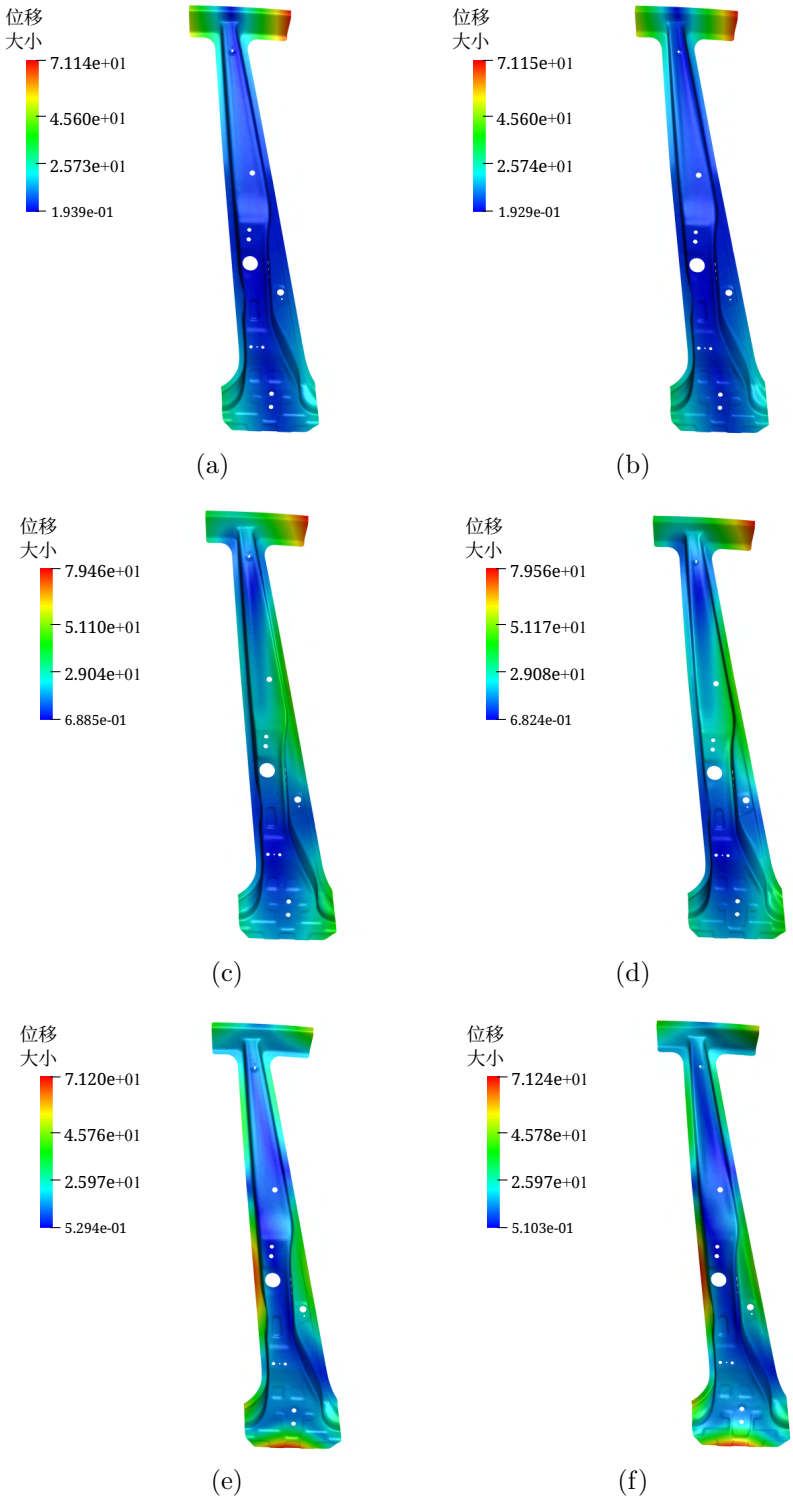


图 21：B柱的外侧部件。（a）、（c）和（e）分别展示了使用G样条和Kirchhoff-Love壳得到的第七、第八和第十二阶振型。（b）、（d）和（f）分别展示了使用传统有限元得到的第七、第八和第十二阶振型。

由于仅使用基于顶点的控制点，且这些控制点可作为几何形状控制柄，因此所提出的两个版本的 G 样条可用于复杂薄壁结构的设计与分析。我们使用 G 样条曲面表示了 B 柱的加强筋、内侧部件和外侧部件。我们在商业软件 LS-DYNA 中分别使用 G 样条和双线性四边形求解了这些几何体上的特征值问题。G 样条与传统有限元的结果吻合良好。

致谢

H. Casquero 和 M. S. Faruque 获得了美国国家科学基金会（NSF）（项目编号 CMMI-2138187）、日本本田汽车公司和美国 Ansys 公司的部分资助。X. Wei 获得了国家自然科学基金委员会（项目编号 12202269）的资助。

参考文献

[1] T. J. R. Hughes、J. A. Cottrell、Y. Bazilevs，等几何分析：计算机辅助设计、有限元、非均匀有理B样条、精确几何与网格细化，《计算力学与工程方法》194（2005年）4135–4195。[2] J. A. Cottrell、T. J. R. Hughes、Y. Bazilevs，等几何分析：迈向计算机辅助设计与有限元分析的集成，约翰·威立父子公司，2009年。[3] Y. Bazilevs、L. Beirao da Veiga、J. A. Cottrell、T. J. R. Hughes、G. Sangalli，等几何分析： h-细化网格的逼近、稳定性与误差估计，《应用科学中的数学模型与方法》16（07）（2006）1031–1090。[4] T. J. R. Hughes、A. Reali、G. Sangalli，结构动力学与波传播中离散逼近的对偶性与统一分析： p方法有限元与 k方法非均匀有理B样条的比较，《计算力学与工程方法》197（49-50）（2008）4104–4124。[5] J. A. Evans、Y. Bazilevs、I. Babuˇska、T. J. R. Hughes，等几何有限元方法 k版本的 n-宽度、上确界-下确界与最优性比，《计算力学与工程方法》198（2009年）1726–1741。[6] L. B. Da Veiga、A. Buffa、J. Rivas、G. Sangalli，等几何分析中 h-p-k-细化的一些估计，《数值数学》118（2）（2011）271–305。[7] S. Lipton、J. Evans、Y. Bazilevs、T. Elguedj、T. J. R. Hughes，严重网格畸变下等几何结构离散化的鲁棒性，《计算力学与工程方法》199（2010）357–373。

[8] J. A. Cottrell、A. Reali、Y. Bazilevs、T. J. R. Hughes，结构振动的等几何分析，《计算力学与工程方法》195（2006）5257–5296。[9] T. J. Hughes、J. A. Evans、A. Reali，特征值、边界值和初值问题的有限元与非均匀有理B样条逼近，《计算力学与工程方法》272（2014）290–320。[10] B. Oesterle、F. Geiger、D. Forster、M. Fr¨ohlich、M. Bischoff，NURBS的逼近能力及精确几何在壳体等几何屈曲前分析中的意义研究，《计算力学与工程方法》397（2022年）115144。[11] H. Gomez、V. M. Calo、Y. Bazilevs、T. J. R. Hughes，Cahn-Hilliard相场模型的等几何分析，《计算力学与工程方法》197（49-50）（2008）4333–4352。[12] J. Kiendl、K.-U. Bletzinger、J. Linhard、R. Wuchner，采用Kirchhoff–Love单元的等几何壳体分析，《计算力学与工程方法》198（2009）3902–3914。[13] H. Gomez、T. J. R. Hughes、X. Nogueira、V. M. Calo，等温Navier–Stokes–Korteweg方程的等几何分析，《计算力学与工程方法》199（2010）1828–1840。[14] J. Liu、C. M. Landis、H. Gomez、T. J. R. Hughes，液-汽相变：热力学理论、熵稳定数值公式与沸腾模拟，《计算力学与工程方法》（2015年）。[15] J. Bueno、H. Casquero、Y. Bazilevs、H. Gomez，弹性毛细效应的三维动态模拟，《力学》53（6）（2018）1221–1237。[16] A. Buffa、C. De Falco、G. Sangalli，等几何分析：二维Stokes方程的稳定单元，《国际流体数值方法杂志》65（11-12）（2011）1407–1422。[17] A. Buffa、G. Sangalli、R. V´azquez，电磁学中的等几何分析：B样条逼近，《计算力学与工程方法》199（17-20）（2010）1143–1152。[18] J. A. Evans、T. J. R. Hughes，用于非定常Navier–Stokes方程的等几何散度相容B样条，《计算物理学杂志》241（2013）141–167。

[19] D. Kamensky, M.-C. Hsu, Y. Yu, J. A. Evans, M. S. Sacks, T. J. R. HHughes，采用散度协调 B样条的浸没等几何心血管流固耦合分析，《计算力学与工程方法》314（2017年）408–472。[20] H. Casquero, C. Bona-Casas, D. Toshniwal, T. J. R. Hughes, H. Gomez, Y. J. Zhang，散度相容浸入边界法：在囊泡与胶囊动力学中的应用，《计算物理学杂志》425（2021）109872。[21] J. Peters，不规则网格样条，SMAI《计算数学杂志》5（2019）161–183。[22] K. H¨ollig, H. M¨ogerle，G样条，《计算机辅助几何设计》7（1-4）（1990）197–207。[23] J. A. Gregory, V. K. Lau, J. Zhou，光滑参数曲面与 n 边曲面片，载于：《曲线与曲面的计算》，施普林格，1990年，第457–498页。[24] J. Peters，几何连续性，载于：《计算机辅助几何设计手册》，2002年，第193–229页。[25] T. D. DeRose, B. A. Barsky，一种直观的参数曲线与曲面几何连续性方法，载于：《计算机生成图像》，施普林格，1985年，第159–175页。[26] A. D. DeRose，几何连续性：计算机辅助几何设计（曲线、曲面、样条）中不依赖参数化的连续性度量，加利福尼亚大学伯克利分校，1985年。[27] G. Farin，计算机辅助几何设计中的曲线与曲面：实用指南，爱思唯尔，2014年。[28] D. Groisser, J. Peters，匹配的 G^k 构造总能产生 C^k 连续的等几何单元，《计算机辅助几何设计》34（2015）67–72。[29] M. Scott, R. Simpson, J. Evans, S. Lipton, S. Bordas, T. J. R. Hughes, T. Sederberg，采用非结构化 T 样条的等几何边界元分析，《计算力学与工程方法》254（2013）197–221。[30] T. Nguyen, K. Karˇciauskas, J. Peters，用于求解圆盘上泊松方程的若干经典方法、离散微分方法与等几何方法的比较研究，《公理》3（2）（2014）280–299。[31] K. Karˇciauskas, T. Nguyen, J. Peters，推广双三次样条以适用于不规则布局的建模与等几何分析，《计算机辅助设计》70（2016）23–35。

[32] A. Collin, G. Sangalli, T. Takacs，适用于分析的 G1 多片参数化与 C1 等几何空间，《计算机辅助几何设计》47（2016）93–113。[33] M. Kapl, G. Sangalli, T. Takacs，适用于分析的 G1 双片参数化的维数与基构造，《计算机辅助几何设计》52（2017年）75–89。[34] M. Kapl, G. Sangalli, T. Takacs，适用于分析的 G1 平面多片参数化构造，《计算机辅助设计》97（2018年）41–55。[35] M. Kapl, G. Sangalli, T. Takacs，不规则多片平面区域上的等几何 C1 子空间，《计算机辅助几何设计》69（2019）55–75。[36] M. Kapl, G. Sangalli, T. Takacs，一族 C1 四边形有限元，《计算数学进展》47（6）（2021）1–38。[37] E. Catmull, J. Clark，任意拓扑网格上递归生成的 B样条曲面，《计算机辅助设计》10（6）（1978）350–355。[38] J. Stam，在任意参数值处精确求值 Catmull–Clark 细分曲面，载于：第25届计算机图形学与交互技术年会论文集，1998年，第395–404页。[39] U. Reif，奇异顶点附近细分算法的统一方法，《计算机辅助几何设计》12（2）（1995）153–174。[40] J. Peters, U. Reif，《细分曲面》，施普林格，2008年。[41] K. Karˇciauskas, J. Peters，改进多曲面混合的形状，《图形模型》82（2015）87–98。[42] X. Wei, Y. Zhang, T. J. Hughes, M. A. Scott，采用局部细化的截断层次 Catmull–Clark 细分，《计算力学与工程方法》291（2015）1–20。[43] Q. Pan, G. Xu, G. Xu, Y. Zhang，基于扩展 Catmull–Clark 细分的等几何分析，《计算机与数学及其应用》71（1）（2016）105–119。[44] X. Wei, Y. J. Zhang, T. J. Hughes, M. A. Scott，扩展截断层次 Catmull–Clark 细分，《计算力学与工程方法》299（2016）316–336。[45] Q. Zhang, M. Sabin, F. Cirak，采用适用于等几何分析的细化权重的细分曲面，《计算机辅助设计》102（2018）104–114。[46] K. Bandara, F. Cirak，采用多分辨率细分曲面的壳结构等几何形状优化，《计算机辅助设计》95（2018）62–71。

[47] X. Wei, X. Li, Y. J. Zhang, T. J. R. Hughes, 收敛率最优的调优型混合非均匀细分曲面，《国际工程数值方法杂志》122 (9) (2021年) 2117–2144。[48]A. Wawrzinek, K. Polthier，在 Catmull–Clark 曲面奇异点处对广义 B 样条函数进行积分，《计算机辅助设计》78 (2016) 60–70。[49] B. J¨uttler, A. Mantzaflaris, R. Perl, M. Rumpf，关于曲面偏微分方程等几何细分方法中的数值积分，《计算力学与工程方法》302 (2016) 131–146。[50] U. Reif，一种可细化的任意拓扑亏格光滑样条曲面空间，《逼近理论杂志》90 (2) (1997) 174–199。[51] K. Karˇciauskas, J. Peters，改进具有奇异参数化不规则性的可细化曲面的形状，《计算机辅助设计》90 (2017年) 191–198。[52] T. Nguyen, J. Peters，适用于不规则四边形布局的可细化 C^1 样条单元，《计算机辅助几何设计》43 (2016) 123–130。[53] D. Toshniwal, H. Speleers, T. J. R. Hughes，非结构化四边形网格上的光滑三次样条空间，特别关注非常点：几何设计与等几何分析考量，《计算力学与工程方法》327 (2017年) 411–458。[54] H. Casquero, X. Wei, D. Toshniwal, A. Li, T. J. R. Hughes, J. Kiendl, Y. J. Zhang，利用分析适用的非结构化 T 样条无缝集成设计与 Kirchhoff–Love 壳分析，《计算力学与工程方法》360 (2020年) 112765。[55] X. Wei, X. Li, K. Qian, T. J. R. Hughes, Y. J. Zhang, H. Casquero，分析适用的非结构化 T 样条：每个面上的多个非常点，《计算力学与工程方法》391 (2022年) 114494。[56] J. Yang, G. Zhao, W. Wang, X. Du, C. Zuo，非常点周围的非均匀 C1 补片及其在分析适用的非结构化 T 样条中的应用，《计算力学与工程方法》405 (2023年) 115849。[57] C. M. Grimm, J. F. Hughes，利用流形对任意拓扑曲面进行建模，载于：《第 22 届计算机图形学与交互技术年度会议论文集》，1995年，第 359–368 页。[58] J. C. Navau, N. P. Garcia，从任意拓扑网格构造曲面，《计算机辅助几何设计》17 (7) (2000年) 643–671。[59]L. Ying, D. Zorin，一种构造任意光滑度曲面的简单流形方法，《ACM 图形学汇刊》23 (3) (2004年) 271–275。

[60] X. Gu, Y. He, H. Qin，流形样条，载于：《2005年ACM固体与物理建模研讨会论文集》，2005年，第 27–38 页。[61] E. Tosun, D. Zorin，基于流形的带边界曲面，《计算机辅助几何设计》28 (1) (2011年) 1–22。[62] M. Majeed, F. Cirak，使用基于流形的光滑基函数进行等几何分析，《计算力学与工程方法》316 (2017年) 547–567。[63] Q. Zhang, F. Cirak，具有预设锐利特征的基于流形的等几何分析基函数，《计算力学与工程方法》359 (2020年) 112659。[64]K. J. Koh, D. Toshniwal, F. Cirak，一种针对半结构化四边形和六面体网格、收敛最优的光滑混合B样条构造，《计算力学与工程方法》399 (2022年) 115438。[65] X. Wei, Y. Zhang, D. Toshniwal, H. Speleers, X. Li, C. Manni, J. A. Evans, T. J. R. Hughes，适用于非结构化四边形和六面体网格的混合B样条构造，在等几何分析中具有最优收敛率，《计算力学与工程方法》341 (2018年) 609–639。[66] D. Toshniwal，四边形-三角形网格上的二次样条：构造及其在裁剪曲面水密重建模拟中的应用，《计算力学与工程方法》388 (2022年) 114174。[67] T. Takacs, D. Toshniwal，近似C1样条：非结构化四边形网格上的双二次样条及其在四阶问题中的应用，《计算力学与工程方法》403 (2023年) 115640。[68] H. Biermann, A. Levin, D. Zorin，具有法向控制的分片光滑细分曲面，载于：《第27届计算机图形学与交互技术年会论文集》，2000年，第 113–120 页。[69] K.-P. Beier, Y. Chen，实时曲面质量评估的高光线算法，《计算机辅助设计》26 (4) (1994年) 268–277。[70] K. Karˇciauskas, J. Peters，双三次曲面能否达到A级？，载于：《计算机图形学论坛》第 34 卷，Wiley Online Library，2015 年，第 229–238 页。[71] M. Bischoff, K.-U. Bletzinger, W. Wall, E. Ramm，薄壁结构模型与有限元，《计算力学百科全书》（2004年）。[72] J. Kiendl, M.-C. Hsu, M. C. Wu, A. Reali，适用于一般超弹性材料的等几何 Kirchhoff–Love 壳体公式，《计算力学与工程方法》291 (2015年) 280–303。

[73] T. J. R. Hughes, 《有限元法：线性静态与动态有限元分析》, Courier Corporation, 2012。