arXiv:2302.12430v1 [math.CO] 24 Feb 2023

关于不可避免复形的彩色 Tverberg 型定理

Mikhail Bludov

2023年2月23日

摘要

本文的主要结果是一个“彩虹不可避免复形的有色 Tverberg 定理”。该定理可以看作两个定理的合并：“集体不可避免复形的 Tverberg 定理”和“平衡的彩色 Tverberg 定理”。证明的主要工具是离散 Morse 理论。

1 引言

Tverberg 定理 [14] 是关于 $\mathbb{R}^d$中有限点集的某些划分的论述。有许多方法可以利用不同的概念和方法推广这一定理。这类推广统称为“Tverberg 型定理”，并且似乎已成为拓扑组合学的主要研究主题之一。在过去十年该领域最重要的成果中，我们特别指出了一般“拓扑 Tverberg 定理” [6, 11, 3]的反例。

在其他成果中，我们为平衡复形（定义 1.8）证明了“平衡 Van Kampen-Flores” [9, 定理 1.2] 随后， [7] 这一结果被推广为 “ 关于集体不可避免复形的 Tverberg 定理 ” （定理 1.2 ）。该定理的方法依赖于离散 Morse 理论，以及单纯复形的“平衡的”和“集体不可避免” r-元组的概念（定义 1.11）。本文利用（r， s）-不可避免性的概念，对定理 1.2 作出略微推广。

“彩色 Tverberg 型定理” [17, 1] 是另一个研究方向。在 [8], 中，除其他成果外，还得到了“平衡有色 Tverberg 定理”1.3。该定理需要“平衡的”组合单形复形和离散 Morse 理论的概念，并且与定理 1.2 相关。本文的主要结果（定理 2.1）通过引入“集体不可避免的” (r, s)-元组这一概念，推广了定理 1.3。我们借鉴了最初定理 1.3 的证明思路，但补充了一些重要细节。

1.1 预备知识

定义 1.1。 假设 $[m]$ 是集合 $\{1,\ldots.m\}$，而 $2^{[m]}$ 是$[m]$的所有子集构成的集合。设 $\Delta_{[m]}$是一个以 m个顶点为顶点、维数为 $N=m-1$的组合单形。我们将单形 Δ^N与 $\Delta_{[m]}$ 以及 $2^{[m]}$等同起来。

定义 1.2 （ [12]中的定义 1.5.1）。 抽象单纯复形是一个有序对（V,K），其中 V 是一个集合， $K\subseteq 2^V$ 是 V的子集构成的遗传系统；也就是说，我们要求 $F\in K$ ，且 $G\subseteq F$ 蕴含 $G\in K$ （特别地，当$K\neq\emptyset$时， $\emptyset\in K$ ）。 K 中的集合称为（抽象）单形。此外，我们定义维数dim（K）：$=\max\{|F|-1:\ F\in K\}$。

定义 1.3 （ [12]中的定义 4.2.1）。 设 K 和 L 为单纯复形。连接$K*L$ 是一个单纯复形，其顶点集为 V（K）$\uplus V$（L），其单形集为$\{F\uplus G:\ F\in K,G\in L\}$。换言之，要构造连接，我们首先取顶点集的不交并，然后将 K 的每个单形与 L 的每个单形组合起来。

定义 1.4 （ [12] 的第 6 节）。 设 $\mathscr{K}=\langle K_1,\ldots,K_r\rangle$ 是一族单纯复形， $K_i\subset 2^{[m]}$。那么这族复形的**删去连接** 定义为

$$(\mathscr{K}_\Delta^*)=K_1*_\Delta\ldots*_\Delta K_r=\{\uplus_{i=1}^r A_i:A_i\in K_j,\ \forall i,j\ A_i\cap A_j=\emptyset\}\subset(2^{[m]})^{*r}.$$

定义 1.5 ([7])。 对 $\mathscr{K}$的对称化删去连接定义为

$$SymmDelJoin(\mathscr{K})=\bigcup_{\pi\in S_r}K_{\pi_1}*_\Delta\ldots*_\Delta K_{\pi_r}\subseteq(2^{[m]})^{*r},$$

其中 S_r 是对称群。元素 $A_1\sqcup\ldots\sqcup A_r\in SymmDelJoin(\mathscr{K})$ 记作 $(A_1,\ldots,A_r,B)$，其中 B 是 $[m]\setminus\bigcup_{i=1}^r A_i$。 换言之，$(A_1,\ldots,A_r,B)$ 是 $[m]$的一个划分。

定义 1.6. 顶点 $[m]$ 的**着色** 为颜色 $k+1$，是将 $[m]=C_1\uplus\ldots\uplus C_{k+1}$ 划分为“单色”子集 C_i。当且仅当对于每个 $i=1,\ldots,k+1$， $|V\cap C_i|\leq 1$ 时，顶点子集 V 称为彩虹集或彩虹单形。若单纯复形 K 的所有单形都是彩虹单形，则称其为彩虹单纯复形。 $Col\Delta_{[m]}$是由 $\Delta_{[m]}$中所有彩虹单形构成的单纯复形。

定义 1.7。 设 $K\subseteq\Delta_{[m]}$ 是一个单纯复形。 d-**骨架** $K^{(d)}$ 是由 K 中维数至多为 d的所有单形构成的子复形。

定义 1.8。 如果单纯复形 $K\subset 2^m$ 是（m,k）-平衡的 ，则称之为

$$\Delta_{[m]}^{(k-1)}\subseteq K\subseteq\Delta_{[m]}^{(k)}.$$

假设 $[m]$ 被赋予颜色，那么 K 称为 (m,k)-彩虹平衡的，如果

$$Col\Delta_{[m]}^{(k-1)}\subseteq K\subseteq Col\Delta_{[m]}^{(k)}.$$

1.2 集体不可避免复形

集体不可避免复形作为自利对象出现在 [13] 中。在 [10] 中，作者研究了 r-不可避免复形的拓扑性质。下面我们将介绍其定义。

定义 1.9。 如果对于 $[m]$ 中每个由互不相交的集合组成的有序集合族（$A_1, \ldots, A_r$），都存在 i 使得 $A_i \in K$，则称单纯复形 $K \subseteq 2^{[m]}$ 是集体 r-不可避免的。

在 [10] 中有一个自然的推广:

定义 1.10。 如果对于 $[m]$ 中每个由互不相交的集合组成的有序集合族（$A_1, \ldots, A_r$），都存在一个指标集合$\{i_1, \ldots, i_s\}$，使得对于所有 $j = 1, \ldots, s$，均有 $A_{i_j} \in K$，则称单纯复形 $K \subseteq 2^{[m]}$ 是集体（r, s）-不可避免的。

我们关注集体 r-不可避免的复形 r-元组。它们最初在 [4] 中进行了研究。定义如下:

定义 1.11。 如果对于 $[m]$ 中每个由互不相交的集合组成的有序集合族（$A_1, \ldots, A_r$），都存在 i 使得 $A_i \in K_i$，则称 $2^{[m]}$ 的子复形的一个有序 r-元组 $K = \langle K_1, \ldots, K_r \rangle$ 是集体r-不可避免的。

定义 1.12. 如果对于 $2^{[m]}$ 中任意有序集合族 $(A_1, \ldots, A_r)$，其中各集合互不相交，都存在一个指标集合 $\{i_1, \ldots, i_s\}$，使得对于所有 $j = 1, \ldots, s$， $A_{i_j} \in K_{i_j}$，那么 $2^{[m]}$ 的子复形 $K = \langle K_1, \ldots, K_r \rangle$ 组成的有序 r 元组是集体 (r, s)- 不可避免的。

1.3 Tverberg 型定理简述

Radon 定理（或 Radon 引理）是离散几何中最著名的结果之一。它指出，对于 $\mathbb{R}^d$ 中的 $d+2$ 个点，可以将其划分为两个子集，使得相应的凸包有非空交集。

Helge Tverberg 于 [14] 给出了该定理的一个推广。

定理 1.1 (Tverberg 定理)。 设 $m \geq (r-1)(d+1)+1$。那么， $\mathbb{R}^d$ 中任意 m 个点构成的集合 S，都可以划分为 r 个非空且两两不相交的子集 $S_1, \ldots, S_r$，使得 $\cap_{i=1}^{r} \boldsymbol{conv}(S_i) \neq \emptyset$.

原始 Tverberg 定理可以重新表述如下。设 $N = (r-1)(d+1)$，那么对于每个仿射映射 f: $\Delta^N \to \mathbb{R}^d$ 存在 r 个非空且两两不相交的面 Δ_1、.....、 Δ_r，它们属于 Δ^N，使得 $f(\Delta_1) \cap \ldots \cap f(\Delta_r) \neq \emptyset$。

该定理可以推广为拓扑 Tverberg 定理 [15, 2]。设 f: $\Delta^{(r-1)(d+1)} \to \mathbb{R}^d$ 是任意连续映射，且 $r = p^\nu$ 是素数幂。那么定理的结论仍然成立：存在 r 个非空且两两不相交的面 Δ_1、.....、 Δ_r，它们属于 Δ^N，使得 $f(\Delta_1) \cap \ldots \cap f(\Delta_r) \neq \emptyset$。

拓扑 Tverberg 定理有多种扩展和推广方式。例如，我们可以要求所选单纯复形 $K \subseteq \Delta^N$ 单形 Δ_i 位于K 中。在 [7]中，作者证明了以下定理以及其他结果:

定理 *1.2*（集体不可避免复形的 *Tverberg* 定理）。设$N=(r-1)(d+2)$且 $m=N+1$。令 $\mathscr{K}=\langle K_1、\ldots\ldots、K_r\rangle$ 为 Δ^N的一个集体 r-不可避免子复形族，其中 $r=p^\nu$ 是素数的幂。假设对于每个 $i=1、\ldots\ldots、r$， K_i都是（m， k）-平衡的。那么，对于每个连续映射 $f\colon \Delta^N\to\mathbb{R}^d$，都存在 Δ^N的 r 个不相交面 Δ_i，使得 $f(\Delta_1)\cap\ldots\cap f(\Delta_r)\neq\emptyset$，并且对于每个$i=1、\ldots\ldots、r$都有 $\Delta_i\in K_i$。

另一种思路是给顶点着色，并要求各面为彩虹面。特别是在 [8]，中，作者得到了以下定理：

定理 *1.3*（平衡有色 *Tverberg* 定理）。假设 $r=p^\nu$ 是素数幂。设整数 $d\geq 1$、 $k\geq 0$和 $0<s\leq r$ 满足 $r(k-1)+s=(r-1)d$。设$[m]=C_1\uplus\ldots\uplus C_{k+1}$ 是对 Δ^N 的顶点着色，其中 $N+1=m=(2r-1)(k+1)$，且对每个 $i=1$，……，$k+1$，都有$|C_i|=2r-1$。那么，对任意连续映射 $f\colon \Delta^N\to\mathbb{R}^d$，都存在 r 个两两不交的彩虹面 Δ_1、……、Δ_r，它们属于 Δ^N，并满足 $f(\Delta_1)\cap\ldots\cap f(\Delta_r)\neq\emptyset$；其中，对 $i=1$，……，s，有 $dim(\Delta_i)\leq k$，且对 $j=s+1$，……，r，有 $dim(\Delta_j)\leq k-1$。

接下来我们将给出该定理的一个推广。

2 彩虹不可避免复形的有色 Tverberg 定理

定义 2.1。设 $[m]$ 带有颜色。若 A_i 对每个 $i=1$，……，r 都是彩虹的，则称 $[m]$ 的一个划分 $(A_1,\ldots,A_r,B)$ 为彩虹划分。

定义 2.2。设 $\mathscr{K}=\langle K_1,\ldots,K_r\rangle$ 是一个单纯复形族， $K_i\subseteq\Delta_m$。设 $[m]$ 带有颜色，且对每个 $i=1$，……，r， K_i 都是彩虹的。若对于每个有序彩虹划分 $(A_1,\ldots,A_r,B)$，都存在一个指标集合 $\{i_1,\ldots,i_s\}$，使得对每个 $j=1$，……，s， $A_{i_j}\in K_{i_j}$，则称 $\mathscr{K}$ 为 (r,s)- 彩虹不可避免。

定理 *2.1*（彩虹不可避免复形的有色 *Tverberg* 定理）。假设 $r=p^\nu$ 是一个素数幂。设整数 $d\geq 1$、 $k\geq 0$和 $0<s\leq r$ 满足$r(k-1)+s=(r-1)d$。设 $[m]=C_1\uplus\ldots\uplus C_{k+1}$ 是 Δ^N 的顶点的一种着色，其中 $N+1=m=(2r-1)(k+1)$，且对每个 $i=1$，……，$k+1$，$|C_i|=2r-1$。设 $\mathscr{K}=\langle K_1,\ldots,K_r\rangle$ 是 Δ^N 的子复形的一个整体上 (r,s)-彩虹不可避免族。假设对每个 $i=1$，……，r， K_i 都是 (m,k)-彩虹平衡的。那么对于每个连续映射 $f\colon \Delta^N\to\mathbb{R}^d$，都存在 r 个两两不相交的 Δ^N 的面 Δ_i，使得 $f(\Delta_1)\cap\ldots\cap f(\Delta_r)\neq\emptyset$，且对每个 $i=1$，……，r， $\Delta_i\in K_i$。

证明。例如， [7, 8, 12] 中就有这种标准论证。

假设逆命题成立。那么存在一个映射 $f\colon \Delta_{[m]}\to\mathbb{R}^d$，使得

$$f(A_1)\cap f(A_2)\cap\ldots\cap f(A_r)=\emptyset$$

对于每个 $(A_1, \ldots, A_r, B) \in SymmDelJoin(\mathscr{K})$ 都成立。我们考虑 r 重连接 $f^{*r} = \Phi_f$。这是一个 S_r-等变映射

$$\Phi_f \colon SymmDelJoin(\mathscr{K}) \to (\mathbb{R}^d)^{*r} \cong \mathbb{R}^{dr+r-1}.$$

令 $D \cong \mathbb{R}^d$ 为 $(\mathbb{R}^d)^{*r}$ 的对角子空间。由关于 f 的条件可知，Φ_f 下的像与对角线 D 不相交。而 $(\mathbb{R}^d)^{*r} \setminus D$ 与球面 $\mathbb{S}^{(d+1)(r-1)-1}$ 是 S_r-同伦等价的。但由于 $SymmDelJoin(\mathscr{K})$ 是 $(rk + s - 2) = (rd + r - d - 2)$- 连通的，因此这与 Volovikov 定理 [16] 矛盾。■

现在我们只需证明 $SymmDelJoin(\mathscr{K})$ 是 $(rk + s - 2)$-连通的。

定理 2.2。设 $[m] = C_1 \uplus \ldots \uplus C_{k+1}$ 是 Δ_m 的顶点着色，其中$m = (2r - 1)(k + 1)$，且对于每个 $i = 1, \ldots, k + 1$，都有 $|C_i| = 2r - 1$。设 $\mathscr{K} = \langle K_1, \ldots, K_r \rangle$ 是 Δ^N 的一个集体 (r, s)-彩虹不可避免子复形族。假设对于每个 $i = 1, \ldots, r$，K_i 都是 (m, k)-彩虹平衡的。那么 $SymmDelJoin(\mathscr{K})$ 是 $(rk + s - 2)$-连通的。

定理 2.2 的证明。我们将使用离散 Morse 理论 [5]的方法来证明该定理。但首先，让我们简要讨论这一理论中的主要定义和思想。

设 K 是一个单纯复形。若 $dim(\alpha) = p$，则将单形 $\alpha \in K$ 记作 α^p。单形的一个匹配 (α^p, β^{p+1}) 称为离散向量场，如果满足以下条件：

- 该复形中的每个单形至多出现在一对匹配中。
- 对于每个匹配对 (α^p, β^{p+1})，单形 α^p 是单形 β^{p+1} 的面。

若单形序列 $\alpha_0^p, \beta_0^{p+1}, \ldots, \alpha_k^p, \beta_k^{p+1}, \alpha_{k+1}^p$ 满足以下条件，则称其为一条梯度路径：

- α_i^p 对于每个 $i = 0, \ldots, k$，• α_i^p 和 β_i^{p+1} 相匹配。
- α_{i+1}^p 是每个 $i = 0$、.....、k 所对应的 β_i^{p+1} 的一个面。
- $\alpha_i^p \neq \alpha_i^p$。

如果 $\alpha_0^p = \alpha_{k+1}^p$，则梯度路径是闭的。单纯复形上的离散 *Morse* 函数 是不含闭路径的离散向量场。对于一个固定的离散 Morse 函数，如果$\sigma \in K$ σ 是未匹配的，则称单形$\sigma \in K$ 为临界。

该理论的主要思想是沿着梯度路径收缩所有匹配对。在此过程中，我们将单纯复形 K 化简为一个以临界单纯形为胞腔的胞腔复形。由此得到以下定理：

定理 2.3 ([5])。假设我们在 K上固定了一个离散 *Morse* 函数。设只有一个维数为0 的临界单形，且所有其他临界单形的维数均为 $\geq N$。那么 K 是$(N - 1)$-连通的。

为了证明定理 2.2，我们需要在 $\mathscr{K}$ 上构造一个离散 Morse 函数，使得只有一个维数为 0 的临界单形，且所有其他临界单形的维数均为 $\geq rk+s-1$。

注意，每个单纯复形 K_i 由所有维数为$k-1$ 的彩虹单形以及一族维数为 k的彩虹单形组成。注意，如果一个彩虹单形的维数为 k，那么该单形是极大的，并且包含所有可能的 $k+1$ 种颜色。

如果单形 $(A_1,\dots A_r,B)$ 不是任何其他 $SymmDelJoin(\mathscr{K})$ 单形的面，就称其为极大单形。

如果存在一个置换 π，使得对于每个 $i=1,\dots,r$，都有$A_{\pi(i)}\in K_i$（因此 A_i是彩虹的），则称划分 $(A_1,\dots A_r,B)$ 为可容许。换言之，若一个划分属于 $SymmDelJoin(\mathscr{K})$，则它是可容许的。

现在我们开始构造所需的莫尔斯函数。构造分为 r 个大步骤。每个大步骤又分为 $k+1$ 个小步骤。每个步骤都是对 $SymmDelJoin(\mathscr{K})$ 中单形进行的匹配过程。

步骤 1.1 每种颜色都包含 $2r-1$ 个顶点。假设它们按$\{1,\dots,2r-1\}$枚举。设我们有一个单形 $(A_1,\dots A_r,B)$。令

$$a_1^1=min\left((A_1\cup B)\cap C_1\right).$$

当这两个单形都可容许时，我们将 $(A_1,\dots A_r,B\cup a_1^1)$ 与 $(A_1\cup a_1^1,\dots A_r,B)$ 配对。现在，一个类型为 $(A_1\cup a_1^1,\dots A_r,B)$ 的可容许单形未匹配，当且仅当$A_1\cup a_1^1=a_1^1$且 $B=[m]\setminus\{a_1^1\}$。这是一个 0 维单形，在整个过程结束前都会保持未匹配。如果一个类型为 $(A_1,\dots A_r,B\cup a_1^1)$ 的单形未匹配，那么要么 A_1 包含一个由 C_1着色的顶点，要么通过将 a_1^1 添加到 A_1，使得 $(A_1,\dots A_r,B\cup a_1^1)$ 不再可容许。

步骤 1.2设

$$a_1^2=min\left((A_1\cup B)\cap C_2\right).$$

当 $(A_1,\dots A_r,B\cup a_1^2)$ 和 $(A_1\cup a_1^2,\dots A_r,B)$ 这两个单形均未匹配且可容许时，我们就将它们匹配起来。

- 如果一个类型为 $(A_1,\dots A_r,B\cup a_1^2)$（维数为 >0）的单形未匹配，那么要么 A_1 包含一个由 C_2 着色的顶点，要么通过将 a_1^2 添加到 A_1，使 $(A_1,\dots A_r,B\cup a_1^1)$ 不再可容许。这就是步骤 *1.2-* 类型 *1* 未匹配单形。
- 如果一个类型为 $(A_1\cup a_1^2,\dots A_r,B)$ 的单形未匹配，那么 $(A_1,\dots A_r,B\cup a_1^2)$ 已被 a_1^1 匹配。因此 $a_1^1\in B$、 $A_1\cap C_1=\emptyset$ 和 $|A_1\cup a_1^2|=k$。这就是步骤 *1.2-*类型 *2* 未匹配单形。

步骤 1.3,...1.k+1 以类似的方式完成。接下来我们将使用类似的记号。“步骤 i.j – 类型 1”表示我们无法将 $\{a_i^j\}$ 从 B移至 A_i。“步骤 i.j – 类型 2”表示我们无法将$\{a_i^j\}$ 从 A_i移至 B。以下引理将用于后续内容。

定义 2.3。 若单形$(A_1, \ldots, A_r, B)$满足 $|A_i| = k$，且向 A_i 添加任意一个顶点都会得到一个不可容许的单形，则称其为"步骤 i"极大可容许单形。

引理 2.4。除唯一未匹配的零维单形外，如果单形$(A_1, \ldots A_r, B)$ 在第一步后未匹配，则：

- 要么 $|A_1| = k + 1$，要么
- $|A_1| = k$ 且$(A_1, \ldots A_r, B)$ 是"第 *1* 步"极大可容许的。

第 2 步。 在此步骤中，我们将处理 A_2。

第 2.1 步。设

$$a_2^1 = min\left(\left((A_2 \cup B) \setminus \left[1, a_1^1\right]\right) \cap C_1\right).$$

当这两个单形均为可容许且未匹配时，我们将 $(A_1, A_2, \ldots A_r, B \cup a_2^1)$ 与 $(A_1, A_2 \cup a_2^1, \ldots A_r, B)$ 匹配。

- 如果一个类型为（A_1、 A_2、 $\ldots A_r$、 $B \cup a_2^1$）的单形（维数为 > 0）未匹配，则要么 A_2 包含一个由 C_1着色的顶点，要么将 a_2^1 添加到 A_2 后，我们使（A_1、 $\ldots A_r$、 $B \cup a_1^1$）不再可容许。这就是第 *2.1* 步类型 *1* 未匹配单形。
- 如果一个类型为（A_1、 $A_2 \cup a_2^1$、 $\ldots A_r$、 B）的单形未匹配，则它是"第 1 步"极大可容许的，并且 $|A_2 \cup a_2^1| = k + 1$。这就是第 *2.1* 步类型 *2* 未匹配单形。

第 2.2 步。集合

$$a_2^2 = min\left(\left((A_2 \cup B) \setminus \left[1, a_1^2\right]\right) \cap C_2\right).$$

然后，只要（A_1、 A_2、 $\ldots A_r$、 $B \cup a_2^2$）和（A_1、 $A_2 \cup a_2^2$、 $\ldots A_r$、 B）这两个单形都是可容许且未匹配的，我们就将它们匹配起来。

第 2.3、...、 $2.k + 1$ 步均以类似方式完成。

引理 2.5。除去唯一的未匹配零维单形，若单形$(A_1$、 $\ldots A_r$、 $B)$ 在第2步之后仍未匹配，则：

- 要么 $|A_2| = k + 1$，要么
- $|A_2| = k$ 且$(A_1$、 $\ldots A_r$、 $B)$ 是"第 *2* 步"极大可容许的。

第 3、4 至 r−1 步以类似方式进行。现在我们可以表述下面的引理。

引理 2.6。 对于 $j = 1$、...、 $r - 1$，数值 a_j^i 是良定义的。注意，在第$r - 1$ 步之后，若$(A_1$、$\ldots A_r$、 $B)$ 未匹配，则对于 $i = 1$、...、 r，有：

- 要么 $|A_i| = k + 1$，要么
- $|A_i| = k$ 且 $(A_1$， $\ldots A_r$， $B)$ 是"步 i"-极大可容许的。

步 r

步骤 r.1. 假设 $(A_1, \ldots, A_r, B)$ 未匹配。令

$$a_r^1 = min\left(\left((A_r \cup B) \setminus \left[1, a_{r-1}^1\right]\right) \cap C_1\right).$$

可能 $(A_r \cup B \setminus \left[1, a_{r-1}^1\right]) \cap C_2 = \emptyset$ 和 a_r^1 未定义。于是我们看到，对于每个 $i = 1, \ldots, r$，都有 $A_i \cap C_1 > 0$。这样的未匹配单形称为步骤 *r.1*－类型 *3*。若 a_r^1 定义良好，则按之前的方法继续。

步骤 r.2. 令

$$a_r^2 = min\left(\left((A_r \cup B) \setminus \left[1, a_{r-1}^2\right]\right) \cap C_2\right).$$

若 a_r^2未定义，则对于 $i = 1, \ldots, r$，有 $A_i \cap C_2 > 0$，这就是步骤 *r.2*－类型 *3* 未匹配单形。否则按之前的方法继续。

步骤 r.2 – r.k+**1**以相同的方式完成。

引理 2.7. 若一个维数为 > 0 的单形$(A_1, \ldots A_r, B)$ 未匹配，则该单形在 $SymmDelJoin(\mathscr{K})$中是极大的。

证明。若一个维数为 > 0 的单形 $(A_1, \ldots A_r, B)$ 未匹配，则有 $|A_r| \geq k$。事实上，若 $(A_1, \ldots A_r, B)$ 始终是步骤 r–类型 3 或类型 1，则在A_r和 $|A_r| = k + 1$中都包含所有颜色。若对于某个 j，单形 $(A_1, \ldots A_r, B)$ 是步骤 $r.j$–类型 2，则它是“步骤 r”极大可容许的，并且 $|A_r| = k$。于是，对于每个 $i = 1, \ldots, r$，都有 $|A_i| \geq k$。此外，由于对于每个 $i = 1, \ldots, r$，要么 $|A_i| = k + 1$，要么 $|A_i| = k$ 且 $(A_1, \ldots A_r, B)$ 是“步骤i”极大可容许的，因此可知 $(A_1, \ldots A_r, B)$ 不是 $SymmDelJoin(\mathscr{K})$ 中任何其他单形的面，故该单形是极大的。因此可知，若单形 $(A_1, \ldots A_r, B)$ 在此过程后未匹配，则它在 $SymmDelJoin(\mathscr{K})$ 中是极大的。■

陈述 1. 除唯一的未匹配零维单形外，所有未匹配单形的顶点数都至少为 $rk + s$。

证明. 令 $(A_1, \ldots A_r, B)$ 为一个未匹配单形。注意，若对于某个 j 有 $|A_j| = k$，则对于缺失颜色 C_{i_j}，$a_j^{i_j}$ 定义良好。设 $\{A_{j_1}, \ldots, A_{j_l}\}$ 是所有 $(k-1)$ 维单形的集合。不失一般性，可以假设对于$i = 1$，.....，r，有 $A_i \in K_i$。此外，若 $|A_j| = k + 1$，则假设 $A'_j = A_j$；若 $|A_j| = k$，则假设 $A'_j = A_j \cup \{a_j^{i_j}\}$。考虑划分 $(A'_1, \ldots..., A'_r, B')$。由于集合 $\langle K_1$, ...，$K_r\rangle$ 是 (r, s)-彩虹不可避免的，因此至少有 s 个单形满足：对于 $j = 1$, ...，s，有 $A'_{i_j} \in K_{i_j}$。注意，由于 $A_j \cup \{a_j^{i_j}\} \notin K_j$，我们从 $(A_1, \ldots A_r, B)$ 中至少有 s 个维数为 k 的单形，因此 $(A_1, \ldots A_r, B)$ 至少是 $(rk + s - 1)$ 维的。■

因此，由定理 2.3 可知，$SymmDelJoin(\mathscr{K})$ 是 $rk + s - 2$ 连通的。现在我们只需证明该匹配不含闭路径。

假设我们有一条梯度路径

$$\alpha_0^p, \beta_0^{p+1}, \alpha_1^p, ..., \beta_m^{p+1}, \alpha_{m+1}^p.$$

对于任意单形 α，我们可以定义一个序列

$$\Pi(\alpha) := (a_1^1, a_1^2, \ldots, a_r^1 \ldots, a_r^{k+1}),$$

其中 a_j^i 来自匹配过程。对于 $j < r$，它们是良定义的。如果 α 在步骤 i中被匹配，那么 a_j^i 是良定义的。如果 a_r^i 未定义，则我们可以假设 $a_r^i = \infty$。

引理 2.8. 梯度路径 $\Pi(\alpha)$ 关于字典序严格递减。由此可知，梯度路径不是闭合的。

证明。 只需对短路径 $\alpha_0^p, \beta_0^{p+1}, \alpha_1^p, \beta_1^{p+1}$. 证明该引理。我们来考虑 4 种情况。

1. 假设匹配对 $\alpha_0^p, \beta_0^{p+1}$ 是通过向 A_j 添加颜色 i 进行匹配的，而 α_1^p 是通过从 A_j中移除颜色 $i' > i$ 得到的。

   - 要么在步骤 $j.i$ 通过从 A_j 中移除颜色 i 来匹配 α_1^p，随后路径在此终止；要么
   - 或 α_1^p 在步骤 $j.i$之前被匹配。

2. 假设通过将颜色 i 添加到 A_j 来匹配配对 $\alpha_0^p, \beta_0^{p+1}$，且 α_1^p 是从 β_0^{p+1} 中移除 A_j的颜色 $i' < i$ 后得到的。那么， α_1^p 在步骤 $j.i$之前被匹配。

3. 假设通过将颜色 i 添加到 A_j 来匹配配对 $\alpha_0^p, \beta_0^{p+1}$，且对于 $j' < j$， α_1^p 是从 β_0^{p+1} 中移除 $A_{j'}$ 的颜色 i' 后得到的。

   - 要么在步骤 j'通过添加颜色 i' 来匹配 α_1^p， i'，要么
   - 或 α_1^p 在步骤 j'之前被匹配， i'。

4. 假设通过将颜色 i 添加到 A_j 来匹配配对 $\alpha_0^p, \beta_0^{p+1}$，且对于 $j' > j$， α_1^p 是从 β_0^{p+1} 中移除 $A_{j'}$ 的颜色 i' 后得到的。

   - 要么通过从 A_j 中移除颜色 i 来匹配 α_1^p，然后路径在此终止；要么
   - 要么在步骤 $j'.i'$之前匹配 α_1^p。

至此，最后一个引理得证。定理 2.1 的证明至此完成。

■

3 关于集体（r， s）-不可避免复形的“单色”Tverberg 定理

我们可以稍作推广定理 1.2，要求面为 (r,s)-不可避免的。

定理 *3.1.* 设 $\mathscr{K}=\langle K_1,\ \ldots,\ K_r\rangle$ 是 Δ^N 的一个集体 (r)，s-不可避免的子复形族，其中 $r=p^\nu$ 是素数的幂。假设 $N=(r-1)(d+2)-s+1$ 且 $m=N+1$。设对每个 $i=1,\ \ldots,\ r,\ K_i$ 都是 (m)，k-平衡的。则对于每个连续映射 $f\colon \Delta^N\to\mathbb{R}^d$，存在 r 个两两不相交的面 $\Delta_1,\ \ldots,\ \Delta_r$，使得 $f(\Delta_1)\cap\ldots\cap f(\Delta_r)\neq\emptyset$，并且对于每个 $i=1,\ \ldots,\ r$ 都有 $\Delta_i\in K_i$。

由于 $\mathscr{K}$ 是 (r)，s-不可避免的，我们得到构形空间 $SymmDelJoin(\mathscr{K})$ 是 $(m-r+s-2)$-连通的。于是 $m-r+s-2\geq(r-1)(d+1)-1$ 等价于 $N\geq(r-1)(d+2)-s+1$。假设 $s=1$，那么我们处于定理 1.2 的条件下。而如果 $s=r$，那么由 (r)，s-不可避免性可知，K_i 正好是 $\Delta_{[m]}$，并且 $N=(r-1)(d+2)-r+1=(r-1)(d+1)$，因此在这种情况下，我们处于拓扑 Tverberg 定理的条件下。注意，参数 k 并未固定，且可能随着 s 的增长而增大。

4 集合的$(r,\ s)$-不可避免性（图论术语）

设 $\mathscr{K}=\langle K_1,\ldots,K_r\rangle$ 是单纯复形的一个集合族。假设对于每个 $i=1,\ldots,r,\ K_i$ 都是 (m,k)-平衡的（或彩虹平衡的）。用 $\mathscr{A}^i$ 表示一个相对补集 $\Delta^{(k)}_{[m]}\setminus K_i$（或 $Col\left(\Delta^{(k)}_{[m]}\right)\setminus K_i$）。$\mathscr{A}^i$ 是集合族 $\{A^i_1,\ldots,A^i_{l_i}\}$。由于 K_i 是 (m,k)-平衡的（或彩虹平衡的），我们看到对于每个 $j=1,\ldots,l_i$ 都有 $|A^i_j|=k+1$。于是对于 $\mathscr{K}$，我们赋予一个图 $\Gamma=\Gamma(\mathscr{K})=(V(\mathscr{K})\ E(\mathscr{K}))$。顶点集 $V(\mathscr{K})$ 是由有序对 (i,j) 构成的集合，其中 $i=1,\ldots,r$，并且对于每个 i，都有 $j=1,\ldots,l_i$。换言之，我们为每个集合 A^i_j 赋予一个顶点。当且仅当 $i\neq i'$ 且 $A^i_j\cap A^{i'}_{j'}=\emptyset$ 时，两个顶点 (i,j) 和 (i',j') 之间由一条边相连。因此，$\Gamma(\mathscr{K})$ 是 r-部 Kneser 图 $KG(\mathscr{A})$。

命题 4.1。 如果 $\mathscr{K}$ 是 (r,s)-不可避免的，那么$\Gamma(\mathscr{K})$中不存在 $(r-s+1)$-顶点团。

证明。 假设逆命题成立。那么就有一组 $r-s+1$ 两两不交集$\{A^{i_1}_{j1},\ldots,A^{i_{r-s+1}}_{j_{r-s+1}}\}$。由于 $A^{i_l}_{jl}\notin K_{i_l}$对每个 $l=1,\ .....,\ r-s+1$ 且 $\mathscr{K}$是 (r,s)-不可避免的，因此产生矛盾。

■

注。 逆命题一般不成立。假设 $m>(k+2)(r-s+1)$，且 $K_i=\Delta^{(k)}_{[m]}$for $i=1,\ldots,r$。那么 $\mathscr{K}=\langle K_1,\ldots,K_r\rangle$是$(m,k)$-平衡的。注意，在 $\Gamma(\mathscr{K})$ 中根本没有顶点，因此也没有$(r-s+1)$-顶点团。但我们有一个划分 $(A_1,\ldots,A_r,B)$，其中 $|A_i|=k+2$for $i=1,\ldots,r-s+1$，且 $A_i=\emptyset$for $i=r-s+2,\ldots,r$。由于 $A_i\notin K_i$for $i=1,\ldots,r-s+1$，可知 $\mathscr{K}$不是(r,s)-不可避免的。

注。在定理 2.1 的情形下，逆命题成立。事实上，假设 K_i 对于 $i = 1, \ldots, r$ 是(m, k)-彩虹平衡的，并且 $\Gamma(\mathscr{K})$ hase no $(r - s + 1)$-顶点团。令 $(A_1, \ldots, A_r, B)$ 为一个彩虹划分。由于所有集合都是彩虹的，我们可知 $|A_i| \leq k + 1$for $i = 1, \ldots, r$。因此，若 $A_i \notin K_i$，则 $A_i \in \mathscr{A}^i$。所以，若不存在$(r - s + 1)$-顶点团，则 $\mathscr{K}$是(r, s)-彩虹不可避免的。

注。 在定理 3.1 中，我们可以将条件“$\mathscr{K}$是 (r, s)-不可避免的”替换为条件“图 $\Gamma(\mathscr{K})$ 不含有 $r - s + 1$ 个顶点的团”。证明保持不变。

5 与先前结果的比较

定理 1.3 是定理 2.1 的一个特例。事实上，设 $K_i = Col\Delta^{(k)}_{[m]}$ for$i = 1, \ldots, s$，且 $K_i = Col\Delta^{(k-1)}_{[m]}$ for $i = s + 1, \ldots, r$。由于 $\Gamma(\mathscr{K})$ 不含有$r - s + 1$ 个顶点的团，我们可知这个单形族是 (r, s)-彩虹不可避免的。

致谢。 我谨感谢 Gaiane Panina 提出问题并给予建议。

参考文献

[1] I. B´ar´any 和 D.G. Larman。Tverberg 定理的一个彩色版本。《伦敦数学学会杂志》，s2-45.2 (1992)，第 314–320 页。[2] I. B´ar´any、S. B. Shlosman 和 A. Sz¨ucs。关于 Tverberg 定理的一个拓扑推广。《伦敦数学学会杂志》，s2-23.1 (1981)，第 158–164 页。[3] P.V.M. Blagojevi´c、F. Frick 和 G. M. Ziegler，《多面体骨架的重心与拓扑 Tverberg 猜想的反例：通过约束》，*J. Eur. Math.Soc. (JEMS)*，21.7 (2019)，第 2107–2116 页。[4] D. Joji´c、I. Nekrasov、G. Panina、R. ˇZivaljevi´c。Alexander r 元组与 Bier 复形，*Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* 104.118 (2018)，第 1–22 页。[5] R. Forman。《离散 Morse 理论入门指南》，*S´em. Lothar. Combin.*48 (2002)，文章 B48c。[6] F. Frick。拓扑 Tverberg 猜想的反例，2015，3 页，arXiv: 1502.00947。[7] D. Joji´c、G. Panina、R. ˇZivaljevi´c。《集体不可避免复形的一个 Tverberg 型定理》，*Isr. J. Math.*，241.2 (2021)，第 17–36 页。[8] D. Joji´c、G. Panina、R. ˇZivaljevi´c。《彩色 Tverberg 定理：拓展与新成果》，*Izvestiya: Mathematics*，86.2 (2022)，第 275 页。

[9] D. Joji´c、S.T. Vre´cica、R. ˇZivaljevi´c。对称多重棋盘复形与一个新的 Tverberg 型定理，《代数组合学杂志》，46 (2017)，第 15–31 页。[10] D. Joji´c、W. Marzantowicz、S.T. Vre´cica、R.T. ˇZivaljevi´c。不可避免复形的拓扑，2018，arXiv:1603.08472 [math.AT]。[11] I. Mabillard、U. Wagner。消去 Tverberg 点，I：Whitney 技巧的一个类比。载于第 *30* 届计算几何年度研讨会论文集（SoCG），京都，2014 年（ACM，2014），第 171–180 页。[12] J. Matousek。《运用博苏克-乌拉姆定理：拓扑方法在组合学与几何学中的讲义》。Universitext，施普林格出版社，海德堡，2003 年（2008 年更正后的第 2 次印刷）。[13] M. J. Milutinovi´c、D. Joji´c、M. Timotijevi´c、S.T. Vre´cica、R.T. ˇZivaljevi´c。《“不可避免复形”的组合学》，arXiv:1612.09487 [math.CO]。[14]H. Tverberg。Radon 定理的一个推广。《伦敦数学学会杂志》，s1-41.1 (1966)，第 123–128 页。[15] A.Y. Volovikov。关于 Tverberg 定理的一个拓扑推广。《数学札记》，59 (1996)，第 324–326 页。[16] R.T. ˇZivaljevi´c。离散几何中的拓扑方法。载于《离散与计算几何手册（第 3 版）》第 21 章。J.E. Goodman、J. O’Rourke 和 C.D. T´oth 编。佛罗里达州博卡拉顿：CRC Press LLC，2017 年，第 551–580 页。CRC Press LLC，佛罗里达州博卡拉顿，2017 年。[17] R. ˇZivaljevi´c 和 S. Vre´cica。关于 Tverberg 定理的一个拓扑推广。《组合理论杂志》*A*辑，61.2 (1992)，第 309–318 页。