二部体群 DOI:
10.1007/978-3-030-00000-0_1

离散多拟阵的除子类群

¨JURGEN HERZOG、Takayuki Hibi、Somayeh Moradi 和 Ayesha Asloob Qureshi

arXiv:2302.12475v2 [math.AC] 8 Jun 2024

Abstract. 本文引入多复形的环面环。我们说明了当环面环正规时，如何计算其除子类群和典范模的类。在多复形为离散多拟阵这一特殊情形下，我们深入研究了若干类多态拟阵的环面环。

Introduction

在前一篇论文中，[8] 作者引入了单纯复形的环面环。本文将这一概念扩展到多复形，并特别关注多态拟阵。

在第 1 节中，我们回顾相关术语和背景知识。在第 2 节中，我们介绍多复形环面环的一般框架，并说明当环面环正规时，如何计算除子类群以及典范模的类。证明方法与 [8] 中所用的方法类似。结果表明，它们的除子类群是一个仅有一个关系的阿贝尔群。

在第 3 节中，当多复形是离散多拟阵时，我们将第 2 节的结果具体化。关于离散多拟阵及其基环，已有许多研究成果。读者可参阅 [5, 7, 10, 11, 12] 及其中的参考文献。本文确定离散多拟阵环面环的除子类群和典范类，并以此为应用，重新得到 [5,例 7.4(b)] 中讨论的 Gorenstein 判据。

第 4 节讨论横截多拟阵。作为主要结果之一，推论 4.7 证明，对于任意整数 $r \geq 1$ 和任意整数 $d \geq 0$，都存在一个横截多拟阵，使其环面环的除子类群同构于 $\mathbb{Z}^{r-1} \oplus \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$。定理 4.9 刻画了环面环的除子类群为有限循环群的横截多拟阵；定理 4.11 则刻画了除子类群同构于 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ 的横截多拟阵。文中还讨论了其他几类横截多拟阵。

在上一节中，我们对环面环为 Gorenstein 的所有 Veronese 型离散多拟阵进行了分类。对于 Veronese 型离散多拟阵的基环，这一分类已在 [3] 中完成。

2010 年数学主题分类。主要分类：13A02；13P10；次要分类：05E40。关键词和短语：环面环、离散多拟阵、类群、典范模。Takayuki Hibi 部分获得 JSPS KAKENHI 19H00637 资助。Somayeh Moradi 获亚历山大·冯·洪堡基金会资助。Ayesha Asloob Qureshi 获土耳其科学技术研究理事会（TUBITAK）资助（项目编号：122F128）。

1. Preliminaries and background

本节回顾本文相关的基本概念。我们用 $\mathbb{Z}_+$ 表示非负整数集，用 $\mathbb{R}_+$ 表示非负实数集。对于 $\mathbb{R}_+^n$ 中的两个向量 $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ 和 $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$，若 $u_i \leq v_i$ 对所有 i 都成立，则记作 $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$。此外，若 $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ 且 $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$，则记作 $\mathbf{u} < \mathbf{v}$。令 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 为 $\mathbb{Z}^n$ 的标准基。底集 $[n]$ 上的多复形是一个非空有限集 $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}_+^n$，满足

(1) 对任意 $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$ 和 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_+^n$，若 $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$，则有 $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$。

(2) 对任意 $1 \leq i \leq n$，$\mathbf{e}_i \in \mathcal{M}$。

注意，$[n]$ 上的单纯复形实际上是由 0、1-向量组成的多复形。

设 $\mathcal{M}$ 是定义在 $[n]$上的多复形。若不存在满足 $\mathbf{v} < \mathbf{w}$ 的 $\mathbf{w} \in \mathcal{M}$，则称向量 $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$ 为 $\mathcal{M}$ 的一个面。$\mathcal{M}$ 的所有面的集合记为 $\mathcal{F}(\mathcal{M})$。若 $\mathcal{F}(\mathcal{M}) = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$，则记作 $\mathcal{M} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$。设 K为一个域。对于向量 $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{M}$，我们在多项式环 $K[x_1, \ldots, x_n]$中定义单项式 $\mathbf{x}^{\mathbf{v}} = \prod_{i=1}^n x_i^{v_i}$。$\mathcal{M}$ 的环面环定义为子代数

$$R_{\mathcal{M}} = K[\mathbf{x}^{\mathbf{v}} t : \mathbf{v} \in \mathcal{M}],$$

多项式环 $S = K[x_1, \ldots, x_n, t]$的。代数 $R_{\mathcal{M}}$ 有一个由 S 的单项式组成的 K-基。若 $f = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} t^k$ 属于 $R_{\mathcal{M}}$，则设 $\deg f = k$。在此分次下，$R_{\mathcal{M}}$ 是一个标准分次 K-代数。

任意单项式 $\mathbf{x}^{\mathbf{v}} t^b \in K[x_1, \ldots, x_n, t]$ 都可以用其指数向量 $(\mathbf{v}\ b) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ 来表示。于是，$R_{\mathcal{M}}$ 的单项式 K-基对应于一个仿射半群$S \subset \mathbb{Z}^{n+1}$，它由 $\mathbb{Z}^{n+1}$ 中的格点 $p_{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{n+1}$ 生成，其中 $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$。

设 $\mathbb{Z}S$ 是包含 S 的 $\mathbb{Z}^{n+1}$ 的最小子群，并设 $\mathbb{R}_+S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是包含 S 的最小锥。在我们的情形下，$\mathbb{Z}S = \mathbb{Z}^{n+1}$。由于我们假设 R 是正规的，戈登引理 [2, 命题 6.1.2] 保证了 $S = \mathbb{Z}^{n+1} \cap \mathbb{R}_+S$。

根据 [1, 推论 4.35]，$R_{\mathcal{M}}$ 中单项式理想的所有极小素理想都是单项式素理想。特别地，它们由 $R_{\mathcal{M}}$ 的生成元 $\mathbf{x}^{\mathbf{v}} t$ 的某些子集生成。此外，由 [1, 命题 2.36 和命题 4.33]可知，$P \subset R_{\mathcal{M}}$ 是 $R_{\mathcal{M}}$ 的单项式素理想，当且仅当存在 $\mathbb{R}_+S$的一个面 $\mathcal{F}$，使得 $P = (x^{\mathbf{v}} t : p_{\mathbf{v}} \notin \mathcal{F})$。换言之，$P$是单项式素理想，当且仅当存在 $\mathbb{R}_+S$ 的一个支撑超平面 H，使得

$$P = (x^{\mathbf{v}} t : \mathbf{v} \in \mathcal{M} \text{ and } f(p_{\mathbf{v}}) > 0),$$

其中 f 是定义 H的一个线性形式。

面的支撑超平面 H 由其一个面的确定是唯一的。由于 H 由格点张成，定义 H 的线性形式 $f = \sum_{i=1}^{n+1} c_i x_i$ 具有有理系数。清除分母后，我们可以假设所有 c_i 都是整数；再将 f 除以 c_i的最大公约数后，我们还可以进一步假设 $\gcd(c_1, \ldots, c_{n+1}) = 1$。于是，这个规范化线性形式 f由 H唯一确定。它具有以下性质：$f(H) = 0$ 且 $f(\mathbb{Z}^{n+1}) \cap \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}_+$。

事实上，由于 $\gcd(c_1, \ldots, c_{n+1}) = 1$，存在 $p = (b_1, \ldots, b_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$，使得 $\sum_{i=1}^{n+1} b_i c_i = 1$，这意味着 $f(p) = 1$。

如果 P是高度为 1 的单项式素理想，那么 $P = (x^{\mathbf{v}}t\colon p_{\mathbf{v}} \notin \mathcal{F})$，其中 $\mathcal{F}$是 $\mathbb{R}_+S$的一个面。令 H 为 $\mathcal{F}$的支撑超平面。那么，我们将定义 H的规范化线性形式称为与 P相关联的支撑形式。

对于向量 $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$，我们令 $|\mathbf{v}| = \sum_{i=1}^n v_i$；对于子集 $A \subset [n]$，我们令 $\mathbf{v}(A) = \sum_{i \in A} v_i$。特别地，$\mathbf{v}(\emptyset) = 0$ 且 $\mathbf{v}([n]) = |\mathbf{v}|$。

底集为 $[n]$ 的离散多拟阵是满足以下性质的多复形 $\mathcal{P}$：若 $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ 和 $w = (w_1, \ldots, w_n)$ 属于 $\mathcal{P}$，且 $|\mathbf{v}| < |\mathbf{w}|$，则存在 $i \in [n]$，使得 $v_i < w_i$，并且 $\mathbf{v} + \mathbf{e}_i \in \mathcal{P}$。

离散多拟阵 $\mathcal{P}$ 的底集秩函数 $\rho\colon\ 2^{[n]} \to \mathbb{Z}_+$ 定义为

$$\rho(A) = \max\{\mathbf{v}(A)\colon \mathbf{v} \in \mathcal{P}\}.$$

$\mathcal{P}$ 的底集秩函数 ρ 具有以下性质：

(i) 当 $A \subseteq B \subseteq [n]$ 时，$\rho(A) \leq \rho(B)$；(ii) 对所有 A、$B \subset [n]$，$\rho(A) + \rho(B) \geq \rho(A \cup B) + \rho(A \cap B)$。

如果非空集合 $A \subseteq [n]$ 满足：对于所有适当地包含 A 的 $B \subseteq [n]$，$\rho(A) < \rho(B)$，则称其为 ρ-闭的；如果存在 A 的非空子集 A_1 和 A_2，满足 $A = A_1 \cup A_2$ 且 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$，使得 $\rho(A) = \rho(A_1) + \rho(A_2)$，则称 A 是可分的。如果一个集合不是可分的，则称其为不可分的。

2. The toric face ring of a multicomplex

本节研究多复形的正规环面环的类群。下面的定理以完全相同的论证推广了 [8, 定理 1.1] 。

定理 2.1. 设 $\mathcal{M}$ 是定义在 $[n]$ 上的多复形，使得 $R = R_{\mathcal{M}}$ 是正规的；设 P_1, ..., P_r 是 (t) 的极小素理想，其中 $t \in R$ 是对应于 $\mathcal{M}$ 中零向量的元素。则 $\mathrm{Cl}(R)$ 由类 $[P_i]$、$i = 1$、...、r 生成。由于 R_{P_i} 是离散赋值环，我们有 $tR_{P_i} = P_i^{a_i} R_{P_i}$，其中 $a_i \in \mathbb{Z}$ 对于 $i = 1$, ..., r 成立。于是，$\sum_{i=1}^r a_i [P_i] = 0$ 是 $\mathrm{Cl}(R)$ 的这些生成元之间唯一的生成关系。

下面的引理和命题是研究 $R_{\mathcal{M}}$ 的典范类所必需的。

引理2.2。（参见 [8, 引理1.6]）设 $\mathcal{M}$ 是 $[n]$ 上的一个多复形，使得 $R = R_{\mathcal{M}}$ 正规；设 P是 R 的一个高度一单项式素理想。此外，设 f是与 P相关联的支撑形式，并设$\mathbf{v}_f = (c_1, \ldots, c_{n+1})$是 f的系数向量。则有：

若 $u \in Q(R)$是指数向量为$\mathbf{v}_u$的单项式，则 $uR_P = P^a R_P$，其中$a = \langle \mathbf{v}_f, \mathbf{v}_u \rangle$. 。这里 $\langle -, - \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$中的标准内积。

命题 2.3。设 $\mathcal{M}$ 是底集为 $[n]$的多复形。对于 $i = 1, \ldots, n$，令 $Q_i = (\mathbf{x}^{\mathbf{v}}t\colon \mathbf{v} \in \mathcal{M}, v_i > 0)$。那么 $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ 是 $R_{\mathcal{M}}$ 的不包含 t 的高度一单项式素理想集合。

证明。对于 $i = 1, \ldots, n$，令 $f_i(\mathbf{x}) = x_i$ 且 $H_i = \{\mathbf{x}: f_i(\mathbf{x}) = 0\}$。我们断言，$H_i$ 是 $\mathbb{R}_+S$ 中某个面的支撑超平面。对于所有 $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$，都有 $f_i(p_\mathbf{v}) = v_i \geq 0$。因此 H_i 是一个支撑超平面，而点 $\mathbf{e}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{e}_i}, \ldots, \mathbf{e}_{n+1}$ 位于该超平面上。这表明 H_i 是 $\mathbb{R}_+S$ 某个面的支撑超平面。因此，$P = (\mathbf{x}^\mathbf{v}t: \mathbf{v} \in \mathcal{M}, f_i(p_\mathbf{v}) > 0)$ 是 $R_\mathcal{M}$ 的高度一单项式素理想，且 $P = Q_i$。

现在，令 P 为 $R_\mathcal{M}$ 的一个高度一单项式素理想，其中 $t \notin P$。首先我们断言，对于某个 i，有 $x_it \in P$。假设情况并非如此。则存在非零的 $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$，使得 $\mathbf{x}^\mathbf{v}t \in P$，并且对任意 $\mathbf{u} < \mathbf{v}$，都有 $\mathbf{x}^\mathbf{u}t \notin P$。令 j 为满足 $v_j > 0$ 的一个整数，并令 $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{e}_j$。那么 $(x^\mathbf{w}t)(x_jt) = (\mathbf{x}^\mathbf{v}t)(t) \in P$，而 $x^\mathbf{w}t \notin P$ 且 $x_jt \notin P$，矛盾。因此断言得证，并且存在 i 使得 $x_it \in P$。取满足 $v_i > 0$ 的 $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$。则 $(\mathbf{x}^\mathbf{v}t)(t) = (x_it)(\mathbf{x}^{\mathbf{v}-e_i}t) \in P$。由于 $t \notin P$，我们有 $\mathbf{x}^\mathbf{v}t \in P$。这表明 $Q_i \subseteq P$。由于 P 和 Q_i 的高度均为一，我们得到 $P = Q_i$。□

令 $\omega_{R_\mathcal{M}}$ 为 $R_\mathcal{M}$ 的典范模。根据 [2, 推论 3.3.19]，$\omega_{R_\mathcal{M}}$ 是一个除子理想，并且对应于锥 $\mathbb{R}_+S$ 的相对内部，见 [2,定理 6.3.5(b)]。令 $P_1 \ldots, P_r$ 为包含 t 的 $R_\mathcal{M}$ 的高度一单项式素理想，并对每个 j，令 f_j 为与 P_j 相关联的支撑形式。令 $\mathbf{v}^{f_j} = (c_{1,j}, \ldots, c_{n+1,j})$ 为 f_j 的系数向量。那么根据命题 2.3，$P_1, \ldots, P_r, Q_1, \ldots, Q_n$ 是 $R_\mathcal{M}$ 的所有高度一单项式素理想的集合。根据 [2, 定理 6.3.5(b)]，我们有

$$\omega_{R_\mathcal{M}} = (\bigcap_{i=1}^{r} P_i) \cap (\bigcap_{j=1}^{n} Q_j). \tag{1}$$

定理 2.4. 设 $\mathcal{M}$ 是底集为 $[n]$ 的一个多复形，且 $R_\mathcal{M}$ 是正规的。那么采用上文引入的记号，我们有

$$[\omega_{R_\mathcal{M}}] = \sum_{j=1}^{r} (1 - c_{1,j} - \cdots - c_{n,j})[P_j].$$

证明。为简化记号，令 $R = R_\mathcal{M}$。由 (1) 可得 $[\omega_R] = \sum_{j=1}^{r} [P_j] + \sum_{k=1}^{n} [Q_k]$。固定一个整数 $1 \leq i \leq n$，令 $[x_i] = \sum_{j=1}^{r} a_j[P_j] + \sum_{k=1}^{n} b_k[Q_k]$。根据 [8, 引理 1.6]，我们有 $a_j = \langle \mathbf{v}^{f_j}, \mathbf{e}_i \rangle = c_{i,j}$，其中 $\mathbf{e}_i \in \mathbb{Z}^{n+1}$ 是一个标准基元素。对于每个 $1 \leq j \leq n$，Q_j 的相应支撑形式为 $f'_j(x) = x_j$（见命题 2.3）。因此 $\mathbf{v}^{f'_j} = e_j$ 并且

$$b_j = \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle = \begin{cases} 1, & \text{if } j = i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此

$$[x_i] = (\sum_{j=1}^{r} c_{i,j}[P_j]) + [Q_i].$$

由此我们得出 $[Q_i] = -\sum_{j=1}^{r} c_{i,j}[P_j]$。这就意味着所需的等式成立。□

注记。将 $\mathcal{M}$ 替换为 $\mathbb{Z}_+^n$ 中包含 e_1、.....、e_n 以及零向量的任意有限向量集时，定理 2.1 仍然成立。

3. The class group and the canonical class of the toric ring of a discrete polymatroid

离散多拟阵是多复形中特殊但重要的一类。本节应用第 2 节的结果来求得离散多拟阵的类群和典范类。

离散多拟阵是特别良好的多复形。事实上，根据 [4] 可知

定理 3.1（Edmonds）。设 $\mathcal{P}$ 为一个离散多拟阵。则 $R_{\mathcal{P}}$ 是正规的。

设 $\mathcal{P}$ 为一个离散多拟阵，并设 $S \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ 为由对应于 $R_{\mathcal{P}}$的生成元 $x^{\mathbf{v}}t$ 的格点生成的仿射半群。我们需要确定定义锥 $\mathbb{R}_+S$的各个面的超平面。

对于每个满足 ρ-闭且 ρ-不可分的 $A \subseteq [n]$，我们考虑由线性形式定义的超平面H_A

$$f_A(x) = -\sum_{i\in A} x_i + \rho(A)x_{n+1}, \tag{2}$$

对于 $i = 1, \ldots, n$，令 H_i 为由线性形式 $f_i(x) = x_i$ 定义的超平面。以下结果对我们的讨论至关重要

定理 3.2 ([4])。超平面 H_A 以及上文引入的超平面 H_i，是附属于多态拟阵 $\mathcal{P}$ 的锥 $\mathbb{R}_+S$ 的各个面的支撑超平面。

我们将由超平面H_A 确定的 $R_{\mathcal{P}}$ 的单项式素理想记为 P_A，并将由超平面 H_i确定的单项式素理想记为 Q_i。

现在我们可以应用第 2 节的结果，得到

定理 3.3。设 $\mathcal{P}$ 是底集为 $[n]$ 的多态拟阵，ρ 是其底集秩函数。设 $\mathcal{A}$ 是 $[n]$ 的所有 ρ-闭且 ρ-不可分子集的集合。则 Cl($R_{\mathcal{P}}$) 由类 $[P_A]$（其中 $A \in \mathcal{A}$）生成。此外，$\sum_{A\in\mathcal{A}} \rho(A)[P_A] = 0$ 是 Cl($R_{\mathcal{P}}$) 的这些生成元之间唯一的生成关系。

特别地，Cl($R_{\mathcal{P}}$) $\cong \mathbb{Z}^{r-1} \oplus \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$，其中 $r = |\mathcal{A}|$和 $d = \gcd\{\rho(A) : A \in \mathcal{A}\}$。

证明。素理想 P_A 恰为 (t) 的极小素理想。因此，带有 $A \in \mathcal{A}$ 的除子类 $[P_A]$ 生成 Cl($R_{\mathcal{P}}$)。由 Edmond定理，P_A 的支撑形式的系数向量为 $\mathbf{v}_A = -\sum_{i\in A} e_i + \rho(A)e_{n+1}$。因此，由定理 2.1 和引理2.2，Cl($R_{\mathcal{P}}$) 的生成关系为 $\sum_{A\in\mathcal{A}} \rho(A)[P_A] = 0$，证毕。

Cl($R_{\mathcal{P}}$) 的群结构可直接由上述陈述得出。□

$R = R_{\mathcal{P}}$ 的典范类有如下表示。

定理 3.4. $[\omega_R] = \sum_{A\in\mathcal{A}}(|A| + 1)[P_A]$.5

证明。令 $\mathbf{v}_A = (c_{1,A}, \ldots, c_{n+1,A})$ 为线性形式 f_A 的系数向量。由 (2) 可得，若 $i \in A$，则 $c_{i,A} = -1$；若 $i \notin A$，则 $c_{i,A} = 0$。因此，定理 2.4 给出了所需结果。□

推论 3.5. $R_{\mathcal{P}}$ 是 Gorenstein，当且仅当存在一个整数 a 使得

$$|A| + 1 = a\rho(A)$$

对所有 ρ-闭且 ρ-不可分的 $A \subseteq [n]$均成立。

证明。环 $R_{\mathcal{P}}$ 是 Gorenstein，当且仅当 $\omega_{R_{\mathcal{P}}}$ 是一个主理想；由定理 3.4 可知，这当且仅当 $\sum_A (|A| + 1)[P_A] = 0$。因此，所需结论由定理 3.3 得出。□

作为第一个例子，考虑任意整数 $d > 0$ 对应的底集为 $[n]$ 的离散多拟阵 $\mathcal{P}_d = \{v\colon\ |v| \le d\}$。当 $\mathcal{P}_d$ 时，唯一的 ρ-闭且 ρ-不可分集合是 $[n]$，且 $\rho([n]) = d$。因此，定理 3.3 蕴含 $\mathrm{Cl}(R_{P_d}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$，由推论 3.5 可知，$R_{\mathcal{P}_d}$ 是 Gorenstein，当且仅当 d 整除 $n+1$。

接下来我们介绍定理 3.3 和推论 3.5 的另一个应用。

例 3.6. 设 $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ 是一个向量，且对于所有 i都有 $v_i \neq 0$，并设

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^n :\ \mathbf{w} \le \mathbf{v}\}.$$

对于非空子集 $A \subseteq [n]$，有 $\rho(A) = \sum_{i \in A} v_i$。因此，对于任意集合 $B \supsetneq A$，$\rho(A) < \rho(B)$。于是，A 是 ρ-闭的。若 $|A| > 1$，则 $\rho(A) = \rho(A \setminus \{i\}) + \rho(\{i\})$，这意味着 A 是 ρ-可分的。因此，$[n]$ 的 ρ-闭且 ρ-不可分的子集为 $\{1\}$、$\{2\}$、…、$\{n\}$。此外，对于 $1 \le i \le n$，有 $\rho(\{i\}) = v_i$。

由定理 3.3，$\mathrm{Cl}(R_{\mathcal{P}}) = \mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$，其中 $d =$为 $\gcd(v_1, \ldots, v_n)$。此外，根据推论 3.5，$R_{\mathcal{P}}$ 是 Gorenstein 的当且仅当 $1 \le v_1 = v_2 = \cdots = v_n \le 2$。

下面的推论给出了拟阵 M 是 Gorenstein 的必要条件。回顾一下，如果图 G 的所有极大独立集都具有相同的基数，则称该图为无混合。

推论 3.7. 设 M 是定义在 $[n]$ 上的拟阵，且 G_M 是定义在 $[n]$ 上的图，其边集为 M的 1-骨架。若 R_M 是 Gorenstein 的，则 G_M 是无混合的。

证明。设 $\rho\colon\ 2^{[n]} \to \mathbb{Z}_+$是 M的底集秩函数，其中

$$\rho(A) = \max\{|A \cap F|\colon F \in M\}.$$

G_M 的极大独立集就是 M的平行类。因此，G_M 的每个极大独立集 A 都是 ρ-闭且 ρ-不可分的，并且 $\rho(A) = 1$。

根据推论 3.5，如果 R_M 是 Gorenstein 的，那么存在一个整数 a，使得对于 G_M的任意极大独立集 A，$|A| + 1 = a\rho(A) = a$。这意味着 G_M是无混合的。□

4. Classes of transversal polymatroids

设 $\mathcal{A}=(A_1,\ldots,A_d)$ 是 $[n]$ 的一个非空子集族，并假设$[n]=A_1\cup\ldots\cup A_d$。若 $i\neq j$，则不要求 $A_i\neq A_j$。定义整数值非递减函数 $\rho_{\mathcal{A}}:2^{[n]}\to\mathbb{Z}_+$ 如下:

$$\rho_{\mathcal{A}}(X)=|\{k\in[n]:X\cap A_k\neq\emptyset\}|,\quad X\subseteq[n].$$

由 [6, 练习 12.2]可知， $\rho_{\mathcal{A}}$ 是次模的，而由 $\rho_{\mathcal{A}}$ 得到的离散多拟阵 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\subset\mathbb{Z}_+^n$ 的基集为

$$B_{\mathcal{A}}=\{e_{i_1}+\cdots+e_{i_d}:i_k\in A_k,1\leq k\leq d\}\subseteq\mathbb{Z}_+^n.$$

称离散多拟阵 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ 为由 $\mathcal{A}$ 表示的横截多拟阵。

定理 4.1. 设 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ 是由 $\mathcal{A}=(A_1,\ldots,A_d)$ 表示的横截多拟阵，并假设存在一个 i 满足 $A_i\not\subseteq\cup_{i\neq j}A_j$。则 Cl($R_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$) 是自由的。

证明. 设 $X=A_i\setminus\cup_{i\neq j}A_j$。则 $X\neq\emptyset$ 是 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭的且 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分。由于$\rho_{\mathcal{A}}(X)=1$，可知 Cl($R_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$) 是无挠的。□

现在，固定 $1<i<n$ ，并用 $\binom{[n]}{i}$ 表示 $[n]$ 的所有 i 元子集的集合。令$\mathcal{P}_{n,i}$ 表示由 $\binom{[n]}{i}$ 表示的横截多拟阵，并令 $\rho_{n,i}$ 表示$\mathcal{P}_{n,i}$的秩函数。

定理 4.2。Cl($R_{\mathcal{P}_{n,i}}$) $=\mathbb{Z}^{r-1}$，其中

$$r=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-i}+1.$$

为了证明定理 4.2，我们需要以下两个引理。第一个很容易验证，因此省略证明。

引理 4.3。设 $X\subseteq[n]$。那么

$$\rho_{n,i}(X)=\begin{cases}\binom{n}{i}-\binom{n-|X|}{i} & (|X|\leq n-i);\\ \binom{n}{i} & (|X|>n-i).\end{cases}$$

引理 4.4。子集 $X\subseteq[n]$ 是 ρ-闭且 ρ-不可分的，当且仅当 $1\leq|X|\leq n-i$ 或 $X=[n]$。

证明。引理 4.3 表明， $X\subseteq[n]$ 是 ρ-闭的，当且仅当 $1\leq|X|\leq n-i$ 或 $X=[n]$。显然，若 $|X|=1$，则 X 是 ρ-不可分的。设 $1<|X|\leq n-i$ 或 $X=[n]$ 且 $X=Y\cup Z$，其中 $Y\neq\emptyset$、$Z\neq\emptyset$ 和 $Y\cap Z=\emptyset$。不妨设 $1\in Y$、$2\in Z$。那么 $\{1,2,\ldots,i\}$ 同时与 Y 和 Z 相交。因此 $\rho_{n,i}(Y)+\rho_{n,i}(Z)>\rho_{n,i}(X)$。于是 X 是 ρ-不可分的。□

定理 4.2 的证明。注意到这些数的最大公约数后，该结论即可由定理 3.3 和引理 4.4 得出:

$$\binom{n}{i}-\binom{n-1}{i},\binom{n}{i}-\binom{n-2}{i},\ldots,\binom{n}{i}-\binom{n-(n-i)}{i},\binom{n}{i}$$

为1。

例4.5。设 $n=7$、 $i=4$。则

$$\binom{7}{4}-\binom{6}{4}=20,\ \binom{7}{4}-\binom{5}{4}=30,\ \binom{7}{4}-\binom{4}{4}=34,\ \binom{7}{4}=35.$$

因此

其中 $r=\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+1=64$。$\mathrm{Cl}(R_{\mathcal{P}_{7,4}})=\mathbb{Z}^{r-1},$

定理4.6. 设 $\mathcal{A}=(\underbrace{A_1\ \dots\ A_1}_{k_1},,,\dots,A_r,\underbrace{\quad\dots\ A_r}_{k_r},)$, 其中 $A_1\subsetneq\cdots\subsetneq A_r=[n]$,

并设 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ 是由 $\mathcal{A}$ 表示的横截多拟阵。那么 $\mathrm{Cl}(R_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}})=\mathbb{Z}^{r-1}\oplus\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, 其中 $d=$ 是 $\gcd(k_1,\dots,k_r)$。

证明。设 $X\subseteq[n]$ 是一个 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭集，并设 i 是满足 $X\cap A_i\neq\emptyset$ 的最小整数。由于 $X\subseteq[n]\setminus A_{i-1}$ 且 $\rho_{\mathcal{A}}([n]\setminus A_{i-1})=\rho_{\mathcal{A}}(X)$，因此有 $X=[n]\setminus A_{i-1}$。于是 $[n],[n]\setminus A_1,\dots,[n]\setminus A_{r-1}$ 是 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭集。此外，每个集合 $[n]\setminus A_i$ 都是 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分的。事实上，有 $\rho_{\mathcal{A}}([n]\setminus A_i)=k_{i+1}+\cdots+k_r$。设 $[n]\setminus A_i=X\cup Y$，其中 $X\cap Y=\emptyset$, $X\neq\emptyset$ 且 $Y\neq\emptyset$。不妨设 $X\cap A_{i+1}\neq\emptyset$。于是 $\rho_{\mathcal{A}}(X)=\rho_{\mathcal{A}}([n]\setminus A_i)$ 且 $\rho_{\mathcal{A}}(Y)\geq k_r$。因此 $\rho_{\mathcal{A}}(X)+\rho_{\mathcal{A}}(Y)>\rho_{\mathcal{A}}([n]\setminus A_i)$，证毕。因此 $\mathrm{Cl}(R_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}})=\mathbb{Z}^{r-1}\oplus\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$，其中 $d=$ 是 $\gcd(k_1,\dots,k_r)$。□

在定理4.6 中选取 k_1、.....、 $k_r=d$，即可得到本节的以下基本结果。

推论 4.7. 给定 $r>0$ 和 $d>0$，存在一个横截多拟阵 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$，使得

$$\mathrm{Cl}(R_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}})=\mathbb{Z}^{r-1}\oplus\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

设 G 是一个定义在 $[n]$ 上的图。若子集 $C\subseteq[n]$ 与 G 的每条边都相交，则称其为 G 的一个顶点覆盖。

例4.8。令 $n\geq3$，并令 G 为定义在 $[n]$ 上、边集为 $\{e_1,\dots,e_s\}$ 的有限简单连通图。假设 G 不是星图 $K_{1,n-1}$（这等价于 $\cap_{i=1}^{s}e_i=\emptyset$）。令 $A_i=[n]\setminus e_i$ 和 $\mathcal{A}=(A_1,\dots,A_s)$。令 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ 为由 $\mathcal{A}$ 表示的横截多拟阵。对任意集合 $X\subseteq[n]$，有 $\rho_{\mathcal{A}}(X)>0$。此外，若 $|X|>2$，则 $\rho_{\mathcal{A}}(X)=s$。若 i 是 G 的叶节点，则 $\rho_{\mathcal{A}}(\{i\})=s-1$。否则，$\rho_{\mathcal{A}}(\{i\})\leq s-2$。令 $i<j$。若 $\{i,j\}$ 是 G 的一条边，则 $\rho_{\mathcal{A}}(\{i,j\})=s-1$。若 $\{i,j\}$ 不是 G 的边，则 $\rho_{\mathcal{A}}(\{i,j\})=s$。因此，集合 $\{i\}$ 是 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭且 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分，当且仅当 $\deg_G(i)\geq2$。此外，$\{i,j\}$ 是 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭，当且仅当 $\{i,j\}$ 是 G 的一条边。令 $\{i,j\}$ 为 G 的一条边，并假设 $\{i,j\}$ 不是 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分的。则 $\rho_{\mathcal{A}}(\{i,j\})=\rho_{\mathcal{A}}(\{i\})+\rho_{\mathcal{A}}(\{j\})$，这说明每条边都包含 i 或 j。换言之，集合 $\{i,j\}$ 是 G 的一个顶点覆盖。因此，集合 $\{i,j\}$ 是 $\rho_{\mathcal{A}}$- 闭且 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分，当且仅当 $\{i,j\}$ 是 G 的一条边，且不是 G 的顶点覆盖。显然，$[n]$ 是 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭。令 $[n]=X\cup Y$，其中 $X\neq\emptyset$,$Y\neq\emptyset$ 和 $X\cap Y=\emptyset$。若 $n\geq5$，则 $|X|>2$ 或 $|Y|>2$。因此，$\rho_{\mathcal{A}}(X)=s$ 或 $\rho_{\mathcal{A}}(Y)=s$。由于 $\rho_{\mathcal{A}}(X)>0$ 且 $\rho_{\mathcal{A}}(Y)>0$，可得 $\rho_{\mathcal{A}}(X)+\rho_{\mathcal{A}}(Y)>s=\rho_{\mathcal{A}}([n])$。因此，$[n]$ 是 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分的。若 $n=3$，由于 $G\neq K_{1,2}$ 且 G 连通，我们有 $G=K_3$。于是，对于 $X=\{1,2\}$ 和 $Y=\{3\}$，有 $\rho_{\mathcal{A}}([3])=\rho_{\mathcal{A}}(X)+\rho_{\mathcal{A}}(Y)$。因此

$[n]$ 是 $\rho_{\mathcal{A}}$-可分的。现在令 $n=4$，并考虑一个非平凡划分 $[n]=X\cup Y$。若 $|X|>2$ 或 $|Y|>2$，则 $\rho_{\mathcal{A}}(X)+\rho_{\mathcal{A}}(Y)>\rho_{\mathcal{A}}([n])$。令 $|X|=|Y|=2$。于是 $\rho_{\mathcal{A}}(X)\geq s-1$ 且 $\rho_{\mathcal{A}}(Y)\geq s-1$，进而 $\rho_{\mathcal{A}}(X)+\rho_{\mathcal{A}}(Y)\geq 2s-2$。由于 G 连通，$s\geq n-1=3$。因此 $2s-2>s=\rho_{\mathcal{A}}([n])$。由此可得，$[n]$ 是 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分的，当且仅当 $n>3$。因此对于 $n>3$, $\mathrm{Cl}(R_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}})$ 是自由的，因为 $s-1$ 和 s 互素，并且至少存在一条边不是 G 的顶点覆盖。此外，$\mathrm{Cl}(R_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}})$ 的秩为 $n-l+m$，其中 l 是 G 的叶节点数，m 是 G 中不属于 G 顶点覆盖的边数。最后，若 $n=3$，则 $\mathrm{Cl}(R_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}})$ 是秩为 2 的自由拟阵。

下面的定理刻画了除子类群为有限群的横截多拟阵。

定理 4.9. 设 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ 是由 $\mathcal{A}=(A_1,\ldots,A_s)$ 表示的横截多拟阵。则 $\mathrm{Cl}(R_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}})=\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$，且 $d>0$，当且仅当 $A_1=\cdots=A_s=[n]$ 且 $s=d$。
证明. 该结果由定理 3.3 和引理 4.10 得出。 □
引理 4.10. 设 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ 是由 $\mathcal{A}=(A_1,\ldots,A_s)$ 表示的横截多拟阵。当且仅当 $A_1=\cdots=A_s=[n]$ 时，$[n]$ 存在唯一的 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭且 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分子集。

证明. 若 $A_1=\cdots=A_s=[n]$，则 $[n]$ 是 $[n]$ 的唯一 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭且 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分子集。

现在，假设存在唯一一个 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭且 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分的子集 $[n]$。由于 $[n]=\cup_{i=1}^{d}A_i$，对于任意 $j\in[n]$，我们有 $\rho_{\mathcal{A}}(\{j\})>0$。因此，对每个元素$j$，集合 $B_j=\{k:\ \rho_{\mathcal{A}}(\{j,k\})=\rho_{\mathcal{A}}(\{j\})\}$ 都是 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭且 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分的。事实上，对于满足 $j\in B$的任意非空子集 $B\subseteq B_j$，有 $\rho_{\mathcal{A}}(B)=\rho_{\mathcal{A}}(\{j\})$。这表明 B_j 是 $\rho_{\mathcal{A}}$- 不可分的。对于满足 $B_j\subsetneq C,$ 的任意集合 C，我们有 $\rho_{\mathcal{A}}(C)>\rho_{\mathcal{A}}(\{j\})=\rho_{\mathcal{A}}(B_j)$。这意味着 B_j 是 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭的。由于只有一个 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭且$\rho_{\mathcal{A}}$-不可分的集合，因此对所有 j 和 k，都有 $\rho_{\mathcal{A}}(\{j\})=\rho_{\mathcal{A}}(\{j,k\})=\rho_{\mathcal{A}}(\{k\})$。所以，对于每个 i，所有元素都属于 A_i，从而每个 A_i 都是 $[n]$。
定理 4.11. 设 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ 是由 $\mathcal{A}=(A_1,\ldots,A_s)$ 表示的横截多拟阵。那么，当且仅当满足以下条件之一时，$\mathrm{Cl}(R_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}})$ 是 $\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$：

(i) 存在一个分解 $[n]=B\cup C$，其中 $B\neq\emptyset$、$C\neq\emptyset$、$B\cap C=\emptyset$ 满足：对某个 $1\leq q<s$，有 $A_1=\cdots=A_q=B$ 且 $A_{q+1}=\cdots=A_s=C$。(ii) 存在一个非空子集 $A\subsetneq[n]$，使得对某个 $1\leq q<s$，有 $A_1=\cdots=A_q=A$ 且 $A_{q+1}=\cdots=A_s=[n]$。

此外，当且仅当 q 和 $s-q$ 互质时，$\mathrm{Cl}(R_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}})=\mathbb{Z}$。如果 q 和 $s-q$ 的最大公约数为 $d>1$，则 $\mathrm{Cl}(R_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}})=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$。
证明。该陈述由定理 3.3 和以下引理得出。□

引理 4.12. 设 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ 是由 $\mathcal{A}=(A_1,\ldots,A_s)$ 表示的横截多拟阵，其中 $(A_1,\ldots,A_s)\neq([n],\ldots,[n])$。当且仅当满足以下条件之一时，$\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ 恰有两个 $\rho_{\mathcal{A}}$- 闭且 $\rho_{\mathcal{A}}$- 不可分的子集：

(i) 存在一个分解 $[n] = B \cup C$，其中 $B \neq \emptyset, C \neq \emptyset, B \cap C = \emptyset$，且每个 A_i 都等于 B 或 C。(ii) 存在一个非空子集 $\Omega \subsetneq [n],$ ，使得每个 A_i 都等于 $[n] \setminus \Omega$ 或 $[n]$。

证明。假设恰有两个 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭且 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分的子集 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$.

首先，假设 $[n]$ 不是 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分的。那么存在一个分解 $[n] = B \cup C$，其中 $B \neq \emptyset$、$C \neq \emptyset$、$B \cap C = \emptyset$，且每个 A_i 都包含于 B 或 C 中。B 和 C 都是 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭的。我们断言，B 和 C 都是 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分的。若比如说 B 不是 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分的，那么存在一个分解 $B = D \cup E$，其中 $D \neq \emptyset$、$E \neq \emptyset$、$D \cap E = \emptyset$，且每个 $A_i \subset B$ 都包含于 D 或 E 中。令 $k \in D$ 和 Y 为 $[n]$ 的唯一极大子集，使得 $k \in Y$，且 $\rho_{\mathcal{A}}(\{k\}) = \rho_{\mathcal{A}}(Y)$。那么 Y 是 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭且与 $Y \subset D$ $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分的。这一观察保证了 D、E 和 C 中每一个都包含 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ 的一个 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭且 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分的子集，矛盾。因此，B 和 C 都是 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭且 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分的。

现在，设 $A_i \subsetneq B$ 和 $j \in B \setminus A_i$。令 X 表示 B 的唯一极大子集，满足 $j \in X$ 且满足 $\rho_{\mathcal{A}}(\{j\}) = \rho_{\mathcal{A}}(X)$。则 X 是 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭的，且与 $X \cap A_i = \emptyset$ $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分。因此，B、C 和 X 都是 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭且 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分的，这与假设矛盾。

其次，假设 $[n]$ 是 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭且 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分的。正如引理 4.10 的证明中所示，对于每个 j，集合 $B_j = \{k : \rho_{\mathcal{A}}(\{j,k\}) = \rho_{\mathcal{A}}(\{j\})\}$ 是 $\rho_{\mathcal{A}}$-闭且 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分的。如果对所有 j都有 $B_j = [n]$，那么 $A_1 = \cdots = A_s = [n]$，但根据我们的假设情况并非如此。因此，存在满足 $B_j \neq [n]$的 j。置 $\Omega = B_j$。那么，对于满足 $B_k \neq [n]$的任意 k，都有 $\Omega = B_k$。因此，$\Omega = \{j \in [n] : B_j \neq [n]\}$，且$j \notin \Omega$ 当且仅当 $j \in \cap_{i=1}^{s} A_i$。所以，对于所有 i，$[n] \setminus \Omega \subseteq A_i$。此外，对于每个 i，我们都有 $\Omega \subset A_i$ 或 $\Omega \cap A_i = \emptyset$。由此可知，对于每个 i，要么 $A_i = [n]$，要么 $A_i = [n] \setminus \Omega$。由于 $[n] = A_1 \cup \cdots \cup A_s$，存在满足 $A_i = [n]$的 i。

另一方面，若满足 (i) 或 (ii)，则显然恰有两个$\rho_{\mathcal{A}}$-闭且 $\rho_{\mathcal{A}}$-不可分的 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$子集。□

5. Gorenstein polymatroids of Veronese type

固定一个整数 d和一个由整数构成的序列 $\mathbf{s} = (s_1, \ldots s_n)$，其中 $1 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n \leq d$ 且$d < \sum_{i=1}^{n} s_i$。Veronese 型 ($\mathbf{s}$ d) 的离散多拟阵为

$$\mathcal{P}_{\mathbf{s},d} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_+^n : v_i \leq s_i, |\mathbf{v}| \leq d\}.$$

令$\rho_{\mathbf{s},\ d} = \rho_{\mathcal{P}_{\mathbf{s},\ d}}$ 表示$\mathcal{P}_{\mathbf{s},\ d}$的秩函数。

推论 3.5 使我们能够对 Veronese 型的 Gorenstein离散多拟阵进行分类。

定理 5.1. 环面环$R_{\mathcal{P}_{\mathbf{s},\ d}}$ 是 Gorenstein 的，当且仅当满足以下条件之一：

(i) 每个 $s_i = 2$ 和 $n = d - 1 \geq 2$;

(ii) 每个 $s_i = 1$ 和 $n = 2d - 1 \geq 3$。

为了证明定理 5.1，我们需要以下结果

引理 5.2。$\rho_{\mathbf{s},\,d}$-闭且 $\rho_{\mathbf{s},\,d}$-不可分的子集分别是 $\{i\}$ 和 $[n]$。此外，$\rho_{\mathbf{s},\,d}(\{i\}) = s_i$ 和 $\rho_{\mathbf{s},\,d}([n]) = d$。

证明。若 $\emptyset \neq A \subset [n]$，则 $\rho_{\mathbf{s},\,d}(A) = \min\{\sum_{i\in A} s_i, d\}$。令 $A \subset [n]$ 满足 $1 < |A| < n$。若 $\rho_{\mathbf{s},\,d}(A) = \sum_{i\in A} s_i$，则 A 不可能是 $\rho_{\mathbf{s},\,d}$-不可分。若 $\rho_{\mathbf{s},\,d}(A) = d$，则 A 不可能是$\rho_{\mathbf{s},\,d}$-闭的。

首先，证明 $[n]$ 是 $\rho_{\mathbf{s},d}$-闭且 $\rho_{\mathbf{s},d}$-不可分。显然，$[n]$ 是 $\rho_{\mathbf{s},d}$-闭的。取满足 $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset$ 的 $[n] = A \cup B$。那么 $\rho_{\mathbf{s},d}(A) = \min\{\sum_{i\in A} s_i, d\}$，且 $\rho_{\mathbf{s},d}(B) = \min\{\sum_{i\in B} s_i, d\}$。因此 $\rho_{\mathbf{s},d}([n]) < \rho_{\mathbf{s},d}(A) + \rho_{\mathbf{s},d}(B)$。由此，$[n]$ 是 $\rho_{\mathbf{s},d}$-不可分的。

其次，证明每个 $\{i\}$ 都是 $\rho_{\mathbf{s},\,d}$-闭且 $\rho_{\mathbf{s},\,d}$-不可分。显然，$\{i\}$ 是 $\rho_{\mathbf{s},\,d}$-不可分。令 $j \neq i$。则 $\rho_{\mathbf{s},\,d}(\{i,j\}) =$ 的最小值为 $\{s_i + s_j, d\}$。由于 $s_i < d$ 且 $s_j > 0$，因此有 $\rho_{\mathbf{s},\,d}(\{i\}) < \rho_{\mathbf{s},\,d}(\{i,j\})$。故 $\{i\}$ 是 $\rho_{\mathbf{s},\,d}$-闭。□

定理 5.1 的证明。由此可知，$R_{\mathcal{P}_{\mathbf{s},\,d}}$ 是 Gorenstein，当且仅当存在一个整数 $a \geq 1$，使得

$$\rho_{\mathbf{s},d}(\{i\}) = s_i = \frac{2}{a}, \quad \rho_{\mathbf{s},d}([n]) = d = \frac{n+1}{a}.$$

令 $a = 1$。则每个 $s_i = 2$ 且 $n = d - 1 \geq 2$。令 $a = 2$。则每个 $s_i = 1$ 且 $n = 2d - 1 \geq 3$，如所需。

References

[1] W. Bruns 和 J. Gubeladze，《多面体、环与 K理论》，数学专著丛书，Springer，多德雷赫特，2009年。[2] W. Bruns 和 J. Herzog，《Cohen–Macaulay 环》，修订版，剑桥高等数学研究丛书，39，剑桥大学出版社，剑桥，1998年。[3] E. De Negri 和 T. Hibi，Veronese 型 Gorenstein 代数，《代数杂志》193（1997年），629–639。[4] J. Edmonds，次模函数、拟阵与某些多面体，载于《组合结构及其应用》（R. Guy、H. Hanani、N. Sauer 和 J. Schonhei m 编），Gordon and Breach，纽约，1970年，69–87。[5] J. Herzog 和 T. Hibi，离散多拟阵，《代数组合学杂志》16（2002年），239–268。[6] J. Herzog 和 T. Hibi，《单项式理想》，数学研究生教材260，Springer 伦敦，2011年。[7] J. Herzog、T. Hibi 和 M. Vladoiu，纤维型理想与多拟阵，《大阪数学杂志》42（2005年），807–829。[8] J. Herzog、S. Moradi 和 A. Asloob Qureshi，单纯复形关联的环面环，预印本，2023年，arXiv:2302.03653。[9] M. Laso´ n 和 M. Micha lek，关于拟阵的环面理想，《数学进展》259（2014年），1–12。[10] D. Lu，满足更强对称交换性质的离散多拟阵，《代数杂志》490（2017年），21–54。[11] J. Schweig，格路拟阵与多拟阵的环面理想，《纯粹与应用代数杂志》215，第11期（2011年），2660–2665。[12] M. Vladoiu，离散多拟阵，《奥维迪乌斯大学年刊（康斯坦察）》14，第2期（2006年），97–120。

Jürgen Herzog, Fachbereich Mathematik, Universität Duisburg-Essen, Campus Essen, 45117 Essen, Germany

电子邮件地址：juergen.herzog@uni-essen.de

Takayuki Hibi, Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University, Suita, Osaka 565-0871,Japan

电子邮件地址：hibi@math.sci.osaka-u.ac.jp

Somayeh Moradi, Department of Mathematics, Faculty of Science, Ilam Univer-sity, P.O.Box 69315-516, Ilam, Iran电子邮件地址：so.moradi@ilam.ac.ir

Ayesha Asloob Qureshi, Sabanci University, Faculty of Engineering and Natural Sciences, Orta Mahalle, Tuzla 34956, Istanbul, Turkey电子邮件地址：
aqureshi@sabanciuniv.edu