arXiv:2302.12583v1 [math.NA] 24 Feb 2023

采用相场法进行延性与脆性断裂抗力的水平集拓扑优化

Nima Noii[a,1]，Hassan Ali Jahangiry [b]，Haim Waisman [c]

[a] 莱布尼茨汉诺威大学连续介质力学研究所，Appelstrasse 11，30167 汉诺威，德国

[b] 塞姆南大学土木工程学院，伊朗塞姆南

[c] 哥伦比亚大学土木工程与工程力学系计算力学组，纽约，美国

接收日期：2023年2月15日

《计算力学与工程方法》

ISSN 0045-7825

摘要

本文提出了一种严格的数学公式，用于对发生延性失效的宏观结构进行拓扑优化。对以塑性变形为主的延性固体材料进行预测是一项颇具挑战性的任务，在各种工程应用中也发挥着极其重要的作用。本文采用断裂相场方法，这是一种广泛用于模拟和计算固体断裂失效现象的框架。首要目标是在考虑结构损伤的同时优化结构拓扑，以使其质量最小化。为此，本文引入了固相与空相之间的拓扑相变函数，从而扩展了所有控制方程。第二个目标是进一步增强结构的抗断裂能力。为此，本文提出了两种不同的公式：一种仅将变形场的残余力向量作为约束；另一种则同时施加变形和相场断裂的残余力向量约束。本文采用一类梯度型耗散材料的增量极小化原理推导控制方程。随后，为获得能够增强结构抗断裂能力的最优拓扑，本文构建了基于水平集的公式。采用基于水平集的拓扑优化，以寻找边界平滑清晰的最优布局。针对这两种公式，本文使用基于解析梯度的伴随法推导灵敏度，以更新水平集曲面。本文通过反应扩散方程演化水平集曲面，在指定设计域体积的条件下使结构应变能最大化。最后，本文给出了若干三维数值算例，以验证所提出的算法。

关键词： 水平集方法、拓扑优化、相场断裂、弹塑性、延性断裂、反应扩散方程。

[1]通讯作者。电子邮箱：noii@ikm.uni-hannover.de（N. Noii）；hassan.jahangiry@gmail.com（H. A. Jahangiry）；waisman@civil.columbia.edu（H. Waisman）。

目录

1. 引言 **2**

2. 弹塑性材料延性断裂的相场建模 **s** **7**

2.1. 主场与函数空间.7 2.2. 几何投影.10 2.3. 延性相场断裂的能量量.10 2.3.1. 弹性贡献.11 2.3.2. 塑性贡献.13 2.3.3. 断裂贡献.13 2.4. 率最小化原理的耗散.14 2.4.1. 塑性耗散.15 2.4.2. 由断裂黏性引起的耗散功率密度.16 2.5. 外部载荷的势能.16 2.6. 断裂弹塑性介质的势泛函.16 2.7. 增量最小化原理的势能.17

3. 断裂弹塑性材料的拓扑优化 19

3.1. 基于反应扩散的水平集方法.19 3.2. 时空有限元离散.21 3.3. 抗断裂拓扑优化.22 3.4. 灵敏度分析.23 3.5. 体积约束对应的拉格朗日乘子.28 3.6. 针对数值不稳定性的滤波方法.29

4. 数值示例 **32**

4.1. 示例1：压缩载荷下的三点弯曲试验 . . . . . 33 4.2. 示例2：混合模式断裂下的L形板测试.36 4.3. 示例 3：压缩载荷下的门式框架结构.42 4.4. 示例4：剪切载荷下的短悬臂梁. 44

5. 结论 **55**

1. 引言

自开创性的先驱研究以来，拓扑优化一直受到学术界 [1, 2], 和工业界 [3, 4], 的广泛关注；近年来，增材制造也取得了重大进展。拓扑优化已成为多个工程领域中实现智能、稳健且轻量化结构的有力工具。事实上，拓扑优化是一种数学方法，旨在寻找满足平衡方程、目标函数和约束函数的最优材料分布，

从定义上看，拓扑优化属于概念设计阶段，可有效确定设计域中构件的数量、连接方式和孔洞的存在与否，并演化设计构件以提升预期性能。

在科学文献中，有几种不同的数值方法可用于拓扑优化 [1, 6, 7]。在最早的研究中 [8], ，研究者通过微结构或均匀化方法获得结构的最大刚度，从而确定结构的最优布局。此后，拓扑优化已广泛应用于众多科学领域。

最常用的拓扑优化方法包括带惩罚的固体各向同性材料（SIMP）技术 [9], 、渐进结构优化（ESO）技术 [10] 以及水平集方法（LSM） [11, 12, 13]。水平集方法的主要优势在于能够直接描述最优几何形状，清晰、平滑地表示界面，实现界面的合并或分裂，抑制棋盘格模式，并避免孤岛现象 [14]。此外，由于获得的布局可直接用于3D打印机，无需任何后处理技术，因此能够加快工业生产进程。文献 [11], 提出的水平集方法是一种多用途方法，可在欧拉坐标系中隐式表示演化界面。研究者已付出诸多努力来开发和改进基于水平集的拓扑优化，更多详情请参见例如 [12, 13, 15, 16, 17, 18, 19], 。采用水平集方法进行拓扑优化的核心思想是通过离散化的隐式动态超曲面表示界面，再使其在速度场作用下演化并趋于最优。

然而，传统的水平集方法无法在设计域中生成孔洞。此外，每次迭代时，还必须重新调整水平集函数，使其满足符号距离特性，这可能不太方便。 [20]。因此，艾伦-卡恩方程 [21] 与相场方法 [22] 已应用于最优设计问题。相场类模型的一个优点是，可以轻松实现设计域中的孔洞成核。这类正则化公式基于李雅普诺夫能量泛函，并采用平滑的双阱势进行公式构建，该势在每个相处均取全局最小值 [22, 23]。相比之下，采用相场方法的主要局限有两点。由于它是一种表面追踪方法，因此无法增加结构中的空洞数量 [23]。此外，双阱势项会使公式具有更强的非线性，因此需要进行足够多次迭代，才能使模型收敛 [23, 24]。此后，受相场概念启发的反应-扩散（R-D）方程 [14] 被引入，用于更新水平集方法的表面，即设计场。从那时起，许多研究致力于采用 R-D 方程取代传统的哈密顿-雅可比（H-J）方程 [20, 24, 25]。R-D 方程相较于相场方法的一个优点是无需再使用双阱势，因此能够灵活地改变结构设计 [24]。为更新设计变量，研究者开发了逐点梯度灵敏度分析，以推导 R-D 方程的法向速度。

在现有文献中，考虑材料非线性（如弹塑性本构响应）和断裂的研究仍然很少。这主要是因为在考虑塑性时，推导路径相关灵敏度面临挑战，而且

断裂响应以及所需的高昂计算模拟成本也带来了困难。Alberdi等人 [26] 开发了一种伴随灵敏度分析框架，用于评估与非弹性材料和动态响应相关、会影响拓扑优化问题的路径相关设计灵敏度，另请参见 [27]。

显然，断裂表现为不断演化的裂纹表面；对于延性固体材料，还可以预期其会出现占主导地位的塑性变形 [28]。在这类材料中，裂纹以较慢的速率演化，并伴随着显著的塑性畸变，从而导致高度的材料非线性。预测由裂纹萌生和扩展引起、且与弹塑性变形耦合的此类失效机制，是一项极具挑战性的任务，并在各种工程应用中发挥着极其重要的作用。

近年来，Francfort 和 Marigo 提出的断裂变分方法及其相关的正则化公式 [29], （通常也称为断裂相场模型，参见例如综述论文 [30, 31], ）已成为对弹性固体中的断裂失效现象进行建模和计算的广泛认可的框架。变分方法基于能量最小化原理 [32, 33, 34], 提出 Γ，其正则化通过 Γ-收敛获得，这一方法从根本上受到了 Mumford 和 Shah 所开展的图像分割工作的启发 [35]。随后，通过建立断裂相场的 Ginzburg-Landau型演化方程 [36]，对该模型进行了改进。此类模型基于长度尺度纳入了非局部效应，这些长度尺度反映了材料微观结构尺寸 相对于宏观结构尺寸的特性。近年来，大量研究已将断裂相场方法扩展至延性情形。其核心思想是将裂纹相场的演化与弹塑性模型耦合起来。该主题的早期研究包括 [37, 38, 39, 40, 41, 42]（概述见 [28, 43] ）。随后，针对延性断裂的相场模型在黏聚摩擦材料 [44] 的背景下得到发展，并涵盖热效应 [45],、纤维拔出行为 [46], 、水力压裂 [47, 48, 49], 、随机分析 [28, 50, 51],、断裂韧度退化 [52], 、多屈服面塑性 [53], 以及多尺度方法 [54, 55, 56, 57]等内容。

尽管已有许多关于拓扑优化的研究，但由断裂引起的失效行为，尤其是延性失效，鲜少受到关注。本研究旨在探讨采用相场框架对断裂进行建模，同时提升结构抗断裂能力的结构拓扑优化。因此，我们将重点放在主要由金属或其他弹性区域相对刚硬、适用于小变形塑性的材料构成的结构上。若能成功将拓扑优化方法扩展至这一领域，将为广泛考虑断裂响应、优化工业增材制造技术的设计域铺平道路。

在文献中，最早研究断裂诱导软化行为的拓扑优化工作之一由 Challis 等人开展。[58], 他们采用虚拟裂纹扩展模型来最大化抗断裂能力，并使用水平集方法优化布局。Kang 等人 [59] 利用 J 积分预测设计域中预定义位置处的裂纹萌生与扩展。许多研究 [60, 61]采用耦合非线性连续体损伤模型，探讨固定载荷和变载荷下最优拓扑设计中的失效缓解。有关提高结构抗断裂能力的拓扑优化研究，感兴趣的读者还可参阅 [62, 63, 64, 65, 66]。近期，相场断裂方法已被用于提高准

脆性复合材料的抗断裂能力，并采用双向渐进结构优化实现功最大化 [67, 68, 69, 70]。Russ 和 Waisman [71] 采用相场断裂方法，在柔度和断裂表面能泛函约束下使用 SIMP 最小化重量，以提高脆性断裂抗力。Wu 等人 [72] 基于反应扩散水平集方法进行拓扑优化，采用相场断裂模型，在体积约束下最大化脆性复合材料的抗断裂能力。Hu 等人 [73] 采用扩展有限元法（扩展有限元法），并通过双向渐进结构优化提高抗断裂能力；其中，将 J 积分准则和平均柔度作为多目标函数，同时规定设计区域的给定体积。

在本研究中，遵循 [28], ，我们基于变分原理，为梯度扩展耗散固体提出了一种脆性与延性相场断裂的变分公式，其根植于增量能量最小化 [74]。塑性与裂纹相场的耦合通过本构功密度函数实现，该函数由退化的储存弹性能以及塑性和损伤导致的累积耗散能表征。因此，我们首先着重于基于拓扑场建立控制方程。为此，我们使用依赖于拓扑场 Heaviside函数的二次函数，为本构方程定义固体区域（材料对应部分）与空域（非材料对应部分）之间的过渡规则。这里采用精确的 Heaviside阶跃函数，有助于消除中间密度和棋盘格模式对最终结果产生的负面影响，并且界面（即零水平集）只会生成切割单元。

Desai 等人 [75] 将断裂相场模型用于脆性材料，其中采用水平集方法，在规定设计域体积的条件下最大化弹性能泛函。本文针对抗断裂能力进行拓扑优化，为此对区域进行分配并初始化多个空洞。由于用多个空洞初始化区域会产生多个奇异区域（拓扑布局中新增了作为空洞的弱单元），因此会在不适当的区域出现多处裂纹萌生。此外，断裂响应与拓扑分析对优化问题产生相反的影响：断裂响应会使结构变弱，而在施加约束后，拓扑分析会使结构变硬 。因此，基于反应扩散的水平集方法旨在使空洞能够在设计域内成核，从而有助于消除由基于Hamilton-Jacobi方程的水平集方法初始化所导致的破坏性断裂效应。

第二个目标是提出一种处理脆性与延性相场断裂的拓扑优化问题数学公式。我们通过基于反应扩散的水平集方法实现这一目标。本文主要关注三维情形。基于水平集的优化问题定义为：在给定结构体积分数（作为预设量）的约束下，使总机械功最大化。由于我们处理的是一个率相关的非线性边值问题（即延性相场断裂），因此采用增量拓扑优化方法来达到目标体积。随后，我们提出两种不同类型的公式。第一种仅将位移场的残余力向量作为约束。此外，在下一种公式中，还要求

同时 施加位移残差形式和相场断裂。第一种类型所需的实现工作较少，并且确实仿照了弹塑性问题拓扑优化的经典 实现方式 [76, 77, 78]。由于第二种公式要求在优化问题中同时施加平衡方程，因此可以更准确地优化设计域。据我们所知，前述研究均未将这些公式用于延性断裂。即使是脆性断裂的拓扑优化，也仅采用了第一种公式，参见 [67, 72, 75]。本文进一步探讨了这些公式的准确性，并着重指出第二种公式的优越性。

在文献中，大多数非线性问题都通过基于梯度的拓扑优化来解决，例如 [77, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87] 等。为此，本文采用位移控制的伴随灵敏度，用于基于梯度的拓扑优化。实现这种耦合伴随灵敏度分析（由耦合塑性与相场断裂引起）的关键要求，是求出目标函数和约束函数相对于拓扑场（即所谓的设计变量）的导数，并以一致的方式进行表述，从而使结构拓扑得以演化。

此外，我们考察了脆性/延性断裂条件下最优布局的效率，并将其与假设为线弹性时获得的最优布局以及原始域进行比较。因此，我们提出定量和定性指标，以突出在拓扑优化框架中考虑断裂平衡的作用。这些指标包括：(*i*) 载荷-位移曲线，用于考察裂纹萌生前的最大承载能力。(*ii*) 裂纹相场模式的定性响应，用于突出每种新拓扑中损伤响应的影响。因此，我们预期最终拓扑构型中的裂纹区域更小。(*iii*) 最后，通过目标函数和体积约束考察优化过程的收敛性，这意味着在特定体积下，材料通过结构的总机械能呈现刚性响应。

本文的主要目标概述如下：

- 推导一种针对相场脆性/延性断裂的新型理论拓扑优化公式；
- 一种用于三维结构抗断裂能力拓扑优化的基于水平集的方法；
- 采用反应扩散方程描述水平集函数的演化；
- 采用解析伴随方法（通过形状导数）推导设计变量的逐点灵敏度；
- 采用精确（二值）Heaviside阶跃函数，准确表示材料相（实体/空洞）。

本文结构安排如下。第 2 节简要概述弹塑性材料中结合相场断裂方法的拓扑优化，并进一步介绍变分框架下

基于增量能量最小化的延性相场断裂模型理论框架。接着，在第 3 节中，我们首先介绍基于反应扩散方程的水平集方法，然后阐述基于伴随方法的灵敏度分析。在第 4 节中，我们开展了四次数值模拟（涉及脆性断裂和延性断裂），以验证所提出算法的正确性。最后，我们给出结论，并就未来研究提出一些评述和建议。

2. 弹塑性材料中延性断裂的相场建模

本节概述了用于对发生延性失效的结构进行断裂抗性拓扑优化的数学框架。我们首先详细介绍主场和函数空间。在此，采用成熟的相场公式对断裂过程进行建模，从而在正则化概念下解析尖锐裂纹表面拓扑。为此，通过引入拓扑场，我们对相场控制方程进行修改，使其适用于拓扑优化框架。由此，推导出与延性相场断裂拓扑优化相关的控制方程。

2.1. 主场和函数空间

设 $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^\delta$ 为任意固体域，$\delta = \{2, 3\}$ 具有光滑边界 $\partial\mathcal{B}$，如图1所示。在此，我们将 $\mathcal{B}$ 记为设计域。我们假设在 $\partial_D\mathcal{B}$ 上施加狄利克雷边界条件，在 $\partial_N\mathcal{B}$ 上施加诺伊曼边界条件：$= \Gamma_N \cup \mathcal{C}$，其中 Γ_N 表示外部域边界，$\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{\delta-1}$ 表示裂纹边界，如图1所示。接下来，我们引入以下主场，以陈述我们的变分公式。

位移场和裂纹相场。断裂固体在材料点 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}$和时间 $t \in \mathcal{T} = [0, T]$ 的响应由位移场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\ t)$和裂纹相场 $d(\boldsymbol{x},\ t)$描述为

$$\boldsymbol{u} : \begin{cases} \mathcal{B} \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}^\delta \\ (\boldsymbol{x}, t) \mapsto \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) \end{cases} \quad \text{and} \quad d : \begin{cases} \mathcal{B} \times \mathcal{T} \to [0, 1] \\ (\boldsymbol{x}, t) \mapsto d(\boldsymbol{x}, t) \end{cases} \quad \text{with} \quad \dot{d} \geq 0. \tag{1}$$

材料的完整状态和完全断裂状态分别由 $d(\boldsymbol{x},\ t) = 0$ 和$d(\boldsymbol{x},\ t) = 1$表征。为了推导变分公式，首先定义以下空间。对于任意 $A \subset \mathbb{R}^\delta$，令

$$\mathrm{H}^1(\mathcal{B}, A) := \{v : \mathcal{B} \times \mathcal{T} \to A \quad : \quad v \in \mathrm{H}^1(A)\}. \tag{2}$$

We a还将Sobolev向量值空间 $\mathbf{H}^1(\mathcal{B},\ A) := [\mathrm{H}^1(\mathcal{B},\ A)]^\delta$ 记为并定义

$$\mathcal{W}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{u}} := \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^1(\mathcal{B}, \mathbb{R}^\delta) : \ \boldsymbol{u} = \mathbf{0} \text{ on } \partial_D^0\mathcal{B} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \text{ on } \partial_D^1\mathcal{B}\}. \tag{3}$$

对于裂纹相场，令

$$\mathcal{W}^d := \mathrm{H}^1(\mathcal{B}) \quad \text{and} \quad \mathcal{W}_{d^n}^d := \{d \in \mathrm{H}^1(\mathcal{B}, [0, 1]) : \ d \geq d^n\}, \tag{4}$$

其中，d^n 为前一时刻的损伤值。请注意，$\mathcal{W}_{d^n}^d$ 是 $\mathcal{W}^d$的一个非空、闭且凸的子集，并赋予相场以演化特性，同时以增量形式引入不可逆条件。

拓扑场。为详细说明拓扑场（亦称设计变量），将设计域 $\mathcal{B}$ （参考域）划分为可容许实体设计域（亦称材料域），记为 $\Omega \subset \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{\delta}$；其余区域则为空域（亦称非材料域），记为 $\mathcal{Y} := \mathcal{B} \backslash \Omega \subset \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{\delta}$，因此 $\mathcal{B} = \Omega \cup \mathcal{Y}$，见图 2。接下来，我们可以假设可容许实体设计域 Ω 受给定的两个体积分数 $0 \leq \Theta_1 \leq \Theta_2 \leq 1$ 限定，使得

$$\Theta_1 \mathrm{V}(\mathcal{B}) \leq \mathrm{V}(\Omega) \leq \Theta_2 \mathrm{V}(\mathcal{B}) \quad \text{with} \quad \mathrm{V}(\bullet) = \int_{\bullet} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{5}$$

在拓扑优化中，目标是寻找最优固体设计域 Ω，使其在给定的一组（理论/实际）约束下令目标函数最小化。任何具有有限周长的集合 Ω 都可以用连续指示场表示，即所谓的拓扑场。因此，目标函数的最小化问题便从确定最优固体设计域 Ω 转化为寻找一个记作 $\Phi(\boldsymbol{x}, t)$ 的拓扑场。因此，我们定义拓扑场 $\Phi(\boldsymbol{x}, t): \mathcal{B} \times \mathcal{T} \rightarrow [-1, 1]$，根据式 (5)，它可简化为：

$$\Theta_1 \mathrm{V}(\mathcal{B}) \leq \widehat{\mathrm{V}}(\Omega) \leq \Theta_2 \mathrm{V}(\mathcal{B}) \quad \text{with} \quad \widehat{\mathrm{V}}(\Omega) = \int_{\mathcal{B}} \mathrm{H}(\Phi(\boldsymbol{x}, t)) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{6}$$

我们将设计变量的 Heaviside函数定义为拓扑 $\mathrm{H}(\Phi(\boldsymbol{x}, t)): \mathcal{B} \times \mathbb{T} \rightarrow [0, 1]$。其中，$\mathcal{B}$ 中材料相与非材料相这两个相之间的直接映射，通过精确的 *Heaviside*函数进行近似；对于特征点 $\boldsymbol{x}$，定义 $\mathrm{H}(\Phi(\boldsymbol{x}, t)) = 1 \text{ if } \boldsymbol{x} \in \Omega$，且 $\mathrm{H}(\Phi(\boldsymbol{x}, t)) = 0 \text{ if } \boldsymbol{x} \in \mathcal{Y}$。我们注意到，对于所有 $n \geq 1$，$\mathrm{H}^n(\Phi) = \mathrm{H}(\Phi)$。值得注意的是，为确定体积分$\widehat{\mathrm{V}}(\Omega)$，可以利用式 (6) 中的 $\mathrm{V}(\Omega)$，求得函数 $\Phi(\boldsymbol{x}, t)$ 在整个区域上的体积分。因此，与 SIMP方法不同，无需像式 (5) 那样显式地$\widehat{}$确定最优固体域 Ω，从而得到 $\mathrm{V}(\Omega) = \mathrm{V}(\Omega)$。

需要注意的是，$\boldsymbol{x} \in \Omega$ 的特征材料点表示为$\Phi(\boldsymbol{x}, t) > 0$，而特征空域（非材料点）则表示为 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{Y}$ $(\Phi, t) < 0$。此外，$\Phi(\boldsymbol{x}, t) = 0$（即零水平集）表示材料界面（即材料边界），也称为 Γ_{Φ}，它是在给定区域 $\mathcal{B}$中用于区分材料点集与非材料点集的曲面，见图 2。最后，拓扑场的集合定义为以下空间：

$$\mathcal{W}_{\Phi}^{\Phi} := \{\Phi \in \mathrm{H}^1(\mathcal{B}, [-1, 1]) : \Phi = 1 \text{ on } \partial_D^1 \mathcal{B}\}. \tag{7}$$

硬化场和塑性应变。聚焦于 von Mises 塑性理论的等容设定，我们将塑性应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}^p(\boldsymbol{x}, t)$ 和硬化变量$\alpha(\boldsymbol{x}, t)$定义为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p : \begin{cases} \mathcal{B} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^{\delta \times \delta}_{\mathrm{dev}} \\ (\boldsymbol{x}, t) \mapsto \boldsymbol{\varepsilon}^p(\boldsymbol{x}, t) \end{cases} \quad \text{and} \quad \alpha : \begin{cases} \mathcal{B} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (\boldsymbol{x}, t) \mapsto \alpha(\boldsymbol{x}, t) \end{cases} \quad \text{with} \quad \dot{\alpha} \geq 0, \tag{8}$$

其中 $\mathbb{R}^{\delta \times \delta}$ 偏差$:= \{\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^{\delta \times \delta} : \boldsymbol{e}^T = \boldsymbol{e}, \mathrm{tr}[\boldsymbol{e}] = 0\}$ 是由零迹对称二阶张量组成的集合。塑性应变张量被视为局部内变量

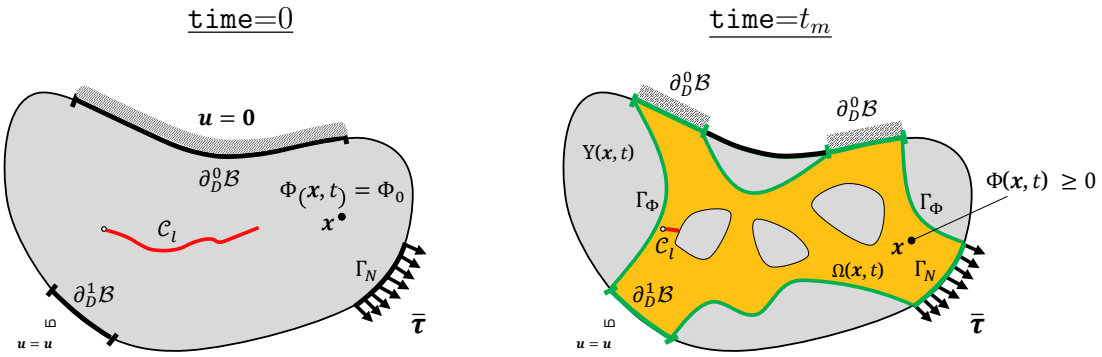


图1：设计域 $\mathcal{B}$ 的设置，其由可容许实体设计域 $\Omega(\boldsymbol{x},\ t)$（材料域）和空域 $\mathcal{Y}(\boldsymbol{x},\ t)$（非材料域）组成。

，而硬化变量可视为非局部内变量。特别是，可引入 α 以纳入唯象硬化响应和/或非局部效应，其演化方程为

$$\dot{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{3}}\,|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p|, \tag{9}$$

予以考虑。因此，α 可视为等效塑性应变，它从初始条件 $\alpha(\boldsymbol{x},\ 0)=0$开始演化，其中我们假设 $\boldsymbol{\varepsilon}^p\in\mathbf{Q}:=\mathrm{L}^2(\mathcal{B};\ \mathbb{R}^{\delta\times\delta}{}_{\text{偏}})$。此外，由式 (9) 可知，$\alpha$ 具有不可逆性。本节假设采用梯度扩展塑性的设定，并定义函数空间

$$\mathcal{W}^\alpha_{\alpha_n,\,\boldsymbol{q}}:=\{\alpha\in\mathcal{W}^\alpha\quad:\quad\alpha=\alpha_n+\sqrt{2/3}\,|\boldsymbol{q}|,\ \boldsymbol{q}\in\mathbf{Q}\}, \tag{10}$$

其中，局部塑性对应 $\mathcal{W}^\alpha=\mathrm{L}^2(\mathcal{B})$，而梯度塑性对应 $\mathcal{W}^\alpha=\mathrm{H}^1(\mathcal{B})$。因此，通过设定 $\alpha\in\mathcal{W}^\alpha_{\alpha_n,\ \boldsymbol{\varepsilon}^p-\boldsymbol{\varepsilon}^p_n}$，以增量形式施加硬化定律 (9)。

位移场的梯度定义了几何线性理论中的对称应变张量：

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\nabla_s\boldsymbol{u}=\mathrm{sym}[\nabla\boldsymbol{u}]:=\frac{1}{2}[\nabla\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{u}^T]. \tag{11}$$

鉴于小应变假设以及塑性应变的等体积性质，应变张量可加性地分解为弹性部分 $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ 和塑性部分 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$：

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^e+\boldsymbol{\varepsilon}^p\quad\text{with}\quad\mathrm{tr}\,[\boldsymbol{\varepsilon}]=\mathrm{tr}\,[\boldsymbol{\varepsilon}^e]. \tag{12}$$

该固体 $\mathcal{B}$ 受到指定变形和边界上的外部牵引力作用，分别由时变狄利克雷条件和诺伊曼条件定义

$$\boldsymbol{u}=\overline{\boldsymbol{u}}\ \text{on}\ \partial_D\mathcal{B}\quad\text{and}\quad\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}=\overline{\boldsymbol{\tau}}\ \text{on}\ \partial_N\mathcal{B}, \tag{13}$$

其中，$\boldsymbol{n}$是曲面 $\partial\mathcal{B}$上的外向单位法向量。应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 是与 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 热力学对偶的量，$\bar{\boldsymbol{\tau}}$ 是给定的牵引向量。

2.2. 几何投影

基于水平集的拓扑优化中，一个重要环节是将几何形状映射到结构模型，这会影响对收敛设计行为的预测。几何映射将离散水平集函数定义的几何形状投影到提供结构响应的结构模型上。最常用的方法是欧拉方法，也称为密度分布法，该方法使材料在固定的离散域中演化。在基于水平集的拓扑优化中，Heaviside函数和Dirac-δ 函数是两个重要组成部分，分别用于体积积分和边界积分。基于拓扑场的精确Heaviside函数如下:

$$\mathrm{H}\left(\Phi(\boldsymbol{x},t)\right)=\begin{cases}1 & \text{if } \boldsymbol{x}\in\Omega\rightarrow\Phi\left(\boldsymbol{x}\right)\geq 0\\ 0 & \text{if } \boldsymbol{x}\in\mathcal{Y}\rightarrow\Phi\left(\boldsymbol{x}\right)<0,\end{cases} \tag{14}$$

根据定义， [88], Dirac-δ 函数是 $\mathrm{H}(\Phi(\boldsymbol{x},t))$ 沿法向方向 $\widehat{\boldsymbol{n}}_{\Phi}$ 的方向导数，其定义为

$$\delta(\boldsymbol{x})=\nabla(\Phi(\boldsymbol{x},t))\cdot\widehat{\boldsymbol{n}}_{\Phi}\quad\text{with}\quad\widehat{\boldsymbol{n}}_{\Phi}=\frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|} \tag{15}$$

因此，根据（15），材料界面与 Dirac-δ 函数的关系为

$$\Gamma_{\Phi}(\boldsymbol{x})=\left\{\boldsymbol{x}\,:\;\delta(\Phi(\boldsymbol{x}))>0\right\}, \tag{16}$$

随后，通过定义精确的 Heaviside函数和 Dirac-δ 函数，我们现在可以为 Ω 中的任意函数 $F(\boldsymbol{x})$ 以及$\mathcal{Y}$ 定义积分规则:

$$\int_{\Omega}F(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\mathcal{B}}F(\boldsymbol{x})\mathrm{H}(\Phi)\mathrm{d}\boldsymbol{x},\quad\text{and}\quad\int_{\mathcal{Y}}F(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\mathcal{B}}F(\boldsymbol{x})\big(1-\mathrm{H}(\Phi)\big)\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{17}$$

此外，通过 Dirac-δ 函数，全区域 $\mathcal{B}$ 上的积分可近似为趋向其外部曲面$\partial\mathcal{B}$ 的积分:

$$\int_{\partial\mathcal{B}}F(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\int_{\mathcal{B}}F(\boldsymbol{x})\delta(\Phi)\left|\nabla\Phi\right|\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{18}$$

2.3. 延性相场断裂的能量量

此处，延性断裂模型基于相场建模的一种几何构思方法构建，并遵循 [28,74] 中所述的局部塑性理论。原始模型是在变分一致框架内构建的，与增量能量最小化原理相符。在这种情况下，为了构建基于拓扑的韧性断裂模型，我们定义

$$\text{Global Primary Fields}:\;\mathfrak{U}:=\left\{\boldsymbol{u},d,\Phi\right\}, \tag{19}$$

以及本构状态变量集合为

$$\text{Constitutive State Variables}:\;\mathfrak{C}:=\left\{\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^{p},\alpha,d,\nabla d,\nabla\Phi\right\}. \tag{20}$$

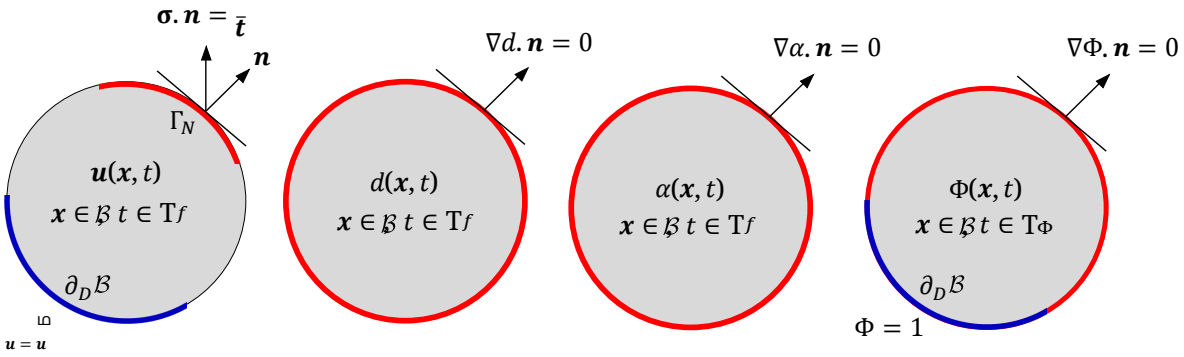


图 2：拓扑优化延性相场断裂中的主要变量场，适用于维度为 $\delta \in [2,3]$ 的固体 $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{\delta}$。（$a$）位移场 $\boldsymbol{u}$ 定义在 $\mathcal{B}$ 上，牵引力的诺伊曼型边界条件为 $\bar{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$。（$b$）裂纹相场由 $\mathcal{C}$ 上的狄利克雷型边界条件 $d = 1$ 以及完整曲面 $\partial\mathcal{B}$ 上的诺伊曼型边界条件 $\nabla d \cdot \boldsymbol{n} = 0$ 确定。（c）硬化变量 α 位于 $\mathcal{B}$ 中，在整个区域内连续，并满足诺伊曼型边界条件 $\nabla\alpha \cdot \boldsymbol{n} = 0$。（$d$）拓扑场 Φ 由 $\partial_D^1\mathcal{B}$（非零规定载荷曲面）上的狄利克雷型边界条件 $\Phi = 1$，以及完整曲面 $\partial\mathcal{B}$ 上的诺伊曼型边界条件 $\nabla\Phi \cdot \boldsymbol{n} = 0$ 确定。

（见图 2）。为推导变分公式，我们定义单位体积的能量密度函数 $W(\mathfrak{C})$。因此，在固定点处，总能量函数可加性地分解为弹性贡献 $W_{elas}(\cdot)$、塑性贡献 $W_{plas}(\cdot)$ 和断裂贡献 $W_{frac}(\cdot)$，从而得到

$$W(\mathfrak{C}) := W_{elas}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, d, \alpha, \Phi) + W_{plas}(\alpha, d, \nabla\alpha, \Phi) + W_{frac}(d, \nabla d, \Phi). \tag{21}$$

接下来，在已知单位体积伪能量密度函数的情况下，可以将速率相关的伪势能泛函写为

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha, d, \Phi) := \int_{\mathcal{B}} W(\mathfrak{C})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\ , \tag{22}$$

相应地，为了推导变分公式，需要定义本构能量密度函数，即 W_{elas}、W_{plas} 和 W_{frac}，下文将对此进行讨论。

2.3.1. 弹性贡献。 式（21）中的弹性能量密度 W_{elas} 用有效应变能密度 $\psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)$ 表示。在我们的公式中，为避免受压断裂，将有效应变能密度分解为可损伤 部分和不可损伤 部分。因此，我们将应变张量加性分解为改变体积 （体积变形）部分和保持体积（偏量）部分

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}^{e,vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{e,dev}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}),$$

其中

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\varepsilon}^{e,vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) := \mathbb{P}^{vol} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad \text{with} \quad \mathbb{P}^{vol}_{ijkl} := \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}, \\
&\boldsymbol{\varepsilon}^{e,dev}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) := \mathbb{P}^{dev} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad \text{with} \quad \mathbb{P}^{dev} := \mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad \text{and} \quad \mathbb{I}_{ijkl} := \frac{1}{2}\big(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\big)\ ,
\end{aligned} \tag{23}$$

以及分别表示为 $I_1(\boldsymbol{\varepsilon}^e) := \mathrm{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^e]$和 $I_2(\boldsymbol{\varepsilon}^e) := \mathrm{tr}[(\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2]$ 的弹性应变的第一和第二不变量。有效应变能函数 $\psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)$ 可加地分解为可损伤贡献和不可损伤贡献:

$$\psi_e(I_1(\boldsymbol{\varepsilon}^e), I_2(\boldsymbol{\varepsilon}^e)(\boldsymbol{x})) = \psi_e^+(I_1, I_2) + \psi_e^-(I_1), \tag{24}$$

使得

$$\psi_e^+ = H^+[I_1]\psi_e^{vol}\big(I_1\big) + \psi_e^{dev}\big(I_1, I_2\big) \quad \text{and} \quad \psi_e^- = \big(1 - H^+[I_1]\big)\psi_e^{vol}\big(I_1\big). \tag{25}$$

其中，$H^+[I_1(\boldsymbol{\varepsilon}^e)]$ 是一个正*Heaviside*函数，当$I_1(\boldsymbol{\varepsilon}^e) > 0$ 时返回1，当 $I_1(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \leq 0$ 时返回0。需要指出的是，本文中能量的体积变形项和偏量项具有以下形式:

$$\psi_e^{vol}\big(I_1\big) = \frac{K}{2}I_1^2 = \frac{K}{2}\Big(\boldsymbol{\varepsilon}^{e,vol} : \boldsymbol{I}\Big)^2 \quad \text{and} \quad \psi_e^{dev}\big(I_1, I_2\big) = \mu\Big(\frac{I_1^2}{3} - I_2\Big) = \mu\boldsymbol{\varepsilon}^{e,dev} : \boldsymbol{\varepsilon}^{e,dev}, \tag{26}$$

这里，$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0$ 是体积模量，其中包含弹性Lam´e第一常数（记为 λ ）和剪切模量 μ。伪能量（21）的总弹性贡献最终为

$$W_{elas}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, d, \alpha) := f(\Phi)\Big[g(d)\psi_e^+(I_1, I_2) + \psi_e^-(I_1)\Big], \tag{27}$$

其中，$g(d)$是弹性退化函数，其形式为简单的二次函数: :

$$g(d) = (1 - \kappa)(1 - d)^2 + \kappa, \tag{28}$$

其中，κ 是所谓的替代材料参数（设为一个很小的量），用于避免数值不稳定性；从数学上说，它也取决于离散空间，参见 [89]。此外，为了定义点 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}$在$\Omega$中的固体区域与空域 $\mathcal{Y}$ 之间的过渡规则，以用于本构方程，我们将二次函数 $f(\Phi)$定义为所谓的拓扑相变函数，如下所示:

$$f(\Phi) = (1 - \kappa)\mathrm{H}(\Phi)^2 + \kappa, \tag{29}$$

使得

- 在区域的固体部分（$\Phi \geq 0$）以及完整区域（$d \approx 0$）中，得到$W_{elas}(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \approx \psi_e(\boldsymbol{\varepsilon})$,
- 在区域的空洞部分（$\Phi < 0$）中，得到 $W_{elas}(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \approx 0$。

第一个方程对应于准静态响应中的线动量平衡，其定义如下

$$\boxed{\mathrm{div}\,[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, d, \Phi)] + f(\Phi)\overline{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{0}\ ,} \tag{30}$$

其中忽略了动力效应，且 $\boldsymbol{f}$ 为给定的体力。按照Coleman-Noll过程，由式（27）中的势能 W_{elas} 可得应力张量:

$$\boldsymbol{\sigma} := \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}^e} W_{elas} = f(\Phi)\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}_e) = f(\Phi)\left[g(d)\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_+ + \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_-\right], \tag{31}$$

其中，

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{+}(\boldsymbol{\varepsilon}_e) = K\mathrm{H}(I_1)(\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{I})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^{e,dev}, \quad \text{and} \quad \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}(\boldsymbol{\varepsilon}_e) = K\big(1 - \mathrm{H}(I_1)\big)(\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{I})\mathbf{I}. \tag{32}$$

其中，$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$（$\boldsymbol{\varepsilon}_e$）为固体材料应力张量，$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\pm}$ 分别为有效正应力张量和负应力张量。为将功表示为应力张量和应变张量的共轭对，通过应力张量的加性分解得到四阶弹性张量的解耦表示，具体如下：

$$\mathbb{C} := \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_e)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = f(\Phi)\left[g(d)\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{+}(\boldsymbol{\varepsilon}_e)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{-}(\boldsymbol{\varepsilon}_e)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right] =: f(\Phi)\left[g(d)\widetilde{\mathbb{C}}^{+} + \widetilde{\mathbb{C}}^{-}\right], \tag{33}$$

其中 $\widetilde{\mathbb{C}}^{+}$，且 $\widetilde{\mathbb{C}}^{-}$ 分别为可损伤和不可损伤对应项的四阶弹性张量，见第 2.4.1 节。

2.3.2. 塑性贡献。塑性贡献 W_{plas} 用有效塑性能量密度 ψ_p表示，其形式取决于所采用的唯象模型。与先前研究 [28, 90], 一致，我们在局部冯·米塞斯塑性框架下考虑一个势函数：

$$\psi_p(\alpha, \nabla\alpha) := \frac{1}{2}h\alpha^2(\boldsymbol{x}, t), \tag{34}$$

其中各向同性硬化模量为 $h \geq 0$。因此，伪能量密度（21）中的塑性贡献可写为

$$W_{plas}(\alpha, d, \nabla\alpha) := f(\Phi)g(d)\psi_p(\alpha), \tag{35}$$

其中，$g_p(d) = g(d)$ 是塑性退化函数，另有拓扑相变函数 $f(\Phi)$。若塑性贡献与弹性贡献采用不同的退化函数，参见 [28]。

2.3.3. 断裂贡献。相场贡献 W_{frac} 由裂纹表面能量密度 γ_l 和控制正则化的断裂长度尺度参数 l_f 表示。具体而言，尖锐裂纹表面拓扑 $\mathcal{C}$ 通过泛函 $\mathcal{C}_l$进行正则化，如 [91, 92]所述。正则化泛函为

$$\mathcal{C}_l(d) = \int_{\mathcal{B}} \gamma_l(d, \nabla d)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{36}$$

为保证裂纹耗散为正：

$$\frac{d}{dt}\mathcal{C}_l(d) \geq 0\,. \tag{37}$$

根据标准相场模型 [33, 93], ，定义关于 $\gamma_l(d,\ \nabla d)$ 的一般表面密度函数为

$$\gamma_l(d, \nabla d) := \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{l_f} + l_f \nabla d \cdot \nabla d\right). \tag{38}$$

最后，通过引入拓扑相变函数$f(\Phi)$，将式（21）中伪能量密度的断裂贡献修改为适用于本文拓扑优化问题的形式，如下所示

$$W_{frac}(d, \nabla d, \Phi) = f(\Phi)[1 - g(d)]\ \psi_c + 2f(\Phi)\psi_c\, l_f\ \gamma_l(d, \nabla d)\ , \tag{39}$$

其中， $\psi_c > 0$ 为所谓的临界断裂密度能。临界弹性密度函数取决于临界有效应力 σ_c 或格里菲斯能量释放率 G_c，如 [94]所述

$$\psi_c = \frac{\sigma_c^2}{2E} = \frac{3}{8l_f\sqrt{2}}G_c \,. \tag{40}$$

对(21)取变分导数 $\delta_d W$ 并进行一些额外的代数运算，可推导出率相关情形下用于抗断裂性拓扑优化的第二个偏微分方程：

$$\boxed{\eta_f f(\Phi)\dot{d} = (1-d)f(\Phi)\mathcal{H} - \Big[f(\Phi)d - l_f^2\,\mathrm{div}[f(\Phi).\nabla d]\Big]\,,} \tag{41}$$

以及在 $\partial\mathcal{B}$上的 $f(\Phi)\nabla d \cdot \boldsymbol{n} = 0$。这里， η_f 是一个材料参数（也称为迁移率参数），用于表征断裂状态的黏性响应，参见[33, 95]。此外，我们注意到，推导中使用了以下恒等式：

$$\delta_d\left[f(\Phi)\gamma_l\right] = f(\Phi)\delta_d\gamma_l - l_f\nabla d \cdot f(\Phi) \quad \text{with} \quad \delta_d\gamma_l = \frac{1}{l_f}(d - l_f^2\Delta d) \tag{42}$$

这里，裂纹驱动力函数表示为 $\mathcal{H}(\boldsymbol{x},\ t)$，其形式为：

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{x},t) := \max_{s\in[0,t]} \widetilde{D}\big(\boldsymbol{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{x},s)\big) \quad \text{with} \quad \widetilde{D} := \zeta\Big\langle \frac{\psi_e^+ + \psi_p}{\psi_c} - 1\Big\rangle, \tag{43}$$

其中，麦考利括号表示斜坡函数 $\langle x\rangle := (x+|x|)/2$。我们注意到，~裂纹驱动力 D 基于有效量计算（即不包含退化函数），参见 [95] 第3.1.2—3.1.3节。此外，值得注意的是，如果在(41)中令 $f(\Phi) = 1$，即可恢复相场断裂的标准演化方程，如 [95]所示。还需注意， $\mathcal{H}(\boldsymbol{x},\ t)$确保满足局部不可逆性条件˙（断裂耗散为正），从而避免裂纹愈合，即 $d \geq 0$[96]。此外， $\zeta \geq 0$ 是一个缩放参数，为公式引入了更大的灵活性，从而能够调节临界后范围，使其更好地符合实验结果（参见 [28]）。

2.4. 率最小化原理的耗散

发生断裂的弹塑性材料中的标准耗散固体，其梯度理论由两个标量本构函数支配，分别为能量储存函数和耗散函数。在上一节中，我们介绍了内能储存；本节将进一步阐述材料的耗散响应。与能量密度泛函类似，材料耗散响应可加性地分解为塑性变形部分，以及由断裂演化引起的黏性部分：

$$\mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\mathfrak{C}}}) = \mathcal{D}_{plas}(\dot{\boldsymbol{\mathfrak{C}}}) + \mathcal{D}_{vis}(\dot{\boldsymbol{\mathfrak{C}}}). \tag{44}$$

接下来，我们将说明耗散势各组成部分的具体贡献。

2.4.1. 塑性耗散。 基于最大耗散原理，塑性耗散势密度函数对弹塑性材料和耗散材料的本构方程施加了重要限制。这一限制源于耗散力空间中可逆（弹性）域 内的热力学第二定律（克劳修斯–普朗克不等式）。定义相对于主场 $\{\boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha\}$ 的对偶驱动力 $\{\boldsymbol{s}^p, -\mathfrak{h}^p\}$ ，并将 Coleman-Noll过程应用于自由能密度函数 (21)，可得以下热力学共轭变量：

$$\boldsymbol{s}^p := -\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}^p} W = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_e, \Phi) = f(\Phi)\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}_e) \quad \text{and} \quad \mathfrak{h}^p := \delta_\alpha W = f(\Phi) g(d)\, h\alpha \,. \tag{45}$$

我们注意到，式（45）中的本构方程通过拓扑相变函数 $f(\Phi)$ 进行了修正。与弹塑性的经典设定一致，屈服函数定义为

$$\beta^p(\boldsymbol{s}^p, \mathfrak{h}^p, d, \Phi) := \sqrt{3/2}\,|\boldsymbol{F}^p| - \mathfrak{h}^p - f(\Phi) g(d) \sigma_Y \quad \text{with} \quad \boldsymbol{F}^p := \operatorname{dev}[\boldsymbol{s}^p] = \boldsymbol{s}^p - \frac{1}{3}\operatorname{tr}[\boldsymbol{s}^p]\mathbf{I}. \tag{46}$$

给定屈服函数，塑性响应的耗散势密度函数为

$$\widehat{\Phi}_{plas}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\alpha}, d, \Phi) = \sup_{\{\boldsymbol{s}^p, \mathfrak{h}^p\}} \{\boldsymbol{s}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathfrak{h}^p \dot{\alpha} \mid \beta^p(\boldsymbol{s}^p, \mathfrak{h}^p; d) \leq 0\}, \tag{47}$$

按照 [28] 经过一些代数运算后，我们可以将式（47）写为：

$$\widehat{\Phi}_{plas}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\alpha}, d, \Phi) = \begin{cases} \sqrt{2/3} f(\Phi)\, g(d) \sigma_Y |\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p| & \text{if } \ |\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p| = \sqrt{3/2}\,\dot{\alpha}, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{48}$$

该式源自最大塑性耗散原理，并通过$f(\Phi)$进行了修正。对不等式函数（48）取上确界，可得到塑性演化问题的原始表示这一必要条件，其形式为一个 Biot型方程：

$$\{\boldsymbol{s}^p, -\mathfrak{h}^p\} \in \partial_{\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\alpha}\}} \widehat{\Phi}_{plas}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\alpha}, d, \Phi). \tag{49}$$

极大化原理（47）的欧拉方程给出了相应的流动法则和硬化定律

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda^p \hat{\boldsymbol{n}} \quad \text{with} \quad \hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{s}^p}, \quad \text{and} \quad \dot{\alpha} = -\lambda^p \frac{\partial \beta}{\partial \mathfrak{h}^p}, \tag{50}$$

以及 KKT条件

$$\beta^p \leq 0, \qquad \lambda^p \geq 0, \qquad \text{and} \qquad \beta^p\, \lambda^p = 0. \tag{51}$$

方程（50）和（51）构成了强形式弹塑性问题的所谓对偶形式。最后，塑性流动的耗散势泛函定义为

$$\mathcal{D}_{plas}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\alpha}, d, \Phi) = \int_{\mathcal{B}} \widehat{\Phi}_{plas}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{52}$$

为完整起见，利用式（50），式（33）中的四阶弹性张量可写为:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{C}}^{+} &= KH^{+}(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} + 2\mu(1-3\mu\delta_1)\mathbb{P}^{dev} + 6\mu^2(\delta_1-\delta_2)\hat{\boldsymbol{n}}\otimes\hat{\boldsymbol{n}},\\ \mathbb{C}^{-} &= K\big(1-H^{+}(\boldsymbol{\varepsilon})\big)\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}\ ,\end{aligned} \tag{53}$$

带有缩放因子

$$\delta_1 = \frac{\lambda^p}{\sqrt{3/2}||\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{dev}|| + 3\mu\lambda^p} \quad \text{and} \quad \delta_2 = \frac{1}{3\mu+H}\ , \tag{54}$$

参见 [97]，了解有关塑性计算方法的更多详情。

备注 2.1. 请注意，出于实现目的，我们令任意 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{Y}$ 均处于弹性区域，因此我们简单地设定 $\beta^p(\boldsymbol{s}^p,\boldsymbol{\mathfrak{h}}^p;\,d)<0$，若 $f(\Phi)=\kappa$ 成立，或若简单地有 $H(\Phi)<0$ 成立。

2.4.2. 断裂黏性导致的耗散功率密度。 按照 [28, 33]Φ_{vis} 表示断裂部分因黏性阻力产生的耗散功率密度，记为 $\Phi_{vis}^{frac}(\dot{d})$，其表达式为:

$$\widehat{\Phi}_{vis}(\dot{d},\Phi) = f(\Phi)\left[\frac{\eta_f}{2}\dot{d}^2(\boldsymbol{x}) + I_{+}(\dot{d})\right], \tag{55}$$

这已在式（41）中给出。根据 [33]，引入了示性函数 $I_{+}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$，以施加 $d\in\mathcal{W}_{d_n}^{d}$ 中包含的不可逆条件。与前文相同，黏性导致的耗散功率密度的全局率势为

$$\mathcal{D}_{vis}(\dot{d},\Phi) := \int_{\mathcal{B}}\widehat{\Phi}_{vis}(\dot{d},\Phi)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{56}$$

2.5. 外部载荷的势能

假设宏观连续体域受到宏观外场作用。因此，假设宏观体力记为 $\boldsymbol{f}$，通过拓扑相变函数表示力学贡献时，表面 $\partial_N\mathcal{B}$ 上的牵引场记为 $\boldsymbol{\tau}$。于是，外部载荷所做的力学贡献功为:

$$\mathcal{E}_{ext}(\dot{\boldsymbol{u}},\Phi) := \int_{\mathcal{B}} f(\Phi)\overline{\boldsymbol{f}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial_N\mathcal{B}} f(\Phi)\overline{\boldsymbol{\tau}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\ \mathrm{d}a, \tag{57}$$

2.6. 断裂弹塑性介质的势泛函

在此，调用速率型变分原理 [98, 99]，即可根据能量泛函（22）、耗散泛函（44）和外部势（57）推导断裂弹塑性固体的控制方程。因此，断裂弹塑性固体材料的能量泛函需要满足以下势泛函形式

$$\Pi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p,d,\dot{\alpha},\Phi) := \frac{d}{dt}\mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,d,\alpha) + \mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p,d,\dot{\alpha}) - \mathcal{E}_{ext}(\dot{\boldsymbol{u}}), \tag{58}$$

速率相关梯度扩展能量泛函的极小化原理在固定拓扑构型下（因此，$\Phi(\boldsymbol{x},t)$ 是先验给定的，从而可以在最小化问题中将$\Phi(\boldsymbol{x},t)$与其他主场区分开来）可写为以下紧凑形式

$$\boxed{(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p,d,\dot{\alpha}) = \arg\Big\{\inf_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{W}_{\overline{\boldsymbol{u}}}^{\boldsymbol{u}}}\ \inf_{d\in\mathcal{W}^d}\ \inf_{\{\boldsymbol{\varepsilon}^p,\alpha\}\in\mathbf{Q}\times\mathcal{W}_{\alpha_n,\,\boldsymbol{q}}^{\alpha}}\Pi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p,d,\dot{\alpha};\Phi)\Big\},} \tag{59}$$

2.7. 增量最小化原理的势能

本节采用式（59）中一类梯度型耗散材料的增量最小化原理来推导控制方程。设加载区间 $\mathcal{T}_f := (t_0, T_f)$ 用以下离散时间（加载）点进行离散

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \ldots < t_N = T_f, \tag{60}$$

终止时间值为 $T_f > 0$。参数 $t \in \mathcal{T}_f$ 表示时间。我们注意到，对于率无关问题，时间对应于增量加载参数。为了在特定时间步内推进解，我们关注有限时间增量 $[t_n, t_{n+1}]$，其中

$$\tau_f = t_{n+1} - t_n > 0, \tag{61}$$

表示时间步。为了针对当前时间 t_{n+1} 表述增量变分原理，并利用 t_n处已知的场，我们需要详细说明有限时间步 $[t_n, t_{n+1}]$内的增量储能、耗散势以及外力功。式（59）中的全局率势形式 $\Pi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha, d;\ \Phi)$与我们近期研究中的表述一致[28]，，可针对时间增量 $[t_n, t_{n+1}]$写成增量能量形式 $\Pi^\tau(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha, d;\ \Phi)$，即

$$\begin{aligned} \Pi^\tau(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, d, \alpha, \Phi) :&= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Pi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, d, \dot{\alpha}, \dot{\Phi})\ \mathrm{d}t \\ &= \mathcal{E}^\tau(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, d, \alpha, \Phi) + \mathcal{D}^\tau(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, d, \dot{\alpha}, \Phi) + \mathcal{E}^\tau_{ext}(\boldsymbol{u}, \Phi), \end{aligned} \tag{62}$$

可进一步展开为

$$\begin{aligned} \Pi^\tau(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, d, \alpha, \Phi) = &\int_{\mathcal{B}} \Big(W(\boldsymbol{\mathfrak{C}}) - W(\boldsymbol{\mathfrak{C}}_n) \Big)\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &+ \int_{\mathcal{B}} \Big(\tau_f \widehat{\Phi}^\tau_{vis} + \tau_f \widehat{\Phi}^\tau_{plast} + I_+(d - d_n) \Big)\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &+ \int_{\mathcal{B}} f(\Phi) \overline{\boldsymbol{f}} \cdot (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n)\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial_N \mathcal{B}} f(\Phi) \overline{\boldsymbol{\tau}} \cdot (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n)\ \mathrm{d}a, \end{aligned} \tag{63}$$

其中，黏性效应导致的增量耗散功率密度为

$$\Phi^\tau_{vis} = f(\Phi) \left[\frac{\eta_f}{2\tau_f^2} (d - d_n)^2 + I_+(d - d_n) \right], \tag{64}$$

而增量塑性耗散势为

$$\widehat{\Phi}^\tau_{plas}(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha, d; \boldsymbol{\varepsilon}^p_n, \alpha_n, \Phi) = \frac{1}{\tau_f} \sup_{\{\boldsymbol{s}^p, \boldsymbol{\mathfrak{h}}^p\}} \{ \boldsymbol{s}^p : \big(\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^p_n\big) - \boldsymbol{\mathfrak{h}}^p \big(\alpha - \alpha_n\big) \ \mid\ \beta^p(\boldsymbol{s}^p, \boldsymbol{\mathfrak{h}}^p, d) \leq 0 \}. \tag{65}$$

以流动法则和硬化定律表示的欧拉方程增量形式如下：

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}^p_n + \tau_f \lambda^p \frac{\partial \beta^p}{\partial \boldsymbol{s}^p} \quad \text{and} \quad \alpha = \alpha_n + \tau_f \lambda^p \frac{\partial \beta^p}{\partial \boldsymbol{\mathfrak{h}}^p}, \tag{66}$$

在时间 t_n。此外，塑性流动的方向进一步定义为

$$\hat{\boldsymbol{n}} := \frac{\partial \beta^p}{\partial \boldsymbol{s}^p} = \hat{\boldsymbol{n}}^{trial} = \frac{\boldsymbol{F}^{p,trial}}{|\boldsymbol{F}^{p,trial}|} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{|\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p|} \tag{67}$$

其中，根据冯·米塞斯塑性的标准论证，$\boldsymbol{F}^{p,\,trial} := \boldsymbol{F}^p(\boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{\varepsilon}_n^p,\ d)$。因此，给定式（65）的增量塑性耗散势变为

$$\widehat{\Phi}^{\tau}_{plas}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\alpha}; d, \Phi) = \begin{cases} \sqrt{2/3}\, g_p(d) f(\Phi) \sigma_Y |\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p| & \text{if } \ |\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p| = \sqrt{3/2}\,(\alpha - \alpha_n), \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{68}$$

详细推导见 [28] 第2.3节。根据式（63）给出的增量势，式（59）中典范率相关变分原理的时间离散对应形式可简洁地写为:

$$\boxed{(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, d, \alpha) = \arg\big\{ \inf_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{W}^{\boldsymbol{u}}_{\overline{\boldsymbol{u}}}} \ \inf_{d \in \mathcal{W}^d} \ \inf_{\{\boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha\} \in \mathbf{Q} \times \mathcal{W}^{\alpha}_{\alpha_n,\, \boldsymbol{q}}} \Pi^{\tau}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, d, \alpha; \Phi) \big\}.} \tag{69}$$

最后，我们通过以下抽象公式，求解最小化问题（69）的驻定条件。

公式2.1（延性相场断裂欧拉-拉格朗日方程的弱形式）。设常数（$K, \mu, H, \sigma_Y, \psi_c, l_f, \zeta, \eta_f$）$\geq 0$以及初始条件$\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}$（$\boldsymbol{x}$,0）、$\boldsymbol{\varepsilon}_0^p = \boldsymbol{\varepsilon}^p$（$x$, 0）、$\alpha_0 = \alpha$（$x$, 0）和 $d^0 = d$（$\boldsymbol{x}$, 0）均已给定，对于满足 Φ的固定拓扑场，在时间增量 $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$内，求解位移方程，其中我们寻求 $\boldsymbol{u}_{_} := \boldsymbol{u}^n \in \mathcal{W}^{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{u}}$，使其满足给定的固定 $\Phi \in \mathcal{W}^{\Phi}_{\Phi}$

$$\int_{\mathcal{B}} \left[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, d, \Phi) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \boldsymbol{u}) - f(\Phi) \overline{\boldsymbol{f}} \cdot \delta \boldsymbol{u} \right] d\boldsymbol{x} - \int_{\partial \mathcal{B}_N} f(\Phi) \overline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \delta \boldsymbol{u}\, da = 0 \quad \forall\, \delta \boldsymbol{u} \in \mathcal{W}^{\boldsymbol{u}}_0 \ . \tag{70}$$

需要通过相场变分公式求得 $d := d^n :\ \mathcal{B} \in \mathcal{W}^d_{d_{n-1}}$，其中$\Phi \in \mathcal{W}^{\Phi}_{\Phi}$ 固定，且满足

$$\int_{\mathcal{B}} \left[\left(f(\Phi)(1-d)\mathcal{H} - d + \frac{\eta_f}{\Delta t}(d - d^n) \right) \delta d - l_f^2 f(\Phi) \nabla d \cdot \nabla(\delta d) \right] d\boldsymbol{x} = 0 \ \ \forall\, \delta d \in \mathcal{W}^d. \tag{71}$$

以及 $\nabla d \cdot \boldsymbol{n} = 0$ 在 $\partial \mathcal{B}$上。这就形成了一个耦合多场问题，其定义为方程 *(70)* 和 *(71)*，并结合 *(66)* 求解；在 Φ固定时，求解$(\boldsymbol{u}, d)$ 。

注释 2.2。至此，我们考虑了固体的延性相场断裂：其先呈现弹塑性响应，随后发生损伤（下文记为 *E-P-D*）；或者先呈现弹性响应，随后转为弹塑性响应，最后进入塑性损伤状态（下文记为 *E-P-DP*）。若要将模型简化为脆性断裂响应，只需施加 $\sigma_Y \to \infty$（下文记为*E-D*），使屈服面变为负值。

3. 断裂弹塑性材料的拓扑优化

受等式/不等式约束的固体拓扑优化数学公式如下:

$$\Phi = \underset{\Phi \in \mathcal{W}_{\Phi}^{\Phi}}{\operatorname{argmin}} \left\{ [\, \mathfrak{J}(\mathfrak{U})] \quad | \quad \mathfrak{R}(\mathfrak{U}) = 0 \quad \text{and} \quad \mathfrak{G}(\mathfrak{U}) \leq \bar{G} \right\} \tag{72}$$

对于未知参数 Φ，其中

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(\mathfrak{U}) &= \int_{\mathcal{B}} \widehat{F}(\boldsymbol{u}, d, \Phi) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad \text{with} \quad \widehat{F}(\boldsymbol{u}, d, \Phi) = F(\boldsymbol{u}, d, \Phi) \mathrm{H}^{c_1}(\Phi), \\ \mathfrak{R}(\mathfrak{U}) &= \int_{\mathcal{B}} \widehat{R}(\boldsymbol{u}, d, \Phi) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad \text{with} \quad \widehat{R}(\boldsymbol{u}, d, \Phi) = R(\boldsymbol{u}, d, \Phi) \mathrm{H}^{c_2}(\Phi), \\ \mathfrak{G}(\mathfrak{U}) &= \int_{\mathcal{B}} \widehat{G}(\boldsymbol{u}, d, \Phi) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad \text{with} \quad \widehat{G}(\boldsymbol{u}, d, \Phi) = G(\boldsymbol{u}, d, \Phi) \mathrm{H}^{c_3}(\Phi). \end{aligned} \tag{73}$$

这里，$\mathfrak{J}(\mathfrak{U})$ 是一个泛函（即所谓的目标泛函），其密度函数为 F，对应于结构设计域 $\mathcal{B}$ 内的全局主场 $\mathfrak{U}$。最小化问题受等式约束泛函 $\mathfrak{R}(\mathfrak{U})$ 的约束，其密度为 R，同时还受到不等式约束泛函 $\mathfrak{G}(\mathfrak{U})$ 的约束，其密度为 G。这里，Heaviside阶跃函数的惩罚参数集合（c_1, c_2, c_3）用于通过进一步惩罚材料点到空洞的转变规则来（i）求解结构分析，并用于（ii）避免灵敏度分析中的奇异性。然而，需要特别指出的是，由于本文采用了精确的 Heaviside阶跃函数，因此在此使用惩罚参数的唯一优点是避免奇异性，而不是影响结构分析。我们注意到，在本例中，根据（29）中的拓扑相变函数，设定 $c_1 = c_2 = c_3 = 2$。这里，为求解（72），采用水平集方法结合基于梯度的方法，即所谓的伴随方法。

3.1. 基于反应扩散的水平集方法

基于反应扩散的拓扑优化是一种成熟的界面演化建模技术。在这种方法中，与典型的 SIMP公式 [8, 9] 不同，材料分布由标量水平集函数 $\Phi(\boldsymbol{x},\ t) \in \mathcal{W}_{\Phi}^{\Phi}$ 表征，参见第 2.1 节。考虑边界材料 $\Gamma_{\Phi}(\boldsymbol{x},\ t) = \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 的闭合移动前沿，该前沿由超曲面 $\Phi(\boldsymbol{x}, t)$ 的零水平集表示，即 $\overline{\Gamma}_{\Phi}(\boldsymbol{x},\ t) = \{\boldsymbol{x} :\ \Phi(\boldsymbol{x},\ t) = 0\}$。为确定界面的运动/速度，可以对 $\Gamma_{\Phi}(\boldsymbol{x},\ t)$ 应用链式法则，从而得到以下 Hamilton-Jacobi 方程:

$$\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{x}, t)}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \Phi, \tag{74}$$

其中，$\boldsymbol{v}$ 是闭合移动前沿的速度场。由于外法线方向由 $\widehat{\boldsymbol{n}} = \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|}$ 给出，因此 Hamilton-Jacobi方程可以替换为:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \Phi = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \Phi \cdot \frac{|\nabla \Phi|}{|\nabla \Phi|} = \boldsymbol{v} \cdot |\nabla \Phi| \cdot \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} = \boldsymbol{v} \cdot \widehat{\boldsymbol{n}}_{\Phi} \cdot |\nabla \Phi| = \widehat{v}_{\Phi} \, |\nabla \Phi| \,, \tag{75}$$

其中， $\widehat{v}_\Phi = \boldsymbol{v}.\widehat{\boldsymbol{n}}_\Phi$ 是界面的法向速度场。方程（75）是通过改变零水平集来描述闭合前沿的标准水平集演化方程。采用 Hamilton-Jacobi 方程的传统水平集方法存在诸多局限，例如需要频繁初始化，而初始点会影响最终拓扑；需要重新构造符号距离函数；时间步受 Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件影响；以及在产生孔洞时可能出现不稳定性。这些局限会影响最终拓扑的准确性。为此，已有研究提出如下反应扩散演化方程： [14, 100]

$$\underbrace{\eta_\Phi \dot{\Phi}}_{\text{拓扑场更新}} = \underbrace{\widehat{v}_\Phi(\Phi)}_{\text{拓扑灵敏度}} + \underbrace{l_\Phi^2 \nabla^2 \Phi}_{\text{正则化}} \quad in\ \mathcal{B}. \tag{76}$$

式（76）中的拓扑反应-扩散方程定义在区域 $\mathcal{B}$ 中，并施加齐次诺伊曼边界条件：

$$\nabla \Phi \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad on\ \partial\mathcal{B}. \tag{77}$$

此处， l_Φ 为正则化参数，即所谓的拓扑特征长度。此外， η_Φ 表示拓扑黏度。添加扩散项 $l_\Phi \nabla^2 \Phi$ 作为一种蒂洪诺夫正则化技术，可增强稳定性和平滑性，并使边界 [14, 101]定义明确。

备注 3.1. 事实上，由于拓扑特征长度 l_Φ 充当反应扩散方程解的正则化指标，因此，选择较小的l_Φ 值（其取决于离散尺寸）会得到更平滑的拓扑，但一些狭窄的构件会被移除。因此，最终拓扑包含更多全局空洞，局部空洞则更少。详细讨论请参见 *[14]*。

接下来，对式 (76) 进行时间离散化，以推导出增量拓扑优化；由于延性相场断裂具有非线性，因此需要进行此操作。在这里，与式 (60) 中路径相关延性断裂所需的实时时间相比，我们在拓扑优化过程中处理的是对式 (76) 进行时间离散化的伪时间。设伪时间区间 $\mathcal{T}_\Phi := (t_0, T_\Phi)$ 通过以下离散伪时间进行离散：

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} < \ldots < t_M = T_\Phi, \tag{78}$$

终端伪时间值为 $T_\Phi > 0$。为了在特定时间步内推进解，我们关注有限时间增量 $[t_m, t_{m+1}]$，其中

$$\tau_\Phi = t_{m+1} - t_m > 0, \tag{79}$$

表示拓扑优化迭代中的伪时间步。为构建增量拓扑优化公式，我们旨在确定当前伪时间 t_{m+1} 下的拓扑场 $\Phi(\boldsymbol{x}, t)$ ，该拓扑场与 t_m 时已知的场相关。因此，式（76）中反应扩散方程的变分公式如下：

公式3.1（反应扩散方程的 Euler-Lagrange 方程弱形式）。设常数 $(l_\Phi,\ \eta_\Phi) \geq 0$ 已给定，且初始条件为 $\Phi^0 = \Phi(\boldsymbol{x},\ 0)$ 对于一个

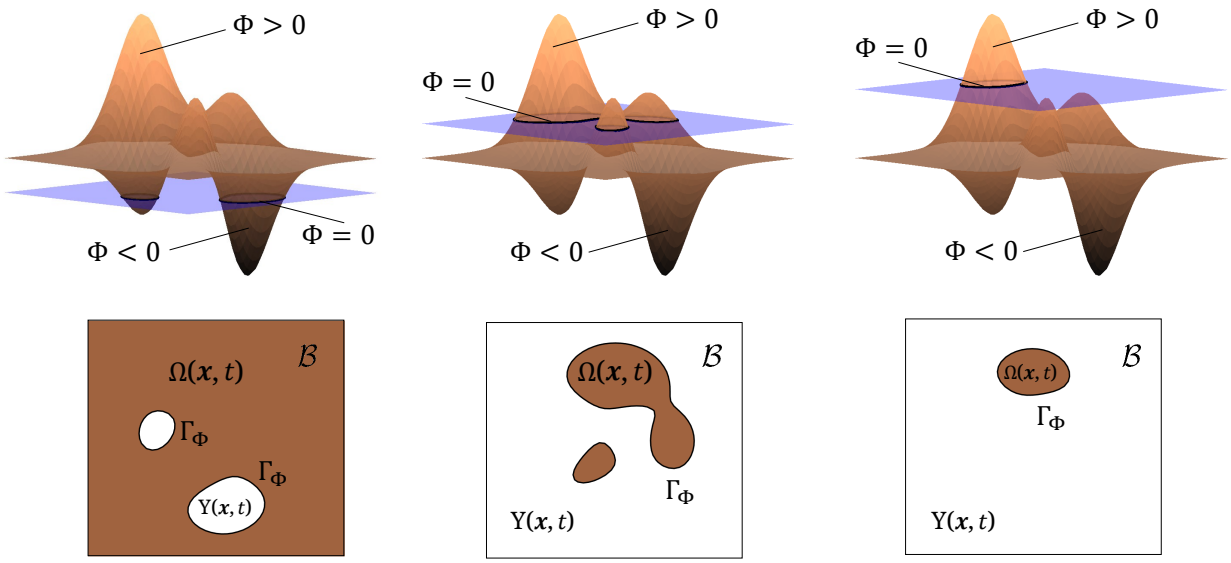


图3：基于拓扑场的水平集几何参数化 $\Phi(\boldsymbol{x},\ t)$。

固定的 （$\boldsymbol{u}$、 d、 α）。对于时间增量 $m \in \{1, 2, \ldots, M\}$，我们求解一个反应扩散方程，其中求 $\Phi: = \Phi^m \in \mathcal{W}_\Phi^\Phi$ 使得 $-$

$$\int_{\mathcal{B}} \left[\left(\widehat{v}_\Phi(\Phi) - \frac{\eta_\Phi}{\tau_\Phi}(\Phi - \Phi^m) \right) \delta\Phi - l_\Phi^2 \nabla\Phi \cdot \nabla(\delta\Phi) \right] d\boldsymbol{x} = 0 \ \ \forall\, \delta\Phi \in \mathcal{W}_0^\Phi. \tag{80}$$

以及 $\nabla\Phi \cdot \boldsymbol{n} = 0$ 在 $\partial\mathcal{B}$ 上。

基于公式3.1 对拓扑场$-1 \leq \Phi(\boldsymbol{x},\ t) \leq 1$ 进行隐式几何参数化，若 $\Phi(\boldsymbol{x},\ t) > 0$，则得到材料点（即 $\boldsymbol{x} \in \Omega$）；若 $\Phi(\boldsymbol{x},\ t) < 0$，则得到非材料点（即 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{Y}$）；若 $\Phi(\boldsymbol{x},\ t) = 0$，则表示为材料边界界面（即$\boldsymbol{x} \in \Gamma_\Phi$），这意味着零水平集。

3.2. 时空有限元离散

本节给出公式（2.1）和（3.1）的变分形式的空间离散化，由此得到一个离散多场问题，需对由 $(\boldsymbol{u},\ d,\ \Phi)$ 表示的三场未知量进行求解。这里，我们采用伽辽金有限元法，使用一阶等参单元对方程进行离散。具体而言，为展示所提模型的通用性，我们使用了两种类型的单元。算例 1–4 采用一阶线性三维四面体单元 P_1 进行离散。对于三维问题，算例 2–3 采用 Q^1 相容的三线性六面体单元进行离散，即试探空间和检验空间使用 Q_1^c 有限元；详情请参阅 [102]。设连续区域 $\mathcal{B}$（固体域）由 $\mathcal{B}_h$ 近似，使得 $\mathcal{B} \approx \mathcal{B}_h$。近似区域 $\mathcal{B}_h$ 随后分解为有限个互不重叠的单元 $\mathcal{B}_e \subset \mathcal{B}_h$，使得

$$\mathcal{B} \approx \mathcal{B}_h = \bigcup_e^{n_e} \mathcal{B}_e\ . \tag{81}$$

有限元离散解近似为

$$\boldsymbol{u}^h = \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{u}}\hat{\boldsymbol{u}}, \quad d^h = \boldsymbol{N}_d\hat{\boldsymbol{d}}, \quad \Phi^h = \boldsymbol{N}_\Phi\hat{\Phi}. \tag{82}$$

$\hat{}\,\hat{}$，节点解值集合为 $(\hat{}\,\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{d},\ \boldsymbol{A})$，线性基函数为 $\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{u}}$、$\boldsymbol{N}_d$ 和 $\boldsymbol{N}_\Phi$，它们分别对应三个主场。此外，它们的导数如下

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h) = \boldsymbol{B}_u\hat{\boldsymbol{u}}, \quad \nabla d_h = \boldsymbol{B}_d\hat{\boldsymbol{d}}, \quad \nabla\Phi_h = \boldsymbol{B}_d\hat{\Phi}. \tag{83}$$

这些导数通过 $(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h)\ \nabla d_h,\ \nabla\Phi_h)$ 表示本构状态变量。这里，$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}}$、$\boldsymbol{B}_d$ 和 $\boldsymbol{B}_\Phi$ 分别是形函数导数的矩阵表示，对应于全局变形、裂纹相场和拓扑场。接下来，对于每个主场，都需要确定基于残差力向量的离散平衡方程，该力向量记为$\mathbf{R}^\bullet$。首先，对于位移变形场，有

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, d, \Phi) = \sum_e \int_{\mathcal{B}_e} \left[\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}}^T\boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, d; \Phi) - f(\Phi)\overline{\boldsymbol{f}}\cdot\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{u}}\right] \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\partial\mathcal{B}_N} f(\Phi)\overline{\boldsymbol{\tau}}\cdot\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{u}}\, d\boldsymbol{a} = \mathbf{0}, \tag{84}$$

接下来，对于裂纹相场部分，有，

$$\mathbf{R}_d(\boldsymbol{u}, d, \Phi) = \sum_e \int_{\mathcal{B}_e} \left[\left((1-\kappa)(d_h-1)\mathcal{H} + d + \frac{\eta_d}{\tau_f}(d_h - d_h^n)\right)\cdot\boldsymbol{N}_d + l_d^2\boldsymbol{B}_d^T\cdot\nabla d_h\right] \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \tag{85}$$

最后，拓扑场由下式给出，

$$\mathbf{R}_\Phi(\boldsymbol{u}, d, \Phi) = \sum_e \int_{\mathcal{B}_e} \left[\left(\widehat{v}_\Phi - \frac{\eta_\Phi}{\tau_\Phi}(\Phi_h - \Phi_h^m)\right)\cdot\boldsymbol{N}_\Phi - l_\Phi^2\boldsymbol{B}_\Phi^T\cdot\nabla\Phi_h\right] \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \tag{86}$$

3.3. 抗断裂拓扑优化

下一节将具体给出式（72）中优化问题的数学公式。具体而言，将确定目标泛函 $\mathfrak{J}(\mathfrak{U})$，以及等式和不等式约束函数。此外，还将采用基于梯度的伴随优化方法。为推导伴随方程，我们需要求出时间 $n \in \mathcal{T}_N$（见式（60））处、时间 $m-1 \in \mathcal{T}_M$（见式（78））拓扑场固定时的灵敏度。因此，我们旨在获得时间 $m \in \mathcal{T}_M$ 处的 Φ_m。为此，将材料的结构刚度定义为目标泛函，并在保持一定体积比的同时使其最大化。为了针对非线性响应计算材料的结构刚度，我们通过考察载荷-位移曲线 [77, 82] 下的面积，从头开始计算截至当前时刻的能量累积。为此，我们考虑 $\mathfrak{J}(\mathfrak{U})$ 的总功率率泛函，其形式如下：

$$\mathfrak{J} = -\int_0^{t_N}\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}, d, \Phi) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}, \Phi)\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}\ \mathrm{d}t = -\int_0^{t_N}\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{f}(\Phi).\dot{\boldsymbol{u}}\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}\ \mathrm{d}t \tag{87}$$

由于我们研究的是率相关非线性边值问题（即延性相场断裂），因此考虑增量拓扑优化，见第

3.5 节。因此， $\mathfrak{J}(\mathfrak{U})$ 通过梯形法则近似计算，直至达到规定的位移：

$$\mathfrak{J} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{N} \mathfrak{J}^i \quad \text{with} \quad \mathfrak{J}^n = -\frac{1}{2}(\mathbf{P}_{\boldsymbol{u}}^n + \mathbf{P}_{\boldsymbol{u}}^{n-1}).(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}^{n-1}) \tag{88}$$

其因体积比而遵循以下不等式约束：

$$\mathfrak{G}(\Phi) = \int_{\mathcal{B}} \widehat{G}(\Phi)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathcal{B}} \mathrm{H}(\Phi)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \widehat{\mathrm{V}}(\Phi) = V(\Omega) \leq \bar{\Omega} \tag{89}$$

这里，$\widehat{\mathrm{V}}(\Phi) = V(\Omega) \leq \bar{\Omega} \ll V(\mathcal{B})$ 和 $\bar{\Omega}$ 分别表示现有体积和指定体积约束。接下来，根据式（60），我们注意到，式（88）中的 $1 \leq n \leq N$ 表示施加于固体的规定载荷增量。

因此，现在只剩下等式约束需要补充，才能完成式（72）所给出的优化问题。这里提出了两种不同类型的公式。第一种仅需将变形力向量作为约束，因此式（72）所给出的优化问题可简化为：

$$\texttt{Formulation 1}: \quad \Phi = \underset{\Phi \in \mathcal{W}_{\bar{\Phi}}^{\Phi}}{\operatorname{argmin}} \left\{ [\,\mathfrak{J}(\mathfrak{U})] \quad | \quad \mathbf{P}_{\boldsymbol{u}} - \mathbf{R}_{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0}, \quad \text{and} \quad \mathfrak{G}(\Phi) \leq \bar{\Omega} \right\}.$$

由于描述延性相场断裂需要两个不同的场（$\boldsymbol{u}$，d），因此第二种公式将变形和相场断裂两者的残余力向量作为约束。于是，我们有：

$$\texttt{Formulation 2}: \quad \Phi = \underset{\Phi \in \mathcal{W}_{\bar{\Phi}}^{\Phi}}{\operatorname{argmin}} \left\{ [\,\mathfrak{J}(\mathfrak{U})] \quad | \quad (\mathbf{P}_{\boldsymbol{u}} - \mathbf{R}_{\boldsymbol{u}},\, \mathbf{R}_d) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}), \quad \text{and} \quad \mathfrak{G}(\Phi) \leq \bar{\Omega} \right\}.$$

值得注意的是，公式2是公式1的推广，因为它在优化过程中加入了额外的断裂约束。因此，接下来我们将推导公式2对应的灵敏度分析，然后将其简化为公式1。在第 4 节的第一个数值算例中，我们将考察公式1和公式2的效率与准确性。

3.4. 灵敏度分析

为了推导基于梯度的全耦合伴随灵敏度分析，需要给出目标函数和约束函数相对于设计变量的导数。首先，我们在此考虑更一般的公式2，随后将其化简为公式1。令 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 分别表示时间 $n-1$ 和 n 对应的伴随向量。优化问题的拉格朗日泛函对应于公式2，可写为：

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\Phi, \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\lambda}_d, \lambda_V, \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\mu}_d; \boldsymbol{u}, d, \alpha) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{N} \Big(\mathfrak{J}^{\mathrm{n}} + (\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{u}}^n)^T (\mathbf{P}_{\boldsymbol{u}}^{n-1} - \mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}^{n-1}) + (\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}}^n)^T (\mathbf{P}_{\boldsymbol{u}}^n - \mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}^n) \\ + (\boldsymbol{\mu}_d^n)^T \mathbf{R}_{\mathrm{d}}^{n-1} + (\boldsymbol{\lambda}_d^n)^T \mathbf{R}_{\mathrm{d}}^n \Big) + \lambda_V^T \mathfrak{G}(\Phi).\end{aligned} \tag{90}$$

公式90中给定的延性相场断裂的拉格朗日泛函的最小化问题可简洁地写成以下形式:

$$\boxed{\{\Phi, \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\lambda}_d, \boldsymbol{\lambda}_V, \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\mu}_d\} = \arg\{ \min_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{W}_{\Phi}^{\Phi}} \max_{\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{\lambda}_d,\boldsymbol{\lambda}_V\in\boldsymbol{L}^2} [\, \boldsymbol{\mathfrak{L}}(\Phi, \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\lambda}_d, \lambda_V; \boldsymbol{u}, d, \alpha) \,] \}.} \tag{91}$$

为了进行伴随灵敏度分析，拉格朗日函数对设计变量的导数可表示为:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\Phi, \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\lambda}_d, \lambda_V, \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\mu}_d; \boldsymbol{u}, d, \alpha) := D_\Phi \boldsymbol{\mathfrak{L}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{N} \Big(& D_\Phi \boldsymbol{\mathfrak{J}}^i + (\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{u}}^n)^T D_\Phi \mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}^{n-1} + (\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}}^n)^T D_\Phi \mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}^n \\ & + (\boldsymbol{\mu}_d^{n-1})^T D_\Phi \mathbf{R}_d^{n-1} + (\boldsymbol{\lambda}_d^n)^T D_\Phi \mathbf{R}_d^n \Big) \\ & + \lambda_V^T \frac{d\widehat{G}(\Phi)}{d\Phi}\end{aligned} \tag{92}$$

为推导式 (92)，目标泛函 $\boldsymbol{\mathfrak{J}}$ 的方向导数为:

$$D_\Phi \boldsymbol{\mathfrak{J}}^i = -\frac{1}{2}\Big(D_\Phi \mathbf{P}_{\boldsymbol{u}}^{n-1} + D_\Phi \mathbf{P}_{\boldsymbol{u}}^n \Big) \Delta \boldsymbol{u}^i - \frac{1}{2}\Big(\mathbf{P}_{\boldsymbol{u}}^{n-1} + \mathbf{P}_{\boldsymbol{u}}^n \Big) \frac{d\Delta \boldsymbol{u}^i}{d\Phi} \tag{93}$$

由于在狄利克雷边界 $\partial_D\mathcal{B}$上，位移场与拓扑场无关（即拓扑场固定，因此 $\Phi = 1$ 在 $\partial_D\mathcal{B}$上），此外，对于区域 $\mathbf{P}(\boldsymbol{x})$ 内的任意内部节点，$= \mathbf{0}$ 对于 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}$均成立，因此我们得到以下恒等式:

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{u}}^{n-1} \frac{d\Delta \boldsymbol{u}^n}{d\Phi} = 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{P}_{\boldsymbol{u}}^{n} \frac{d\Delta \boldsymbol{u}^n}{d\Phi} = 0 \tag{94}$$

因此，式 (93) 可简化为

$$D_\Phi \boldsymbol{\mathfrak{J}}^n = -\frac{1}{2}\Big(D_\Phi \mathbf{P}_{\boldsymbol{u}}^{n-1} + D_\Phi \mathbf{P}_{\boldsymbol{u}}^n \Big) \Delta \boldsymbol{u}^n \tag{95}$$

接下来，我们对位移的残余力向量求方向导数:

$$\begin{aligned} D_\Phi \mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}^\bullet &= \frac{d\mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}^\bullet}{d\Phi} + \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}^\bullet}{\partial \Delta \boldsymbol{u}^\bullet} \cdot \frac{d\Delta \boldsymbol{u}^n}{d\Phi} + \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}^\bullet}{\partial \Delta d^\bullet} \cdot \frac{d\Delta d^\bullet}{d\Phi} \\ &= \frac{d\mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}^\bullet}{d\Phi} + \mathbf{K}_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}}^\bullet \cdot \frac{d\Delta \boldsymbol{u}^\bullet}{d\Phi} + \mathbf{K}_{\boldsymbol{u},d}^\bullet \cdot \frac{d\Delta d^\bullet}{d\Phi}, \quad \text{for} \quad \bullet \in \{n-1, n\} \end{aligned} \tag{96}$$

由此可得裂纹相场残余力向量的方向导数:

$$\begin{aligned} D_\Phi \mathbf{R}_d^\bullet &= \frac{d\mathbf{R}_d^\bullet}{d\Phi} + \frac{\partial \mathbf{R}_d^\bullet}{\partial \Delta \boldsymbol{u}^\bullet} \cdot \frac{d\Delta \boldsymbol{u}^\bullet}{d\Phi} + \frac{\partial \mathbf{R}_d^\bullet}{\partial \Delta d^\bullet} \cdot \frac{d\Delta d^\bullet}{d\Phi} \\ &= \frac{d\mathbf{R}_d^\bullet}{d\Phi} + \mathbf{K}_{d,\boldsymbol{u}}^\bullet \cdot \frac{d\Delta \boldsymbol{u}^\bullet}{d\Phi} + \mathbf{K}_{d,d}^\bullet \cdot \frac{d\Delta d^\bullet}{d\Phi}. \quad \text{for} \quad \bullet \in \{n-1, n\} \end{aligned} \tag{97}$$

此外，式（89）中的体积约束灵敏度分析为:

$$\frac{d}{d\Phi}\widehat{G}(\Phi) = \frac{d}{d\Phi}\int_{\mathcal{B}} \mathrm{H}(\Phi) = \int_{\mathcal{B}} \delta(\Phi)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{98}$$

因此，利用式（95）—（98）得到的式（92）中的灵敏度分析结果为

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{\,n}(\Phi,\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{\lambda}_d,\lambda_V,\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{\mu}_d;\boldsymbol{u},d,\alpha)=\sum_{\mathrm{n=1}}^{N}\Big(&(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{u}}^n-\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{u}^n)^T\frac{d\mathbf{P}_{\boldsymbol{u}}^{n-1}}{d\Phi}+(\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}}^n-\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{u}^n)^T\frac{d\mathbf{P}_{\boldsymbol{u}}^{n}}{d\Phi}\\&+(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{u}}^n)^T\frac{d\mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}^{n-1}}{d\Phi}+(\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}}^n)^T\frac{d\mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}^{n}}{d\Phi}\\&+(\boldsymbol{\mu}_d^n)^T\frac{d\mathbf{R}_d^{n-1}}{d\Phi}+(\boldsymbol{\lambda}_d^n)^T\frac{d\mathbf{R}_d^{n}}{d\Phi}\\&+\Big((\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{u}}^n)^T\mathbf{K}_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}}^{n-1}+(\boldsymbol{\mu}_d^n)^T\mathbf{K}_{d,\boldsymbol{u}}^{n-1}\Big)\cdot\frac{d\Delta\boldsymbol{u}^{n-1}}{d\Phi}\\&+\Big((\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}}^n)^T\mathbf{K}_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}}^{n}+(\boldsymbol{\lambda}_d^n)^T\mathbf{K}_{d,\boldsymbol{u}}^{n}\Big)\cdot\frac{d\Delta\boldsymbol{u}^{n}}{d\Phi}\\&+\Big((\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{u}}^n)^T\mathbf{K}_{\boldsymbol{u},d}^{n-1}+(\boldsymbol{\mu}_d^n)^T\mathbf{K}_{d,d}^{n-1}\Big)\cdot\frac{d\Delta d^{n-1}}{d\Phi}\\&+\Big((\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}}^n)^T\mathbf{K}_{\boldsymbol{u},d}^{n}+(\boldsymbol{\lambda}_d^n)^T\mathbf{K}_{d,d}^{n}\Big)\cdot\frac{d\Delta d^{n}}{d\Phi}\Big)\end{aligned}\tag{99}$$

为简化式（99），以便进一步缩并，我们将所有自由度划分为指定节点（对应于非零狄利克雷边界）和记为 $\{a,b\}$ 的界面节点。因此，根据式（99），若非零狄利克雷边界内的节点满足以下约束，则可省略前两项:

$$\mathtt{C}_1^n=[\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{u}}^n]^a-\frac{1}{2}[\Delta\boldsymbol{u}^n]^a=\mathbf{0}\quad\text{and}\quad\mathtt{C}_2^n=[\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}}^n]^a-\frac{1}{2}[\Delta\boldsymbol{u}^n]^a=\mathbf{0}\,,\tag{100}$$

由此得到

$$[\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{u}}^n]^a=[\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}}^n]^a=\frac{1}{2}[\Delta\boldsymbol{u}^n]^a\tag{101}$$

这是弹塑性结构演化拓扑优化的一种经典表述方法，详细讨论见 [82]。

为了消去式（99）（最后四行）中变形和裂纹相场 $\frac{\partial\Delta\boldsymbol{u}}{\partial\Phi}$ 及 $\frac{\partial\Delta d}{\partial\Phi}$ 的隐式导数，必须将方括号内的项设为零，从而推导伴随灵敏度方程。由此可通过求解以下耦合方程组，得到伴随向量 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$：

$$[\mathbf{K}^{n-1}]^T\boldsymbol{\mu}^n=\mathbf{0}\quad\text{with}\quad\mathtt{C}_1^n=\mathbf{0}\quad\text{and}\quad[\mathbf{K}^{n}]^T\boldsymbol{\lambda}^n=\mathbf{0}\quad\text{with}\quad\mathtt{C}_2^n=\mathbf{0}\tag{102}$$

使得由 $(\boldsymbol{u},d)$ 导致的耦合切线刚度矩阵为:

$$\mathbf{K}^n=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}^n&\mathbf{K}_{\boldsymbol{u},d}^n\\\mathbf{K}_{d,\boldsymbol{u}}^n&\mathbf{K}_{d,d}^n\end{bmatrix},\quad\text{and}\quad\mathbf{K}^{n-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}^{n-1}&\mathbf{K}_{\boldsymbol{u},d}^{n-1}\\\mathbf{K}_{d,\boldsymbol{u}}^{n-1}&\mathbf{K}_{d,d}^{n-1}\end{bmatrix},\tag{103}$$

拉格朗日乘子的解场

$$\boldsymbol{\mu}^n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{u}}^n\\\boldsymbol{\mu}_d^n\end{bmatrix}\quad\text{and}\quad\boldsymbol{\lambda}^n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}}^n\\\boldsymbol{\lambda}_d^n\end{bmatrix}\tag{104}$$

值得注意的是，由于我们采用单调载荷，因此有：

$$[\Delta \boldsymbol{u}^{n-1}]^a = [\Delta \boldsymbol{u}^{n}]^a \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{\mu}^n = \boldsymbol{\lambda}^{n-1} \tag{105}$$

最后，利用式 (102) 中推导的伴随变量，可得时刻 n 公式2的灵敏度分析，如下所示：

$$\mathcal{G}^n(\Phi, \boldsymbol{\lambda_u}, \boldsymbol{\lambda}_d, \lambda_V, \boldsymbol{\mu_u}, \boldsymbol{\mu}_d; \boldsymbol{u}, d, \alpha) = \underbrace{\sum_{\mathrm{n}=1}^{N} \left((\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{u}}^n)^T \frac{d\mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}^{n-1}}{d\Phi} + (\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}}^n)^T \frac{d\mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}^{n}}{d\Phi} + (\boldsymbol{\mu}_d^n)^T \frac{d\mathbf{R}_d^{n-1}}{d\Phi} + (\boldsymbol{\lambda}_d^n)^T \frac{d\mathbf{R}_d^{n}}{d\Phi} \right)}_{\mathcal{G}_S^n} + \underbrace{\lambda_V^T \int_{\mathcal{B}} \delta\left(\Phi\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{\mathcal{G}_V^n}, \tag{106}$$

而式 (106) 中给出的灵敏度分析 $\mathcal{G}$ 可加性地分解为固体部分和体积部分，分别如 $\mathcal{G}_S$ 和 $\mathcal{G}_V$ 所示。第 3.6 节中，我们还需要对滤波方法进行这种分解。此外，式 (106) 中给出的 Dirac δ 函数通过以下形式进行正则化近似：

$$\delta\Big(\Phi(\boldsymbol{x})\Big) \approx \frac{l_\delta e^{-l_\delta \Phi(\boldsymbol{x})}}{(1+e^{-l_\delta \Phi(\boldsymbol{x})})^2} \quad \text{with} \quad \delta\Big(\Phi(\boldsymbol{x})\Big) \approx \frac{d\mathrm{H}\Big(\Phi(\boldsymbol{x})\Big)}{d\Phi(\boldsymbol{x})}\,. \tag{107}$$

此处，Dirac δ 函数的正则化长度尺度参数设为 $l_\delta = 5$，见图 4(a)。

现在，我们将式 (106) 中公式2的灵敏度分析简化为公式1。按照相同的步骤，根据式 (102)，公式2的伴随敏感性方程为：

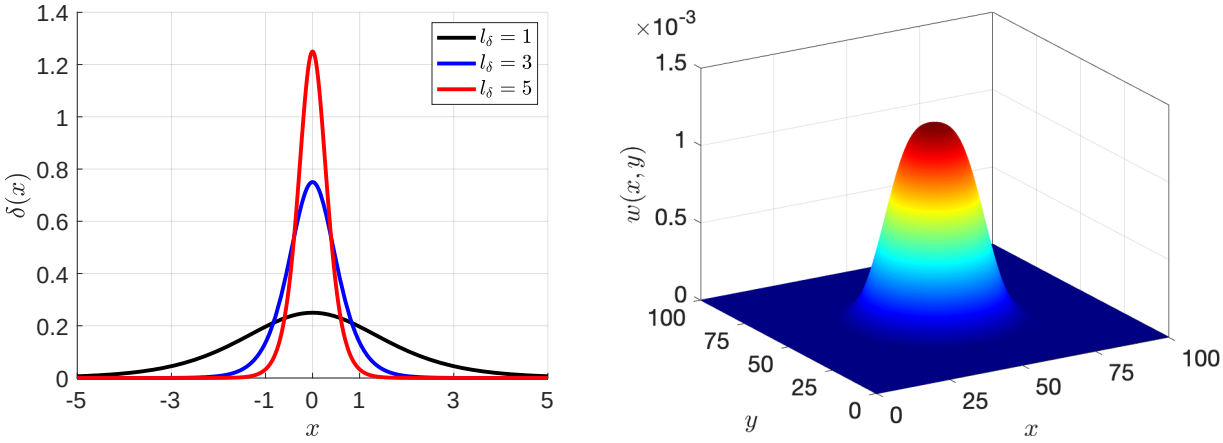
$$[\mathbf{K}_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}}^{n-1}]^T \boldsymbol{\mu}^n = \mathbf{0} \quad \text{with} \quad \mathtt{C}_1^n = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad [\mathbf{K}_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}}^{n}]^T \boldsymbol{\lambda}^n = \mathbf{0} \quad \text{with} \quad \mathtt{C}_2^n = \mathbf{0} \tag{108}$$

因此，伴随方程中仅存在变形贡献。由此，时刻 n 公式1的总灵敏度分析为：

$$\mathcal{G}^n(\Phi, \boldsymbol{\lambda_u}, \boldsymbol{\lambda}_d, \lambda_V, \boldsymbol{\mu_u}, \boldsymbol{\mu}_d; \boldsymbol{u}, d, \alpha) = \underbrace{\sum_{\mathrm{n}=1}^{N} \left((\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{u}}^n)^T \frac{d\mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}^{n-1}}{d\Phi} + (\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}}^n)^T \frac{d\mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}^{n}}{d\Phi} \right)}_{\mathcal{G}_S^n} + \underbrace{\lambda_V^T \int_{\mathcal{B}} \delta\left(\Phi\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{\mathcal{G}_V^n}, \tag{109}$$

因此，式（109）给出的总伴随敏感性分析中，裂纹相场没有贡献。显然，与式（106）相比，求解式（109）所需的伴随方程更少。现在需要利用式（106）推导出的灵敏度分析，建立与法向速度场 $\widehat{v}_\Phi$ 的关系，从而求解公式（3.1）。此处需要指出，闭合前沿传播所需的水平集速度场由最速下降法 [103] 得到。因此，拉格朗日函数 $\mathfrak{L}$ 在式（90）中对伪时间的导数为：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}.\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathcal{G}\widehat{v}_\Phi \left|\nabla \Phi\right| \quad \text{with} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} < 0, \tag{110}$$



(a) (b)

图 4：示意图描述了 (a) 式（107）给出的 Dirac δ 函数近似，以及 (b) 式（119）中灵敏度滤波所用的权重函数。

此处使用式（75）。一个重要的观察是，若要使拉格朗日函数 $\mathcal{L}$ 对时间的导数为负，只需使式（110）中的法向速度场满足：

$$\boxed{\widehat{v}_\Phi \,|_{\Phi=0} = -\mathcal{G}\,,} \tag{111}$$

使得以下性质成立：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \int_{\mathcal{B}} \mathcal{G}\delta\left(\Phi\right)\widehat{v}_\Phi\left|\nabla\Phi\right|\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial\mathcal{B}} \mathcal{G}\widehat{v}_\Phi \mathrm{d}\boldsymbol{a}\,, \tag{112}$$

此处使用了恒等式（18），详细讨论见 [103]。

通过对灵敏度进行分析（式（111）），提取法向速度场 $\widehat{v}_\Phi$，我们现在能够求解公式（3.1），从而更新结构的拓扑。

注 3.2. 请注意，本研究采用拉格朗日方法，但也可以轻松将该方法扩展为增广拉格朗日方法。为此，针对力学部分引入修正的拉格朗日变量 $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{u}}^T = \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}}^T + \frac{p_u}{2}\left(\mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}^{n-1} + \mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}^{n}\right)$，针对相场部分引入 $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_d^T = \boldsymbol{\lambda}_d^T + \frac{p_d}{2}\left(\mathbf{R}_d^n\right)$，并引入 $\widehat{\lambda}_V^T = \lambda_V^T + \frac{p_V}{2}\left(G(V)\right)$。因此，对于未知量集合 $(\Phi, \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\lambda}_d, \lambda_V)$，式（90）将改为 $\widehat{\mathfrak{L}}(\Phi, \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\lambda}_d, \lambda_V;\ \bar{\boldsymbol{u}}, d, \bar{\alpha})$。

注释 3.3。 需要特别指出的是，第 *3.4* 节中所执行的灵敏度过程基于位移增量 $\Delta\boldsymbol{u}$，这与 *[76, 77,78, 82]* 相一致。然而，推导伴随方程的另一种方法是针对路径相关问题，基于总 $\boldsymbol{u}$ 进行灵敏度分析，相关讨论见 *[26, 27, 70, 71]*。

3.5. 体积约束导致的拉格朗日乘子

采用逐步收敛的二分算法来满足式（89）中的体积约束。为此，必须使用拉格朗日乘子 λ_V，将约束不等式纳入式（90）中的拉格朗日函数。由于我们处理的是一个率相关的非线性边值问题（即延性相场断裂），因此采用增量拓扑优化方法，通过以下集合达到目标体积 Ω:

$$\mathcal{B} = \bar{\Omega}^0 < \ldots < \bar{\Omega}^m < \bar{\Omega}^{m+1} < \ldots < \bar{\Omega}^m = \bar{\Omega}, \tag{113}$$

in ¯这就是所谓的期望体积Ω^m 在时间 m的值，其定义如下: :

$$\bar{\Omega}^m = \chi_v^{m-1}(\Phi) - \Theta_v(\chi_v^{m-1}(\Phi) - \bar{\Omega}) \quad \text{with} \quad \chi_v^m(\Phi) = \frac{\mathrm{V}(\Omega^m)}{V(\mathcal{B})} = \frac{\widehat{\mathrm{V}}(\Phi^m)}{V(\mathcal{B})} \tag{114}$$

使得 $\chi_v^m(\Phi)$ 表示时间 m的体积比。这里，我们设定 $\Theta_v = 0.05$ 。然后通过¯(113)，我们期望拓扑迭代 m 趋近于体积 Ω^m。这样做可以降低问题的非线性，并避免一步就立即达到目标值。现在，我们详细说明用于确定λ_V的二分法。首先，为拉格朗日乘子 [104]设定下界 λ_l 和上界 λ_u 。然后，按如下方式更新 λ_V :

$$\lambda_V = \sqrt{\lambda_l \lambda_u}. \tag{115}$$

因此，通过 λ_V 我们可以确定体积灵敏度，并结合~固体灵敏度 $\mathcal{G}_S$ ，得到 $\mathcal{G}$。据此，我们可以根据式（111）计算法向速度场$\widehat{v}_\Phi$ ，进而求解 Φ的反应扩散方程（$\boldsymbol{x}$，t）。通过获得新拓扑的体积比 χ_v（Φ），可以判断 χ_v（Φ）是否大于¯期望体积 Ω；若大于，则根据 λ_V更新 λ_l ，否则将 λ_u 替换为 λ_V。在优化过程中，因体积约束而确定拉格朗日乘子 λ_V 的详细二分算法见算法1。

算法1 体积约束下拉格朗日乘子的二分算法。**输入：** 至

来自步骤 $m-1$ 的拓扑优化数据（Φ^{m-1}，λ_V^{m-1}，$\bar{\Omega}$），以及来自步骤 m 的 $\widehat{\mathcal{G}}_S^m$。

初始化：

- 我们设定：$\bar{\Omega}^m = \chi_v^{m-1}(\Phi) - \Theta_v(\chi_v^{m-1}(\Phi) - \bar{\Omega})$,
- 我们将拓扑场设为 $\Phi^{m-1,\,1} = \Phi^{m-1}$，
- 为 λ_V 选择下限和上限，我们设定 $\lambda_l = 10^{-8}$，以及 $\lambda_u = \max(10^8,\ 10^4\lambda_V^{m-1})$,

二分迭代 $k \geq 1$:

- 我们设定 $\lambda_V = \sqrt{\lambda_l \lambda_u}$
- 给定 $(\lambda_V,\ \Phi^{m-1,\,k})$，结合给定的 $\widehat{\mathcal{G}}_S^m$，由 (106)-(107) 计算 $\mathcal{G}_V^m$，得到 $\mathcal{G}^m$,
- 给定 $\mathcal{G}^m$，求法向速度场：$\widehat{v}_\Phi\,|_{\Phi=0} = -\mathcal{G}^m(\Phi,\ \boldsymbol{\lambda_u},\ \boldsymbol{\lambda}_d,\ \lambda_V,\ \boldsymbol{\mu_u},\ \boldsymbol{\mu}_d;\ \boldsymbol{u},\ d,\ \alpha)$,
- 归一化部分：给定 $\widehat{v}_\Phi|_{\Phi=0}$，求归一化速度场 $v_\Phi|_{\Phi=0} = \frac{\widehat{v}_\Phi|_{\Phi=0}}{\texttt{mean}(\widehat{v}_\Phi|_{\Phi=0})}$,
- 拓扑部分：给定 $v_\Phi|_{\Phi=0}$，求解 $\mathbf{R}_\Phi(\boldsymbol{u},\ d,\ \Phi) = \mathbf{0}$，针对 Φ，设 $\Phi =: \Phi^{m-1,\,k}$,
- 给定 $\Phi^{m-1,k}$，求材料域 $\Omega^k(\boldsymbol{x},t)$ 的体积，其中 $\mathrm{V}(\Omega^k) = \widehat{\mathrm{V}}(\Omega^k) = \int_{\mathcal{B}} \mathrm{H}(\Phi^k)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，
- 给定 $\widehat{\mathrm{V}}(\Omega^k)$，通过 $\chi_v^k = \frac{\widehat{\mathrm{V}}(\Omega^k)}{V(\mathcal{B})}$ 求体积比，其中 $\mathrm{V}(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} 1\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，
- 若 $\chi_v^k \geq \bar{\Omega}^m$ 满足条件，则设为 $\lambda_l = \lambda_V^k$；否则 $\lambda_u = \lambda_V^k$,
- 检查二分算法的收敛性：$\mathrm{Res}^k{}_\mathrm{V} := \frac{|\lambda_V^k - \lambda_V^{k-1}|}{|\lambda_V^k + \lambda_V^{k-1}|}$

- 若满足条件，则设 $(\Phi^{m-1,k}, \lambda_V^k) =: (\Phi^m, \lambda_V^m)$，然后
停止；否则 $k+1 \to k$.

输出： 解 (Φ^m, λ_V^m).

注意，在算法1中，$\texttt{mean}(\bullet)$ 表示标准的均值函数。我们将算法1写成以下抽象形式：

$$\boldsymbol{s}^m = \mathtt{LSM}(\boldsymbol{s}^{m-1}) \tag{116}$$

其中 $\boldsymbol{s} = (\Phi, \lambda_V)$ 表示时间 t^m 处的函数。我们将在最终提出的拓扑优化算法中使用此记法。

3.6. 数值不稳定性导致的滤波方法

由于在适当区域内成核形成孔洞时，几何映射采用逐点精确的 Heaviside阶跃函数，其灵敏度始终为零，因此无法向该区域添加材料，这种现象称为演化锁定，参见 [105] 第 3.3.3 节。因此，采用灵敏度滤波方案，以便在空域中生成材料。据作者所知，滤波方案用于克服拓扑优化中的数值不稳定性，例如中间密度、网格依赖性、棋盘格模式和局部极小值；这些问题会出现在逐单元常密度分布技术中，例如 SIMP 和

ESO[6, 106, 107, 108]。

为应用滤波方法，回顾式 (106) 中给出的灵敏度分析 $\mathcal{G}$ 可通过以下方式进行加性分解：

$$\mathcal{G}^{m} = \mathcal{G}_S^{m} + \mathcal{G}_V^{m} \tag{117}$$

此处，我们旨在修改灵敏度分析 $\mathcal{G}_S^m$中的固体部分。为此，按照 [109] 不含密度加权方案的对称灵敏度滤波器公式可写为：

$$\widetilde{\mathcal{G}}_S^{m} = \frac{\sum\limits_{j\in|node|} w\left(\boldsymbol{x}_{mj}\right)\mathcal{G}_{S,j}^{m}}{\sum\limits_{j\in|node|} w\left(\boldsymbol{x}_{mj}\right)}, \tag{118}$$

其中，$|node|$ 和 $w(\boldsymbol{x}_{mj})$分别表示节点数和权重因子。平滑连续的权重因子定义为：

$$w\left(\boldsymbol{x}_{mj}\right) = e^{-3(\frac{\left\|\boldsymbol{x}_{mj}-\boldsymbol{x}_{nm}\right\|}{r_{\min}})^{3}}, \tag{119}$$

其中，$\boldsymbol{x}_{nm}$ 和 $r_{\min}$ 分别表示 m_{th} 节点的空间坐标和滤波半径。图 4(b) 示意性地展示了使用式 (119) 在二维网格中得到的非线性滤波因子。灵敏度滤波器得到的结果仍呈现混乱现象，优化过程可能无法收敛。为克服这一障碍，对灵敏度及其历史信息进行平均，写作如下：

$$\widehat{\mathcal{G}}_S^{m} = \frac{\widetilde{\mathcal{G}}_S^{m} + \widehat{\mathcal{G}}_S^{m-1} + \widehat{\mathcal{G}}_{S,n}^{m-2}}{3} \quad with \;\; m > 2. \tag{120}$$

此处，$1 \le m \le M$ 表示优化过程的迭代次数，参见式 (78)。因此，通过式 (118) 和 (120)，式 (117) 中给出的灵敏度分析最终修改如下：

$$\mathcal{G}^{m} = \widehat{\mathcal{G}}_S^{m} + \mathcal{G}_V^{m}. \tag{121}$$

因此，采用 $\mathcal{G}_S^m$作为法向速度场，通过公式3.1更新拓扑场。用于确定拓扑场 $\Phi(\boldsymbol{x}, t)$的延性材料抗断裂能力拓扑优化过程详见算法 2。

注 3.4. 值得注意的是，对于像我们所研究的这类高度非线性问题，拓扑优化问题的收敛速率较慢，这一点需要纳入考虑。为此，可以采用不同的方法。（i）如果此后将 *(114)* 中的 Θ_V 设为较小的量，则 Ω 的体积变化速率也会降低。（ii）如果将 *(3.1)* 中的 τ_Φ 设为较小的值，以维持解的稳定性，则此后 Φ的变化速率会降低（这是 *CFL* 条件所必需的，参见例如 *[100]*）。

A算法 2 延性材料抗断裂能力的拓扑优化 *al.*

拓扑优化迭代 $1 \leq m \leq T_M = T_{\Phi\circ}$

输入： 第 $m-1$ 步的解数据（Φ^{m-1}，λ_V^{m-1}，$\bar{\Omega}$）。

延性相场断裂迭代 $1 \leq n \leq T_N = T_f$

输入： $\partial_D\mathcal{B}$上的载荷数据（$\bar{\boldsymbol{u}}_n$，$\bar{\boldsymbol{\tau}}_n$）；时间步 $n-1$ 的解（$\boldsymbol{u}^{n-1}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_p^{n-1}$，$d^{n-1}$，$\alpha^{n-1}$），固定 Φ^{m-1}。

延性断裂的交错迭代求解:

- phase-field part: given $(\boldsymbol{u}^k;\Phi^{m-1})$, solve $\mathbf{R}_d(\boldsymbol{u},d;\Phi)=\mathbf{0}$ for d, set $d =: d^k$,
- mechanical part: given $(d^k;\Phi^{m-1})$, solve $\mathbf{R}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},d;\Phi)=\mathbf{0}$ for $\boldsymbol{u}$, set $\boldsymbol{u} =: \boldsymbol{u}^k$,
- for the obtained pair $(\boldsymbol{u}^k,d^k;\Phi^{m-1})$, check staggered residual by

  $\mathrm{Res}^k_{\mathrm{Stag}} := |\mathcal{E}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}^k,d^k,\Phi^{m-1};\delta\boldsymbol{u})| + |\mathcal{E}_d(\boldsymbol{u}^k,d^k,\Phi^{m-1};\delta d)| \leq \mathtt{TOL}_{\mathrm{Stag}},\ \forall\,(\delta\boldsymbol{u},\delta d)\in(\mathcal{W}^{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{0}},\mathcal{W}_d)$
- if fulfilled, set $(\boldsymbol{u}^k,d^k;\Phi^{m-1}) =: (\boldsymbol{u}^n,d^n;\Phi^{m-1})$ then stop ,
  else $k+1\to k$.
- **Output:** solution $(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{\varepsilon}_p^n,d^n,\alpha^n)$ at n^{th} time-step.

伴随灵敏度法:

- given $(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{\varepsilon}_p^n,d^n,\alpha^n)$; solve*

  $[\widehat{\mathbf{K}}^n]^T\boldsymbol{\lambda}^n=\mathbf{0}$ with $\mathtt{C}_2^n=\mathbf{0}$ and $\boldsymbol{\mu}^n=\boldsymbol{\lambda}^{n-1}$,

  set $(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda}) =: (\boldsymbol{\mu}^n,\boldsymbol{\lambda}^n)$,
- given $(\boldsymbol{\mu}^n,\boldsymbol{\lambda}^n)$ update solid sensitivity analysis $\mathcal{G}_S^m=\sum_{\mathrm{n}=1}^{N}\mathcal{G}_S^n$ ** ,

输出： 灵敏度分析结果 s l i i h $\mathcal{G}^m$

滤波方法:

- 预测器：通过 $\mathcal{G}_S^m$ 计算伴随固体对应项的对称灵敏度滤波器

$$\widetilde{\mathcal{G}}_S^m=\frac{\sum_{j\in|node|} w(\boldsymbol{x}_{mj})\,\mathcal{G}_{S,j}}{\sum_{j\in|node|} w(\boldsymbol{x}_{mj})}$$

- 校正器：将滤波纳入结构灵敏度泛函：通过 $\mathcal{G}_S^m$ $\sim$

$$\widehat{\mathcal{G}}_S^m=\frac{\widetilde{\mathcal{G}}_S^m+\widehat{\mathcal{G}}_S^{m-1}+\widehat{\mathcal{G}}_S^{m-2}}{3}\quad\text{with}\quad m>2.$$

更新拓扑场：水平集方法

- given $\widehat{\mathcal{G}}_S^m$, solve $\boldsymbol{s}^m=\mathtt{LSM}(\boldsymbol{s}^{m-1})$, for $\boldsymbol{s}=(\Phi,\lambda_V)$ set $\boldsymbol{s} =: \boldsymbol{s}^m$

输出： 解（Φ^m，λ_V^m）。

$\widehat{\ }^\star$ 根据（103）计算公式1的雅可比矩阵 $\mathbf{K}$，方法为 $\mathbf{K}=\mathbf{K}_{\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}}$；计算公式2的雅可比矩阵 $\mathbf{K}=\mathbf{K}$ $\widehat{\ }^{\star\star}$ 根据（109）计算公式1的灵敏度 $\mathcal{G}_S^n$，根据（106）计算公式2的灵敏度。

4. 数值示例

本节展示了所提出的针对脆性与延性相场断裂的拓扑优化方法的性能。本文研究了四个边值问题，其中前两个与脆性断裂有关，后两个则涉及延性相场断裂。具体而言，在所有数值算例中，我们考察考虑脆性／延性断裂时最优布局的效率，并将其与基于纯线弹性（不考虑断裂）得到的最优布局以及原始域进行比较。为此，我们给出定量和定性指标，以突出断裂在拓扑优化框架中的作用。这些指标如下：（i）载荷-位移曲线，用于考察裂纹萌生前的最大承载能力。（ii）裂纹相场模式的定性响应，用于突出损伤响应在每种新拓扑中的影响。（iii）目标函数和体积约束等数值指标，这些指标表明材料具有刚性响应。

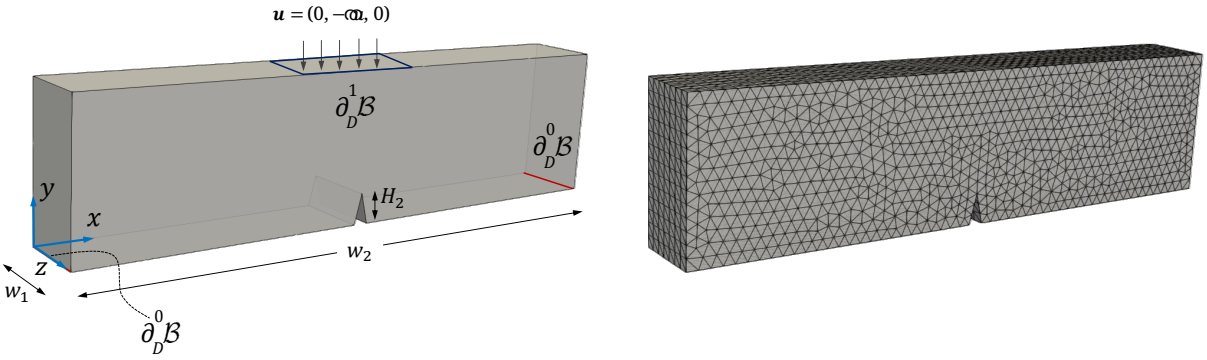
表1：　基于 [28, 30] 的数值示例中使用的材料/模型参数

No.	参数	Name	算例1	算例2	例 3	例 4	Unit
1.	K	体积模量	17.3	13.46	175	175	MPa
2.	μ	剪切模量	8	10.95	80.76	80.76	MPa
3.	h	硬化模量	–	–	200	200	MPa
4.	σ_Y	屈服应力	–	–	543	243	MPa
5.	ψ_c	特定断裂能	5×10^{-4}	1×10^{-5}	13	2	MPa
6.	ζ	缩放因子	1	1	10	5	–
7.	η_f	断裂黏度	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	$\mathrm{N/m^2 s}$
8.	κ	稳定化参数	10^{-8}	10^{-8}	10^{-8}	10^{-8}	MPa
9.	l_f	断裂特征长度	0.3	(3.6, 2.8, 2.4)	0.18	0.04	mm
11.	η_Φ	拓扑黏度	1	1	1	1	–
12.	l_Φ	拓扑特征长度	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	mm
13.	r_{min}	滤波半径	$3l_f$	$3l_f$	$3l_f$	$3l_f$	mm
14.	τ_f	断裂时间增量	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	mm
15.	τ_Φ	拓扑时间增量	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	mm

值得注意的是，未优化 结果指的是未经优化的初始结构，或者指拓扑优化方案的第一次迭代。此外，弹性 结果是指针对给定边值问题的线弹性模型进行拓扑优化，也就是说，假设材料不存在塑性，且失效机制完全是脆性的。

在最后一个示例中，我们考察了线弹性、脆性断裂和延性断裂所产生的所有最优设计方案。因此，这里主要旨在说明所提出的拓扑优化公式的效率，该公式展示了多种防止裂纹扩展的设计。数值示例中使用的材料参数列于表1中。

此时需要指出，当目标函数连续三次迭代的变化幅度小于指定阈值，且优化过程中满足体积约束时，优化过程即告终止——



(a) (b)

图5：示例1。(a) 几何形状和边界条件以及 (b) 有限元离散的表示。

化过程中。此处我们将优化阈值设为 10^{-4}，更多细节请参见 [87]。

在实现过程中，我们同时使用了 MATLAB R2018b [110] 和 Fortran90。具体而言，包含各高斯积分点处本构建模的用户单元采用 Fortran 90编写。随后，将延性断裂方法的通用框架作为父程序/主程序实现在 MATLAB 中，使得 Fortran 90 中的所有子程序均以 Mex-file的形式调用。

4.1. 示例1：压缩载荷下的三点弯曲试验

为深入了解所提出的拓扑优化方案在破坏力学方面的性能，本文研究了实心梁在压缩载荷下的三点弯曲试验。本例仅考虑脆性断裂。针对总能量泛函（结构响应较刚硬），对上述两种拓扑优化程序（分别记为公式1和公式2）进行了考察。本例的构型如图5(a)所示。左边缘在所有方向上均受到约束，而右边缘在 $y-z$ 方向上的位移受到约束。图5(a)中的几何尺寸设为 $w_1 = 1\ mm$, $w_2 = 8\ mm$, $H_1 = 2\ mm$和 $H_2 = 0.40\ mm$。

在试样顶部页面的一部分 $area = (3, 2, 2) \times (5, 2, 0)$ 中，沿竖直方向施加单调位移增量 $\Delta\bar{u}_y = -1 \times 10^{-3}\ mm$，持续 180 个时间步。因此，该优化问题的最终规定位移载荷设为$\bar{u}_y = -1.8\ mm$。实体域中的最小有限元尺寸为 $h_{min} = 0.15\ mm$，从而满足局部化区域内的启发式要求 $h < l/2$。设计域 $\mathcal{B}$ 被离散为 33140 个线性四面体单元。材料参数和数值参数分别如表1所示。

我们首先介绍公式1的定量和定性结果。基于公式1和公式2的拓扑场得到的最优布局演化历史分别如图6和图7所示。此外，为便于比较，图8展示了纯线弹性情况下不同体积比对应的最终拓扑结构。在此需要指出，公式1、公式2与纯线弹性情况下的最终布局之间存在明显差异。

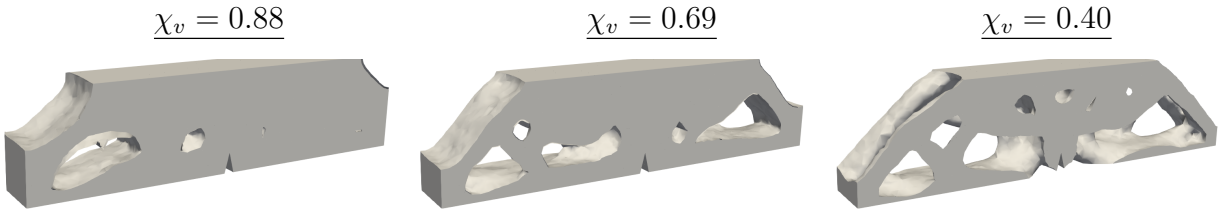


图6：示例1。基于公式1的三点弯曲试验在不同体积比下最优布局的演化历史。

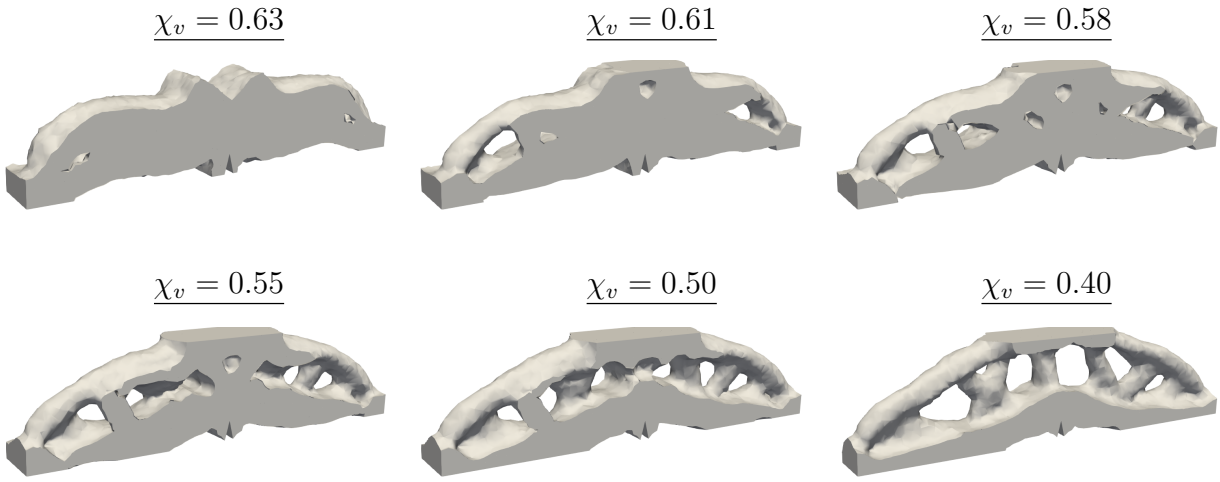


图7：示例1。基于公式2的三点弯曲试验在不同体积比下最优布局的演化历史。

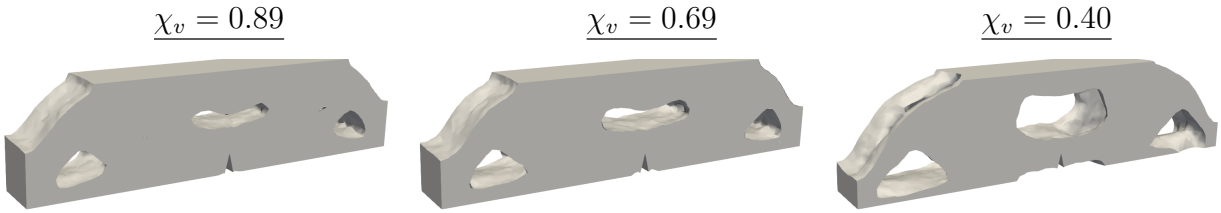
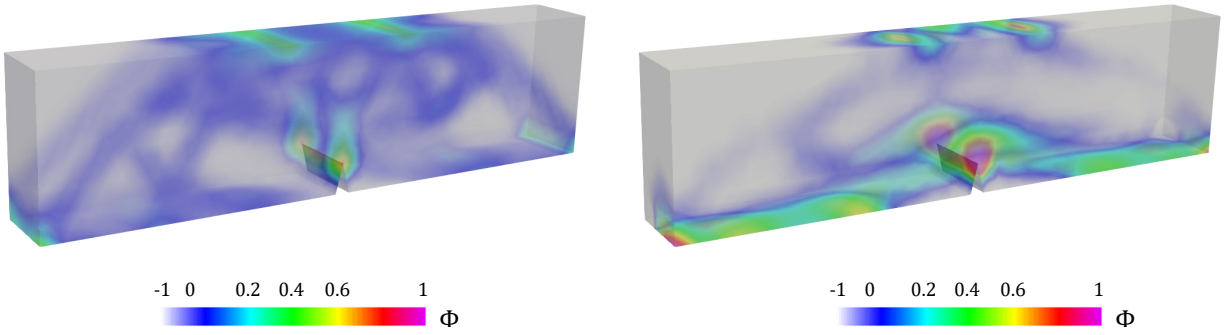


图8：示例1。基于线弹性结果（不包括断裂相场）的三点弯曲试验在不同体积比下最优布局的演化历史。

通过公式（3.1）中的反应-扩散演化，针对公式1和公式2计算得到的正则化拓扑场 $\Phi(\boldsymbol{x},\ t) \in [-1, 1]$ 分别如图 9(a-b) 所示。灰色区域表示非材料点，即 $\Phi(\boldsymbol{x},\ t) < 0$；彩色区域表示材料点，即 $\Phi(\boldsymbol{x},\ t) > 0$。此外，紫色区域标记为 Γ_Φ，它以 $\Phi(\boldsymbol{x},\ t) = 0$ 所表示的零水平集等值线区分材料集与非材料集。

法向速度为正表示材料分布可以增加，而法向速度为负则会导致这些区域中产生更多空洞。本文考察了示例1（公式1）最终最优布局 $\widehat{v}_\Phi\,|_{\Phi=0}$ 的法向速度。由图10(a)可清楚看出，在支座、加载区域以及裂纹萌生区（尖角区域）附近，法向速度场的数值较大且为正，因此阻止了材料去除。



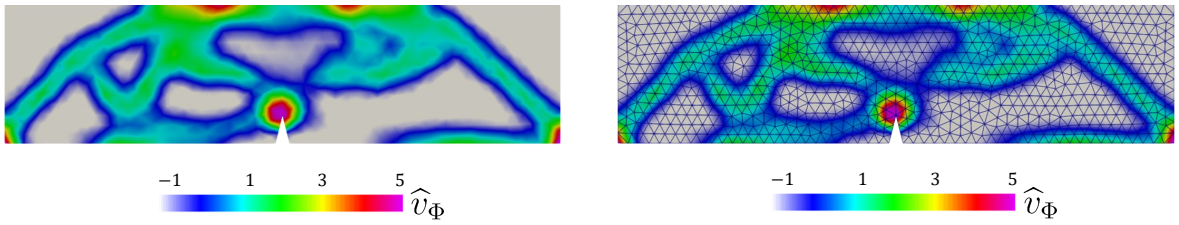
(a) (b)

图9：示例1。基于 (a) 公式1 和 (b) 公式2，在 $\chi_v = 0.4$ 处的最终拓扑优化迭代中计算得到的拓扑场 Φ 。

图10(b)还显示了叠加在有限元离散上的法向速度分布，从而可以清楚地观察到分裂单元。

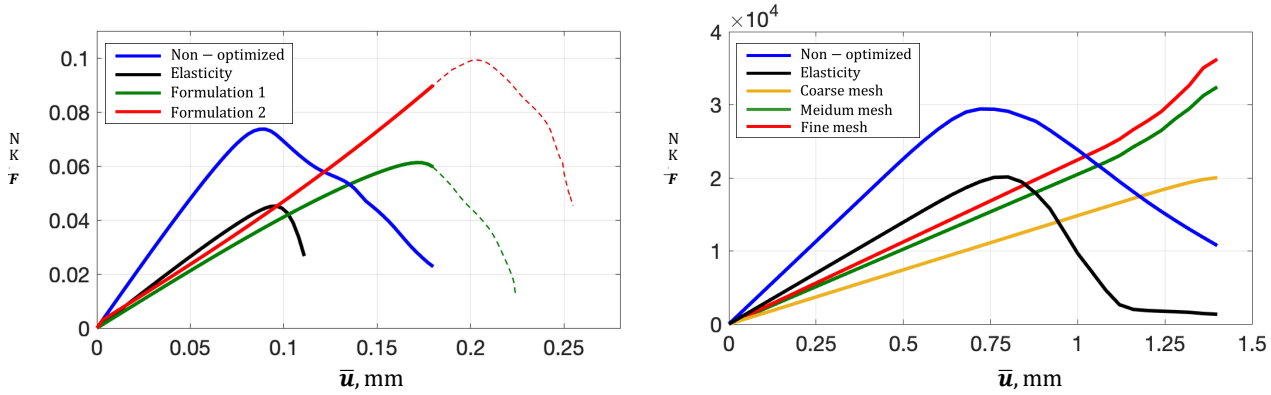
为进一步进行比较，图11(a)展示了未优化、弹性、公式1和公式2结果的载荷-位移曲线。由公式1得到的最终布局中可以观察到轻微的刚度退化，这表明在时间增量过程中，最终最优布局中局部裂纹发生了扩展。值得注意的是，采用公式2后，最终布局的最大承载能力与其他公式相比显著提高。因此，根据图11(a)，采用公式2时的最大承载能力比纯线弹性情况高52.7%，比公式1高35.7%。还可以看出，公式1的失效位移（观察到裂纹萌生时）比未优化情况高51.4%，比纯线弹性情况高49.7%。此外，图11(a)中以虚线表示了两种公式的失效软化区，以展示断裂状态。

另一个值得注意的影响因素是目标函数（即（88））和体积约束函数（即（89））的收敛历史，分别如图12(a-b)所示。观察图12(a)中的目标函数可以明显看出，与具有相同体积比的公式1相比，公式2表现出更高的客观性，即由于结构中储存的机械能更多，结构响应也更刚硬。



(a) (b)

图10：示例1。当 $\chi_v = 0.4$ 作用于 (a) 连续体空间和 (b) 非对称有限元离散时的速度分布。



(a) (b)

图11：载荷-位移曲线对比：(a) 示例1中压缩载荷下的三点弯曲试验，以及 (b) 示例2中混合模式断裂下的 L形板测试。

因此，公式2通过在最小化问题中增加额外约束，凸显了其效率。此处需要指出的是，在公式1中，只需通过（108）求解一个伴随敏感性方程，而公式2则需通过（102）求解，因此计算成本仍处于合理水平。我们注意到，图12(b)中所有方法的体积约束均表现出相似的响应，并渐近趋近其期望值，即 $\chi_v = 0.40$。

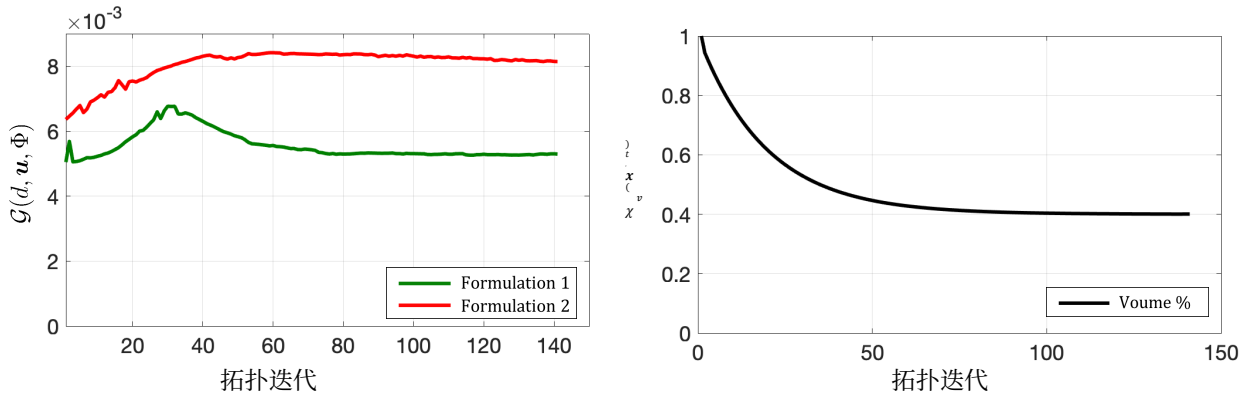
此外，图13展示了基于公式2的拓扑优化过程中，不同体积比对应的载荷-位移曲线。事实上，这体现了损伤响应对每种新拓扑的影响；随着体积比接近 $\chi_v = 0.40$，拓扑得到显著改善，断裂现象也有所减少。最终，在 $\chi_v = 0.40$ 时，不会因断裂而发生软化（没有裂纹萌生）。因此，所提模型展现了其有效性。

图14展示了公式1对应的最优布局的裂纹相场分布以及弹性结果；而公式2对应的类似裂纹分布则在图15中按不同时间阶段展示。首先值得注意的是，由公式1和公式2得到的最终布局克服了刚度退化导致的断裂限制（与图15(a)中的未优化结果相比）。所有方法均因软化而达到失效，这一点至关重要；而公式2对应的最优布局尚未失效，也未观察到任何损伤。

最后，公式1和公式2的离散化最终最优布局分别如图16(a-b)所示。平滑的拓扑界面（即零水平集）得到了显著捕捉。由于公式2相较于其他方法展现出了更高的效能，在后续的数值算例中，我们仅采用公式2研究脆性/延性断裂下的拓扑优化。

4.2. 示例2：混合模式断裂下的L形板测试

第二个示例涉及文献[111, 112]中报道的混合模式断裂问题。本示例的主要目的是评估所提出的数值方法中的网格敏感性



(a) (b)

图12：示例1。公式1-2中三点弯曲的 (a) 目标函数和 (b) 体积约束函数的收敛历史。

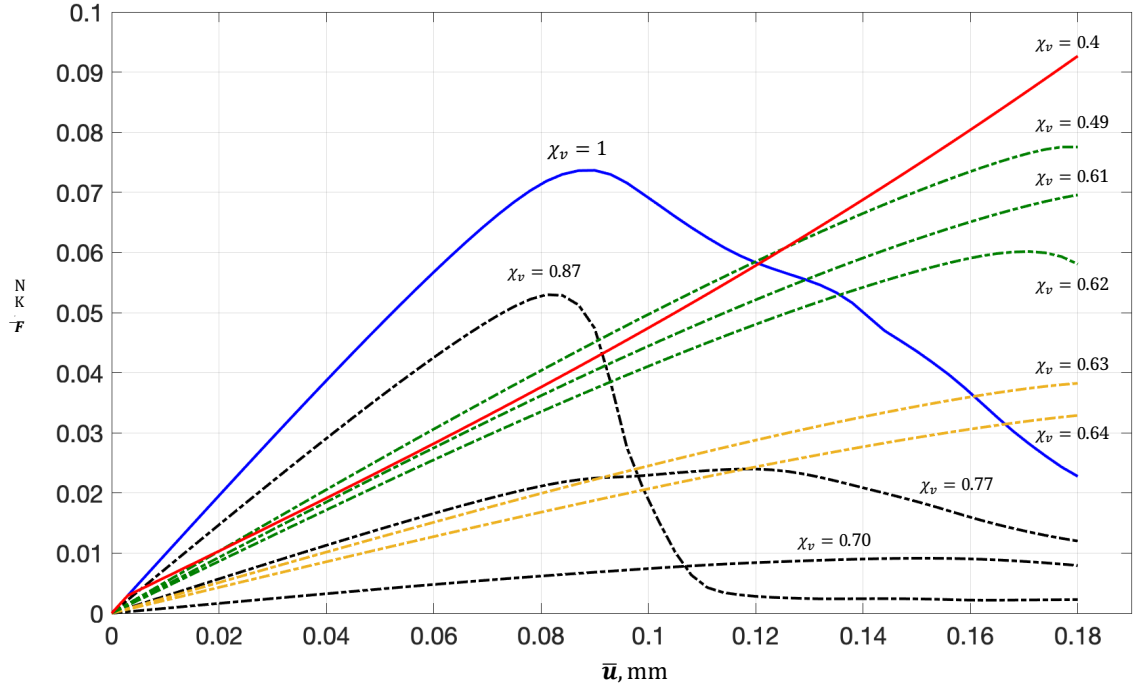
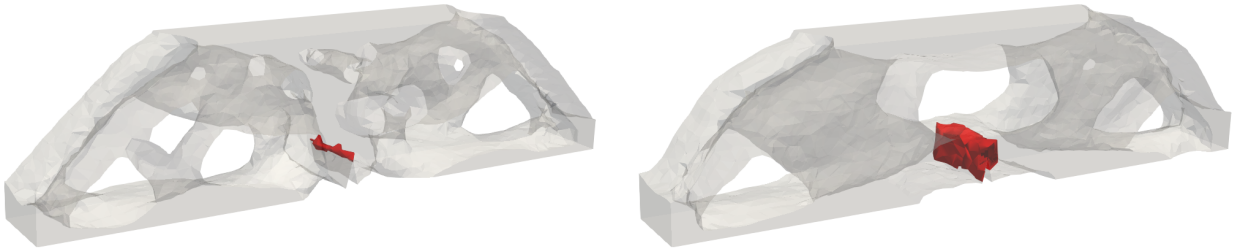


图13：示例1。通过公式2进行拓扑优化迭代直至获得最终最优布局过程中，不同体积比对应的载荷-位移曲线对比。

。为此，考虑了一个在混合模式断裂条件下、采用三种不同网格尺寸 的L形试件。通过该L形试件，我们旨在展示应力集中对最优拓扑中抗断裂能力的影响。

这些网格尺寸分别称为粗网格、中等网格和细网格离散网格。图17(b)所示为一个边值问题，而底面在所有方向上均受到约束 $x-y-z$方向。几何尺寸设为 $w_1 = 500\ mm$、$w_2 = 75\ mm$、$H_1 = 500\ mm$和 $H_2 = 250\ mm$。参考点位于（a，b，c）$=$（250，250，75）mm。该数值算例通过施加



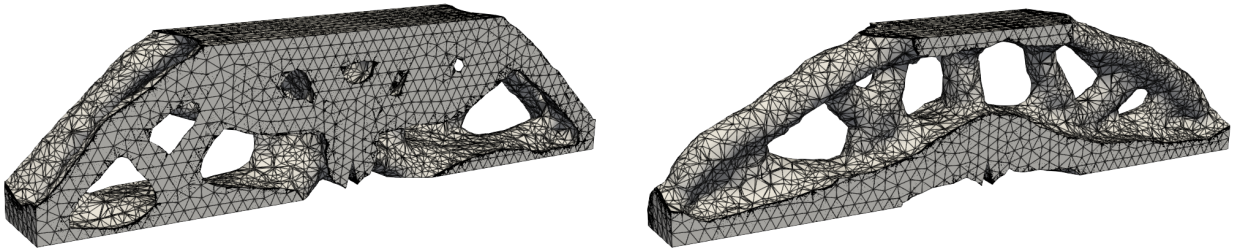
(a) (b)

图14：示例1。基于 (a) 公式1 和 (b) 线弹性结果的最优布局在发生脆性断裂时的裂纹相场响应。



(a) (b) (c)

图15：示例1。通过公式2得到的不同最优拓扑布局的裂纹相场响应：(a) 非优化结果 $\chi_v = 1$、(b) $\chi_v = 0.71$ 和 (c) 最终最优拓扑布局 $\chi_v = 0.40$ 。

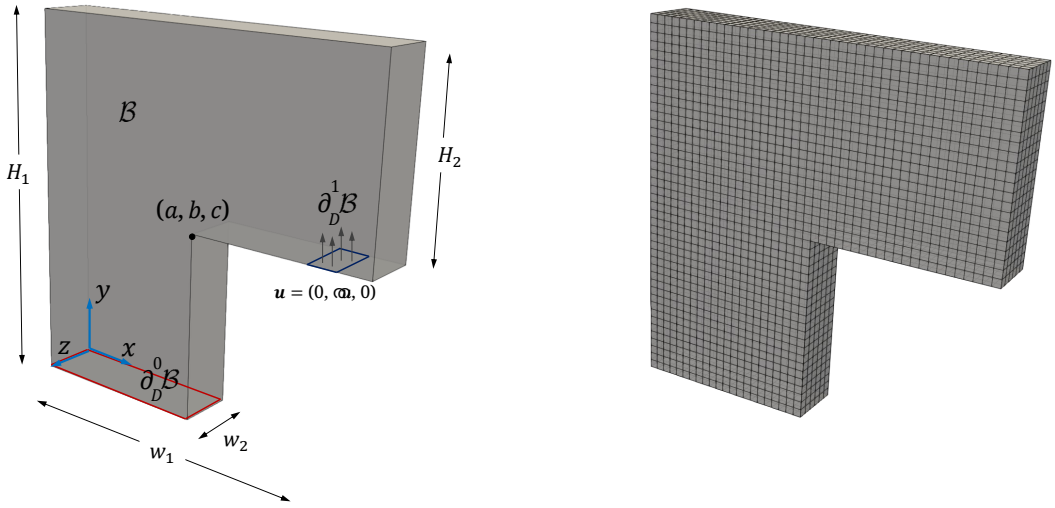


(a) (b)

图16：示例1。基于 (a) 公式1 和 (b) 公式2 的 $\chi_v = 0.4$ 情况下最优布局的有限元离散。

单调位移增量 $\Delta\bar{u}_x = 1 \times 10^{-2}\ mm$ 在试样的 $area =$ （461，250，75） $\times$（481，250，0）方向上施加，持续140个时间步。因此，该最小化问题的最终规定位移载荷设为 $\bar{u}_y = 1.4\ mm$。粗网格设计域中的最小有限元尺寸为 $h = 1.8$ ，其中包含3840个单元；中等网格的最小有限元尺寸为 $h = 1.4$ ，其中包含7200个单元；最后，细网格的最小有限元尺寸为 $h = 1.2\ mm$ ，其中包含8712个三线性六面体单元。需要指出的是，对于线弹性，我们采用与细网格相同的离散空间。

我们首先展示不同网格离散下最优布局的演化历史。图18展示了拓扑场的定性表示。因此，为便于说明，图



(a) (b)

图 17：示例2。（a）几何形状和边界条件，以及（b）有限元离散的示意图。

19 给出了弹性结果在不同体积比下的一种最优拓扑。显然，对于粗网格，所得结果的最终布局存在明显差异，这表明该方法具有网格依赖性。然而，中等网格和细网格得到的结果几乎相同。值得注意的是，随着有限元离散空间缩小，最终结果显著改善，更有利于应对裂纹扩展。与应力约束拓扑优化问题一致，另一个值得注意的影响因素是，由于采用了抗断裂公式，最优材料分布减轻了凹角附近产生的应力奇异性，如图18所示。事实上，这凸显了在拓扑优化问题中施加额外约束（即相场平衡方程）的作用；而在图19所示的弹性结果中，L 形结构的参考点（凹角点附近）则看不到这一现象。另一个值得注意的影响因素是，考虑相场断裂的灵敏度分析旨在寻找设计域内最佳的材料分布模式，同时减轻断裂效应。这使得边界演化的法向速度分布与忽略相场断裂效应的问题相比存在明显差异，尤其是在凹角处。

通过细网格的反应扩散演化方程计算得到的正则化拓扑场 $\Phi(\boldsymbol{x}, t)$ 如图 20 所示。其中包括连续空间中的水平集曲面 Γ_Φ 的零等值线，以及离散空间中的零等值线和演化后的水平集曲面。需要注意的是，灰色表示非材料点，而彩色区域表示材料点。未优化情况、弹性情况及不同网格尺寸下的载荷-位移曲线（作为全局指标）如图 11(b) 所示。显然，与未优化布局相比，最终布局的最大承载能力显著提高；而采用粗网格时，弹性情况下并未出现这种提升。因此，选择适当的网格离散方式至关重要。



图18：示例2。不同离散尺寸下，L形板测试中不同体积比对应的最优布局演化历史。

此外，可以观察到，无论网格尺寸如何，断裂极限点均比未优化情况高出 50.2%；而弹性分析结果表明，几乎需要相同的位移载荷才能观察到断裂起始。这充分体现了其重要性

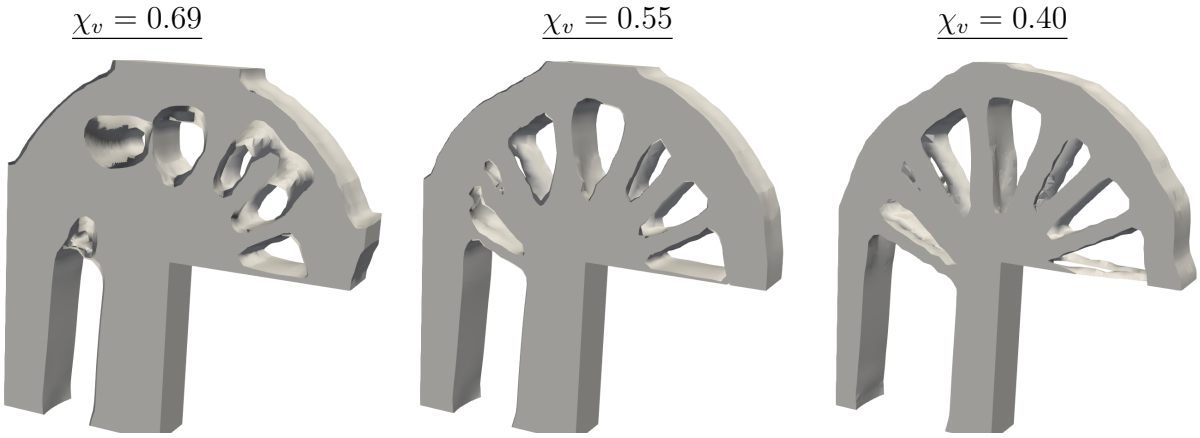


图 19：示例2。基于线弹性结果的 L 形结构板测试中，不同体积比下最优布局的演化历史。

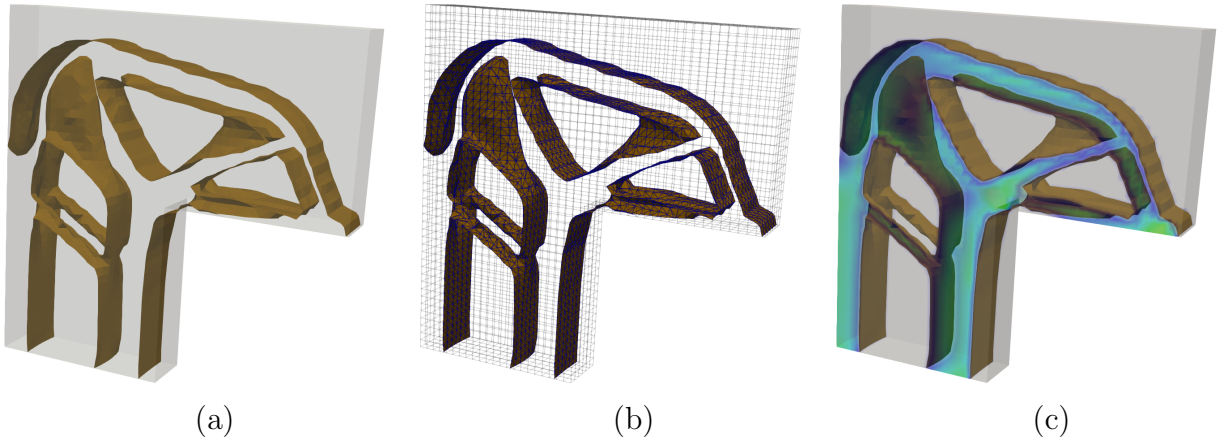
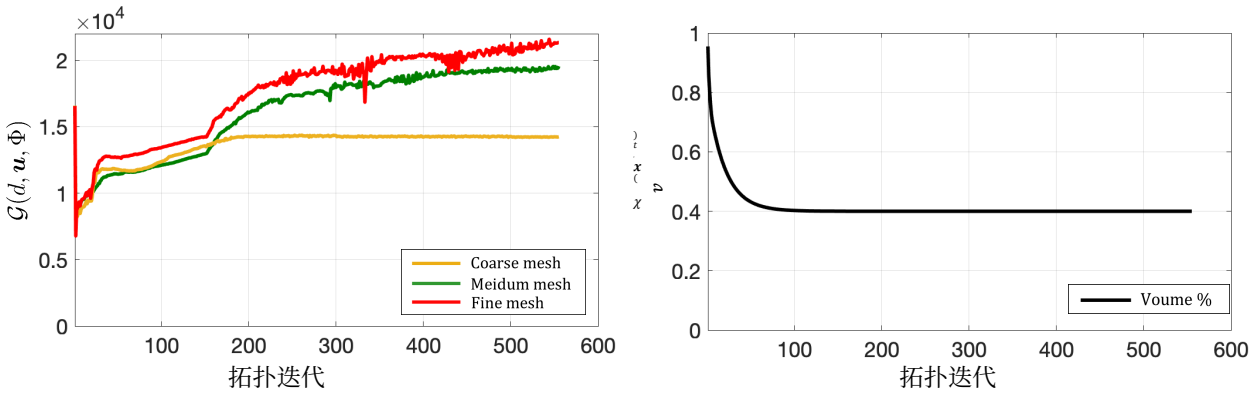


图 20：示例2。L形板测试的水平集表示。水平集曲面的零等值线 Γ_Φ 分别位于 (a) 连续体空间、(b) 离散空间，以及 (c) 计算得到的拓扑场 Φ 中。请注意，灰色区域表示非材料域，其中$\Phi < 0$。

在拓扑最小化方法中考虑断裂约束，从而成功延迟了断裂起始。

另一个值得注意的现象是目标函数和体积约束函数的收敛历史，分别如图 21(a-b) 所示。可以看出，网格越精细，目标函数的最优值越高，因此，最终最优布局的刚度响应也越强（因为断裂起始时的临界应力状态与离散尺寸成反比，见 [113]）。随后，图 22 展示了不同离散空间下的裂纹相场分布，图 23 则展示了未优化结果和弹性结果。首先值得注意的是，未优化结果和弹性结果得到的拓扑在断裂状态下均不适用。相反，无论网格尺寸如何，考虑断裂约束的拓扑优化都能显著限制开裂区域，因此表现出更优的效率。



(a) (b)

图 21：示例2。L形板测试的收敛历史：(a) 目标函数；(b) 体积约束函数。



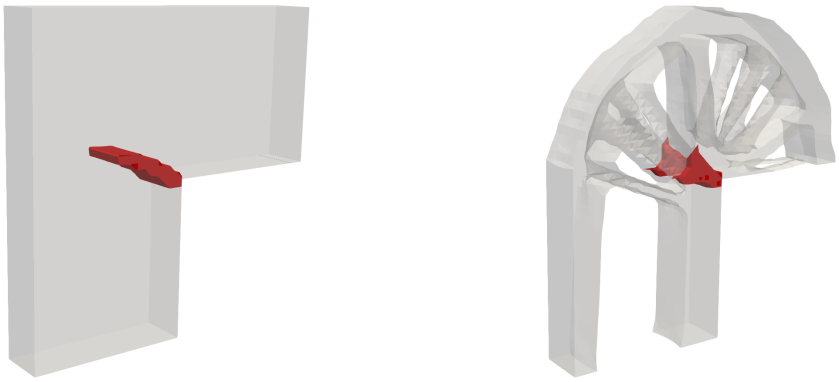
(a) (b) (c)

图 22：示例2。基于公式2，不同离散尺寸下的裂纹相场分布：(a) 粗网格；(b) 中等网格；(c) 细网格。

最后，图 30(a) 展示了离散化最终最优布局。显然，平滑的拓扑界面得到了清晰呈现。

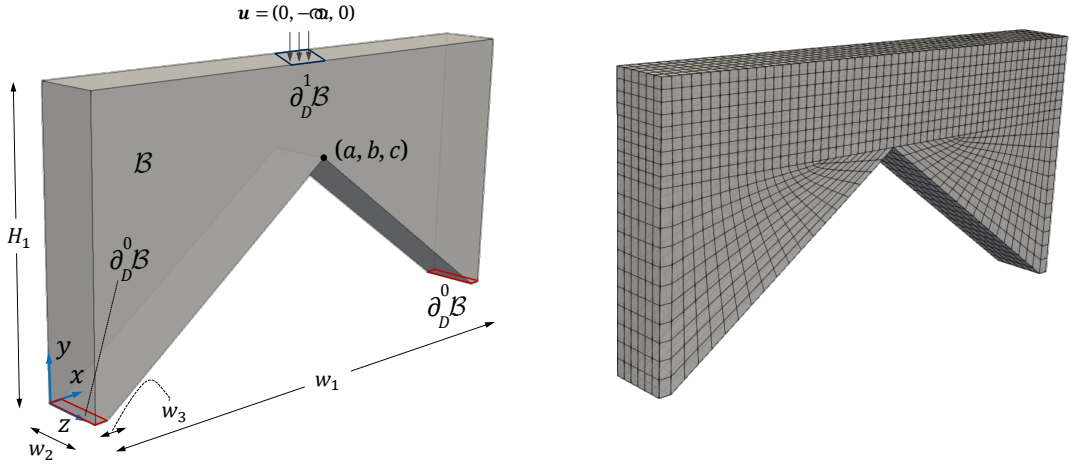
4.3. 示例 3：压缩载荷作用下的门式框架结构

最后两个算例探讨所提出的拓扑优化方法在延性失效情况下的性能。本例研究图24(a)所示的三维门式框架结构，该结构顶部狭窄区域承受给定的向下位移。该基准算例已在许多文献中报道 [12, 71]。几何构型如图24(a)所示。最左侧支承处的边缘在所有方向上均受到约束，而最右侧支承处的边缘在 y 方向上的位移受到固定约束。图24(a)所示的几何尺寸设为 $w_1 = 4.5\ mm$、 $w_2 = 0.5\ mm$、 $w_3 = 0.1\ mm$和 $H_1 = 2.25\ mm$。参考点位于 $(a,\ b,\ c) = (2.25,\ 1.5,\ 0.5)\ mm$。



(a) (b)

图23：示例2。基于 (a) 未优化结果和 (b) 线弹性结果的裂纹相场分布发生脆性断裂。



(a) (b)

图24：示例 3。(a) 几何形状和边界条件，以及 (b) 有限元离散的表示。

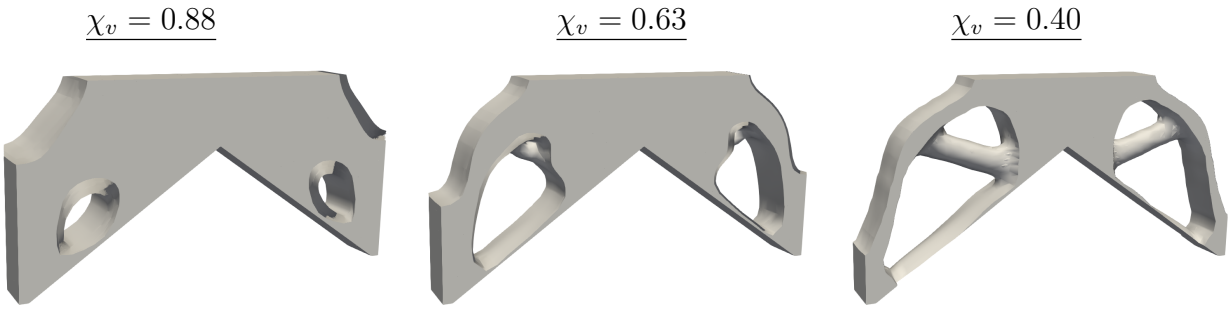


图25：示例 3。门式框架结构在不同体积比下最优布局的演化历史。

在试样顶部的一部分 $area =$((2.15, 2.25, 0.5) $\times$(2.35,2.25, 0)上，沿竖直方向向下施加单调位移增量 $\Delta\bar{u}_y = -2.5 \times^{-4}\ mm$ ，持续 150 个时间步。因此，该优化问题的最终规定位移载荷设为 $\bar{u}_y = -0.037\ mm$。实体域中的最小有限元尺寸选为 $h_{min} = 0.09\ mm$ ，这意味着共有 5520 个三线性六面体单元。

门式框架结构最优布局的演化历史如图25所示。此外，图26展示了最优布局结果对应的裂纹相场分布。一个重要的观察结果是，随着最优布局的体积分数趋近于 $\chi_v = 0.40$ ，断裂区域会减小。因此，抗断裂拓扑优化公式抑制了材料域中的裂纹扩展。因此，尽管最终最优布局的体积比较小，但在断裂状态下仍呈现出最刚硬的响应。除断裂模式外，图27还展示了最优布局演化历史的等效塑性应变 $\alpha(\boldsymbol{x}, t)$。相应地，塑性区以绿色显示，其中最大等效塑性应变出现在规定载荷、支座以及中部角部表面附近。值得注意的是，随着最优布局趋近于 $\chi_v = 0.40$，塑性区域会减小。这表明所提方法还具有另一项有趣的优势。

另一个值得注意的影响因素是非优化布局和优化布局的载荷-位移曲线，如图28(a)所示。失效软化区还以虚线表示，以观察断裂状态的延迟。事实上，采用面向断裂的拓扑优化可以避免裂纹萌生，因此，正如所提模型的预期，不会因断裂而发生软化。目标函数和体积约束函数的收敛性能分别如图28(b-c)所示。显然，从图28(b)中的目标函数变化可以看出，经过100次优化迭代后，模型表现稳定。可以看出，体积约束函数渐近趋近于其目标值，即 $\chi_v = 0.40$。

接下来，我们研究不同体积比下载荷-位移曲线的演变，直至优化收敛到最终拓扑。相关结果如图29所示。事实上，这一演变突显了损伤响应对拓扑优化的影响；随着每次得到新的最优布局，损伤响应都会减弱，因此软化区将逐渐消失。由此可见，所提模型在约 $\chi_v \geq 0.44$ 后便展现出良好的性能。最后，该示例平滑的离散化最终最优布局如图30(b)所示。

4.4. 示例4：承受剪切载荷的短悬臂梁

最后，我们研究承受剪切载荷的三维悬臂梁的最优布局。这是一个常见的拓扑优化问题，已在 [71, 75, 114, 115] 中报道。这里，我们分别针对脆性与延性相场断裂确定最优拓扑构型，以便进行比较。我们将对此进行详细讨论。

图31(b)展示了一个边值问题。最右侧支承的曲面在所有方向上均受到约束。图31(b)的几何尺寸设定为 $w_1 = 1\ mm$, $w_2 = 0.1\ mm$ 和 $H_1 = 0.5\ mm$。参考点位于 $(a,\ b,\ c)$ =(2。25，1。5，0。5) mm。该数值算例通过施加

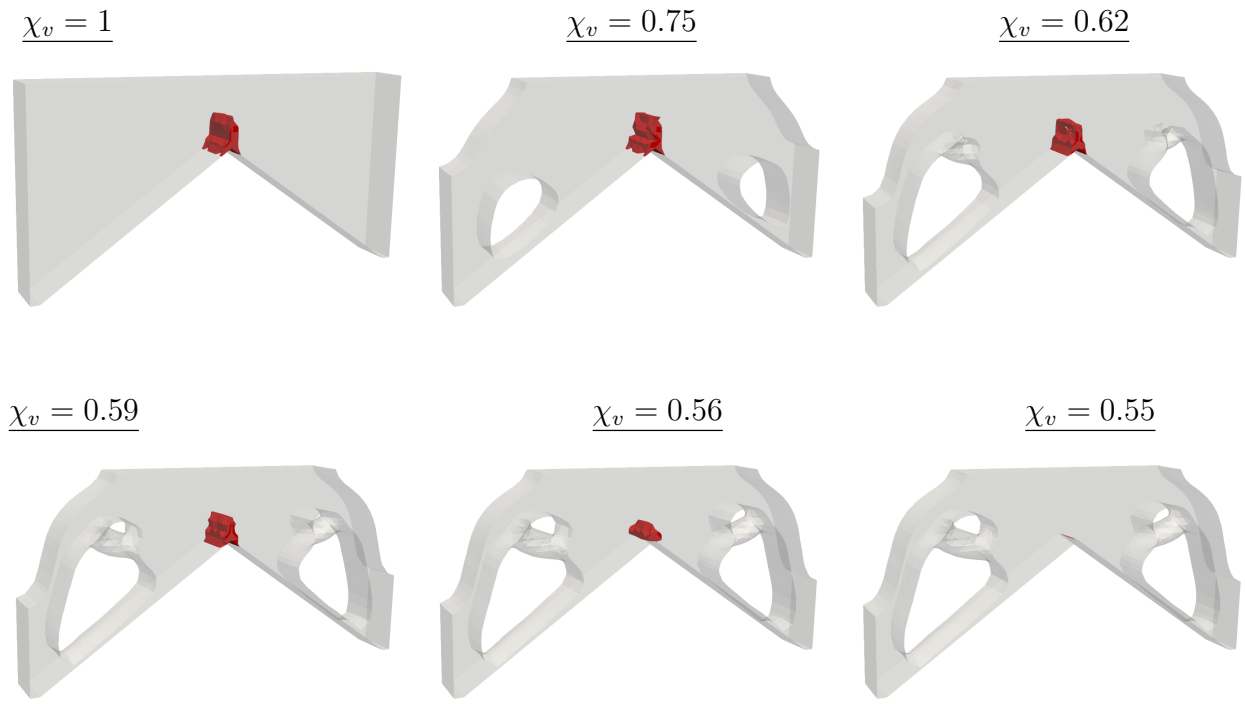


图26：示例 3。不同体积比下各最优拓扑布局的裂纹相场分布

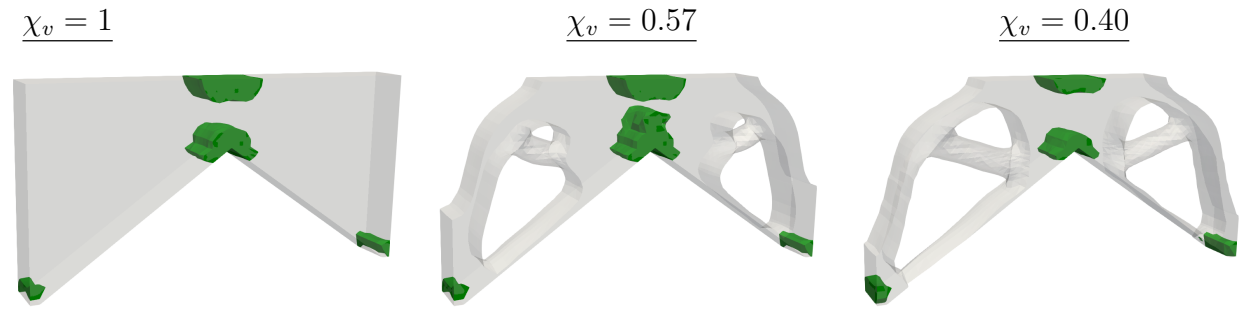


图27：示例 3。延性断裂模型中，不同体积比下各最优布局演化历史对应的硬化值（塑性区）。

单调位移增量 $\Delta\bar{u}_y = 0.5 \times^{-4}\ mm$ 来进行，该增量规定在试样顶部的一部分 $area =$ (0，0。23，0)×(0，0。27，0。1) 沿竖直方向向上施加，共持续146个时间步。因此，该最小化问题最终规定的位移载荷为 $\bar{u}_y = 7.3 \times^{-3}\ mm$。实体域中的最小有限元尺寸为$h_{min} = 0.02\ mm$，其中包含32161个线性四面体单元。

首先，我们介绍在两种不同情景下，受悬臂梁失效响应约束的定量和定性拓扑优化。

- **情形a**。首先，研究剪切载荷作用下悬臂梁的脆性断裂拓扑优化。采用表1中的材料性质，不过

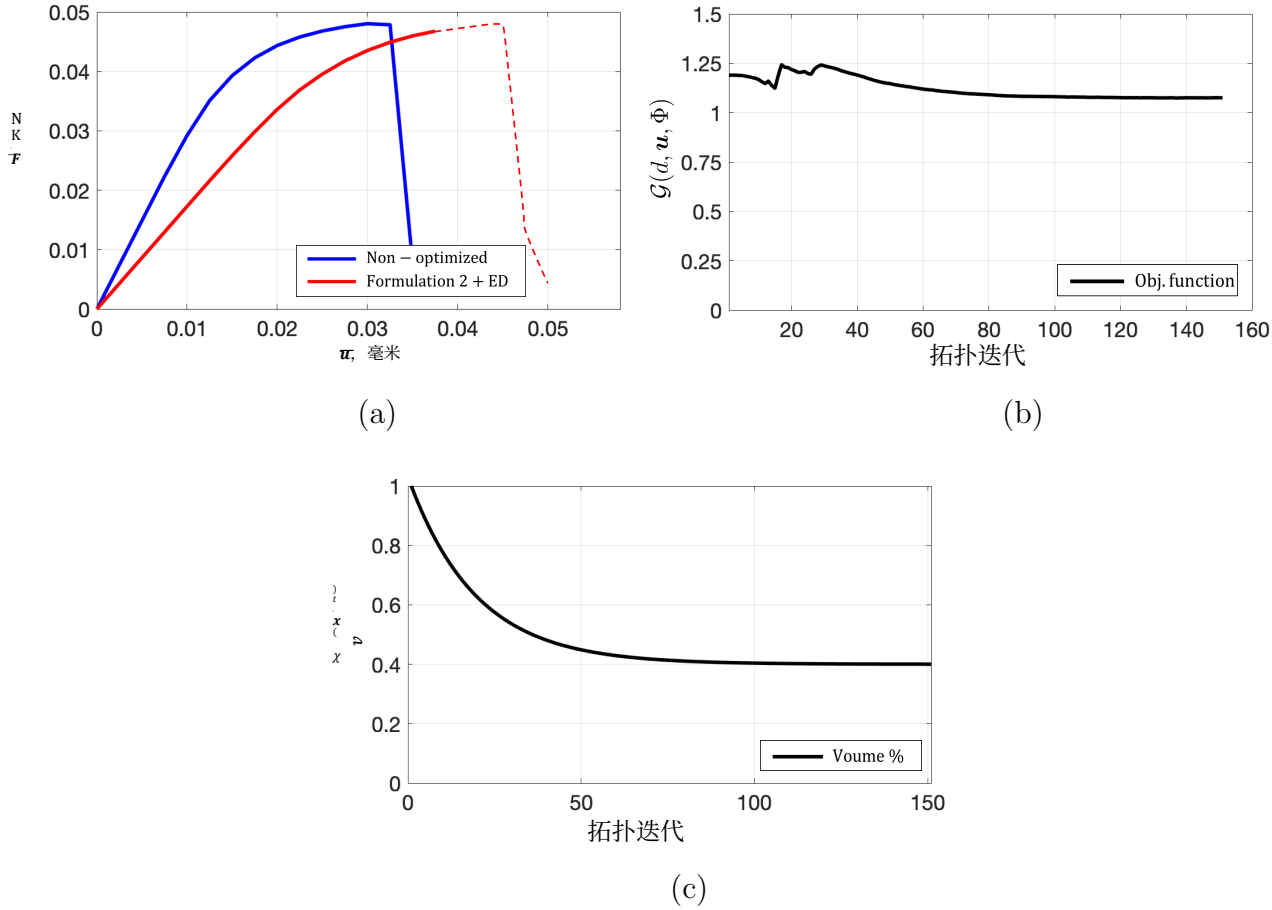


图28：示例 3. 门式框架结构在压缩载荷作用下的计算响应。(a) 载荷-位移曲线，(b) 目标函数的收敛历史，以及 (c) 体积约束函数。

我们设定 $\sigma_Y = 10^{16}$。图32展示了不同体积比（最高至 $\chi_v = 0.40$）下最优拓扑的演化历史。为便于比较，图33还展示了线弹性结果的拓扑优化。图35给出了未优化结构、弹性结果以及针对脆性断裂进行拓扑优化所得结果的定量载荷-位移曲线。此处需要指出，仅依据线弹性结果获得最优拓扑并不能避免结构发生断裂状态，因此我们应在优化问题中考虑断裂约束。图36展示了目标函数和体积约束函数的收敛历史，二者均明显达到收敛状态。最后，我们研究了通过脆性断裂优化获得的最优布局所对应的裂纹相场分布，并将其与弹性结果及未优化结果一同展示于图38。需要注意的是，由于载荷向上施加于几何形状上，悬臂梁底部位于中性轴下方的区域因拉应力而受到拉伸。

• **情况b**。 其次，研究悬臂梁延性失效的拓扑优化。因此，图 34 展示了最优拓扑的演化历史。为更深入地了解所提模型，图 35(b) 研究了未优化、弹性以及由脆性断裂和延性断裂驱动的拓扑优化的定量载荷-位移曲线

。这里，所谓由脆性断裂驱动的拓扑优化，是指先从脆性断裂驱动的优化过程中获得最终最优布局，然后通过延性相场计算载荷-位移曲线。该曲线以黑色显示于图 35(b) 中。事实上，我们认为，此处由延性断裂驱动的拓扑优化在避免弹塑性材料进入断裂状态方面表现最佳，如图 35(b) 所示。因此，由延性断裂驱动的拓扑优化（图 35(b) 中的红色曲线）不会因断裂而出现软化（不会发生裂纹萌生），展现了所提模型的巨大潜力。

另一个值得注意的影响因素是目标函数和体积约束函数的收敛历史，如图 37 所示。不同体积比下最优布局对应的裂纹相场分布如图 39 所示。此外，不同体积比下最优布局演化历史中的等效塑性应变 $\alpha(\boldsymbol{x},\ t)$ 如图 40 所示。我们注意到，绿色区域表示的最大等效塑性应变出现在左侧曲面上的固定支座附近。值得注意的是，只要最优布局趋近于 $\chi_v = 0.40$，断裂区域和塑性区就会大幅缩小。事实上，这证明了所提方法的高效性。

我们进一步考察因延性断裂而获得的最优布局。为此，我们采用由弹性——

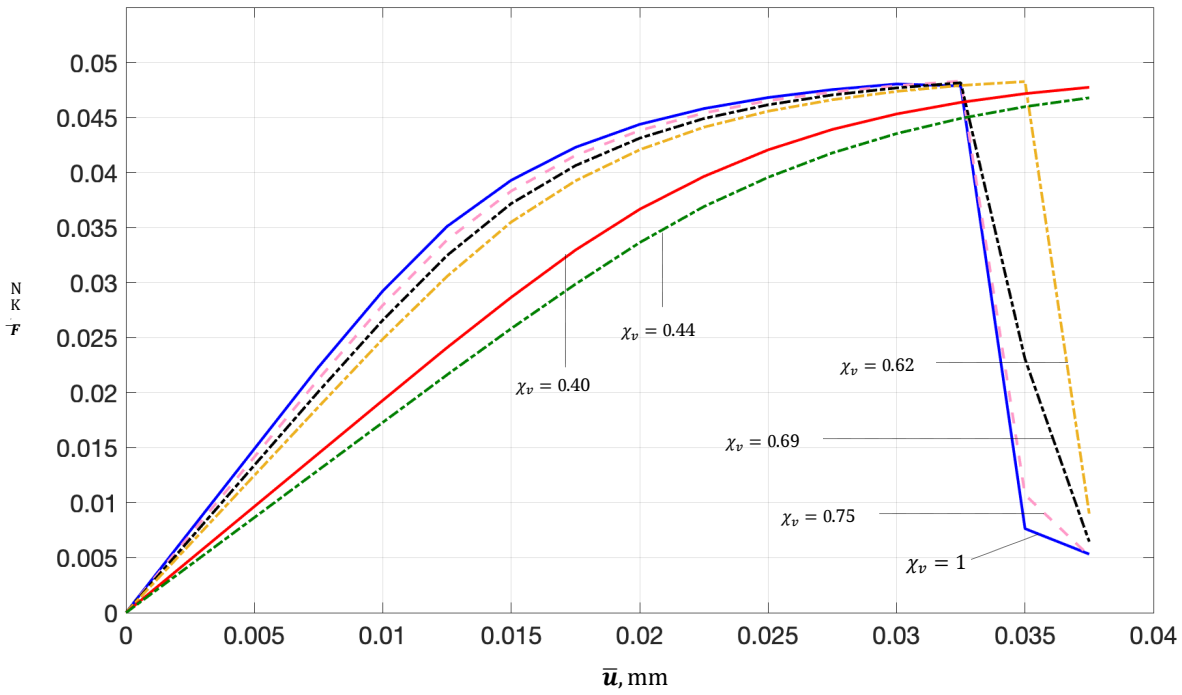
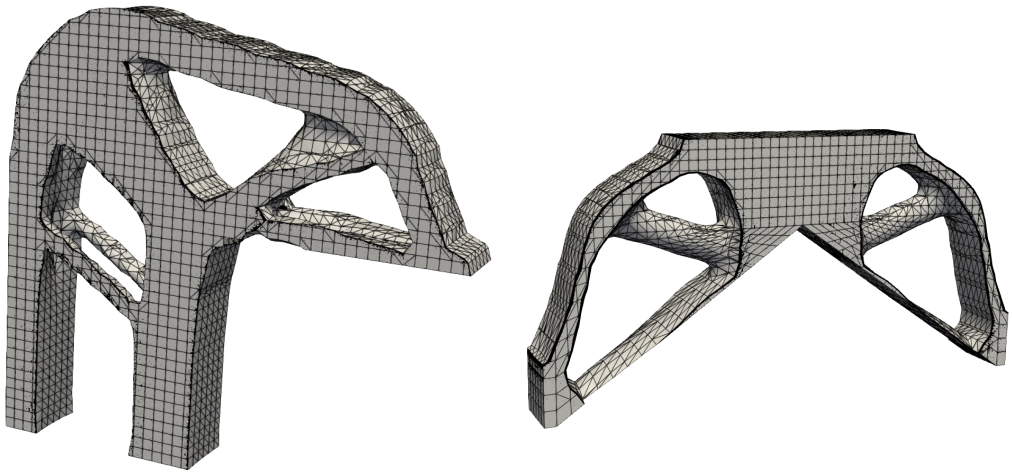
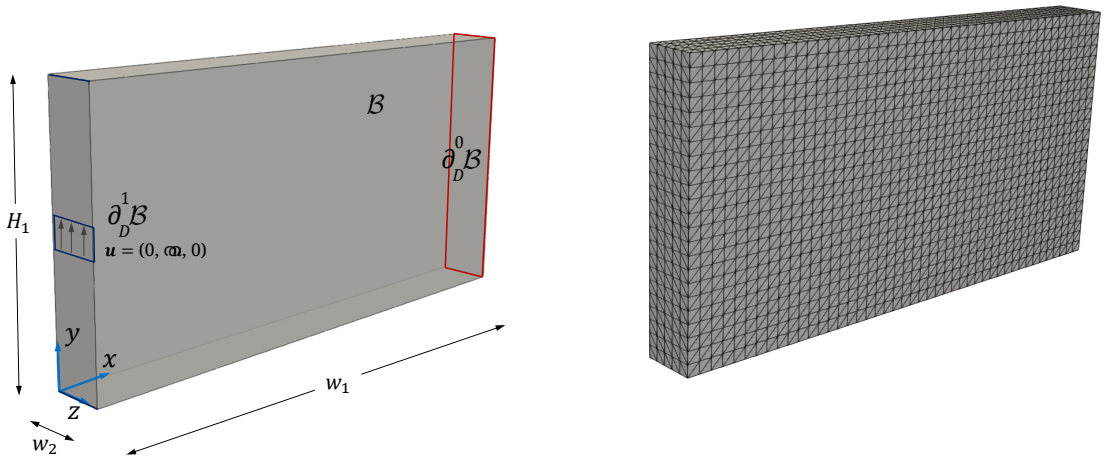


图 29：示例 3。对比拓扑优化迭代过程中不同体积比对应的载荷-位移曲线，直至达到最终最优布局。



(a) (b)

图30：当 $\chi_v = 0.4$ 时最优布局的有限元离散：（a）示例2；（b）示例 3。



(a) (b)

图31：示例4。（a）几何形状与边界条件；（b）有限元离散。

性结果以及脆性断裂优化过程得到的最终最优布局，来计算延性失效响应。结果如图41所示。值得注意的是，由于存在塑性变形，偏应力发挥着重要作用，而静水压力在塑性阶段没有贡献，即 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_p) = 0$。事实上，右上角的偏应力最大（硬化量也最大），因此断裂从该区域开始并扩展。显然，两种最优构型都在支座附近发生了裂纹扩展，而延性断裂拓扑优化的情况并非如此，参见图 39 中的 $\chi_v = 0.40$。因此，结果表明，采用受必要项（本例中为断裂平衡力向量）约束的适当拓扑优化框架十分必要。因为只有延性抗断裂最优布局能够消除材料域内的裂纹扩展。

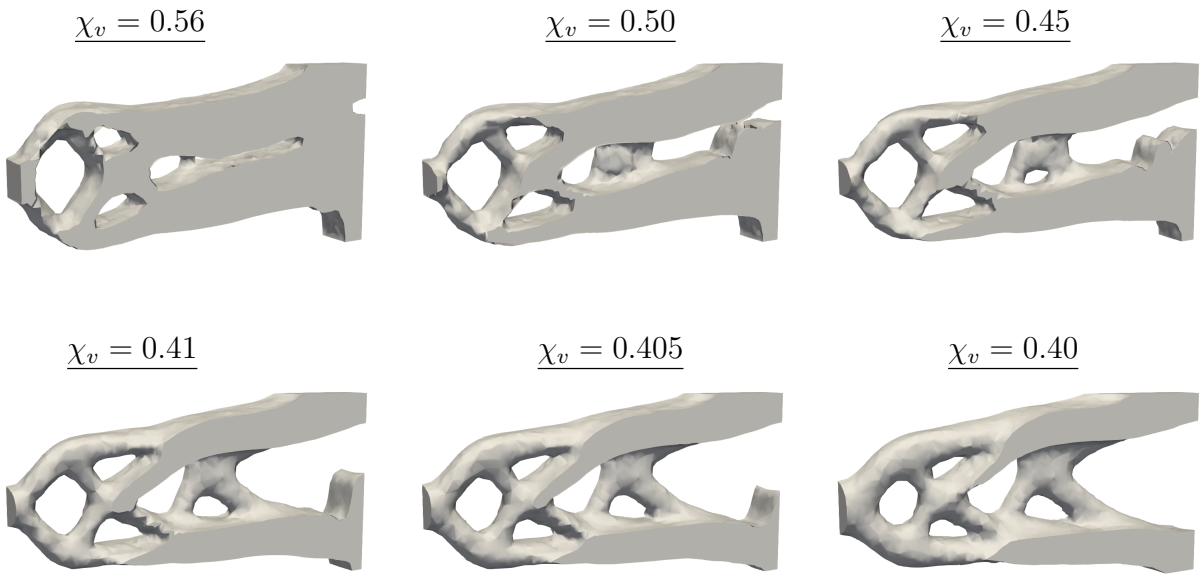


图32：示例4（情形a）。短悬臂梁在不同体积比下针对脆性断裂的最优布局演化历史。

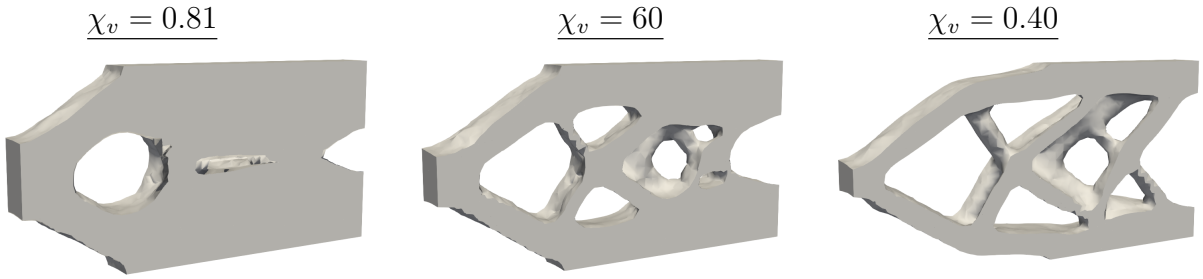


图33：示例4。短悬臂梁在不同体积比下的线弹性结果最优布局演化历史。

因此，值得展示通过反应扩散演化方程计算得到的正则化拓扑场 $\Phi(\boldsymbol{x},\ t)$，该方程适用于图42所概述的脆性断裂和延性断裂。这里，灰色表示非材料点，彩色区域表示材料点，紫色表示材料边界（水平集函数的零等值线）。最后，图43(a-b)分别展示了脆性断裂和延性断裂对应的离散化最终最优布局。显然，平滑的拓扑界面得到了捕捉。

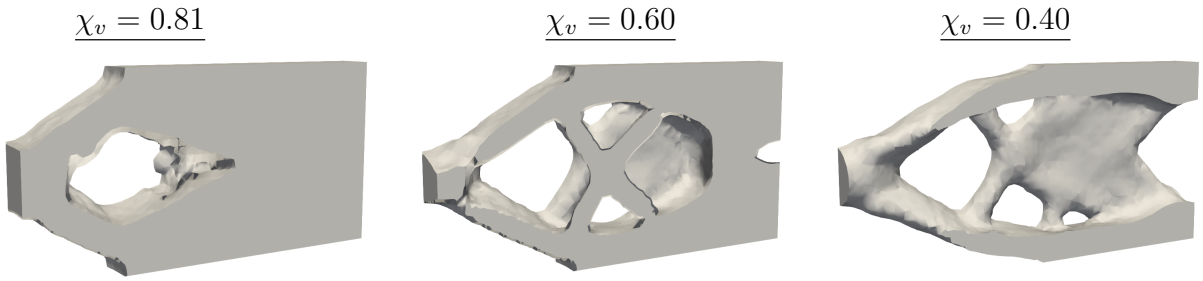


图 34：示例4（情况b）。短悬臂梁在不同体积比下的延性断裂最优布局演化历史。

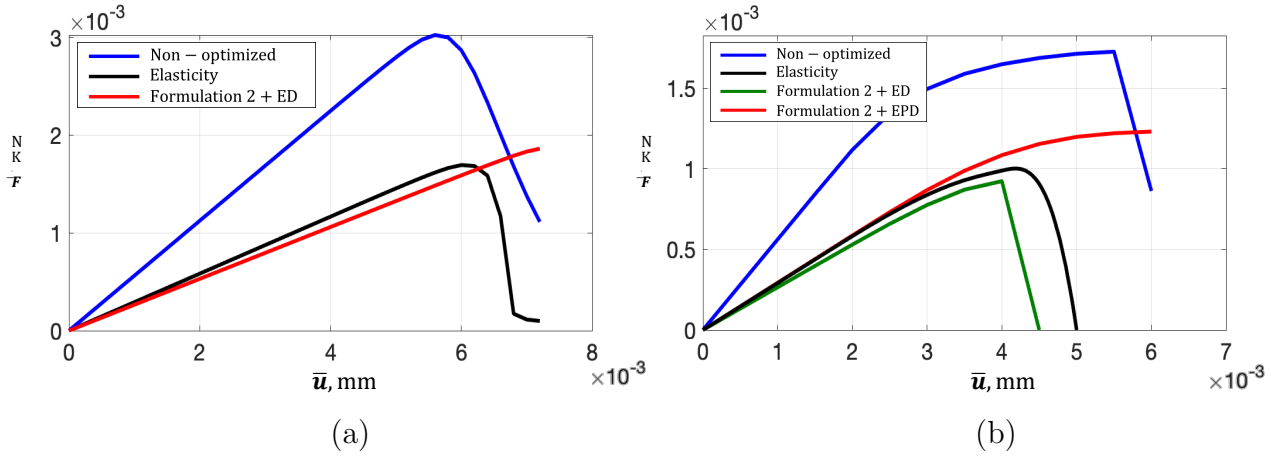


图 35：示例4。短悬臂梁载荷-位移曲线对比：(a) 情形a所述的脆性断裂模型；(b) 情况b所示的延性断裂模型。

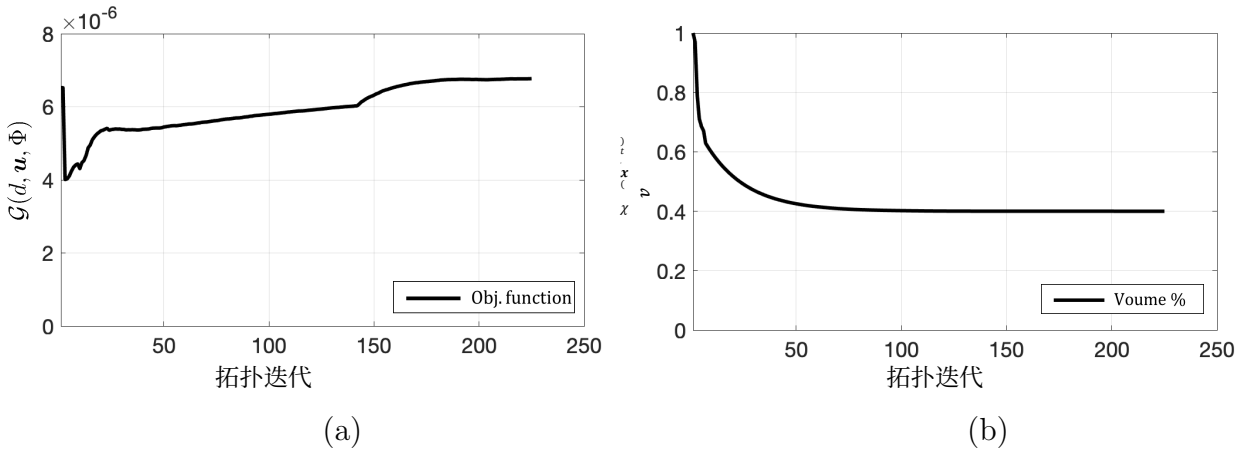
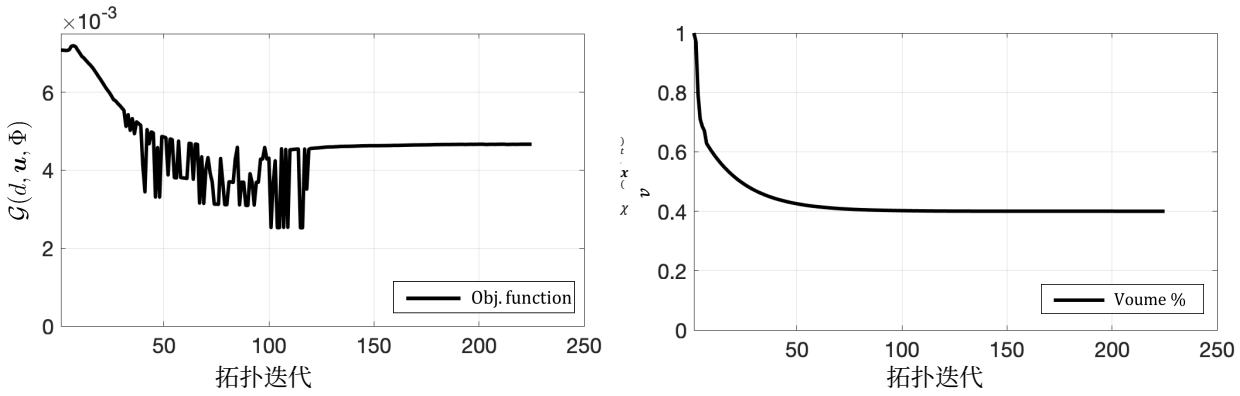


图 36：示例4（情形a）。脆性断裂收敛历史：(a) 目标函数；(b) 体积约束函数。



(a) (b)

图 37：示例4（情况b）。延性断裂的收敛历史，包括 (a) 目标函数和 (b) 体积约束函数。



(a) (b) (c)

图38：示例4（情形a）。不同体积比最优拓扑布局的裂纹相场分布：基于 (a) 未优化、(b) 脆性断裂模型和 (c) 线弹性结果，并发生脆性断裂。

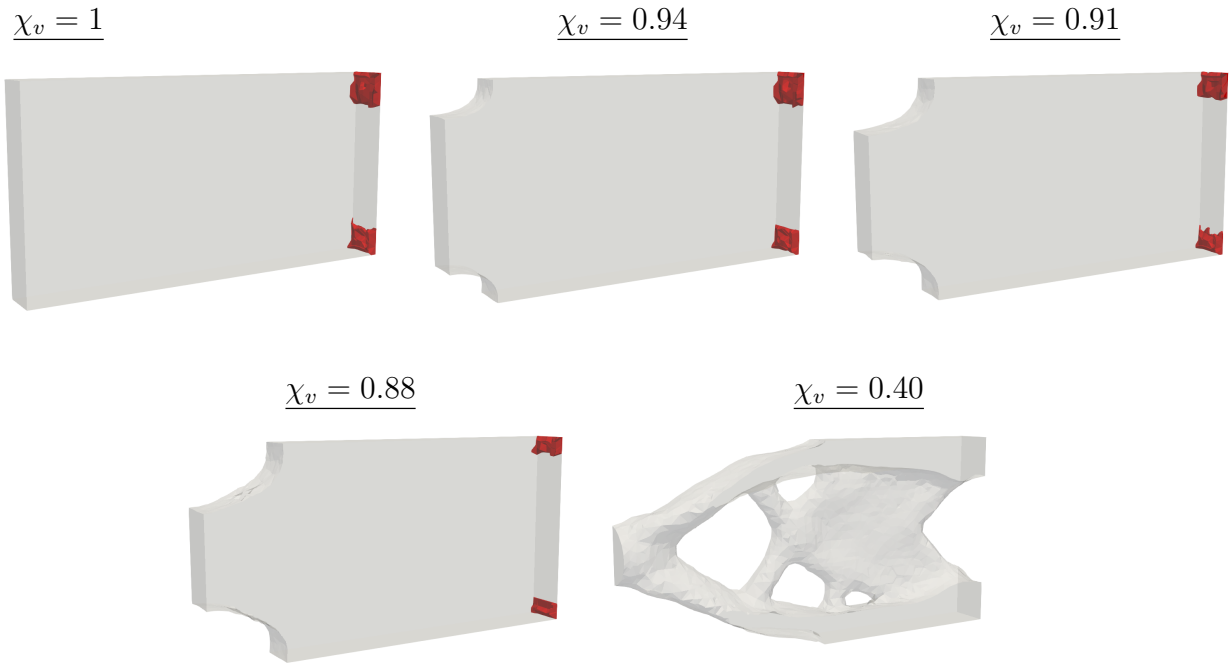


图 39：示例4（情况b）。延性断裂模型下，不同体积比最优布局演化历史的裂纹扩展模式。

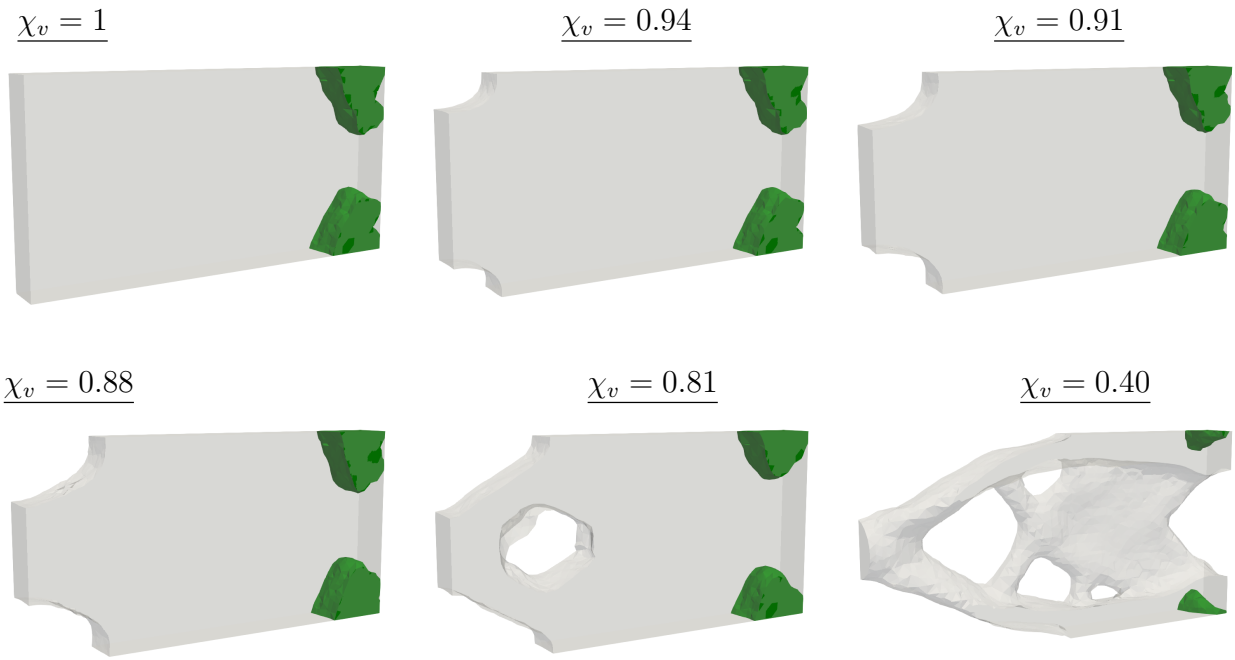


图 40：示例4（情况b）。延性断裂模型不同体积比最优布局演化历史的计算硬化值（塑性区）。

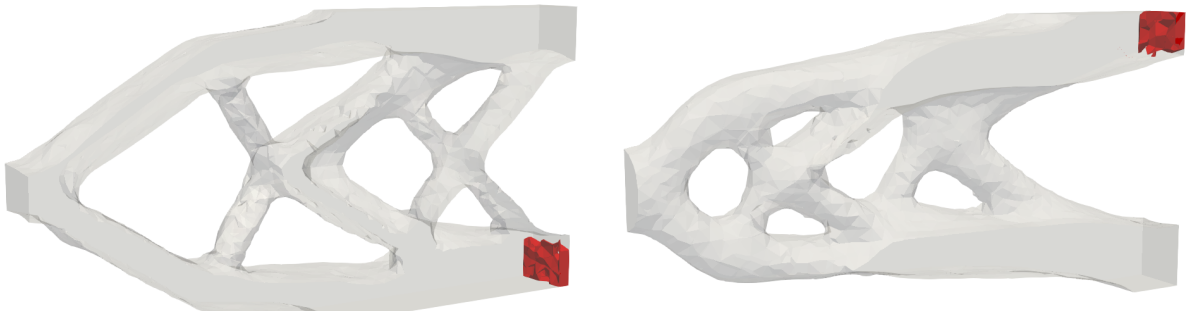
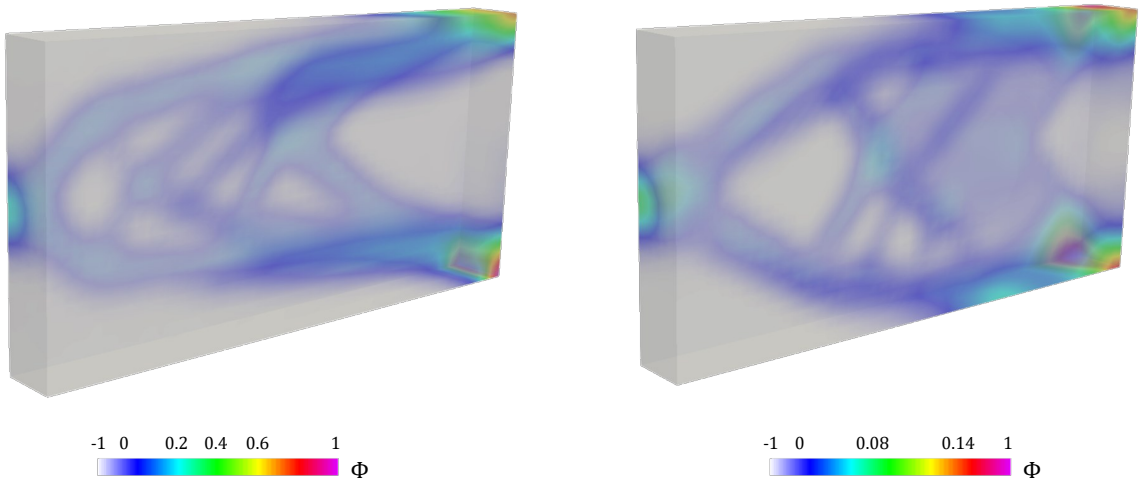
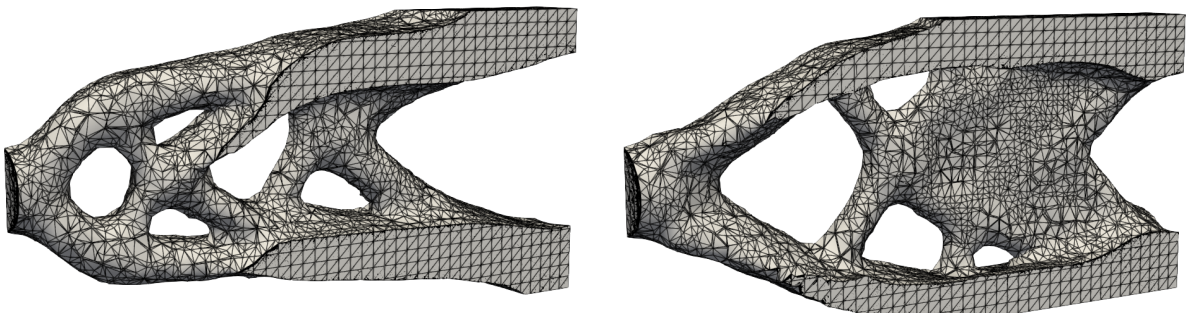


图41：示例4（情况b）。示例4中延性断裂模型的裂纹扩展模式：(a) 纯弹性；(b) 脆性断裂模型。



(a) (b)

图42：示例4。在 $\chi_v = 0.4$ 时最终拓扑优化迭代得到的拓扑场 Φ：（a）情形a；（b）情况b。



(a) (b)

图43：示例4。最优布局的有限元离散 $\chi_v = 0.4$：（a）情形a；（b）情况b。

5. 结论

本研究提出了一种稳健、高效的拓扑优化框架，用于提升结构抵抗脆性与延性相场断裂的能力。本文采用基于水平集的拓扑优化作为一种数学方法，旨在寻找满足平衡、目标函数和约束函数的最佳材料分布。据此，我们提出了两种不同的公式。第一种仅将变形场的残余力向量作为约束，而第二种则同时考虑变形场和相场断裂的残余力向量。第一种方法所需的实现工作较少，但无法消除断裂。相比之下，第二种公式直接约束断裂状态，能够明确地得到更优设计。本文通过基于反应扩散的水平集拓扑优化方法实现最优材料分布，并为两种公式推导了相应的一致伴随灵敏度分析。由于我们处理的是率相关非线性边值问题，因此需要在每个时间增量计算灵敏度，从而进行路径相关灵敏度分析。

本文通过四个数值算例验证了所提出的算法，其中前两个与脆性断裂有关，后两个涉及延性相场断裂。在第一个算例中，我们证明，与公式1相比，公式2的效率更高；基于线弹性得到最优布局，而未优化区域（原始区域）则发生脆性失效。因此，与其他方法相比，公式2展现了其优越性。在第二个算例中，我们旨在评估所提出数值方法的网格敏感性。为此，我们考虑了混合模式断裂载荷下的三种不同网格尺寸。首先观察到，较细的网格会产生包含更多孔洞的材料分布，在提供更优结果方面优于较粗的网格。然而，较细的网格可能会形成更复杂、难以制造的结构，同时也会增加正向问题和优化问题的计算成本。此外，可以观察到，无论网格尺寸如何，断裂极限点均比未优化结果以及发生脆性断裂的最优弹性结果高出约50.2%。这表明，在拓扑最小化方法中考虑断裂约束至关重要，因此可以获得更高的精度。研究结果表明，与应力约束拓扑优化问题类似，最优材料分布会避免凹角周围出现应力奇异性，因为优化器移除了凹角周围的材料。

在第三个和第四个示例中，结论是，拓扑优化得到的最终最优布局虽然体积比较小，但在延性断裂状态下表现出最强的刚度响应。此外，等效塑性应变 $\alpha(\boldsymbol{x},\ t)$ 和塑性区均有所减小。因此，抗延性断裂的拓扑优化阻止了材料域中的裂纹扩展。特别是，在最后一个示例中，我们考察了针对线弹性和发生延性失效的脆性断裂，通过拓扑优化得到的最优布局。结果表明，只有考虑延性断裂的公式才能避免裂纹扩展（从而避免材料退化）。

Severa 本研究提出了若干值得进一步研究的主题。首先，一种高效的 t

基于水平集的拓扑优化方法可针对延性相场断裂扩展至大变形情形。其次，需要考虑模型中涉及的其他物理因素，尤其是热效应，因为它们可能成为目标函数和约束函数的额外来源。最后，由于对断裂材料进行拓扑优化时，相场公式的有限元处理在计算上要求较高，因此，自适应多尺度（空间降阶建模）公式尤其具有吸引力。我们将在未来的工作中着手解决这些问题。

致谢

N. Noii 感谢由优先计划 DFG-SPP 2020 第二资助阶段创立的德国研究基金会。

附录 x A. 使用中心差分法进行敏感性验证

为验证第 3.4 节所述的灵敏度分析，我们采用示例 3 中压缩载荷作用下的门式框架结构，其边值问题如图23所示。这里，我们通过中心差分近似，对优化问题 (90) 的拉格朗日泛函采用一种典型的有限差分法来验证灵敏度。具体而言，我们将式 (106) 得到的灵敏度结果与对式 (90) 应用中心差分法得到的结果进行比较。

$$\texttt{FEM:}\quad \widehat{v}_{\Phi}\,|_{\Phi=0} = -\mathcal{G} = -D_{\Phi}\mathfrak{L} = -\sum_{\mathrm{n}=1}^{N}\left(D_{\Phi}\mathfrak{L}^{i}\right) \tag{A.1}$$

其中，灵敏度分析由式 (106) 得出。随后，采用中心差分法，我们对门式框架区域中的每个单元 $e \in (1,\ n_e)$ 得到如下近似：

$$\texttt{FDM:}\quad \widehat{v}_{\Phi}\,|_{\Phi=0} \approx -\sum_{\mathrm{n}=1}^{N}\frac{\mathfrak{L}^{i}(\Phi_1,\cdots,\Phi_e+\Delta\Phi_e,\cdots,\Phi_{n_e})-\mathfrak{L}^{i}(\Phi_1,\cdots,\Phi_e-\Delta\Phi_e,\cdots,\Phi_{n_e})}{2\Delta\Phi_e} \tag{A.2}$$

使得我们设定 $\Delta\Phi_e = 10^{-4}$。现在我们重新概述有限元法与有限差分法的比较。为此，图 A.1 展示了通过解析方法 (A.1) 和数值方案 (A.2) 得到的灵敏度。由于对拉格朗日函数进行了灵敏度分析，区域中的一些节点出现了负值，这一点可从图 A.1 中看出。事实上，这表明拓扑优化过程中存在空洞成核区域。为更详细地比较结果，图 A.2 展示了相对误差。结果表明，解析灵敏度与数值灵敏度吻合良好，而解析方法的计算速度要快得多。

值得注意的是，图 A.2 中残余误差的来源可以说明如下：(i) 伪密度扰动值 $\Delta\Phi_e$ 的选择；(ii) 使用了

在式 (14) 中使用精确的 Heaviside阶跃函数，而非其正则化版本；以及 (iii) 在式 (107) 中使用正则化的 Dirac δ 函数（见图 4a）。值得注意的是，由于精确的 Heaviside阶跃函数没有解析导数，因此在有限差分法中使用了正则化的 Heaviside函数，即正则化 Dirac δ 函数的积分。而在解析方法中，则使用了精确的 Heaviside阶跃函数。

为进一步比较，图 A.3 展示了体积约束拉格朗日乘子取常数时拉格朗日函数的灵敏度，该乘子在 $\widehat{v}_\Phi|_{\Phi=0}$ 中引入。这是沿 $x-y$ 方向的横截面视图，其中 $\widehat{v}_\Phi|_{\Phi=0}$ 的最大值出现在中间的奇异点（此处观察到裂纹萌生，见图26），以及所施加的载荷。显然，有限元法与有限差分法之间具有良好的一致性，这表明第 3.4 节所进行的灵敏度分析是准确的。

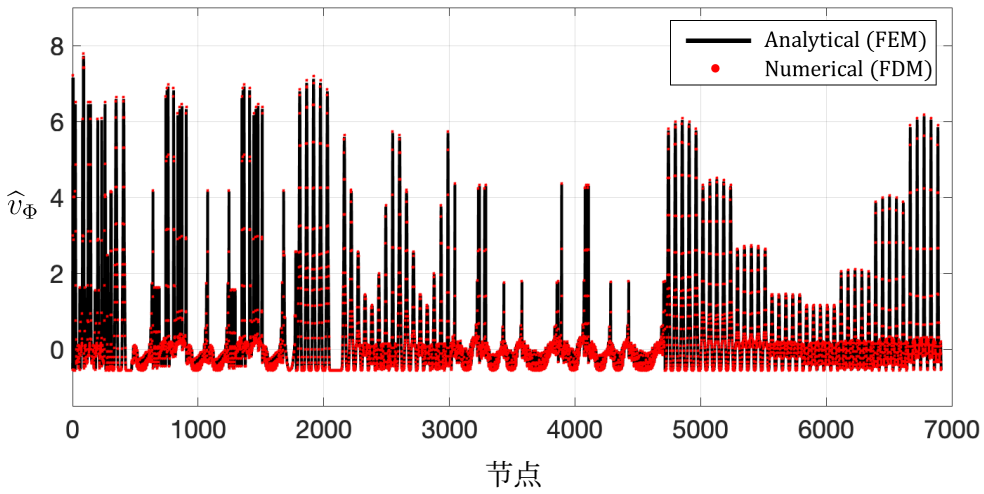


图 A.1：示例 3。通过式 (106) 中给出的有限元法解析方法进行灵敏度分析，并与式 (A.2) 中给出的有限差分法数值灵敏度进行比较。

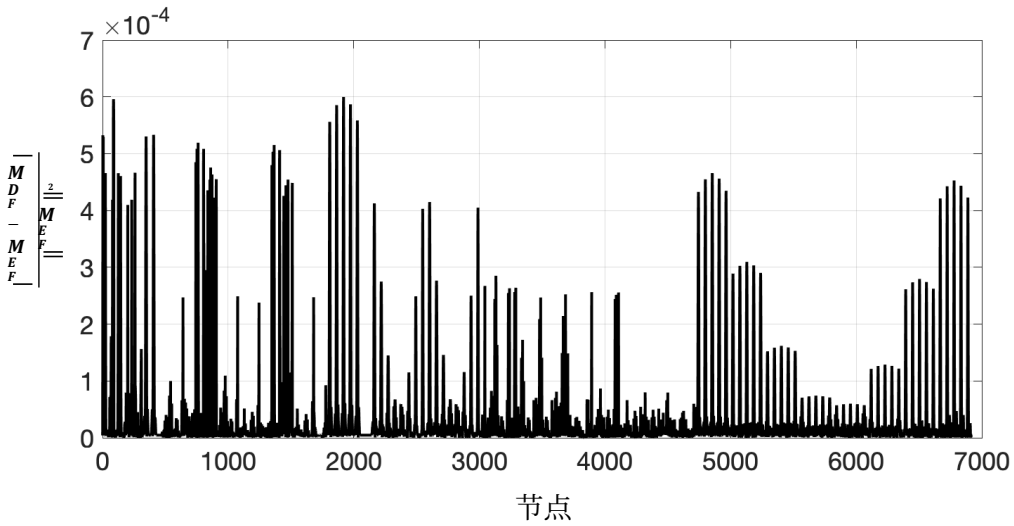


图 A.2：示例 3。解析方案与数值方案之间的相对灵敏度误差。

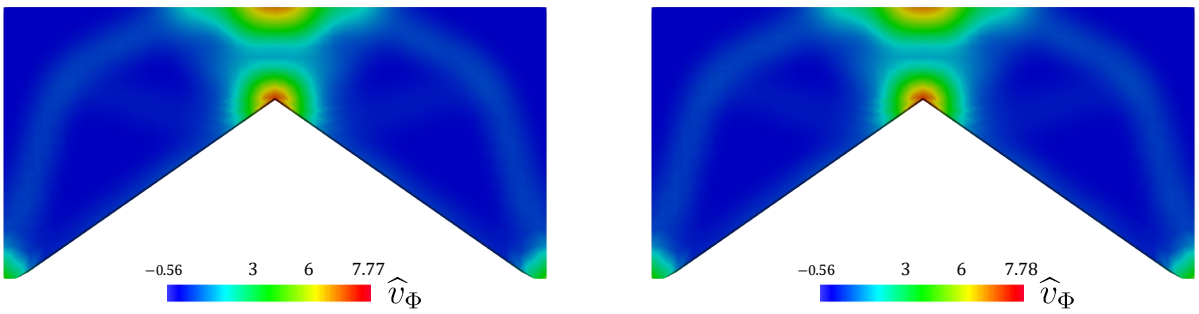


图 A.3：示例 3。门式框架沿 $x-y$ 方向横截面视图中的灵敏度分布如 $\widehat{v}_\Phi\,|_{\Phi=0}$ 所示：(a) 有限元法，(b) 有限差分法。

参考文献

[1] O. Sigmund 和 K. Maute，“拓扑优化方法”，《结构与多学科优化》，第 48 卷，第 6 期，第 1031–1055 页，2013 年。[2] J. D. Deaton 和 R. V. Grandhi，“结构与多学科连续体拓扑优化综述：2000 年后”，《结构与多学科优化》，第 49 卷，第 1 期，第 1–38 页，2014 年。[3] J.-H. Zhu、W.-H. Zhang 和 L. Xia，“飞机与航空航天结构设计中的拓扑优化”，《计算工程方法档案》，第 23 卷，第 4 期，第 595–622 页，2016 年。[4] N. Aage、E. Andreassen、B. S. Lazarov 和 O. Sigmund，“用于结构设计的十亿体素计算形态发生”，《自然》，第 550 卷，第 7674 期，第 84–86 页，2017 年。[5] M. P. Bendsøe 和 N. Kikuchi，“使用均匀化方法生成结构设计的最优拓扑”，《计算力学与工程方法》，第 71 卷，第 2 期，第 197–224 页，1988 年。[6] O. Sigmund，“使用拓扑优化设计柔顺机构”，《结构力学杂志》，第 25 卷，第 4 期，第 493–524 页，1997 年。[7] N. Noii、I. Aghayan、I. Hajirasouliha 和 M. M. Kunt，“使用改进型 ALGA 和 QPGA 对桁架结构进行尺寸与拓扑优化的新型混合方法”，《土木工程与管理杂志》，第 23 卷，第 2 期，第 252–262 页，2017 年。[8] M. P. Bendsøe 和 N. Kikuchi，“使用均匀化方法生成结构设计的最优拓扑”，《计算力学与工程方法》，第 71 卷，第 2 期，第 197–224 页，1988 年。[9] M. P. Bendsøe，“拓扑优化”，《优化百科全书》，第 2636–2638 页，2001 年。[10] Y. M. Xie 和 G. P. Steven，“结构优化的简单进化程序”，《计算机与结构》，第 49 卷，第 5 期，第 885–896 页，1993 年。[11] S. J. Osher 和 J. A. Sethian，“以曲率相关速度传播的前沿：基于 Hamilton–Jacobi 公式的算法”，《计算物理学杂志》，第 79 卷，第 1 期，第 12–49 页，1988 年。[12] G. Allaire、F. Jouve 和 A. M. Toader，“基于灵敏度分析和水平集方法的结构优化”，《计算物理学杂志》，第 194 卷，第 1 期，第 363–393 页，2004 年。[13] M. Y. Wang 、 X. Wang 和 D. Guo，“ 一种用于结构拓扑优化的水平集方法”，《计算力学与工程方法》，第 192 卷，第 1–2 期，第 227–246 页，2003 年。[14] T. Yamada、K. Izui、S. Nishiwaki 和 A. Takezawa，“一种结合虚拟界面能的水平集方法拓扑优化方法”，《计算力学与工程方法》，第 199 卷，第 45–48 期，第 2876–2891 页，2010 年。[15] G. Allaire、F. Jouve 和 A. M. Toader，“一种用于形状优化的水平集方法”，《数学报告》，第 334 卷，第 12 期，第 1125–1130 页，2002 年。[16] M. Burger，“构建用于形状优化与重建的水平集方法的框架”，《界面与自由边界》，第 5 卷，第 3 期，第 301–329 页，2003 年。

[17] S. J. Osher 和 F. Santosa，“涉及几何形状与约束的优化问题的水平集方法”，《计算物理学杂志》，第 171 卷，第 1 期，第 272–288 页，2001 年。[18] J. A. Sethian 和 A. Wiegmann，“通过水平集与浸入界面方法进行结构边界设计”，《计算物理学杂志》，第 163 卷，第 2 期，第 489–528 页，2000 年。[19] H. A. Jahangiry 和 S. M. Tavakkoli，“结构水平集拓扑优化的等几何方法”，《计算力学与工程方法》，第 319 卷，第 240–257 页，2017 年。[20] H. A. Jahangiry 和 A. Jahangiri，“等几何分析与水平集方法在热传导系统拓扑优化中的结合”，《应用热工程》，第 161 卷，文章编号 114134，2019 年。[21] S. M. Allen 和 J. W. Cahn，“反相边界运动的微观理论及其在反相畴粗化中的应用”，《冶金学报》，第 27 卷，第 6 期，第 1085–1095 页，1979 年。[22] B. Bourdin 和 A. Chambolle，“最优设计中的相场法”，载于*IUTAM*结构、机器与材料拓扑设计优化研讨会，第 207–215 页，Springer，2006 年。[23] A. Takezawa、S. Nishiwaki 和 M. Kitamura，“基于相场法与灵敏度分析的形状和拓扑优化”，《计算物理学杂志》，第 229 卷，第 7 期，第 2697–2718 页，2010 年。[24] J. S. Choi、T. Yamada、K. Izui、S. Nishiwaki 和 J. Yoo，“使用反应–扩散方程进行拓扑优化”，《计算力学与工程方法》，第 200 卷，第 29–32 期，第 2407–2420 页，2011 年。[25] M. Otomori、T. Yamada、K. Izui 和 S. Nishiwaki，“用于基于水平集的拓扑优化方法的 Matlab代码：采用反应扩散方程”，《结构与多学科优化》，第 51 卷，第 5 期，第 1159–1172 页，2015 年。[26] R. Alberdi、G. Zhang、L. Li 和 K. Khandelwal，“拓扑优化中非线性路径相关灵敏度分析的统一框架”，《国际工程数值方法杂志》，第 115 卷，第 1 期，第 1–56 页，2018 年。[27] P. Michaleris、D. A. Tortorelli 和 C. A. Vidal，“瞬态非线性耦合问题的切线算子与设计灵敏度公式及其在弹塑性中的应用”，《国际工程数值方法杂志》，第 37 卷，第 14 期，第 2471–2499 页，1994 年。[28] N. Noii、A. Khodadadian、J. Ulloa、F. Aldakheel、T. Wick、S. Fran̂cois 和 P. Wriggers，“统一延性相场断裂的贝叶斯反演”，《计算力学》，第 68 卷，第 4 期，第 943–980 页，2021 年。[29] B. Bourdin、G. A. Francfort 和 J.-J. Marigo，“断裂的变分方法”，《弹性学杂志》，第 91 卷，第 1 期，第 5–148 页，2008 年。[30] M. Ambati、T. Gerasimov 和 L. De Lorenzis，“脆性断裂相场模型综述及一种快速混合公式”，《计算力学》，第 55 卷，第 2 期，第 383–405 页，2015 年。[31] J.-Y. Wu、V. P. Nguyen、C. T. Nguyen、D. Sutula、S. Sinaie 和 S. P. Bordas，“第一章——断裂的相场建模”，《应用力学进展》第 53 卷，第 1–183 页，Elsevier，2020 年。

[32] G. A. Francfort 和 J.-J. Marigo，“重新审视脆性断裂：一个能量最小化问题”，《力学与固体物理学杂志》，第 46 卷，第 8 期，第 1319–1342 页，1998 年。[33] C. Miehe、F. Welschinger 和 M. Hofacker，“断裂的热力学一致相场模型：变分原理与多场有限元实现”，《国际工程数值方法杂志》，第 83 卷，第 1273–1311 页，2010 年。[34] C. Kuhn、A. Schl¨uter 和 R. M¨uller，“相场断裂模型中的退化函数”，《计算材料科学》，第 108 卷，第 374–384 页，2015 年。[35] D. B. Mumford 和 J. Shah，“分段光滑函数的最优逼近及相关变分问题”，《纯粹与应用数学通讯》，1989 年。[36] V. Hakim 和 A. Karma，“裂纹运动定律与断裂相场模型”，《力学与固体物理学杂志》，第 57 卷，第 2 期，第 342–368 页，2009 年。[37] R. Alessi、J. Marigo 和 S. Vidoli，“与塑性和内聚裂纹成核耦合的梯度损伤模型”，《理性力学与分析档案》，第 214 卷，第 2 期，第 575–615 页，2014 年。[38] M. Ambati、T. Gerasimov 和 L. De Lorenzis，“延性断裂的相场建模”，《计算力学》，第 55 卷，第 5 期，第 1017–1040 页，2015 年。[39] R. Alessi、J.-J. Marigo、C. Maurini 和 S. Vidoli，“耦合损伤与塑性以对脆性、内聚性和延性断裂进行相场正则化：一维示例”，《国际机械科学杂志》，2017 年。[40] M. Borden、T. Hughes、C. Landis、A. Anvari 和 I. Lee，“延性材料断裂的相场公式：有限变形平衡定律推导、塑性退化及应力三轴度效应”，《计算力学与工程方法》，第 312 卷，第 130–166 页，2016 年。[41] C. Kuhn、T. Noll 和 R. M¨uller，“延性断裂的相场建模”，《*GAMM* 通讯》，第 39 卷，第 1 期，第 35–54 页，2016 年。[42] J. Ulloa、P. Rodr´ıguez 和 E. Samaniego，“延性软化杆中耗散机制的建模”，《材料与结构力学杂志》，第 11 卷，第 4 期，第 463–490 页，2016 年。[43] R. Alessi、M. Ambati、T. Gerasimov、S. Vidoli 和 L. De Lorenzis，“耦合塑性的断裂相场模型比较”，载于《计算塑性进展》，第 1–21 页，Springer，2018 年。[44] D. Kienle、F. Aldakheel 和 M.-A. Keip，“摩擦材料延性失效的有限应变相场方法”，《固体与结构国际期刊》，第 172 卷，第 147–162 页，2019 年。[45] M. Dittmann、F. Aldakheel、J. Schulte、F. Schmidt、M. Kr¨uger、P. Wriggers 和 C. Hesch，“非线性热弹塑性固体中多孔延性断裂的相场建模”，《计算力学与工程方法》，第 361 卷，文章编号 112730，2020 年。[46] J. Storm、M. Pise、D. Brands、J. Schr¨oder 和 M. Kaliske，“增强型高性能混凝土纤维拔出行为微观力学模型的比较研究”，《工程断裂力学》，第 243 卷，文章编号 107506，2021 年。[47] Y. Heider 和 W. Sun，“非饱和多孔介质中毛细作用诱发断裂的相场框架：干燥诱发裂纹与水力裂纹”，《计算力学与工程方法》，第 359 卷，文章编号 112647，2020 年。

[48] J. Ulloa、N. Noii、R. Alessi、F. Aldakheel、G. Degrande 和 S. Fran̋cois，“饱和多孔介质中水力-力学断裂的变分建模：基于微观力学的相场方法”，《计算力学与工程方法》，第 396 卷，文章编号 115084，2022 年。[49] N. Noii 和 T. Wick，“受压和非等温扩展裂缝的相场描述”，《计算力学与工程方法》，第 351 卷，第 860–890 页，2019 年。[50] N. Noii、A. Khodadadian 和 F. Aldakheel，“通过复杂微观结构的蒙特卡罗模拟研究概率失效机制”，《计算力学与工程方法》，第 399 卷，文章编号 115358，2022 年。[51] N. Noii 、 A. Khodadadian 和 T. Wick，“ 利用全局 - 局部前向模型进行贝叶斯反演，并将其应用于多孔介质中的裂纹扩展”，《多尺度计算工程国际期刊》，第 20 卷，第 3 期，2022 年。[52] B. Yin 和 M. Kaliske，“基于断裂韧度退化的延性相场模型：理论及小应变下的实现”，《计算力学与工程方法》，第 366 卷，文章编号 113068，2020 年。[53] J. Fang、C. Wu、J. Li、Q. Liu、C. Wu、G. Sun 和 L. Qing，“ 弹塑性固体中的相场断裂：多屈服面塑性的变分公式及塑性屈服面和硬化的影响”，《国际机械科学杂志》，第 156 卷，第 382–396 页，2019 年。[54] Z. Liu、J. Reinoso 和 M. Paggi，“大变形固体壳中脆性断裂的相场建模：高效拟牛顿求解与全局–局部方法”，《计算力学与工程方法》，第 399 卷，文章编号 115410，2022 年。[55] N. Noii、F. Aldakheel、T. Wick 和 P. Wriggers，“用于各向异性脆性断裂相场建模的自适应全局–局部方法”，《计算力学与工程方法》，第 361 卷，文章编号 112744，2020 年。[56] T. Gerasimov、N. Noii、O. Allix 和 L. De Lorenzis，“应用于脆性断裂相场建模的非侵入式全局/局部方法”，《工程科学高级建模与仿真》，第 5 卷，第 1 期，第 1–30 页，2018 年。[57] F. Aldakheel、N. Noii、T. Wick、O. Allix 和 P. Wriggers，“用于自适应延性相场断裂的多层次全局–局部技术”，《计算力学与工程方法》，第 387 卷，文章编号 114175，2021 年。[58] V. J. Challis、A. P. Roberts 和 A. H. Wilkins，“通过拓扑优化提高抗断裂能力”，《结构与多学科优化》，第 36 卷，第 3 期，第 263–271 页，2008 年。[59] Z. Kang、P. Liu 和 M. Li，“考虑指定位置断裂力学行为的拓扑优化”，《结构与多学科优化》，第 55 卷，第 5 期，第 1847–1868 页，2017 年。[60] K. A. James 和 H. Waisman，“采用损伤叠加方法对变载荷作用下的结构进行拓扑优化”，《国际工程数值方法杂志》，第 101 卷，第 5 期，第 375–406 页，2015 年。[61] K. A. James 和 H. Waisman，“采用耦合非线性连续体损伤模型缓解最优拓扑设计中的失效”，《计算力学与工程方法》，第 268 卷，第 614–631 页，2014 年。[62] O. Amir 和 O. Sigmund，“基于连续体损伤和桁架拓扑优化的混凝土结构钢筋布置设计”，《结构与多学科优化》，第 47 卷，第 157–174 页，2013 年。

[63] L. Li、G. Zhang 和 K. Khandelwal, 《具有最大损伤约束的吸能结构拓扑优化》, 《国际工程数值方法杂志》, 第 112 卷, 第 7 期, 第 737–775 页, 2017年。[64] L. No¨el、P. Duysinx 和 K. Maute, 《考虑损伤的水平集拓扑优化》, 《结构与多学科优化》, 第 56 卷, 第 4 期, 第 737–753 页, 2017年。[65] L. Li 和 K. Khandelwal, 《采用弹塑性拓扑优化设计抗断裂吸能结构》, 《结构与多学科优化》, 第 56 卷, 第 1447–1475 页, 2017 年。[66] Y. Wu 、 J. Yvonnet 、 P. Li 和 Z.-C. He, 《增强结构动态抗断裂能力的拓扑优化》, 《计算力学与工程方法》, 第 394 卷, 114846 页, 2022年。[67] L. Xia、D. Da 和 J. Yvonnet, 《最大化准脆性复合材料抗断裂能力的拓扑优化》, 《计算力学与工程方法》, 第 332 卷, 第 234–254 页, 2018年。[68] D. Da、J. Yvonnet、L. Xia 和 G. Li, 《考虑界面损伤的颗粒基体复合材料最优抗断裂拓扑优化》, 《国际工程数值方法杂志》, 第 115 卷, 第 5 期, 第 604–626 页, 2018 年。[69] J. B. Russ 和 H. Waisman, 《采用单一准脆性材料增强抗断裂能力的新型拓扑优化公式》, 《国际工程数值方法杂志》, 第 121 卷, 第 13 期, 第 2827–2856 页, 2020年。[70] J. B. Russ 和 H. Waisman, 《通过局部延性失效约束和线性屈曲分析增强抗失效能力的新型弹塑性拓扑优化公式》, 《计算力学与工程方法》, 第 373 卷, 113478 页, 2021年。[71] J. B. Russ 和 H. Waisman, 《脆性断裂抗力的拓扑优化》, 《计算力学与工程方法》, 第 347 卷, 第 238–263 页, 2019年。[72] C. Wu、J. Fang、S. Zhou、Z. Zhang、G. Sun、G. P. Steven 和 Q. Li, 《采用相场断裂模型最大化脆性材料抗断裂能力的水平集拓扑优化》, 《国际工程数值方法杂志》, 第 121 卷, 第 13 期, 第 2929–2945 页, 2020年。[73] J. Hu、S. Yao、N. Gan、Y. Xiong 和 X. Chen, 《采用双向渐进结构优化方法对结构特定位置进行断裂强度拓扑优化》, *Engineering Optimization*, 第 52 卷, 第 4 期, 第 583–602 页, 2020年。[74] C. Miehe、M. Hofacker、L.-M. Sch¨anzel 和 F. Aldakheel, 《多物理场问题中的断裂相场建模。第二部分：热弹塑性固体中脆性到延性失效模式的转变与裂纹扩展》, 《计算力学与工程方法》, 第 294 卷, 第 486–522 页, 2015年。[75] J. Desai、G. Allaire 和 F. Jouve, 《发生脆性断裂结构的拓扑优化》, 《结构与多学科优化》, 第 5 卷, 2021年 10 月。[76] F. Fritzen、L. Xia、M. Leuschner 和 P. Breitkopf, 《多尺度弹黏塑性结构的拓扑优化》, 《国际工程数值方法杂志》, 第 106 卷, 第 6 期, 第 430–453 页, 2016年。[77] X. Huang 和 Y. Xie, 《位移载荷作用下非线性结构的拓扑优化》, ***Engineering Structures***, 第 30 卷, 第 7 期, 第 2057–2068 页, 2008 年。

[78] T. Gangwar 和 D. Schillinger，《弹塑性多相分层系统的热力学一致材料与结构协同优化》，*arXiv*预印本 *arXiv:2204.06839*，2022年。[79] S. Schwarz、K. Maute 和 E. Ramm，《弹塑性结构响应的拓扑与形状优化》，《计算力学与工程方法》，第 190 卷，第 15-17 期，第 2135–2155 页，2001年。[80] G. H. Yoon 和 Y. Y. Kim，《通过单元连接参数化实现材料非线性连续体结构的拓扑优化》，《国际工程数值方法杂志》，第 69 卷，第 10 期，第 2196–2218 页，2007年。[81] X. Huang、Y. M. Xie 和 G. Lu，《吸能结构的拓扑优化》，《国际碰撞安全性杂志》，第 12 卷，第 6 期，第 663–675 页，2007年。[82] L. Xia、F. Fritzen 和 P. Breitkopf，《弹塑性结构的演化拓扑优化》，《结构与多学科优化》，第 55 卷，第 2 期，第 569–581 页，2017年。[83] A. Maury、G. Allaire 和 F. Jouve，《采用水平集方法进行弹塑性形状优化》，《*SIAM*控制与优化杂志》，第 56 卷，第 1 期，第 556–581 页，2018年。[84] T. Zhao、A. S. Ramos Jr 和 G. H. Paulino，《通过渐近方法并考虑 von Mises 准则的材料非线性拓扑优化：最大应变能和最大载荷因子公式》，《国际工程数值方法杂志》，第 118 卷，第 13 期，第 804–828 页，2019年。[85] T. Zhao、E. N. Lages、A. S. Ramos 和 G. H. Paulino，《采用替代非线性弹性本构模型并考虑 Drucker–Prager 准则的拓扑优化》，《结构与多学科优化》，第 62 卷，第 6 期，第 3205–3227 页，2020年。[86] H. A. Jahangiry、M. Gholhaki、H. Naderpour 和 S. M. Tavakkoli，《弹塑性平面应力问题的等几何水平集拓扑优化》，《国际力学与材料设计杂志》，第 17 卷，第 4 期，第 947–967 页，2021年。[87] H. A. Jahangiry、M. Gholhaki、H. Naderpour 和 S. M. Tavakkoli，《基于等几何水平集的几何非线性平面应力问题拓扑优化》，《计算机辅助设计》，第 151 卷，103358 页，2022年。[88] S. Osher、R. Fedkiw 和 K. Piechor，《水平集方法与动态隐式曲面》，《应用力学评论》，第 57 卷，第 3 期，第 B15–B15 页，2004年。[89] A. Khodadadian、N. Noii、M. Parvizi、M. Abbaszadeh、T. Wick 和 C. Heitzinger，《变分相场断裂问题的贝叶斯估计方法》，《计算力学》，第 66 卷，第 4 期，第 827–849 页，2020年。[90] C. Miehe、F. Aldakheel 和 S. Teichtmeister，《有限应变下延性断裂的相场建模：通过微形态正则化实现梯度扩展理论的稳健变分数值实现》，《国际工程数值方法杂志》，第 111 卷，第 9 期，第 816–863 页，2017年。[91] T. Wick，多物理场相场断裂：建模、自适应离散与求解器。柏林、波士顿：德格鲁伊特出版社，2020年。[92] T. Heister、M. Wheeler 和 T. Wick，《采用相场方法计算裂纹扩展的原始-对偶主动集方法与预测-校正网格自适应》，《计算力学与工程方法》，第 290 卷，第 466–495 页，2015年。

[93] M. Ambati, R. Kruse 和 L. De Lorenzis，“有限应变下延性断裂的相场模型及其实验验证”，《计算力学》，第 57 卷，第 149–167 页，2016年。[94] F. Aldakheel、B. Hudobivnik、A. Hussein 和 P. Wriggers，“采用高效虚拟元方法的脆性断裂相场建模”，《计算力学与工程方法》，第 341 卷，第 443–466 页，2018年。[95] C. Miehe、L. Sch¨anzel 和 H. Ulmer，“多物理场问题中的断裂相场建模。第一部分：热弹性固体中裂纹表面的平衡与脆性裂纹扩展的失效准则”，《计算力学与工程方法》，第 294 卷，第 449–485 页，2015年。[96] N. Noii、M. Fan、T. Wick 和 Y. Jin，“结合自适应网格细化与原始-对偶主动集方法的正交各向异性断裂准单体相场描述”，《工程断裂力学》，第 258 卷，108060 页，2021年。[97] E. A. de Souza Neto、D. Peric 和 D. R. Owen，塑性的计算方法：理论与应用。John Wiley & Sons，2011年。[98] C. Miehe，“梯度扩展标准耗散固体的多场增量变分框架”，《力学与固体物理学杂志》，第 59 卷，第 4 期，第 898–923 页，2011年。[99] C. Miehe、F. Aldakheel 和 A. Raina，“有限应变下延性断裂的相场建模：变分梯度扩展塑性-损伤理论”，《国际塑性杂志》，第 84 卷，第 1–32 页，2016年。[100] M. Y. Wang、X. Wang 和 D. Guo，“用于结构拓扑优化的水平集方法”，《计算力学与工程方法》，第 192 卷，第 1–2 期，第 227–246 页，2003年。[101] A. N. Tikhonov 和 V. I. Arsenin，“不适定问题的解”，《*SIAM*评论》，第 21 卷，第 2 期，第 266–267 页，1977年。[102] P. Wriggers，非线性有限元方法。Springer Science & Business Media，2008年。[103] G. Allaire、F. Jouve 和 A.-M. Toader，“基于灵敏度分析和水平集方法的结构优化”，《计算物理学杂志》，第 194 卷，第 1 期，第 363–393 页，2004年。[104] O. Sigmund，“用 MATLAB 编写的 99 行拓扑优化代码”，《结构与多学科优化》，第 21 卷，第 2 期，第 120–127 页，2001年。[105] X. Huang 和 M. Xie，连续体结构的演化拓扑优化：方法与应用。John Wiley & Sons，2010年。[106] A. Diaz 和 O. Sigmund，“布局优化中的棋盘格模式”，《结构优化》，第 10 卷，第 1 期，第 40–45 页，1995年。[107] O. Sigmund，“用于拓扑优化的基于形态学的黑白滤波器”，《结构与多学科优化》，第 33 卷，第 4 期，第 401–424 页，2007年。[108] O. Sigmund 和 J. Petersson，“拓扑优化中的数值不稳定性：处理棋盘格模式、网格依赖性和局部极小值的方法综述”，《结构优化》，第 16 卷，第 1 期，第 68–75 页，1998年。[109] O. Sigmund，“采用拓扑优化设计多物理场致动器——第二部分：双材料结构”，《计算力学与工程方法》，第 190 卷，第 49–50 期，第 6605–6627 页，2001年。

[110] MATLAB，版本 *9.5.0.944444 (R2018b)*。马萨诸塞州纳蒂克：The MathWorks Inc.，2018年。[111] C. Hirshikesh、Jansari、K. Kannan、R. Annabattula 和 S. Natarajan，“采用基于恢复的误差指示器和四叉树分解的准静态脆性断裂自适应相场方法”，《工程断裂力学》，第 220 卷，106599 页，2019年。[112] A. Mesgarnejad、B. Bourdin 和 M. Khonsari，“断裂变分方法的验证模拟”，《计算力学与工程方法》，第 290 卷，第 420–437 页，2015年。[113] M. J. Borden、C. V. Verhoosel、M. A. Scott、T. J. Hughes 和 C. M. Landis，“动态脆性断裂的相场描述”，《计算力学与工程方法》，第 217 卷，第 77–95 页，2012年。[114] M. Marino、F. Auricchio、A. Reali、E. Rocca 和 U. Stefanelli，“基于相场方法的结构拓扑优化混合变分公式”，《结构与多学科优化》，第 64 卷，第 4 期，第 2627–2652 页，2021年。[115] L. Ded`e、M. J. Borden 和 T. J. Hughes，“基于相场模型的拓扑优化等几何分析”，《工程计算方法档案》，第 19 卷，第 3 期，第 427–465 页，2012年。