arXiv:2302.12588v2 [math.CO] 3 Jan 2024

识别　具有一般半径的球堆积的接触图

Sean Dewar*

摘要

Ozkan 等人 [17] 猜想，任何由 n 一般半径球体构成的堆积都是无应力的，因此其接触数至多为 $3n-6$。本文证明，对于接触图形式为 $G \oplus K_2$的任意球堆积，该猜想成立；也就是说，该图是通过将图 G 中的每个顶点与一个含两个顶点的完全图中的每个顶点相连而形成的。我们还证明，在这一特殊情形下，该猜想的逆命题也成立：具体而言，图$G \oplus K_2$ 是一般半径球堆积的接触图，当且仅当 G 是一个没有环的便士图。

MSC2020： 05B40 ，52C17 ，52C25

关键词： 球堆积、一般半径、接触图、配位数、代数函数 s

1 引言

在本文语境中，球堆积总是指由有限个球体组成的集合 $\mathbb{R}^3$，且其内部两两不相交；圆堆积总是指由有限个圆组成的集合 $\mathbb{R}^2$，且其内部两两不相交。与任意球堆积（分别为圆堆积） $P = \{S_v : v \in V\}$相关的重要结构是其接触图，即图 $G = (V, E)$，其中不同的顶点 v, w 相邻，当且仅当对应的球体 S_v 和 S_w 相接触（或等价地，相切）。圆堆积定理（例如参见 [19]）指出，一个图是某个圆堆积的接触图，当且仅当该图是平面图；而这一性质可在线性时间内判定 [12]。相反，判定一个图是否为某个球堆积的接触图是 NP-困难的（详见第 2.1 节）。即使确定由 n 个球体组成的堆积所能达到的最大可能接触数（本文记为 α_n）仍是一个未解问题。当 n 充分大时， α_n 的当前最佳界为 $6.30n < \alpha_n < 6.96n$；下界和上界分别见 [6] 和 [7] 。

在本文中，我们转而提出一个略有不同的问题：随机选取半径的球堆积最多能有多少个接触？例如，虽然 5 个球体可以彼此接触（因此 $\alpha_5 = 10$），但第五个球体的半径由前四个球体唯一确定。以下简单的启发式论证表明，接触数实际上应小于 α_n 值的一半：假设 P 是由 $n-1$ 个球体组成、具有 k 个接触的球堆积。若向 P 中加入一个新球体 S，那么我们预计新球堆积至多会有 $k+3$ 个接触，因为 S 可以

*数学学院，布里斯托大学。电子邮箱： sean.dewar@bristol.ac.uk

只有在半径经过精心选取时，才可能与超过 3 个其他球体接触。因此，我们预计，随机选取半径的 n 个球体之间大约会有 $3n$ 个接触。

“随机半径意味着较低接触数”这一观点最早由 Ozkan 等人正式提出。 [17]在我们所称的球体堆积一般性猜想中。该猜想提出了一个比限制接触数量更强的性质，并借助刚性理论的术语来表述；刚性理论研究离散结构的运动学性质。猜想指出，当球堆积的半径一般（即构成一个代数无关集[1]）时，若将该堆积视为杆-铰框架，它将是无应力的（这些概念的严格定义见第 2.1 节）。利用 Maxwell 的一项著名结果——即在 $\mathbb{R}^3$ 中，任何无应力的杆-铰框架若有 n 个铰点，则至多有 $3n-6$ 根杆 [16] ——我们便得到该猜想的如下表述。

猜想 1.1 （球堆积一般性猜想）。设 $G=$ （V, E）是一个具有一般半径的球堆积 P的接触图。那么 P是无应力的，因此 $|E| \leq 3|V|-6$若 $|V| \geq 3$。

Conjecture 1.1 的二维类比（定理 2.3）由 Connelly、Gortler 和 Theran [3] 利用与柯西–亚历山德罗夫应力引理 [8, 引理 5.3]相关的技术证明。其证明要求所有具有接触图 $G=(V, E)$ 的圆堆积构成一个光滑的（$3|V|-|E|$）维半代数集。不幸的是，这一陈述的三维类比——即所有具有接触图 $G=(V, E)$ 的球堆积构成一个光滑的（$4|V|-|E|$）维半代数集——通常并不成立，因为存在具有超过 $4|V|$ 条边的球堆积接触图；关于构造这类球堆积接触图的一个无限（且非常相关的）族的方法，见推论 2.5。对于这一方法是否能够以某种方式推广到球面堆积，目前尚无定论，不过任何此类推广很可能都需要更深入地理解一般球堆积的可能接触图类型。作者还证明了猜想 1.1 的类似二维类比，适用于某些类型凸体 [4] 的位似堆积以及正方形的位似堆积 [5]。

本文将证明针对某一特定图族的猜想 1.1 的以下更强变体。这里回顾一下，若一个图是由单位半径圆构成的堆积的接触图，则称其为便士图；而两个图的图的联接 $G_1 \oplus G_2$ G_1，G_2 是通过连接 G_1 中的每个顶点与 G_2中的每个顶点所形成的图。

*定理 1.2. </style}*图 $G \oplus K_2$ 是具有一般半径的球堆积的接触图，当且仅当 G 既是森林又是便士图。此外，任何具有一般半径且接触图为 $G \oplus K_2$ 的球堆积都是无应力的。

有人在 [3] 中提出疑问：每个既是平面的 (2,3)-稀疏图——即每个具有 $k \geq 2$ 个顶点的导出子图至多有 $2k-3$ 条边的图——是否都是具有一般半径的

[1]这里有一条技术性说明：每当我们说有限指标集 $\{a_i : i \in I\} \subset \mathbb{R}$ 代数独立时，也假设该集合有 $|I|$ 个元素（即每个元素 a_i 都不相同）。这是为了避免诸如 $I=\{1,2\}$ 和 $a_1=a_2=\pi$这样的情形；虽然集合 $S=\{a_i : i \in I\}=\{\pi\}$ </style}在技术上是代数独立的，但其带指标的元素满足多项式方程 $a_1-a_2=0$。

圆堆积的接触图。若该命题成立，就能提供一种多项式时间算法，用于判定一个图是否为一般半径圆打包的接触图 [13], ，这再次与球面情形形成鲜明对比。有趣的是，已知对于平面中“绝大多数”中心对称凸体的选择，这一猜想的类似表述是成立的，甚至适用于更大一类图；详见 [4]。

我们证明定理 1.2 的方法本质上是一个简单论证，但包含若干技术性说明。我们将证明分为三个部分。

首先，我们证明，若一个一般半径球堆积的接触图为 $G \oplus K_2$，那么 G 是一个森林（引理 4.2）。为此，我们将球堆积化为图 G 在 $\mathbb{R}^2$ 中的嵌入，然后证明 G 中的任意圈都会导致原球堆积的半径之间存在代数相关。

接下来，我们利用已知的接触图结构，证明每个接触图为 $G \oplus K_2$ 的一般半径球堆积都是无应力的（引理 4.4）。为此，我们利用 $G \oplus K_2$ 在 G 为森林时的结构特征——即 $G \oplus K_2$ 是 3-退化的（也就是说，每个子图的最小度至多为 3）——来归纳构造原球堆积。随后，我们利用刚性理论中的一个著名结果（引理 4.3），证明归纳构造保留了无应力性质，从而证明原球堆积是无应力的。

最后，我们证明对于每个 G 同时也是便士图的森林，图 $G \oplus K_2$ 都是某个球堆积开集的接触图。为此，我们利用球堆积与便士图之间广为人知的对应关系（定理 2.4）。由此可知，必定存在一个接触图为 $G \oplus K_2$的一般半径球堆积，从而完成定理 1.2的证明。

本文结构安排如下。在第 2 节中，我们详细介绍全文所需的背景知识。在第 3 节中，我们证明三个技术引理，借此将证明定理 1.2过程中遇到的许多困难的三维问题化为更易处理的第 4 节中，我们综合上述结果来证明定理 1.2。最后，本文提出一个猜想，讨论判定一个图是否为一般半径球堆积的接触图的复杂性。关于代数函数的其他背景结果见附录 A。

2 预备知识

本节概述本文中贯穿使用的一些重要概念。

2.1 球面堆积、圆堆积与杆件关节框架 s

在 $\mathbb{R}^d$ 中，（杆与铰链）框架是一个有序对 $(G,\ p)$，其中 $G=(V,\ E)$ 是一个（有限简单）图，且 $p: V \to \mathbb{R}^d$ 是从 G 到 $V \to \mathbb{R}^d$ 的映射，称为 G 的实现。框架 $(G,\ p)$ 的平衡应力是一个映射 $\sigma: E \to \mathbb{R}$，满足对每个邻域为 $N_G(v)$ 的顶点 $v \in V$，等式$\sum_{w \in N_G(v)} \sigma_{vw}(p_v - p_w) = 0$ 成立。如果框架的唯一平衡应力是零映射，则称该框架无应力。框架无应力的以下必要组合条件是.....

的条件是 d维版本，源自 Maxwell 最初的观察 [16]；详见 [9, 定理 2.5。4]其中给出了该结果的详细证明。

定理 2.1. 设 (G,p) 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个无应力框架。若图 $G=(V,E)$ 至少有 d 个顶点，则 $|E|\le d|V|-\binom{d+1}{2}$。

令 $\mathbb{S}^{d-1}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 的单位球面，即由所有满足 $\|x\|:=\sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}=1$ 的点 $x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ 组成的集合。d 维球堆积是一个三元组 $P=(G,p,r)$，其中 $G=(V,E)$ 是一个（有限简单）图，且 $p\colon V\to\mathbb{R}^d$ 和 $r\colon V\to\mathbb{R}_{>0}$ 是映射，使得对于任意不同的顶点 $v,w\in V$，不等式 $\|p_v-p_w\|\ge r_v+r_w$ 成立，当且仅当 $vw\in E$ 时取等号。若集合 $\{r_v\colon v\in V\}$ 代数独立，则称 P 具有一般半径。框架 (G,p) 称为 d 维球堆积 P 的关联框架。若一个 d 维球堆积的关联框架无应力，则称该球堆积无应力。我们将“d 维球堆积”简化为：当 $d=3$ 时称为球堆积，当 $d=2$ 时称为圆堆积。

给定一个图 $G=(V,E)$ 和一个正整数 d，我们将半径$_d(G)$（当 d 的值可由上下文明确时，也记作 radii(G)）定义为所有满足以下条件的向量 $r\in\mathbb{R}^V_{>0}$ 的集合：存在某个 d 维球堆积 $P=(G,p,r)$。由于半径$_d(G)$ 是在$\mathbb{Q}$上定义的半代数集，因此它有开内点，当且仅当它包含一个一般点（即坐标代数独立的向量）。以下结果还将这些等价性质与无应力堆积的存在性联系起来；该结果可通过对 [3,命题 5.3]的证明作简单调整得到证明。

命题 2.2。假设存在一个无应力的 d 维球堆积，其接触图为 G。那么集合 半径$_d(G)$ 具有非空内部，并且存在一个一般半径d维球堆积，其接触图为 G。

每个一维球堆积都是无应力的；这可由以下观察得到：它们的接触图总是线性森林。对于更高维的球堆积，这一般并不成立；例如，若 $P=(G,p,r)$ 是一个圆堆积，且 $G=(V,E)$ 是一个三角剖分（即，$|E|=3|V|-6$），其中 $|V|\ge 4$，则根据 P，它不是无应力的定理 2.1。Connelly、Gortler 和 Theran 证明了，每个一般半径圆打包都是无应力的，这既是猜想 1.1 的二维类比，也是命题 2.2的逆命题。

定理 2.3 ([3])。设 $G=(V,E)$ 是一个具有一般半径的圆堆积 P 的接触图。则 P 是无应力的，因此当 $|E|\le 2|V|-3$ 若 $|V|\ge 2$时。

我们最感兴趣的球堆积族是接触图为 $G\oplus K_2$ 的那些球堆积。这在一定程度上是因为 Kirkpatrick 和 Rote 的以下观察；他们证明的概要见 [11, 命题 4.5] 。

定理 2.4。 图 $G\oplus K_2$ 是球堆积的接触图，当且仅当 G 是便士图。

已知，含有 n 个顶点的便士图至多有 $\lfloor 3n - \sqrt{12n-3} \rfloor$ 条边，且此上界是紧的 [10]。由此，我们得到接触图为 $G \oplus K_2$的任意球堆积的接触数的紧上界。

推论 2.5。设 P 是某个图 $G =$（V、E）的接触图为 $G \oplus K_2$ 的球堆积。那么，P 至多有 $\lfloor 5|V| + 1 - \sqrt{12|V|-3} \rfloor$ 个接触，而且这一上界是紧的。

正如引言中所提到的，推论 2.5 告诉我们，在证明 定理 1.2时，不能直接采用 Connelly、Gortler 和 Theran [3] 所使用的相同方法。要将他们的方法应用于一个给定的球堆积接触图 G（具有 n 个顶点和 m 条边），要求接触图为 G 的球堆积集合构成一个光滑的 $(4n-m)$维流形。然而，推论 2.5 告诉我们，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个具有 n个顶点和

$$m = \left\lfloor 5(n-2) + 1 - \sqrt{12(n-2)-3} \right\rfloor = \left\lfloor 5n - 9 - \sqrt{12n-27} \right\rfloor$$

条边。具有此类接触图的球堆积集合不可能是一个（$4n-m$）维流形，因为当 n 较大时，$4n - m = \lfloor -n + 9 + \sqrt{12n-27} \rfloor < 0$。

2.2 三维莫比乌斯变换

一个（三维）莫比乌斯变换是一个有理映射 $\phi\colon \mathbb{R}^3 \dashrightarrow \mathbb{R}^3$，其中存在点$a$，$b \in \mathbb{R}^3$、标量 $\lambda \neq 0$，$\tau \in \{0, 2\}$以及线性等距变换 $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，使得对于每个 $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{b\}$，我们都有

$$\phi(u) := a + \frac{\lambda A(u-b)}{\|u-b\|^\tau}.$$

这些变换之所以值得关注，是因为将其作用于球面 S 时，可能出现以下三种情况之一。

(i) 点 b 不在 S 的凸包内，或者 $\tau = 0$：在这种情况下，$\phi(S)$ 是一个球面，且原本位于 S 凸包内部或外部的任意点仍然保持在内部或外部。(ii) 点 b 位于 S 的凸包内部，且 $\tau = 2$：在这种情况下，$\phi(S)$ 是一个球面，原本位于 S 凸包内部（分别为外部）的任意点，现在位于 S凸包外部（分别为内部）。(iii) 点 b 位于 S 和 $\tau = 2$ 中：在这种情况下，$\phi(S) = H \setminus \{b\}$，其中 H 是一个与 S 在 b 处的切平面平行的仿射超平面。

我们将 P 和 P' 个由 n 个球体组成的球堆积定义为莫比乌斯等价，如果存在一个莫比乌斯变换将 P 映射到 P'。请注意，若 $n \geq 2$，则任何此类莫比乌斯变换都必须对 P 中的每个球体满足条件 (i)，从而 P' 中的每个元素都是球体，并且 $P_\prime$ 中没有球体包含 P' 的任何球体于其内部。由于莫比乌斯变换是单射，任何一对莫比乌斯等价球堆积都必定具有相同的接触图。

2.3 代数函数

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 和 $D' \subset \mathbb{R}$ 为开子集，并设 $\mathbb{F}$ 为 $\mathbb{R}$ 的子域。定义在 $\mathbb{F}$ 上的（实）代数函数（从 D 到 D'）是一个连续映射 $f: D \to D'$，其中存在一个多项式 $p \in \mathbb{F}[Y, X_1, \ldots, X_n]$，使得 $p \neq 0$ 且对每个 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$，都有 $p(f(x)\ x_1, \ldots, x_n) = 0$。等价地，$f$ 是代数函数，当且仅当存在以 $\mathbb{F}$ 为系数的 n 元多项式 $p_0, \ldots, p_m$，使得对每个 $k \in \{0, \ldots, m\}$，都有 $p_k \neq 0$，且对每个 $x \in D$，都有 $\sum_{k=0}^{m} p_k(x) f(x)^k = 0$。假设 $0 \in D'$，则非常数代数函数 f 的零点集 $Z(f) \subset D$ 总包含于 $\mathbb{R}^n$ 与 D 的交集中某个真扎里斯基闭子集内；这可由以下两个观察得出：(i) 若 $Z(p) \subset \mathbb{R}^n$ 是 p 的零点集（其中，对每个 $x \in D$，$p(f(x)\ x) = 0$），则 $\{0\} \times Z(f) \subset Z(p) \cap (\{0\} \times D)$；(ii) $Z(p) \cap (\{0\} \times D) = \{0\} \times D$ 当且仅当 $Z(p) \supset \{0\} \times \mathbb{R}^n$，而这只有在 f 为常数时才可能发生。除非另有说明，我们假设 $D' = \mathbb{R}$。

关于代数函数的更详细分析见附录 A。我们所需的关于代数函数的主要非标准结果如下。

引理 2.6。 设 $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ 为一个子域，$D \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开集，且 x、y：$D \to \mathbb{R}$ 为连续函数。假设存在代数函数 p、q、α、$\beta \in \mathbb{A}_D[X_{n_1}, \ldots, X_{n_k};\ \mathbb{F}]$，其中

$$x(t)^2 + y(t)^2 = p(t), \tag{1}$$

$$(x(t) - \alpha(t))^2 + (y(t) - \beta(t))^2 = q(t) \tag{2}$$

对所有 $t \in D$。若 α、β 中至少有一个不是零映射，则 x、$y \in \mathbb{A}_D[X_{n_1}, \ldots, X_{n_k};\ \mathbb{F}\ ]$.

证明。 将 公式 (2)移项并将两边平方，可得

$$4\alpha(t)^2 x(t)^2 = \Big(x(t)^2 + \alpha(t)^2 + (y(t) - \beta(t))^2 - q(t)\Big)^2.$$

结合上述方程和方程 (1) 可知，下式对所有 $t \in D$均成立：

$$\Big(2\beta(t)y(t) - \Big(p(t) - q(t) + \alpha(t)^2 + \beta(t)^2\Big)\Big)^2 + 4\alpha(t)^2 y(t)^2 - 4\alpha(t)^2 p(t) = 0. \tag{3}$$

展开方程 (3) 后，我们得到方程 $a_0(t) + a_1(t)y(t) + a_2(t)y(t)^2 = 0$，其中 a_0、a_1、a_2 是代数函数：$D \to \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{F}$ 上，且 $a_2(t) = 4(\alpha(t)^2 + \beta(t)^2)$。由于$\alpha$、$\beta$ 中至少有一个不是零映射，因此 a_2 不是零映射。由此可知，y 在 $\mathbb{F}$ 上是代数的（引理 A.1）。由于任意两个 $\mathbb{F}$ 上的代数函数之和仍是 $\mathbb{F}$ 上的代数函数，由方程 (1) 可知，x 也是 $\mathbb{F}$上的代数函数。由于 α、β 中至少有一个不是零映射，因此存在变量的稠密集 $s \in D$，使得方程 (1) 和 (2) 在集合 $\{t \in D:\ t_{n_i} = s_{n_i}$对每个 $i \in \{1, \ldots, k\}\}$上只有有限个解。由于 x和 y均连续，因此可知$x, y \in \mathbb{A}_D[X_{n_1}, \ldots, X_{n_k};\ \mathbb{F}]$。

□

3 球堆积扁平化

在本节中，我们给出若干重要的技术引理，使我们能够将困难的三维问题视为一个较为简单的二维问题。这将分为两部分：(i)

通过莫比乌斯变换为我们的球堆积获得一种标准形式，该形式在大多数情况下保留一般半径，并使我们能够将问题从三维问题降至二维问题（引理 3.2）；(ii) 证明任何针对标准形式得到的结果都可以带回一般半径的原始设定中（引理 3.4）。

3.1 获得标准形式

给定一个半径为一般半径 r 的球堆积 $P = (G \oplus K_2, p, r)$（其中 K_2 是顶点为 $\{a, b\}$ 的完全图），我们现在证明存在一个与之莫比乌斯等价的球堆积 $P' = (G \oplus K_2, p', r')$，使得 $r_a = r_b = 1$，且 r' 在 G 的顶点上的限制构成一个代数无关集。若将该球堆积移动到使 $p' = (0, 0, -1)$ 和 $p'_b = (0, 0, 1)$ 的位置，我们所选的标准形式会迫使点 p'_v 全部位于 xy 平面上。这种布局对后续研究很有利，因为它实际上将问题简化为二维问题。图 1 展示了我们所需的标准形式。

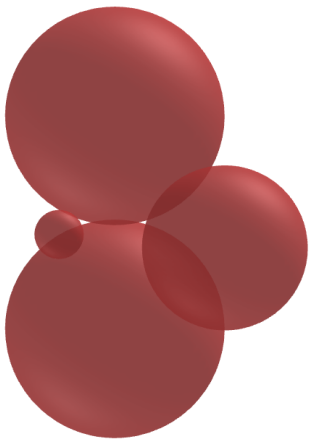

图 1：标准形式的球堆积，其中两个大小相同的球体（顶部和底部的球体）与所有其他球体相切。

我们从以下结果开始。

引理 3.1. 设 $G = (V, E)$ 为一个图，设 K_2 为顶点集为 $\{a, b\}$ 的完全图，并设 $P = (G \oplus K_2, p, r)$ 为一个半径一般的球堆积。那么，存在一个与之莫比乌斯等价的球堆积 $P' = (G \oplus K_2, p', r')$，使得 $r'_a > r'_v$，且对所有 $v \in V$，$r'_b > r'_v$。

证明。如有必要，通过切换顶点 a，b，不妨设 $r_a > r_b$。通过旋转和平移 P，还可设 $p_a = (0, 0, -r_a)$ 和 $p_b = (0, 0, r_b)$。对于每个 $t \neq 0$，定义 ϕ^t 为如下莫比乌斯变换，其中

$$\phi^t(u) = (t, 0, 0) + \frac{t^2(u - (t, 0, 0))}{\|u - (t, 0, 0)\|^2}.$$

每个莫比乌斯变换 ϕ^t 固定点 (0，0，0) 和 (t，0，0)，并且奇点为 (t，0，0)。固定e_x =(1，0，0)，并选择 $G\oplus K_2$ 的任意顶点 v 以及满足 $\|te_x-p_v\|>r_v$ 的任意非零标量 t。 S_v 与经过 te_x 的直线的交集是两个点

$$a_v=p_v+\frac{r_v(te_x-p_v)}{\|te_x-p_v\|},\qquad b_v=p_v-\frac{r_v(te_x-p_v)}{\|te_x-p_v\|}.$$

由此，我们计算得出

$$\phi^t(a_v)=te_x+\frac{t^2(te_x-p_v)}{\|te_x-p_v\|(r_v-\|te_x-p_v\|)},\qquad \phi^t(b_v)=te_x-\frac{t^2(te_x-p_v)}{\|te_x-p_v\|(r_v+\|te_x-p_v\|)}.$$

因此，球面 $\phi^t(S_v)$的半径为

$$\frac{\|\phi^t(a_v)-\phi^t(b_v)\|}{2}=\begin{cases}\frac{r_vt^2}{\|te_x-p_v\|^2-r_v^2} & \text{if } \|te_x-p_v\|>r_v,\\ \frac{r_vt^2}{r_v^2-\|te_x-p_v\|^2} & \text{if } \|te_x-p_v\|<r_v.\end{cases}$$

这里我们注意到两个事实：(i) 存在 $\delta_v>0$，使得若 $0<|t|<\delta_v$，则取第一个值；(ii) 当 $t\to\pm\infty$时，半径收敛于 r_v。

定义以下两个有理映射：

$$f_v:\mathbb{R}\dashrightarrow\mathbb{R},\ t\mapsto\frac{r_vt^2}{\|te_x-p_v\|^2-r_v^2},\qquad f:\mathbb{R}\dashrightarrow\mathbb{R}^{V\cup\{a,b\}},\ t\mapsto(f_v(t))_{v\in V}.$$

根据塔斯基–塞登伯格定理， f 的像（将定义域限制在其有定义的点所构成的半代数集上）是一个半代数集。此外， f 的像是一维的，且其闭包包含 r。令 C 为 f 在 $\mathbb{R}^{V\cup\{a,b\}}$上关于扎里斯基拓扑的像的闭包。我们注意到以下两个事实：(i) C 既不可约又是一维的（将 f 的定义域和陪域扩展至射影空间即可看出）；(ii) 由于 C包含一个坐标代数无关的点（即 r），它不包含在 $\mathbb{R}^{V\cup\{a,b\}}$的任何有理定义的代数子集中。这两个事实的直接推论是， C 包含一个由坐标代数无关的点构成的稠密子集。因此，存在一个稠密子集 $D\subset\mathbb{R}$，其中对每个 $t\in D$， $f(t)$的坐标都是代数无关的。

取 $\delta:=\min\{\delta_v:\ v\in V\}$，其中 δ_v如上所定义。若 $0<|t|<\delta$，则 $\phi^t(P)$ 的半径恰为 $f(t)$。对于每个 $t>0$，令 $S(t)$ 为半径 t、球心为 (t, 0, 0) 的球面。于是存在 $T>0$，使得对于所有 $0<t<T$，球面 $S(t)$ 都不会与任何满足 $v\in V$ 的球面 S_v 重叠，也不会包含于其中。选择 $0<\varepsilon<\min\{\delta,T,r_a,r_b\}$，使得 $\varepsilon\in D$。显然，球堆积 $\phi^\varepsilon(P)$ 具有一般半径 $f(\varepsilon)$。每个满足 $v\in V$ 的球面 S_v 都映射为包含在 $S(\varepsilon)$ 中的球面，因此每个球面 $\phi^\varepsilon(S_v)$ 的半径都小于 ε。根据先前的公式，球体 $\phi^\varepsilon(S_a)$ 和 $\phi^\varepsilon(S_b)$ 的半径分别为 r_a 和 r_b。令 $P'=\phi^\varepsilon(P)$，即可得出结论。

□

引理 3.2. 设 $G=(V,E)$ 是一个图，设 K_2 是顶点为 $\{a,b\}$ 的完全图，并设$P=(G\oplus K_2,p,r)$ 是一个具有一般半径的球堆积。那么存在一个与之莫比乌斯等价的球堆积 $P'=(G\oplus K_2,p',r')$，满足以下条件：

(i) $p'_v = (x_v, y_v, 0)$ 对于每个 $v \in V$,

(ii) $p'_a = (0,0,-1)$, $p'_b = (0,0,1)$ 以及 $r'_a = r'_b = 1$, 并且

(iii) 集合 $\{r'_v : v \in V\}$ 代数独立。

证明。应用引理 3.1，并在必要时交换顶点 a、b，不失一般性地设 $r_a > r_b > r_v$ 对所有 $v \in V$ 成立。通过旋转并平移 P，我们还可~假设 $p_a = (0,0,-r_a)$ 和 $p_b = (0,0,r_b)$。定义球堆积 $P = (G, \tilde{p}, \tilde{r})$，令 $\tilde{p}_v = p_v / r_b$ 且对每个 $v \in V$ 有 $\tilde{r}_v = r_v / r_b$。由于集合 $\{r_v : v \in V \cup \{a,b\}\}$ 代数独立，集合 $\{\tilde{r}_v : v \in V \cup \{a\}\}$ 也代数独立。我们的证明接下来~分两步进行。首先，我们求出唯一的莫比乌斯变换 ϕ，它将 P 映射为球堆积 $P' = (G \oplus K_2, p', r')$，其中 $x'_a = x'_b = y'_a = y'_b = 0$、$z'_a = -1$、$z'_b = 1$ 且 $r'_a = r'_b = 1$。构造出 P' 及其对应的莫比乌斯变换 ϕ后，我们再证明集合 $\{r'_v : v \in V\}$ 代数独立。

定义莫比乌斯变换 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, $\phi_4 : \mathbb{R}^3 \dashrightarrow \mathbb{R}^3$ 其中，对于 $\mathbb{R}^3$ 中的每个点 $u = (u_x, u_y, u_z)$，有

$$\begin{aligned}
\phi_1(u) &:= u - \left(0, 0, \frac{4\tilde{r}_a}{\tilde{r}_a - 1}\right), \\
\phi_2(u) &:= \frac{u}{\|u\|^2} \qquad (\text{defined for } u \neq (0,0,0)), \\
\phi_3(u) &:= \frac{-4\tilde{r}_a(\tilde{r}_a + 1)}{(\tilde{r}_a - 1)^2} u, \\
\phi_4(u) &:= u - \left(0, 0, \frac{\tilde{r}_a + 1}{\tilde{r}_a - 1}\right).
\end{aligned}$$

现在定义莫比乌斯变换 $\phi := \phi_4 \circ \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$，它在除奇点 $\sigma := (0,\ 0,\ 4\tilde{r}_a/(\tilde{r}_a - 1))$ 之外的每个点处都有定义。注意，

$$\phi(0,0,0) = (0,0,0), \qquad \phi(0,0,2) = (0,0,2), \qquad \phi(0,0,-2\tilde{r}_a) = (0,0,-2).$$

~由于 $\tilde{r}_a = r_a / r_b > 1$，点 σ 不包含在 P的任何球体内：σ 不包含在 a 或 b 对应的球体内，因为 $\sigma > 4$；而 σ 不包含在任何其他球体内，因为对于~中的所有 $v \in V$，都有 $\tilde{r}_v < 1$（因此，考虑到 P 中对应于 a, v 的球体彼此接触，我们有~$\tilde{z}_v + \tilde{r}_v < 2\tilde{r}_v < 4 < \sigma$）。因此，$\phi(P)$ 是一个接触图为 $G \oplus K_2$的球堆积。现在令~$P' = \phi(P)$。

现在我们必须证明集合 $\{r'_v : v \in V\}$ 是代数独立的。定义具有接触图 $G \oplus K_2$ 的球堆积 $Q := \phi_2 \circ \phi_1(\tilde{P})$，其球心为 $q : V \cup \{a,b\} \to \mathbb{R}^3$，半径为$s : V \cup \{a,b\} \to \mathbb{R}_{>0}$。注意，对于每个 $v \in V \cup \{a, b\}$，我们都有

$$r'_v = \frac{4\tilde{r}_a(\tilde{r}_a + 1)}{(\tilde{r}_a - 1)^2} s_v$$

因此，若集合 $\{r'_v : v \in V\}$ 在域 $\mathbb{F} := \mathbb{Q}(\tilde{r}_a)$ 上代数独立，则集合 $\{s_v : v \in V\}$ 也代数独立。

对于 $t>0$，固定 S_t 为任意一个半径为 t 、与分别对应于 P 中顶点 a、b 的球体 S_a、S_b 相切的球面˜（此处不考虑球面 S_t 是否与 P 中的其他球体˜相交）。虽然 S_t 可以取一族一维的球面，但存在唯一的标量 $\alpha(t)>0$，使得每个集合 $\phi_2\circ\phi_1(S_t)$ 都是一个半径为 $\alpha(t)$、与分别对应于 Q 中顶点 a、b 的球面 $\phi_2\circ\phi_1(S_a)$ 和 $\phi_2\circ\phi_1(S_b)$ 相切的球面（再次说明，我们不考虑它是否与 Q 中的其他球体相交）。考虑映射 $\alpha:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$，它将每个 t 映射到其唯一对应的值 $\alpha(t)$。由于莫比乌斯变换除奇点外均为单射且连续，映射 α 是单射且连续的。注意，对每个 $v\in V$，都有 $\alpha(\tilde{r}_v)=s_v$。现在只需证明 α 是 $\mathbb{F}$ 上的双射代数函数；由此根据引理 A.3 和 A.4 可知，集合 $\{s_v:v\in V\}$ 在 $\mathbb{F}$ 上代数独立。

与之前类似，固定 T_t 为一个半径为 $t>0$ 的球体，使其与球体T_a、T_b相切，这些球体对应于 Q中的顶点 a、b；并固定唯一的标量 $\beta(t)>0$，使得每组 $(\phi_2\circ\phi_1)^{-1}(T_t)$ 都是一个半径为 $\beta(t)$ 的球体，并与 $\tilde{P}$中的球体 $(\phi_2\circ\phi_1)^{-1}(T_a)$ 和 $(\phi_2\circ\phi_1)^{-1}(T_b)$ 相切。于是，将每个 t 映射到其唯一取值 $\beta(t)$ 的映射 $\beta:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$ 是 α的反函数。因此， α 是双射。

现在固定每个球体 S_t，使其为与 S_a相切的唯一半径为 t 的球体，其中 S_a的半径为 t，球心为 $p(t)=(x(t),0,z(t))$，其中某个 $x(t)>0$和 $z(t)$。根据隐函数定理（参见[18, 定理 9.28]）， x 和 z 都是连续的。根据引理 2.6， x、$z-1$ （因此 x、z）都是关于 $\mathbb{F}$ 的代数函数，因为它们满足以下方程

$$\begin{aligned} x(t)^2+(z(t)-1)^2&=(t+1)^2,\\ x(t)^2+(z(t)-1+(1-\tilde{r}_a))^2&=(t+\tilde{r}_a)^2 \end{aligned}$$

对于所有 $t>0$和 $\tilde{r}_a>1$。固定非零标量 $\gamma:=\frac{4\tilde{r}_a}{\tilde{r}_a-1}\in\mathbb{F}$。注意，球面$\phi_2\circ\phi_1(S_t)$ 的球心是点 $q(t)=(\lambda(t),0,\mu(t))$，其中 λ， μ 是定义在 $\mathbb{F}$ 上的代数函数，在每个 $t>0$ 处定义为

$$\lambda(t):=\frac{x(t)}{x(t)^2+(z(t)-\gamma)^2},\qquad \mu(t):=\frac{z(t)-\gamma}{x(t)^2+(z(t)-\gamma)^2}.$$

由于 $q_b=(0,0,\frac{\tilde{r}_a-1}{\tilde{r}_a+1})$ 和 $s_b=\gamma^{-1}$，因此 $\alpha(t)$ 满足方程

$$\lambda(t)^2+\left(\mu(t)-\frac{\tilde{r}_a-1}{\tilde{r}_a+1}\right)^2=\left(\alpha(t)+\gamma^{-1}\right)^2.$$

由于 λ、μ是 $\mathbb{F}$上的代数函数，且 $\tilde{r}_a$、$\gamma\in\mathbb{F}$，映射 α是 $\mathbb{F}$（引理 A.1）上的代数函数。

□

3.2 半径集的性质

我们需要以下记号。对于固定的图 $G = (V、 E)$，以及一个顶点为$\{a、 b\}$的 K_2 的副本，我们定义以下集合：

$$\begin{aligned}
\mathrm{radii}_{a=b=1}(G \oplus K_2) &:= \left\{(r_v)_{v\in V} : (r_v)_{v\in V\cup\{a,b\}} \in \mathrm{radii}(G \oplus K_2),\ r_a = r_b = 1\right\},\\
\mathrm{radii}_{a\neq b}(G \oplus K_2) &:= \{r \in \mathrm{radii}(G \oplus K_2) : r_a \neq r_b\},\\
\mathrm{radii}_{a>b}(G \oplus K_2) &:= \{r \in \mathrm{radii}(G \oplus K_2) : r_a > r_b\},\\
\mathrm{radii}_{a>b>V}(G \oplus K_2) &:= \{r \in \mathrm{radii}(G \oplus K_2) : r_a > r_b > r_v \text{ for all } v \in V\}.
\end{aligned}$$

注意，后面三个集合都是 radii$(G \oplus K_2)$ 的开子集。

引理 3.3. 设 $G = (V, E)$ 是一个图， K_2 是顶点为 $\{a, b\}$ 的完全图。若集合 半径$_{a>b}(G \oplus K_2)$ 具有非空内部，则集合 半径$_{a>b>V}(G \oplus K_2)$ 也具有非空内部。

证明。固定开集 $X = (\mathbb{R}^3)^{V\cup\{a,b\}} \times \mathbb{R}_{>0}^{V\cup\{a,b\}}$ 以及投影 $\pi\colon X \mapsto \mathbb{R}^{V\cup\{a,b\}}$，其中$\pi(p, r) = r$。定义 $Z \subset X$ 为这样的有序对 (p, r) 的集合：每一对都对应一个满足 $r_a > r_b$ 的球堆积 $(G\oplus K_2, p, r)$。由此可见， $\pi(Z) =$半径$_{a>b}(G\oplus K_2)$。由于半径$_{a>b}(G\oplus K_2)$ 具有非空内部，存在开集 $U \subset Z$，使得 $\pi(U)$ 是 $\mathbb{R}^{V\cup\{a,b\}}$ 的开子集。选取 $(p', r') \in U$，使得 r' 具有代数独立坐标，并令$P = (G \oplus K_2, p', r')$。根据引理 3.1，存在一个莫比乌斯变换 ϕ（奇点为 σ），使得 $\phi(P)$ 是一个球堆积，并且 $\pi \circ \phi(P) \in$半径$_{a>b}(G \oplus K_2)$。

现在我们需要采用以下记号。给定一对 $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{>0}$ with $x \neq \sigma$，固定 $\phi(x, t)$，表示满足 $\phi(t\mathbb{S}^2 + x) = t'\mathbb{S}^2 + x'$ 的那一对 (x', t')（回想一下， $\mathbb{S}^2$ 是球心为 (0, 0, 0)、半径为 1 的球面）。令 $X' \subset X$ 为所有满足对任意 $v \in V \cup\{a, b\}$都有 $p_v \neq \sigma$的点对 (p, r) 构成的开稠密子集，并令 $Z' = Z \cap X'$。这里注意到， X'和 Z'都非空（因为它们都包含 (p', r')），且分别是 X 和 Z 的开子集。现在定义$f\colon X' \to X$为连续映射，其中对每个满足对任意 $v \in V \cup\{a, b\}$都有 $p_v \neq \sigma$ 的 (p, r)，有 $f(p, r) = (\phi(p_v, r_v))_{v\in V\cup\{a,b\}}$。由于映射 $(x, t) \mapsto \phi(x, t)$ 是开映射（将其限制在定义域中定义良好的点构成的开稠密集上时），映射 f也同样是开映射。由于 ϕ （限制定义域后）可逆，因此定义域和陪域受限的映射 $h = f|_{Z'}^{Z}$ 是开映射。由此，复合映射 $g = \pi \circ h$ 是开映射。此外，g的像恰好是半径集$_{a>b}(G\oplus K_2)$。现在我们指出三个重要事实：（i） g是 Z'的非空开子集 $U \cap Z'$上的连续开映射；（ii）半径$_{a>b>v}(G\oplus K_2)$是半径$_{a>b}(G\oplus K_2)$的开子集；（iii） $g(p', r') \in$半径$_{a>b}$ $(G\oplus K_2)$。因此， $g(U \cap Z') \cap$半径$_{a>b>v}(G\oplus K_2)$是 $\mathbb{R}^{V\cup\{a,b\}}$的非空开子集，证明完毕。

□

引理 3.4。 设 $G = (V, E)$ 是一个图， K_2 是顶点为 $\{a, b\}$ 的完全图。若集合 半径$_{a=b=1}(G \oplus K_2)$ 具有非空内部，则集合 半径$(G \oplus K_2)$ 具有非空内部。

证明。由于交换 a 和 b 是 $G \oplus K_2$ 的一个自同构，集合 radii$^{a\neq b}(G \oplus K_2)$ 有非空内部，当且仅当集合 radii$_{a>b}(G \oplus K_2)$ 有非空内部。此外，由于集合 radii$^{a\neq b}(G \oplus K_2)$ 是一个开稠密集与 radii$(G \oplus K_2)$ 的交集，因此集合

radii($G \oplus K_2$) 有非空内部，当且仅当集合 radii$_{a \neq b}$($G \oplus K_2$) 有非空内部。因此，集合 radii($G \oplus K_2$) 有非空内部，当且仅当集合 radii$_{a>b}$($G \oplus K_2$) 有非空内部。根据引理 3.3，集合 radii$_{a>b}$($G \oplus K_2$) 有非空内部，当且仅当集合 radii$_{a>b>V}$($G \oplus K_2$) 有非空内部。因此，集合 radii($G \oplus K_2$) 有非空内部，当且仅当集合 radii$_{a>b>V}$($G \oplus K_2$) 有非空内部。

定义 $Z \subset (\mathbb{R}^3)^{V \cup \{a,b\}} \times \mathbb{R}^{V \cup \{a,b\}}_{>0}$ 为与球堆积 $(G \oplus K_2, p, r)$ 对应的数对 (p, r) 的集合，其中 $p_a = (0, 0, r_a)$ 且 $p_b = (0, 0, -r_b)$。定义 $Z' \subset Z$ 为满足 $r_a > r_b > r_v$ 对所有 $v \in V$ 均成立的数对 (p, r) 的子集，并定义 $Z'' \subset Z$ 为满足$r_a = r_b = 1$的数对 (p, r) 的子集。另定义投影映射

$$\pi_1 : (\mathbb{R}^3)^{V \cup \{a,b\}} \times \mathbb{R}^{V \cup \{a,b\}}_{>0} \to \mathbb{R}^{V \cup \{a,b\}}_{>0}, \ (p, r) \mapsto r$$
$$\pi_2 : \mathbb{R}^{V \cup \{a,b\}}_{>0} \to \mathbb{R}^{V}_{>0}, \ (r_v)_{v \in V \cup \{a,b\}} \mapsto (r_v)_{v \in V}.$$

由此可得

$$\pi_1(Z) = \mathrm{radii}(G \oplus K_2), \ \ \pi_1(Z') = \mathrm{radii}_{a>b>V}(G \oplus K_2), \ \ \pi_2 \circ \pi_1(Z'') = \mathrm{radii}_{a=b=1}(G \oplus K_2).$$

对于每一对标量 $\lambda > \mu > 0$，定义莫比乌斯变换 $\phi^{\lambda,\ \mu}_{\ 0}$， $\phi^{\lambda,\ \mu}_{\ 1}$， $\phi^{\lambda,\ \mu}_{\ 2}$， $\phi^{\lambda,\ \mu}_{\ 3}$， $\phi^{\lambda,\ \mu}_{\ 4} : \mathbb{R}^3 \dashrightarrow \mathbb{R}^3$ 其中对于每个 $u = (u_x, u_y, u_z) \in \mathbb{R}^3$，有

$$\begin{aligned}
\phi_0^{\lambda,\mu}(u) &:= \frac{1}{\mu} u, \\
\phi_1^{\lambda,\mu}(u) &:= u - \left(0, 0, \frac{4(\lambda/\mu)}{(\lambda/\mu) - 1}\right), \\
\phi_2^{\lambda,\mu}(u) &:= \frac{u}{\|u\|^2} \qquad (\text{if } u \neq (0,0,0)), \\
\phi_3^{\lambda,\mu}(u) &:= \frac{-4(\lambda/\mu)((\lambda/\mu)+1)}{((\lambda/\mu)-1)^2} u, \\
\phi_4^{\lambda,\mu}(u) &:= u - \left(0, 0, \frac{(\lambda/\mu)+1}{(\lambda/\mu)-1}\right).
\end{aligned}$$

另定义莫比乌斯变换 $\phi^{\lambda,\ \mu} := \phi^{\lambda,\ \mu}_{\ 4} \circ \phi^{\lambda,\ \mu}_{\ 3} \circ \phi^{\lambda,\ \mu}_{\ 2} \circ \phi^{\lambda,\ \mu}_{\ 1} \circ \phi^{\lambda}$。利用引理 *3.2* 的证明中概述的技术，我们注意到

$$\phi^{\lambda,\mu}(0,0,0) = (0,0,0), \qquad \phi^{\lambda,\mu}(0,0,2\mu) = (0,0,2), \qquad \phi^{\lambda,\mu}(0,0,-2\lambda) = (0,0,-2),$$

对于每个具有（p'， r'）$\in Z'$的球堆积 $P' = (G \oplus K_2, p', r')$，都存在唯一一个具有（$p''$， r''）$\in Z''$的球堆积 $P'' = (G \oplus K_2, p'', r'')$，使得 $P'' = \phi^{r'_a, r'_b}(P')$。由此，固定$\phi$： $Z' \to Z''$ 为连续映射，它通过映射$\phi^{r'_a, r'_b}$将每个（p'， r'）映射到其唯一的（p''， r''）。注意，映射 ϕ 是满射：对于任意 $\lambda > \mu > 0$ 以及任意（p''，r''）$\in Z''$，三元组（$G \oplus K_2$， p'， r'）：$= (\phi^{\lambda,\ \mu})^{-1}(G \oplus K_2,\ p'',\ r'')$ 是一个具有（p'， r'）$\in Z'$的球堆积。

取一个非空开子集 $U \subset \mathbb{R}^V$，它包含于半径$_{a=b=1}$($G \oplus K_2$)的内部。由于映射 ϕ、 π_1 和 π_2 都是连续且满射的，因此集合

$$U' := \phi^{-1}\left((\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(U) \cap Z''\right) \neq \emptyset$$

是 Z' 的开子集。由于线性投影是开映射，且 $\pi_1(Z') = $ 半径$_{a>b}(G \oplus K_2)$，集合 $\pi_1(U') \subset \mathbb{R}^{V \cup \{a,b\}}$ 是开集，并包含于半径$_{a>b}(G \oplus K_2)$中。因此，半径$_{a>b}(G \oplus K_2)$具有非空内部；根据上述两个集合之间的对应关系，半径$(G \oplus K_2)$也具有非空内部。

□

4 定理 1.2 的证明

4.1 接触图的环结构

我们先给出一个关于特殊类型框架的技术性结果。

引理 4.1. 设 $G = (V, E)$ 是由圈 $(v_1, \dots, v_k)$（含有 $k \geq 3$）添加一个与圈上所有顶点相邻的顶点 v_0 后得到的图。假设框架 (G, p) 在 $\mathbb{R}^2$ 中由正标量 $r_1, \dots, r_k$ 按以下方式构造：

(i) $p_{v_i} = (x_i, y_i)$ *and* $x_i^2 + y_i^2 = r_i^2 + 2r_i$ *for each* $1 \leq i \leq k$, *and* $x_0 = y_0 = y_1 = 0$;

(ii) 对每个$1 \leq i \leq k-1$，向量对 $p_{v_i}, p_{v_{i+1}}$ 线性无关，且向量 $p_{v_{i+1}}$ 位于 p_{v_i} 的顺时针方向；同样，向量对 p_{v_1}, p_{v_k} 线性无关，且向量 p_{v_1} 位于 p_{v_k}的顺时针方向；

(iii) $\|p_{v_i} - p_{v_{i+1}}\| = r_i + r_{i+1}$ *for each* $1 \leq i \leq k-1$.

（参见图 2 中满足 $k = 4$ 的此类框架示例。）若 $\|p_{v_1} - p_{v_k}\| = r_1 + r_k$，则集合 $\{r_1, \dots, r_k\}$ 不是代数独立的。

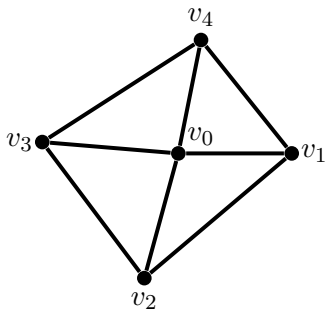

图 2：引理 4.1 中针对 $k = 4$所描述的框架示例。每个顶点 v_i 都位于 $\mathbb{R}^2$中的点 $p_{v_i} = (x_i, y_i)$ 处。每条满足 $i \in \{1, 2, 3\}$ 的边 $v_i v_{i+1}$ 长度均为 $r_i + r_j$，每条满足 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ 的边 $v_0 v_i$ 长度均为 $\sqrt{r_i^2 + 2r_i}$。根据引理 4.1，如果边 $v_1 v_4$ 的长度为 $r_1 + r_4$，则集合 $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ 代数相关。

证明。对于每个正整数 n，固定 $[n] := \{1, \dots, n\}$。为导出矛盾，假设集合 $\{r_1, \dots, r_k\}$ 代数独立，且 $\|p_{v_1} - p_{v_k}\| = r_1 + r_k$。固定 $D \subset \mathbb{R}^k_{>0}$，令其为开

凸集 $s = (s_i)^{i\in[k]}$，其中可以按照构造 p 的方式，从 s 构造 G 的实现（暂且忽略条件 $\|p_{v_1} - p_{v_k}\| = r_1 + r_k$）。注意，这等价于对每个 $i \in [k-1]$，以下三角不等式均成立：

$$\begin{aligned} s_i + s_{i+1} + \sqrt{s_{i+1}^2 + 2s_{i+1}} &> \sqrt{s_i^2 + 2s_i}, \\ s_i + s_{i+1} + \sqrt{s_i^2 + 2s_i} &> \sqrt{s_{i+1}^2 + 2s_{i+1}}, \\ \sqrt{s_i^2 + 2s_i} + \sqrt{s_{i+1}^2 + 2s_{i+1}} &> s_i + s_{i+1}. \end{aligned}$$

将由 s 构造的唯一实现记为 $p(s) = (p_v(s))_{v\in V}$，其中对于每个 $v_i \in V$，$p_{v_i}(s) = (x_i(s)\ y_i(s))$。因此，引理 4.1 的陈述中给出的性质 (i)、(ii)、(iii) 在将 r 替换为 s、将 p 替换为 $p(s)$ 后仍成立。值得注意的是，每个映射 x_0、y_0、...、x_k、y_k 都是连续的，并且对于所有 $s \in D$，我们有 $x_0(s) = y_0(s) = y_1(s) = 0$，且 $x_1(s) = \sqrt{s_1^2 + 2s_1}$（因此 $x_1 \in \mathbb{A}_D(X_1)$）。对于每个 $i \in \{2, \ldots, k\}$ 以及每个 $s \in D$，我们有

$$\begin{aligned} x_i(s)^2 + y_i(s)^2 &= s_i^2 + 2s_i, \\ (x_i(s) - x_{i-1}(s))^2 + (y_i(s) - y_{i-1}(s))^2 &= (s_i + s_{i-1})^2. \end{aligned}$$

H因此，反复应用 引理 2.6 可得 x_i，$y_i \in \mathbb{A}_D(X_1、\ldots、X_i)$ 对于每个 $i \in [k]$。定义代数函数 $f \in \mathbb{A}_D(X_1、\ldots、X_k)$ 其中

$$f(s) := \|p_k(s) - p_1(s)\|^2 - (s_k + s_1)^2 = (x_k(s) - x_1(s))^2 + (y_k(s) - y_1(s))^2 - (s_k + s_1)^2.$$

由于 $f(r) = 0$，且集合 $\{r_1, \ldots, r_k\}$ 代数独立，因此可得 $f = 0$。于是根据引理 2.6，x_k，$y_k \in \mathbb{A}_D(X_1, X_k)$。通过采用与前面相同的归纳论证，只是方向相反——也就是说，我们从观察到 $x_k, y_k \in \mathbb{A}_D(X_1, X_k)$ 开始，并在每一步根据 x_i, y_i 定义 x_{i-1}, y_{i-1}——可知，对于每个满足 $i \neq 1$ 的 $i \in [k]$，$x_i, y_i \in \mathbb{A}_D(X_1, X_i, \ldots, X_k)$ 也成立。因此，对于每个 $i \in [k]$，$x_i, y_i \in \mathbb{A}_D(X_1, X_i)$。

对于每个 $\in [k]$，定义集合

$$D_i := \left\{(s_1, s_i) : (s_\ell)_{\ell\in[k]} \in D\right\}, \qquad Z_i := \{s_i : (r_1, s_i) \in D_i\}.$$

由于 D 是一个包含 r的开集，因此集合 D_i 和 Z_i 分别是 $\mathbb{R}^2$和 $\mathbb{R}$ 的开非空子集，并且 $r_i \in Z_i$。对于每个 $i \in [k]$，我们都有 x_i，$y_i \in \mathbb{A}_D(X_1,\ X_i)$，因此我们通过设定 $\tilde{x}_i(s_1,\ s_i) := x_i(s)$，为任意选取的 $s = (s_\ell)_{\ell\in[k]} \in D$，构造良定义映射 $\tilde{x}_i\colon D_i \to \mathbb{R}_{>0}$。类似地，我们构造良定义映射 $\tilde{y}_i\colon D_i \to \mathbb{R}_{>0}$。现在固定 $2 \le j \le k-1$。任意 $s \in D$都满足以下方程：

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j(s_1, s_j)^2 + \tilde{y}_j(s_1, s_j)^2 &= s_j^2 + 2s_j, \\ (\tilde{x}_j(s_1, s_j) - \tilde{x}_{j-1}(s_1, s_{j-1}))^2 + (\tilde{y}_j(s_1, s_j) - \tilde{y}_{j-1}(s_1, s_{j-1}))^2 &= (s_j + s_{j-1})^2, \\ (\tilde{x}_j(s_1, s_j) - \tilde{x}_{j+1}(s_1, s_{j+1}))^2 + (\tilde{y}_j(s_1, s_j) - \tilde{y}_{j+1}(s_1, s_{j+1}))^2 &= (s_j + s_{j+1})^2. \end{aligned}$$

固定 $s_1 = r_1$ 和 $s_{j\pm1} = r_{j\pm1}$，将标量值 $\tilde{x}_{j\pm1}(r_1, r_{j\pm1})$ $\tilde{y}_{j\pm1}(r_1, r_{j\pm1})$替换为标量 $x_{j\pm1}$，$y_{j\pm1}$ （如 p所定义），并重新整理方程后，对于每个 $t \in Z_j$，我们都有

$$\begin{aligned}\tilde{x}_j(r_1,t)^2 + \tilde{y}_j(r_1,t)^2 - t^2 - 2t &= 0,\\ (\tilde{x}_j(r_1,t) - x_{j-1})^2 + (\tilde{y}_j(r_1,t) - y_{j-1})^2 - (t + r_{j-1})^2 &= 0,\\ (\tilde{x}_j(r_1,t) - x_{j+1})^2 + (\tilde{y}_j(r_1,t) - y_{j+1})^2 - (t + r_{j+1})^2 &= 0.\end{aligned}$$

因此这些方程

$$a^2 + b^2 - c^2 - 2c = 0, \tag{4}$$
$$(a - x_{j-1})^2 + (b - y_{j-1})^2 - (c + r_{j-1})^2 = 0, \tag{5}$$
$$(a - x_{j+1})^2 + (b - y_{j+1})^2 - (c + r_{j+1})^2 = 0, \tag{6}$$

有无穷多个解 $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$(因为 Z_j包含无穷多个点)。对方程 (4) 至(6) 关于变量 $(a,\ b,\ c)$ 求雅可比矩阵，然后将每一行除以 2，将最右侧一列乘以 -1，并从底下两行中减去顶行，可得矩阵

$$M(a,b,c) := \begin{bmatrix} a & b & c+1 \\ -x_{j-1} & -y_{j-1} & r_{j-1} - 1 \\ -x_{j+1} & -y_{j+1} & r_{j+1} - 1 \end{bmatrix}.$$

由于方程 (4) 至 (6) 是具有无穷多个解的多项式方程，因此对于所有 $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$，$\det M(a,b,c) = 0$。注意，当且仅当向量 $v_- := (x_{j-1}, y_{j-1}, r_{j-1} - 1)$ 和$v_+ := (x_{j+1}, y_{j+1}, r_{j+1} - 1)$ 线性相关时，才会出现这种情况。假设 v_- 和 v_+ 确实线性相关。由于这两个向量的第三个坐标都不可能为零（否则将推出$r_{j\pm1} = 1$，这与集合 $\{r_1, \ldots, r_k\}$ 代数独立相矛盾），因此存在 $\lambda \neq 0$使得 $x_{j+1} = \lambda x_{j-1}$, $y_{j+1} = \lambda y_{j-1}$ 和 $r_{j+1} = \lambda r_{j-1} - \lambda + 1$。将 $x_{j+1}, y_{j+1}, r_{j+1}$ 的新值代入我们所构造框架（G, p）中 $i = j + 1$ 定义的性质 (i) 所对应的方程，可得

$$0 = x_{j+1}^2 + y_{j+1}^2 - r_{j+1}^2 - 2r_{j+1} = \lambda^2(x_{j-1}^2 + y_{j-1}^2 - r_{j-1}^2) + (2r_{j-1} - 1)\lambda^2 + (4 - 4r_{j-1})\lambda - 3$$

利用性质（i）以及 $i = j - 1$ 我们所构造的框架（$G,\ p$），可得到方程

$$(4r_{j-1} - 1)\lambda^2 + (4 - 4r_{j-1})\lambda - (4r_{j-1} + 3) = 0.$$

然而，这意味着 λ ——从而 r_{j+1} 也——属于 $\mathbb{F}(r_{j-1})$ 的代数闭包，这与集合 $\{r_1, \ldots\ldots, r_k\}$ 代数独立相矛盾。因此，函数 $(a,\ b,\ c) \mapsto \det M(a,\ b,\ c)$ 是一个非零多项式，这与我们先前关于 $\det M(a,\ b,\ c) = 0$ 的断言相矛盾。至此，证明完成。

□

引理 4.2. 设 $G = (V, E)$，且设 $G \oplus K_2$ 是一个半径一般的球堆积 P 的接触图。那么 G 是一片森林。

证明。反设 G 含有一个圈 $C=(v_1,\dots,v_k)$，其中 $k\le|V|-2$。首先，我们希望将 P 改写成一种更便于处理的形式。通过平移和旋转 P，可不妨设 $x_a=x_b=y_a=y_b=0$、$z_a=-r_a$ 和 $z_b=r_b$。应用引理 3.2，我们可以用一个莫比乌斯等价的球堆积替换 P，使得 $r_a=1$、$r_b=1$，并且（与 r 为一般情形不同）集合 $\{r_v\colon v\in V\}$ 代数独立。注意，由于每个顶点都与 a 和 b 相邻，因此对每个 $v\in V$，都有 $p_v=(x_v,y_v,0)$，其中 x_v、y_v 满足 $x_v^2+y_v^2=r_v^2+2r_v$。固定集合 $U:=\{v_1,\dots,v_k,a\}$，并固定 $q\colon U\to\mathbb{R}^2$ 为映射，使得对每个 $v\in U$，都有 $q_v=(x_v,y_v)$。定义 H 为 G 的子图，其顶点集为 U，边集为 $\{v_1v_2,\dots,v_{k-1}v_k,v_kv_1\}\cup\{av_i\colon 1\le i\le k\}$。重要的是，$H$ 包含圈 C。通过旋转 P，可不妨设 $y_{v_1}=0$。然而，这就产生了矛盾；(H,q) 是引理 4.1 中所述的框架，因此集合 $\{r_v\colon v\in V\}$ 并非代数独立。

□

4.2 球堆积的无应力性质

利用我们对引理 4.2中接触图结构的新认识，接下来我们证明，任何此类球堆积都是无应力的。为此，我们需要刚性理论中的以下众所周知的结果。

引理 4.3 ([20, 引理 11.1。1])。设 (G,p) 和 (G',p') 是 $\mathbb{R}^d$ 中的框架，且满足以下条件：

(i) $G'=(V',E')$ 是 $G=(V,E)$ 的子图，且 $V=V'\cup\{v_0\}$，

(ii) $p'_v=p_v$ 对于所有 $v\in V'$，

(iii) v_0 在 G中恰有 $k\le d$ 个邻点 $v_1,\dots,v_k$，并且

(iv) 点 点 p_{v_0}、…、p_{v_k} 不包含在 $\mathbb{R}^d$ 的一个 $(k-1)$ 维仿射子空间中 .

当且仅当 (G',p') 无应力时，(G,p) 才无应力。

引理 4.4. 设 $G=(V,E)$，并设 $G\oplus K_2$ 是一个具有一般半径的球堆积 P 的接触图。那么 P 无应力。

证明。固定 $p\colon V\cup\{a,b\}\to\mathbb{R}^3$，并令 $r\colon V\cup\{a,b\}\to\mathbb{R}_{>0}$ 将 G 的顶点分别映射到对应球面的球心和半径。对 P 应用旋转和平移后，我们可以假设 $p_a=(0,0,-r_a)$ 和 $p_b=(0,0,r_b)$。

现在我们进行归纳证明。若 $|V|=0$，则 P 是无应力的，因为 $p_a\ne p_b$。反之，假设结论对任意 $(k-1)$ 顶点图都成立，并固定 $|V|=k$。由引理 4.2，G 是一片森林。因此，G 中存在一个度不超过 1 的顶点 $v\in V$，故其在 $G\oplus K_2$ 中的度不超过 3。固定 P' 为从 P 中移除对应于 v 的球体后形成的一般半径球堆积，并固定 p'、r' 分别为其球心和 P' 的半径。由于 $G-v$ 是一片森林，且 Q 的接触图为 $(G-v)\oplus K_2$，因此根据归纳假设，Q（因而 $((G-v)\oplus K_2,\ p')$）是无应力的。三元组 $\{p_v,\ p_a,\ p_b\}$ 不共线；事实上，若它们共线，则其中一个球体必定半径为 0，或者会发生重叠。若 v 与 G 中的任何顶点都不相邻，则 $(G,\ p)$

（因而 P）由引理 4.3 可知是无应力的。假设 v 与 G 中的一个顶点 w 相邻。若点 $\{p_v,\ p_w,\ p_a,\ p_b\}$ 不共面，则 $(G,\ p)$（因而 P）由引理 4.3 可知是无应力的。现在只需证明点 $\{p_v,\ p_w,\ p_a,\ p_b\}$ 不共面。

反设点 $\{p_v、\ p_w、\ p_a、\ p_b\}$ 共面。通过绕 z-轴旋转 P，不妨设 $y_v = y_w = 0$ 也如此。固定 H 为由顶点集 $U := \{v、\ w、\ a、\ b\}$ 诱导的 G 子图，并固定 $q:\ U \to \mathbb{R}^2$ 和 $s:\ U \to \mathbb{R}_{>0}$ 为映射，其中 $q_u = (x_u、\ z_u)$，且对每个 $u \in U$ 都有 $s_u = r_u$。于是（$H、\ q、\ s$）是一个一般半径圆打包。然而，H 有 $2|U| - 2 > 2|U| - 3$ 条边，这与定理 2.3 矛盾。至此证明完成。□

4.3 证明定理 1.2 及其推论

现在我们可以证明定理 1.2。

定理 *1.2* 的证明定理 *1.2*。根据定理 2.4，在整个证明过程中我们假设 G 是一个便士图。如果 $G \oplus K_2$ 是一个具有一般半径的球堆积的接触图，那么根据 G 由引理 4.2可知是森林，并且 P 根据引理 4.4是无应力的。

现在设 G 是一片森林。令 X 为 G 的所有硬币图实现的集合，其中没有顶点与原点的距离小于 1，即映射 $q:\ V \to \mathbb{R}^2$，其中对每个 $v \in V$ 都有 $\|q_v\| > 1$，并且对所有不同的 $v,\ w \in V$ 都有 $\|q_v - q_w\| \geq 1$，且等号当且仅当 $vw \in E$时成立。光滑映射的导数

$$f_G : (\mathbb{R}^2)^V \to \mathbb{R}^E,\ p \mapsto \left(\|p_v - p_w\|^2\right)_{vw \in E}$$

在 $p \in (\mathbb{R}^2)^V$ 处是一个满射 $|E| \times 2|V|$ 矩阵，若 $\|p_v - p_w\| \neq 0$ 对所有 $vw \in E$成立，因此该集合$f_G^{-1}(1,\ \ldots,\ 1)$ 根据常秩定理是一个光滑流形（例如见 [18, 定理 9。32]）。因此，集合 X——作为 $f_G^{-1}(1,\ \ldots,\ 1)$ 的一个开子集——是一个光滑流形。定义光滑映射

$$f : X \to \mathbb{R}^V_{>0},\ p \mapsto \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\|p_v\|^2}}\right)_{v \in V}.$$

对于任意 $p \in X$，f 在 p 处的导数 $df(q)$ 是一个 $|V| \times 2|V|$ 满射矩阵。因此，根据常秩定理，集合 $f(X)$ 有一个开内点。

定义集合

$$Y := \left\{(p, r) : (G \oplus K_2, p, r) \text{ is a sphere packing}, p_a = (0, 0, -1), p_b = (0, 0, 1), r_a = r_b = 1\right\},$$

即，接触图为 $G \oplus K_2$ 的球堆积集合，其中与 $a、\ b$ 对应的球——现分别固定为 $S_a、\ S_b$——半径均为 1，球心分别为 $(0, 0, -1)$ 和 $(0, 0, 1)$。固定 $g:$ 令 $\mathbb{R}^3 \dashrightarrow \mathbb{R}^3$ 为莫比乌斯变换，其中 $g(x) = 2x/\|x\|^2$，并定义 $Z \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{>0}$ 为与 S_a 和 S_b 均接触的所有球的集合。映射 g 分别将球 $S_a、\ S_b$ 映射到仿射平面 $\{(x, y, -1) :\ x, y \in \mathbb{R}\}$ 和 $\{(x, y, 1) :\ x, y \in \mathbb{R}\}$。因此，映射 g 将任何同时与球 $S_a、\ S_b$ 接触的球 S 映射为球心为 $(x, y, 0)$ 的单位球，其中 $x、\ y$ 满足 $x^2 + y^2 > 1$。给定 $\mathbb{D} := \{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$，定义 $k:\ Z \to \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}$ 为双射映射：它将任何与 $S_a、\ S_b$ 均接触且球心为 (x, y, z) 的球 S 映射为点 $(x', y') \in \mathbb{R}^2$，其中 $g(x, y, z) = (x', y', 0)$；本质上，该映射

k 将任意球 $S \in Z$ 映射为 $\mathbb{R}^2$ 中的一个单位圆 C，该单位圆的内部不包含点 (0,0)。现在定义映射

$$h : Y \to X,\ (p, r) \mapsto (k(p_v, r_v))_{v \in V},$$

并且注意到 h 是双射，因为 k 是双射。根据我们对映射 f 的选择，我们有 $f \circ h(p, r) = r$，因此 $f(X)$ = 半径 $_{a=b=1}(G \oplus K_2)$。因此 半径 $(G \oplus K_2)$ 根据 引理 3.4 具有非空内部。这保证了存在一个接触图为 $G \oplus K_2$ 且具有一般半径的球堆积。 □

我们以 定理 1.2的几个推论结束本节。球堆积的接触图的最大团大小为 5，且这一上界是紧的；结合定理 2.4 以及以下观察即可得出这一结论： K_3 是便士图，但 K_4 不是。以下结果是 定理 1.2 以及以下观察的一个简单推论： $K_n = K_{n-2} \oplus K_2$ 对每个 $n \geq 3$均成立。

推论 4.5。 一般半径球堆积的接触图的最大团大小为 *4*，且这一上界是紧的。

回顾一下，如果图的每个作为导出子图的圈的长度都是 3，那么该图称为弦图。

推论 4.6。 设 P 是一个半径一般的球堆积，其接触图为 G。若 G 是弦图，则 P 无应力。

证明。无妨假设 G 是连通的。若 $|V| = 1$，结论显然成立。假设对于顶点数少于 $|V|$ 、具有一般半径且接触图为弦图的任意球堆积，结论均成立。由推论 4.5， G 的最大团大小至多为 4。因此，G 中存在一个顶点 v_0 ，其邻点为 $U \subset V$ ，使得 U 是一个大小至多为 3 的团。固定 $p : V \to \mathbb{R}^3$ 和 $r : V \to \mathbb{R}_{>0}$ ，分别作为 P 的球心和半径。根据归纳假设，将框架 (G, p) 限制在顶点 $V \setminus \{v_0\}$ 上，所得框架无应力。由引理 4.3，只需证明点 $S := \{p_v : v \in U \cup \{v_0\}\}$ 仿射无关；这可以采用与引理 4.4 中所述相似的方法证明。

□

我们回顾一下：如果移除所有度为 1 的顶点后剩下的是一条路径，则该树称为毛毛虫图。

推论 4.7。 设 G 是一幅毛毛虫图。则以下命题等价。

(i) $G \oplus K_2$ 是一个具有一般半径的球堆积的接触图。

(ii) G 的最大度为 *5*，且任意连接两个 *5*度顶点的路径都必须包含一个度数不超过*3*的顶点。

证明。 毛毛虫图是便士图，当且仅当条件 (ii) 成立 [14, 引理 1]。等价性现由定理 1.2得出。

□

5 复杂性

由定理 1.2 可知，确定一个图是否为具有一般半径的球堆积的接触图，其复杂度与确定一棵树是否为便士图的问题相当。人们相信，确定一棵树是否为 NP-困难 [1]。有证据支持这一点：确定一个图是否为便士图是 NP-困难的 [2], ，而确定一棵具有固定方向的树是否为便士图也是 NP-困难的 [1]。因此，我们提出如下猜想。

猜想 5.1。 判断一个图是否为一般半径球堆积的接触图是 *NP*-困难的。

为了证明猜想 5.1，只需证明判断一棵树是否为 NP-困难问题。

致谢

我谨向 Ethan Lee 和 Ross Paterson 致谢，感谢他们就代数函数和代数独立性与我进行了有益的讨论。我还要感谢 Meera Sitharam 分享她在圆和球堆积方面的知识，并感谢 Steven J. Gortler 对本文早期版本提出的宝贵意见。最后，我要感谢匿名审稿人，他们提出了切实可行的建议，帮助修正了第 3 节中的一些技术引理。

作者获得了 Heilbronn 数学研究所的资助。

参考文献

[1] C. Bowen、S. Durocher、M. Löffler、A. Rounds、A. Schulz、C.D. Tóth，单连通多边形连杆的实现与单位圆盘接触树的识别。载于：E. Di Giacomo、A. Lubiw（编），图绘制与网络可视化：*GD 2015*，计算机科学讲义 9411，Springer，Cham（2015）447–459。doi:10.1007/978-3-319-27261-0_37[2] H. Breu、D.G. Kirkpatrick，关于识别圆盘的相交图和接触图的复杂性。载于：F.J. Brandenburg（编），图绘制：*GD 1995*，计算机科学讲义 1027，Springer，柏林、海德堡（1996）88–98。doi:10.1007/BFb0021793[3] R. Connelly、S. Gortler、L. Theran，黏性圆盘的刚性，英国皇家学会学报 A 475:2222（2019）。doi:10.1098/rspa.2018.0773[4]S. Dewar，中心对称凸体的位似堆积，Geometriae Dedicata 216:11（2022）。doi:10.1007/s10711-022-00675-w[5]S. Dewar，不同大小的定向正方形之间可以存在多少个接触？，arXiv 预印本（2022）。https://arxiv.org/abs/2210.10422

[6] D. Eppstein、G. Kuperberg、G. Ziegler，肥胖的 4-多胞体与更肥胖的 3-球面。载于：A. Bezdek（编），离散几何：纪念 W. Kuperberg 60 岁诞辰，纯粹应用数学 253，Marcel Dekker，纽约（2003）239–265。doi:10.1201/9780203911211[7] A. Glazyrin，球堆积的接触图，组合理论杂志 B 辑 145（2020）323–340。doi:10.1016/j.jctb.2020.05.007[8] H. Gluck，几乎所有单连通闭曲面都是刚性的。载于：L.C. Glaser、T.B. Rushing（编），几何拓扑，数学讲义 438，Springer，柏林、海德堡（1975）225–239。doi:10.1007/BFb0066118[9] J. Graver、B. Servatius、H. Servatius，组合刚性，数学研究生教程 2，美国数学学会，普罗维登斯（1993）。doi:10.1090/gsm/002[10] H. Harborth，问题 664A 的解答，数学元素 29（1974）14–15。[11] P. Hliněný、J. Kratochvíl，用圆盘和球表示图（识别复杂性结果综述），离散数学 229(1–3)（2001）101–124。doi:10.1016/S0012- 365X(00)00204-1[12] J. Hopcroft、R. Tarjan，高效平面性测试，美国计算机协会会刊 21(4)（1974）549—568。doi:10.1145/321850.321852 [13] D.J. Jacobs、B. Hendrickson，二维刚性渗流算法：卵石游戏，计算物理学杂志 137(2)（1997）346–365。doi:10.1006/jcph.1997.5809[14] B. Klemz、M. Nöllenburg、R. Prutkin，识别加权圆盘接触图。载于：E. Di Giacomo、A. Lubiw（编），图绘制与网络可视化：GD 2015，计算机科学讲义 9411，Springer，Cham（2015）433–446。doi:10.1007/978-3-319-27261-0_36[15] S. Lang，代数扩张。载于：S. Lang，代数，数学研究生教材 211，Springer，纽约（2002）223–259。doi:10.1007/978-1-4613-0041-0_5[16] J.C. Maxwell，关于框架的平衡与刚度的计算，伦敦、爱丁堡和都柏林哲学杂志与科学期刊 27(182)（1864）294–299。doi:10.1080/14786446408643668[17] A. Ozkan、R. Prabhu、T. Baker、J. Pence、J. Peters、M. Sitharam，算法 990：对受距离区间约束的点集构形空间进行高效图谱构建与搜索，美国计算机协会数学软件汇刊 44(4)（2018）文章 48。doi:10.1145/3204472[18] W. Rudin，数学分析原理，第 3 版，麦格劳-希尔，纽约（1976）。[19] K. Stephenson，圆堆积导论：离散解析函数理论，剑桥大学出版社，剑桥（2005）。[20] W. Whiteley，来自离散应用几何的一些拟阵。载于：J.E. Bonin、J.G. Oxley、B. Servatius（编），拟阵理论，当代数学 197，美国数学学会

y，普罗维登斯 (1996) 171–311. doi:10.1090/conm/197/02540

A 代数函数

本节介绍一些关于代数函数的经典结果。

引理 A.1. 设 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{R}$的一个子域，$D \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集，且 $f\colon D \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数。假设存在代数函数 $a_0, \ldots, a_m\colon D \to \mathbb{R}$，它们定义在 $\mathbb{F}$ 上，并且对于每个 $k \in \{0, \ldots, m\}$，都有 $a_k \neq 0$；对于每个 $x \in D$，都有 $\sum_{k=0}^{m} a_k(x) f(x)^k = 0$。那么 f也是 $\mathbb{F}$上的代数函数。

证明。将定义在 D 上、$\mathbb{F}$ 上的 n 元有理函数集合记为 $\mathbb{K}$。[2]集合 $\mathbb{K}$ 在逐点加法和乘法运算下构成一个域，映射 $x \mapsto 0, x \mapsto 1$ 分别是其零元和单位元。令 $\mathbb{L}$ 为由 $\mathbb{K} \cup \{a_0, \ldots, a_m\}$中的有限多个元素经逐点加法、乘法及取倒数所构成的所有可能的部分定义函数的集合。注意，$\mathbb{L}$ 中的每个元素都是一个部分定义的代数函数 $g\colon D \dashrightarrow \mathbb{R}$，也就是说，将 g 限制在开稠密集 $Z \cap D$上时，它是一个定义良好的代数函数，其中 Z 是一个扎里斯基开集。由于每个 a_i 都是 $\mathbb{F}$上的代数函数，$\mathbb{L}$ 是 $\mathbb{K}$的代数域扩张。根据构造，f 包含于 $\mathbb{L}$的一个代数域扩张中；该域可用与构造 $\mathbb{L}$ 相同的方式构造，只是初始集合为 $\mathbb{K} \cup \{f, a_0, \ldots, a_m\}$。因此，$f$包含于 $\mathbb{K}$ 的一个代数扩张中（例如参见 [15]）。于是存在多项式函数 $p_0, \ldots, p_\ell \in \mathbb{K}$，使得对于每个 $x \in D$，都有 $\sum_{k=0}^{m} p_k(x) f(x)^k = 0$，如所需。

□

给定子集 $\{n_1, \ldots, n_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$，令 $\mathbb{A}_D(X_{n_1}, \ldots, X_{n_k}; \mathbb{F})$ 表示定义在域 $\mathbb{F}$ 上、定义域为 D 且仅涉及变量 $X_{n_1}, \ldots, X_{n_k}$的代数函数集合；也就是说，这些代数函数 $f\colon D \to \mathbb{R}$ 在改变任意坐标 $i \notin \{n_1, \ldots, n_k\}$的值时保持不变。为简便起见，我们记 $\mathbb{A}_D(X_{n_1}, \ldots, X_{n_k}) = \mathbb{A}_D(X_{n_1}, \ldots, X_{n_k}; \mathbb{Q})$。例如，函数 $f\colon \mathbb{R}^2_{>0} \to \mathbb{R}$，其中 $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}$，属于集合 $\mathbb{A}_{\mathbb{R}^2_{>0}}(X_1)$。

对于下面的结果，我们回顾一下：域扩张 $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ 的超越次数（记为 $\operatorname{tr\,deg}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$）是集合 $S \subset \mathbb{K}$ 的最大基数，其中该集合在 $\mathbb{F}$ 上代数独立。注意，有限集 $S \subset \mathbb{K}$ 在 $\mathbb{F}$ 上代数相关，当且仅当 $\operatorname{tr\,deg}(\mathbb{F}(S)/\mathbb{F}) < |S|$。超越次数满足以下等式：若 $\mathbb{F} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ 是域，则

$$\operatorname{tr\,deg}(\mathbb{L}/\mathbb{K}) + \operatorname{tr\,deg}(\mathbb{K}/\mathbb{F}) = \operatorname{tr\,deg}(\mathbb{L}/\mathbb{F}).$$

引理 A.2。 设 $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ 是一个子域，并设 $p \in \mathbb{F}[X]$。假设集合 $\{x_1, \ldots, x_k\}$ 在 $\mathbb{F}$ 上代数相关。那么集合 $\{p(x_1), \ldots, p(x_k)\}$ 在 $\mathbb{F}$ 上代数相关。

证明。令 $\mathbb{L} = \mathbb{F}(\{x_1, \ldots, x_k\})$ 和 $\mathbb{K} = \mathbb{F}(\{p(x_1) \ldots, p(x_k)\})$。由于 $\mathbb{F} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ 和集合$\{x_1, \ldots, x_k\}$ 在 $\mathbb{F}$ 上代数相关，因此有如下不等式成立：

$$\operatorname{tr\,deg}(\mathbb{K}/\mathbb{F}) \leq \operatorname{tr\,deg}(\mathbb{L}/\mathbb{K}) + \operatorname{tr\,deg}(\mathbb{K}/\mathbb{F}) = \operatorname{tr\,deg}(\mathbb{L}/\mathbb{F}) < k.$$

因此，$\{p(x_1) \ldots, p(x_k)\}$ 在 $\mathbb{F}$ 上代数相关。 □

[2]严格来说，$\mathbb{K}$ 中的每个元素都是在集合 $Z \cap D$ 上取值相同的有理函数的一个等价类，其中 Z 是 $\mathbb{R}^n$ 的扎里斯基开子集。

引理 A.3. 设 $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ 是一个子域，$D \subset \mathbb{R}$ 是一个开集，且 $f \in \mathbb{A}_D(X;\mathbb{F})$。如果集合 $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset D$ 在 $\mathbb{F}$ 上代数相关，那么集合 $\{f(x_1) \ldots, f(x_k)\}$ 在 $\mathbb{F}$ 上代数相关。

证明。固定多项式 $p_0, \ldots, p_m \in \mathbb{F}[X]$，使得对所有 $x \in D$，$\sum_{i=0}^{m} p_i(x) f(x)^i = 0$。因此，对每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，$f(x_i)$ 都属于 $\mathbb{F}(\{x_i\})$ 的代数闭包。令 $\mathbb{L} = \mathbb{F}(\{x_1, \ldots, x_k\})$，并令$\mathbb{K} = \mathbb{F}(\{f(x_1) \ldots, (x_k)\})$，将 $\mathbb{L}$ 的代数闭包记为 $\mathbb{L}$。由于 $\text{tr deg}(\mathbb{L}/\mathbb{L}) = 0$，且 $\{\overline{x_1}, \ldots, x_k\}$ 在 $\overline{\mathbb{F}}$ 上代数相关，因此 $\text{tr deg}(\mathbb{L}/\mathbb{F}) < k$。由于 $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$，有以下等式成立：

$$\text{tr deg}(\mathbb{K}/\mathbb{F}) \leq \text{tr deg}(\overline{\mathbb{L}}/\mathbb{K}) + \text{tr deg}(\mathbb{K}/\mathbb{F}) = \text{tr deg}(\overline{\mathbb{L}}/\mathbb{F}) < k.$$

因此，$\{f(x_1) \ldots, f(x_k)\}$ 在 $\mathbb{F}$ 上代数相关。 □

引理 A.4。设 $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ 是一个子域，$D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ 是开集，且 $f : D_1 \to D_2$ 是一个定义在 $\mathbb{F}$ 上的双射代数函数。那么，反函数 $f^{-1} : D_2 \to D_1$ 是一个定义在$\mathbb{F}$上的代数函数。

证明。令 $p \in \mathbb{F}[X, Y]$ 为满足对于每个 $x \in D_1$ 都有 $p(f(x)\ x) = 0$ 的非零多项式。因此，若我们任取 $y \in D_2$，并将代换 $x = f^{-1}(y) \in D_1$ 应用于前面的方程，则可得 $p(y,\ f^{-1}(y)) = 0$，如所要求。

□