arXiv:2302.12632v1 [math.NT] 24 Feb 2023

函数域类比评述

IGOR V. NIKOLAEV[1]

Abstract. 我们研究数域与有限域上一元函数域之间的类比。主要结果是类数为一的希尔伯特类域与一族定义在消奇异代数曲线 C 上的函数域 $\mathbf{F}_q(C)$ 之间存在同构。我们的证明基于 Serre C^*-代数的 K理论以及曲线 C 的双有理几何。我们利用该同构，构造来自德林费尔德模的挠子模的希尔伯特类域的显式生成元。

1. Introduction

Dedekind 与 Weber 1882] [3] 首先指出，数域与一元有理函数域之间存在关联。例如，这两类域都是 Dedekind 整环，即每个理想都能分解为素理想的乘积。与数域不同，函数域的单位群不再是有限生成的。不过，对于有限（伽罗瓦）域上的有理函数，情况又恢复正常。事实上，Artin 与 Whaples 1945[1] 证明了这两类域可以统一为整体域。这推动了相关领域的快速发展：通过将一方的未解问题改写为另一方的问题，解决了许多开放问题 [van der Geer、Moonen 与 Schoof 2005] [4]。黎曼猜想（Hasse 与 Weil）的类比版本以及几何朗兰兹猜想（Drinfeld 与 Lafforgue）的成功证明，便是其中的几个例子。这种类比何时能否提升为同构，是一个有趣的开放问题。

本文旨在解决上述问题中关于类数为一的希尔伯特类域的情形，即主理想整环的情形。具体而言，我们构造这类域与函数域之间的同构$\mathbf{F}_{p^{m-1}}(C)$, 其中 C 是通过对奇异曲线进行 $m-1$ 次爆破得到的光滑代数曲线（定理1.1）。为使我们的结果表述规范，下面引入一些记号。

设 (x_0, y_0) 是代数曲线 $f(x,y) = 0$ 给出的一个孤立奇点，其中该曲线由多项式 $f \in \mathbf{Z}[x,y]$ 定义。考虑算术概形 $Spec\,\mathbf{Z}[x,y]/(f)$ 及其到 $Spec\,\mathbf{Z}$ 的自然态射。设 $\mathscr{P} \in Spec\,\mathbf{Z}[x,y]/(f)$ 是与点 (x_0, y_0) 对应的极大理想，该点位于素 $p \in \mathbf{Z}$ 对应的 $(p) \in Spec\,\mathbf{Z}$ 之上。

回顾一下，奇点 (x_0, y_0) 可以通过一系列爆破$\{\epsilon_i \mid 1 \le i \le m-1\}$得到消解，使得 $f(x,y) = 0$ 定义一条光滑代数曲线 C，例如参见 [Grassi 2009] [5, 例—定义 10] 或 [Koll´ar 2007] [6, 第 1.7] 节。我们用 $\mathbf{F}_{p^{m-1}}(C)$ 表示伽罗瓦域 $\mathbf{F}_{p^{m-1}}$ [上单变量有理函数域的几何扩张，参见 2002] [10, Rosen 7]第 章。

另一方面，代数曲线的 Serre C^*-代数的 K理论会产生一个数域 k [8, 第 5.3 节.1]。此外，如果该曲线是奇异的，

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 11R58；次分类号 46L85。

Key words and phrases. 函数域，德林费尔德模，Serre C^*-代数。

那么它的爆破对应于希尔伯特类域 $\mathscr{H}(k)$，即 k 的最大阿贝尔非分歧扩张。这是关于代数曲面 [9, 上双有理映射的一般结果的推论3]。设 $\mathscr{H}^{i+1}(k) := \mathscr{H}(\mathscr{H}^i(k))$。如果 C 是一条经过 $m-1$ 次爆破后解消奇点的曲线，那么数域 $\mathscr{H}^{m-1}(k)$ 的类数必为一，因为光滑曲线之间的每个双有理映射都是同构。我们的主要结果可以表述如下。

定理 1.1. $\mathscr{H}^{m-1}(k) \cong \mathbb{F}_q(C)$，其中 $q = p^{m-1}$。

本文结构安排如下。第 2 节简要回顾预备知识。定理 1.1 在第 3 节中得到证明。第 4 节讨论定理 1.1 的一个应用，在此构造由德林费尔德模的挠子模得到的希尔伯特类域的显式生成元。

2. Preliminaries

本节简要回顾 Serre C^*-代数、双有理几何和函数域。关于详细介绍，请参阅 [Grassi 2009] [5], [Koll´ar 2007] [6], [Rosen2002] [10] and [Stafford & van den Bergh 2001] [11] 。

2.1. Serre C^*-代数 ([8], [11]) 。设 V 是域 k上的射影簇。记 $\mathcal{L}$ 为 V上的线性形式可逆层。若 σ 是 V的自同构，则记 $\mathcal{L}$沿 σ的拉回为 $\mathcal{L}^\sigma$，即对每个 $U \subset V$，有 $\mathcal{L}^\sigma(U) := \mathcal{L}(\sigma U)$。分次 k-代数

$$B(V,\mathcal{L},\sigma) = \bigoplus_{i\geq 0} H^0\left(V,\ \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}^\sigma\otimes\cdots\otimes\mathcal{L}^{\sigma^{i-1}}\right) \tag{2.1}$$

称为 V [Stafford & van den Bergh2001] [11] 的扭曲齐次坐标环。除非自同构 σ 是平凡的，否则这种环总是非交换的。截面 $B(V,\mathcal{L},\sigma)$ 的乘法 $= \oplus_{i=1}^{\infty} B_i$ 定义规则为 $ab = a\otimes b$，其中 $a \in B_m$ 且 $b \in B_n$。如果概形 V 上的可逆层 $\mathcal{L}$ 满足：对于概形 V 上的每个相干层 $\mathcal{F}$，当 $k > 0$ 且 $n >> 0$ 时，上同调群 $H^k(V,$ $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}^\sigma\otimes\cdots\otimes\mathcal{L}^{\sigma^{n-1}}\otimes\mathcal{F})$ 消失，则称其为 σ-ample。若 $\mathcal{L}$ 是 V 上的 σ-ample 可逆层，则

$$Mod\ (B(V,\mathcal{L},\sigma))/\ Tors\ \cong\ Coh\ (V), \tag{2.2}$$

其中 Mod 是环 $B(V,\mathcal{L},\sigma)$ 上分次左模的范畴，$Tors$ 是 Mod 中由挠模构成的满子范畴，而 Coh 是概形 V 上拟相干层的范畴。换言之，$B(V,\mathcal{L},\sigma)$ 是簇 V 的坐标环。

设 R 为交换分次环，使得 $V = Proj\ (R)$。记 $R[t,t^{-1};\ \sigma]$ 为由交换关系 $b^\sigma t = tb$ 定义的斜劳朗多项式环，其中对所有 $b \in R$，b^σ 是 b 在自同构 σ 下的像。已知 $R[t,t^{-1};\ \sigma] \cong B(V,\mathcal{L},\sigma)$ [Stafford 与 van den Bergh 2001] [11, 第 5] 节。设 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，$\mathscr{B}(\mathcal{H})$ 为 $\mathcal{H}$ 上所有有界线性算子构成的代数。对于斜劳朗多项式环 $R[t,t^{-1};\ \sigma]$，考虑一个同态：

$$\rho : R[t,t^{-1};\sigma] \longrightarrow \mathscr{B}(\mathcal{H}). \tag{2.3}$$

回想一下，$\mathscr{B}(\mathcal{H})$ 配备了一个 $*$-对合；该对合来自希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的标量积。我们称表示（2.3）为 $*$-相容的，若 (i) $\rho(t)$ 和 $\rho(t^{-1})$ 是酉算子，且 $\rho^*(t) = \rho(t^{-1})$，并且 (ii) 对于

所有 $b \in R$，均有 $(\rho^*(b))^{\sigma(\rho)} = \rho^*(b^\sigma)$，其中 $\sigma(\rho)$ 是由 σ 诱导的 $\rho(R)$ 的自同构。每当 $B = R[t, t^{-1};\ \sigma]$ 存在一个 $*$-相容表示时，$\rho(B)$ 是一个 $*$-代数。$\rho(B)$ 的范数闭包是一个 C^*-代数，记作 $\mathscr{A}_V$。我们将 $\mathscr{A}_V$ 称为第 5.3 节 V [8, 的 Serre C^*-代数1]。

设 $(K_0(\mathscr{A}_V)\ K_0^+(\mathscr{A}_V)\ u)$ 为 C^*-代数 $\mathscr{A}_V$ [Black- adar 1986] [2,（第 6.3 节和第 7.3] 节）的维数群。这样的群唯一确定 Serre C^*-代数 $\mathscr{A}_V$（相差一个同构）。此外，如果 V 定义在某个数域上，那么它的维数群与维数群 $(O_K, O_K^+, [u])$ 序同构，其中 O_K是数域 K的整数环，O_K^+ 是实嵌入 $O_K \hookrightarrow$R 对应的正整数加法半群，而 $[u]$ 是 O_K [8, pp. 194-195] 中的一个单位。

2.2. 双有理几何（[5], [9]）。设 V 是域k上的一个射影簇。如果映射 $\phi\colon V \dashrightarrow V'$ 由有理函数表示，则它是有理映射。有理映射只有在支配的情况下才能复合，也就是说，ϕ 的像在 V'中 Zariski 稠密。若映射 ϕ 的逆映射 ϕ^{-1} 是有理映射，则称 ϕ 为双有理映射。

双有理映射 $\epsilon\colon V \dashrightarrow V'$ 称为爆破，如果它除了点 $p \in V$和例外因子 $E \subset V'$之外处处有定义，使得 $\epsilon^{-1}(V) = p$。每个双有理映射 $\phi\colon V \dashrightarrow V'$ 都是有限个爆破的复合，即 $\phi = \epsilon_1 \circ \cdots \circ \epsilon_k$。

如果任意双有理映射 $V \dashrightarrow V'$ 都是同构，则称簇 V为极小模型。如果 V 是曲线或曲面，则已知每个双有理类都有一个光滑极小模型。具体而言，如果 S 是曲面，那么除非 S 是纤维曲面，否则极小模型存在且唯一。根据Castelnuovo定理，光滑射影曲面 S 是极小模型，当且仅当 S 不包含自交指标为 -1的有理曲线 C。如果 C 是曲线，那么每个双有理映射都是同构，即 C 是极小模型。

目前仍不清楚是否存在具有极小模型的簇；已有结果表明，在3维及更高维中，极小模型不一定光滑。某些类型的簇总是存在极小模型。

双有理映射 $V \dashrightarrow V'$ 在相应的 Serre C^*-代数之间诱导出一个态射 $\mathscr{A}_V \dashrightarrow \mathscr{A}_{V'}$，参见第2.1节。以下结果描述了数域上的簇 V 之间的这类态射。

定理 2.1. ([9, 定理 1.3]) 映射 $\mathscr{A}_V \dashrightarrow \mathscr{A}_{V'}$ 导出了相应维数群 $(O_k, O_k^+, [u]) \dashrightarrow (O_{\mathscr{H}(k)}\ O^+_{\mathscr{H}(k)}\ [u])$ 的一个扩张，其中$\mathscr{H}(k)$ 是 k 的希尔伯特类域，即域 k的最大阿贝尔非分歧扩张。

注记 2.2。定理2.1 已在 V为曲面 S 或曲线 C [9]的情形下得到证明。证明可推广到高维，但这一主题超出了本文的范围。下文中，我们仅在 2.1 定理适用于 V为曲线 C的情形下使用。

2.3. 函数域（[10]）。我们简要回顾有限域 F_q 上的一元有理函数域。

2.3.1. 域 $\mathrm{F}_q(T)$。设 p 为素数，$q = p^n$ 为正整数n。用 F_q 表示含有 q 个元素的域，即域 $\mathrm{Z}/p^n\mathrm{Z}$。设 $\mathrm{F}_q[T]$ 为 F_q 上的多项式环，设 $\mathrm{F}_q(T)$ 为 $\mathrm{F}_q[T]$的分式域。环 $\mathrm{F}_q[T]$ 与整数环 Z 有许多共同性质。二者都是主理想整环，都具有有限的单位群，并且每个剩余类

环模非零理想都是有限的。具体而言，如果多项式 $g \in \mathbf{F}_q[T]$ 的次数为 $\deg g$，那么

$$|\mathbf{F}_q[T]/g\mathbf{F}_q[T]| = q^{\deg g}. \tag{2.4}$$

2.3.2. 几何扩张。考虑超越次数为一的域 $\mathbf{F}_q(T)$ 的扩张。任何此类扩张都具有如下形式：$\mathbf{F}_q(T)(y)$，其中 y 满足一个多项式方程：

$$f(x,y) = 0, \tag{2.5}$$

其中 $x = T$。换言之，$\mathbf{F}_q(T)(y)$ 是代数曲线 (2.5) 上有理函数的域。扩张 $\mathbf{F}_q(T)(y)$ 称为几何扩张，因为它与常数域 $\mathbf{F}_q$ 的扩张无关。光滑代数曲线 (2.5) 记作 C，相应的几何扩张可写为 $\mathbf{F}_q(C)$。域 $\mathbf{F}_q(T)$ 的所有几何扩张与由多项式 $f \in \mathbf{Z}[x,y]$ 给出的方程 (2.5) 所定义的代数曲线 C 之间存在一一对应。

2.3.3. 德林费尔德模。函数域的显式类域论比数域的情形简单得多。最大阿贝尔非分歧扩张（即希尔伯特类域）的生成元，是借助德林费尔德模这一概念构造的。粗略地说，这种模类似于指数函数，也是卡尔利茨模的推广。在数域一侧不存在类似的理论；阿贝尔扩张的显式生成元仅在有理数域（克罗内克-韦伯定理）和虚二次数域（复乘）中已知。下面我们将介绍一些关于德林费尔德模的细节。

设 k 为一个域。若多项式 $f \in k[x]$ 在环 $k[x,y]$中满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$，则称其为加性的。若 $char\ k = p$，则可直接验证，多项式 $\tau(x) = x^p$ 是加性的。此外，每个加性多项式都具有形式$a_0x + a_1x^p + \cdots + a_rx^{p^r}$。所有加性多项式的集合在加法和复合运算下封闭。相应的环同构于由以下交换关系给出的非交换多项式环 $k\langle\tau\rangle$:

$$\tau a = a^p\tau, \qquad \forall a \in k. \tag{2.6}$$

设 $A = \mathbf{F}_q[T]$ 和 $k = \mathbf{F}_q(T)$。德林费尔德模是指一个同态

$$\rho : A \to k\langle\tau\rangle, \tag{2.7}$$

使得对于所有 $a \in A$，ρ_a 的常数项为 a，并且至少存在一个$a \in A$使得 $\rho_a \notin k$。考虑挠模 $\Lambda_\rho[a] = \{\lambda \in k \mid \rho_a(\lambda) = 0\}$。以下结果描述了函数域显式类域论中最简单的情形。

定理 2.3. 对于每个非零的 $a \in A$，函数域 $k(\Lambda_\rho[a])$ 都是 k 的阿贝尔扩张，其伽罗瓦群同构于 $(A/(a))^*$ 的一个子群。

3. Proof

为清晰起见，我们概述主要思路。先考虑定理 $m = 2$ 的情形1.1，其余部分则用归纳法证明。首先取一条由方程 C给出的非奇异代数曲线 $f(x,\ y) = 0$，其中 $f \in \mathbf{Z}[x,y]$。该曲线由一条奇异曲线 $C_{sing} \overset{p}{\dashrightarrow} C$ 在点 C_{sing} 处爆破得到

在映射 $Spec\,\mathbf{Z}[x,y]/(f) \to Spec\,\mathbf{Z}$ 下对应于理想 $(p) \in Spec\,\mathbf{Z}$。由于 C 是由多项式 $f \in \mathbf{Z}[x,y]$ 给出的光滑曲线，它定义了函数域 $\mathbf{F}_p(T)$ 的一个几何扩张 $\mathbf{F}_p(C)$。事实上，这样的扩张具有函子性，即 C 的态射对应于域 $\mathbf{F}_p(C)$ 的同构。另一方面，曲线 C 的 Serre C^*-代数的 K理论给出了一个类数为一的数域 $\mathscr{H}(k)$，见第 2.1 节和第 2.2 节。这种对应也具有函子性。因此，我们得到一对与曲线 C （及其雅可比簇 $Jac\ C$）相关联的整体域 $\mathbf{F}_p(C)$ 和 $\mathscr{H}(k)$，如图 1 的交换图所示。由于 $Jac\,C$ 是阿贝尔簇，图 1 中的水平箭头由这两个域之间的同构实现。下面我们将证明分解为一系列引理，给出详细论证。

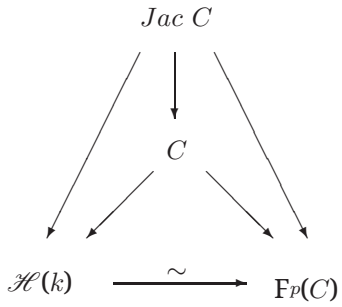

FIGURE 1.

引理 3.1. 曲线 C 的雅可比簇 $Jac\,C$ 的每个同源，都对应于域 $\mathscr{H}$（$\mathbf{F}_p$）的整数环的一次乘法，乘数为元素 $\alpha \in O_{\mathscr{H}(k)}$（分别为 $\alpha O_{\mathscr{H}(k)}$（$\beta O_{\mathbf{F}_p(C)}$））。（此外，此类同源的次数等于元素 α（分别为 β）的范数。）

证明. (i) 设 C 是定义函数域 $\mathbf{F}_p(C)$ 的代数曲线。我们不研究 C，而是研究它的雅可比簇 $Jac\,C$，即一个复环面

$$Jac\ C = \mathbf{C}^g/\Lambda, \tag{3.1}$$

其中 g 是 C 的亏格，Λ 是秩为 $2g$ 的格。由于 $Jac\,C$ 定义了（且由其定义）曲线 C，因此可得到图 1 中的交换图。

(ii) 记 f 为阿贝尔簇 $Jac\,C$的一个同源。回顾一下，映射 f定义了一个有限指标的子格 $\Lambda_f \subseteq \Lambda$，使得

$$f(Jac\ C) = \mathbf{C}^g/\Lambda_f, \tag{3.2}$$

其中，f 的次数等于格 Λ中 Λ_f 的指标。我们将分别考察同源 f 在域 $\mathscr{H}(k)$ 和 $\mathbf{F}_p(C)$ 上的作用。

(iii) 设 $O_{\mathscr{H}(k)}$ 为数域 $\mathscr{H}(k)$ 的整数环。记 f 为雅可比簇 $Jac\,C$ 的一个同源。令 $(O_{\mathscr{H}(k)}\ O^+_{\mathscr{H}(k)}\ [u])$ 为相应 Serre C^*-代数的维数群，记号见第2.1节。回想一下

（3.1）中的格 Λ 3.1）具有复乘，也就是说，（3.2）中的格可以写成如下形式：

$$\Lambda_f = \omega\Lambda, \tag{3.3}$$

其中 ω 是 CM 域中的一个复数。另一方面，已知函子 $Jac\ C \to \mathscr{H}(k)$ 将复乘变换为实乘，即簇（3.2）的维数群具有如下形式：

$$(\alpha O_{\mathscr{H}(k)}, \alpha O^{+}_{\mathscr{H}(k)}, [u]) \tag{3.4}$$

对于一个元素 $\alpha \in O_{\mathscr{H}(k)}$ [8, 第 1.4 节。1]。由公式（3.3）和（3.4）可知，每个同源 f 都定义了一个对应 $f \mapsto \alpha \in O_{\mathscr{H}(k)}$。

(iv) 令 $O_{\mathbf{F}_p(C)}$ 为函数域 $\mathrm{F}_p(C)$ 的整数环。用 f 表示雅可比簇 $Jac\ C$ 的一个同源。回顾映射 $Jac\ C \to \mathrm{F}_p(C)$ 是函子性的，因此必须保持相应格的包含关系：

$$\Lambda_f \subseteq \Lambda, \tag{3.5}$$

见（3.1）和（3.2）。特别地，包含关系（3.5）导出一个子环 $R_f \subseteq O_{\mathbf{F}_p(C)}$。容易看出，$R_f$ 是环 $O_{\mathbf{F}_p(C)}$ 的一个理想。事实上，Λ/Λ_f 是一个阿贝尔群，因此 Λ_f 是 $\Lambda \to \Lambda/\Lambda_f$ 的一个同态的核。于是子环 $R_f \subseteq O_{\mathbf{F}_p(C)}$ 是一个环同态的核。特别地，R_f 是环 $O_{\mathbf{F}_p(C)}$ 的一个理想。但假设环 $O_{\mathbf{F}_p(C)}$ 的类数为一，即 $O_{\mathbf{F}_p(C)}$ 的每个理想都是主理想。因此存在元素 $\beta \in O_{\mathbf{F}_p(C)}$，使得

$$R_f = \beta O_{\mathbf{F}_p(C)}. \tag{3.6}$$

换言之，公式（3.6）中的同源 f 产生了一个对应 $f \mapsto \beta \in O_{\mathbf{F}_p(C)}$。

(v) 最后，我们证明等距映射的次数 f 等于$\alpha \in O_{\mathscr{H}(k)}$的范数($\beta \in O_{\mathbf{F}_p(C)}$，分别为)事实上，$deg(f) = |\Lambda/\Lambda_f| = N(\alpha)$，其中 $N(\alpha)$ 是代数整数 $\alpha \in O_{\mathscr{H}(k)}$的范数。对于函数域，论证类似，其中范数 $N(\beta)$ 由公式（2.4）计算，即 $N(\beta) = p^{deg\ \beta}$。

引理 3.1得证。 □

引理 3.2。 $O_{\mathscr{H}(k)} \cong O_{\mathbf{F}_p(C)}$.

证明。（i）引理 3.1 表明，每个 $Jac\ C$ 的同源 f 都定义了元素 $\alpha \in O_{\mathscr{H}(k)}$ 和 $\beta \in O_{\mathbf{F}_p(C)}$。考虑映射：

$$O_{\mathscr{H}(k)} \to O_{\mathbf{F}_p(C)} \tag{3.7}$$

由公式 $\alpha \mapsto \beta$ 给出，其中 f 遍历簇 $Jac\ C$的所有可能同源。

(ii) 另一方面，阿贝尔簇 $Jac\ C$ 具有复乘，因此每个同源都由 $Jac\ C$的自同态环中的极大交换子环的一个元素表示。（后者同构于相应 CM 域的整数环中的一个序。）因此，映射（3.7）是一个环同构。

引理 3.2得证。 □

推论 3.3. $\mathscr{H}(k) \cong \mathrm{F}_p(C)$.

证明。 证明可由将环 $O_{\mathscr{H}(k)}$ ($O_{\mathbf{F}_p(C)}$（或）嵌入其分式域 $\mathscr{H}(k)$（$\mathbf{F}p(C)$，或）以及引理 3.2 得出。 □

引理 3.4. $\mathscr{H}^{m-1}(k) \cong \mathrm{F}p^{m-1}(C)$.

证明。 (i) 回顾一下，若曲线 C_{sing} 有一个重数为 $m \geq 2$的奇点，那么其奇点消解 $C_{sing} \overset{p}{\dashrightarrow} C$ 由以下对象的复合构成： $m-1$ 次爆破。根据定理 2.1 并采用记号 $\mathscr{H}^{i+1}(k) := \mathscr{H}(\mathscr{H}^i(k))$，可得希尔伯特类域塔：

$$\mathscr{H}(k) \subset \mathscr{H}^2(k) \subset \cdots \subset \mathscr{H}^{m-1}(k) \cong \mathscr{H}^m(k), \tag{3.8}$$

其中，域 $\mathscr{H}^{m-1}(k)$ 是塔中第一个类数为一的域。

(ii) 另一方面，由 (3.8) 和推论3.3 可得如下函数域塔：

$$\mathbf{F}_p(C) \subset \mathbf{F}_{p^2}(C) \subset \cdots \subset \mathbf{F}_{p^{m-1}}(C) \cong \mathbf{F}_{p^{m-1}}(C). \tag{3.9}$$

(iii) 注意，塔 (3.9) 中函数域的几何扩张并不存在，因为爆破序列 $\{C_i \mid 1 \leq i \leq m-2\}$ 中的中间曲线 $C_{sing} := C_1 \overset{p}{\dashrightarrow} \ldots C_{m-2} \overset{p}{\dashrightarrow} C$ 是奇异的。因此，它们不能用于定义域 $F_p(T)$ 的几何扩张。

比较（3.8）和（3.9），可得同构 $\mathscr{H}^{m-1}(k) \cong \mathbf{F}p^{m-1}(C)$。引理 3.4 得证。 □

定理 1.1 由引理 3.4得出。

4. Complex multiplication revisited

设 $k =$Q($\sqrt{-d}$) 是一个虚二次数域。回顾一下，希尔伯特和韦伯发展的复乘理论如下构造域 $\mathscr{H}(k)$ 的生成元。

记 $\mathscr{E}_\tau = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau)$ 为复模为 $\tau = \sqrt{-d}$ 的椭圆曲线。注意，这类曲线对应于公式（ $g = 1$ 3.1）中的情形，而格$\Lambda = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$ 具有环 O_k 的复乘，其中该环是域 k的代数整数环。考虑由收敛幂级数给出的 j-不变量： $\mathscr{E}_\tau$

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \ldots, \qquad \text{where} \quad q = e^{2\pi i\tau}. \tag{4.1}$$

粗略地说，复乘的主定理指出：

$$\mathscr{H}(k) = k\left(j(\sqrt{-d})\right). \tag{4.2}$$

换言之，超越函数（4.1）在点 $\tau = \sqrt{-d}$ 处的值是一个生成 k的希尔伯特类域的代数数。

另一方面，德林费尔德模表明， $\mathscr{H}(k)$ 的生成元不需要像（4.1）那样复杂的公式，普通的指数就足够了。本节中，我们利用德林费尔德模的挠子模和定理1.1构造这样的生成元。相应的指数函数最初见于 [7]。

回想一下，德林费尔德模给出了函数域的阿贝尔扩张的显式生成元（第2.3.3 节）。这类模推广了构造分圆函数域时所用的 Carlitz 模，并可视为指数函数的类比 $E(x) = e^x$。具体而言，挠模$\Lambda_\rho[a] \in \mathbf{F}_q(C)$ 是函数域$\mathbf{F}_q(C)$ 的希尔伯特类域的~~一个生~~成元，其中 $a \in \mathbf{F}_q(C)$，且 ρ 是由公式（2.7）给出的同态，参见定理2.3。

我们通过考察如下形式的一族指数函数，来寻找 $\Lambda_\rho[a]$ 在定理$\mathbf{F}_q(C) \cong \mathscr{H}(k)$ 中的同构1.1 之下的像：

$$E_\mu(x) = \mu e^{2\pi x}, \tag{4.3}$$

其中， μ 是一个取决于基域k算术性质的缩放参数。以下结果解决了虚二次域 $k = \mathrm{Q}(\sqrt{-d})$ 的情形。

定理 4.1。 ([7]) 挠模 $\Lambda_\rho[a]$ 的像由指数函数给出（4.3），该函数在点 $x = \sqrt{-d}$ 处取值，其中 $\mu = \log \varepsilon$，且 ε 是实二次数域 $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$的基本单位。换言之，

$$\mathscr{H}(k) = k\left(e^{2\pi i\sqrt{d}+\log\log\varepsilon}\right) \tag{4.4}$$

除有限多个虚二次数域 $k =\mathrm{Q}(\sqrt{-d})$ 的平方无因子判别式 d 值外，

注 4.2。公式（4.4）的证明运用了 Sklyanin 代数（[Stafford 与 van den Bergh 2001] [11, 例 8。3]）以及相应的非交换环面（[8, 第 1 节。1]）。详情请参见 [7] 。

其他数域中挠模 $\Lambda_\rho[a]$ 的像可以如下描述。

猜想 4.3。设 θ 是一个代数数，其最小多项式为$p(x) = x^n - a_1x^{n-1} + \cdots - a_1x + a_0$，其中整数 a_i均为非负数。记 ε为多项式 $q(x) = x^n - a_1x^{n-1} - \cdots - a_1x - a_0$的分裂域中的一个单位。若 $k \cong\mathrm{Q}(\theta)$ 是一个数域，则：

$$\mathscr{H}(k) = k\left(e^{2\pi\theta+\log\log\varepsilon}\right). \tag{4.5}$$

注记 4.4. 请读者参阅[8, 第 187–188]页，了解猜想4.3的动机。

例4.5。 设 $p(x) = x^2 + d$，其中 $d > 0$ 是一个无平方因子整数。于是得到$\theta = i\sqrt{d}$ 且多项式 $q(x) = x^2 - d$ 具有实二次分裂域$\mathbf{Q}(\sqrt{d})$。容易看出，在这种情况下，(4.5) 与公式 (4.4) 一致。

References

1. E. Artin 和 G. Whaples, *Axiomatic characterization of fields by the product formula for valuations* **51** 1945 469 492 , 《美国数学会通报》（ ），-。2. B. Blackadar, *K-Theory for Operator Algebras*, MSRI 出版物，Springer, 1986。3. R. Dedekind 和 H. Weber, *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen*, 《纯粹与应用数学杂志》92（1882），181-290。4. G. van der Geer、B. Moonen 和 R. Schoof（编），*Number Fields and Function Fields – Two Parallel Worlds*，数学进展 239，Birkhauser，。5. A. Grassi, *Birational geometry old and new*, 《美国数学会通报》46（2009），99-123。6. J. Koll´ar, *Lectures on Resolution of Singularities*, 数学年刊研究丛书 166，普林斯顿，2007。7. I. V. Nikolaev *On algebraic values of function* $\exp(2\pi i x + \log\log y)$, 《Ramanujan J.》47（2018），417–425。8. I. V. Nikolaev, *Noncommutative Geometry*, 第二版，De Gruyter数学研究丛书 66，柏林，2022 年。 9 *Birational geometry of quaternions* 2212 06555 。I. V. Nikolaev, , arXiv: 。。M. Rosen, *Number Theory in Function Flelds*, GTM 210，Springer, 2002。11. J. T. Stafford 和 M. van den Bergh, *Noncommutative curves and noncommutative surfaces*, 《美国数学会通报》38（2001），171-216。

[1] Department of Mathematics and Computer Science, St. John's University, 8000 Utopia Parkway, New York, NY 11439, United States.
Email address: igor.v.nikolaev@gmail.com