arXiv:2302.12658v1 [math.AG] 24 Feb 2023

伪有效余切丛的直接像

JUNYAN CAO 与 ANDREAS HÖRING

摘要。设 A 为一条椭圆曲线，且 V_A 为 A上的 Serre 向量丛。Demailly-Peternell-Schneider 的一个著名例子表明， V_A 的 tautological 类包含唯一的闭正流。在本综述中，我们首先将这一陈述推广到任意紧 Kähler 流形。随后，我们将其应用于阿贝尔纤维化 $X \to Y$，其中总空间 X 具有伪有效余切丛，并提出一些关于这些丛的非消失性质的问题。

1. 引言

1.A. **Demailly-Peternell-Schneider 的一个例子**。Jean-Pierre Demailly 引入的线丛上的奇异度量概念 [Dem92b, Dem92a],, 对于获得线丛正性的代数概念的解析类比不可或缺，如下述著名例子所示:

1.1. 例。 [DPS94，例 1。7] 设 A 是一条椭圆曲线，并令

$$0 \to \mathcal{O}_A \to V_A \to \Omega_A \simeq \mathcal{O}_A \to 0$$

是一个非分裂扩张（即 V_A 是 Serre 向量丛）。令 $\zeta_A := c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_A)}(1))$ 为射影化丛 $\mathbb{P}(V_A)$ 上的典范类。则 ζ_A 是数值有效的，而上同调类 ζ_A 中唯一的正流是沿曲线 $\mathbb{P}(\Omega_A) \subset \mathbb{P}(V_A)$ 的积分流。特别地，数值有效线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_A)}(\zeta_A)$ 不存在具有半正曲率的光滑度量。

扩张为非分裂这一假设等价于假设 $H^0(A, V_A) \simeq \mathbb{C}$。这种代数条件竟会对类 ζ_A 中的超越元素产生如此强的限制，实在令人惊叹。我们的第一个结果是将这个例子自然推广到任意维数的紧凯勒流形:

1.2. 定理。设 X 为一个紧致凯勒流形，并设

$$0 \to \mathcal{O}_X \to V \to \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X \to 0, \tag{1}$$

日期：2023年2月27日。2010年数学主题分类。14J60、14D06、14E30、37F75。关键词和短语。余切丛、向量丛的正性、全纯叶状结构、直接像的正性、阿贝尔簇上的向量丛、非消失猜想、对称微分。

是一个向量丛的扩张，满足 $H^0(X,V)\simeq\mathbb{C}$。设 T 是典范类 $c_1\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)\big)$中的一个正闭流。那么， T 就是沿除子 $\mathbb{P}(\bigoplus_{i=1}^r\mathcal{O}_X)\subset\mathbb{P}(V)$的积分流。

虽然通过相当经典的论证可以看出 $\kappa(\mathbb{P}(V)^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)})=0$，但要证明该上同调类不包含其他正闭流，则需要借助近十年来才发展起来的直接像技术，参见命题 3.8。事实上，我们将证明一个稍微一般的结论，描述在考虑形如 (1) 的扩张时典范类中的流，参见定理 3.1。借助这一描述，我们可以得到关于余切丛“直接像”的一个正性结果：

1.3. 定理。设 $f\colon X\to Y$ 是从紧致 *Kähler* 流形 X 到光滑紧曲线 Y 的纤维化。假设一般纤维 F 是复环面，并记 $\mathcal{V}\subset\Omega_X$ 为 $f^*f_*\Omega_X\to\Omega_X$ 的饱和化。若 Ω_X 是伪有效向量丛，则 $\mathcal{V}$ 是伪有效的。

这一结论令人惊讶，原因有二：一般而言，正性性质由商层继承，而非由子层继承。此外，不难找到直接像 $f_*\Omega_X$ 是反丰向量丛的例子（参见例 2.14），因此 $\mathcal{V}$ 的正性只有在将像饱和化后才显现。定理 1.3 显然无法推广到 Kodaira 维数任意的纤维：若 F 是射影流形，且 Ω_F 是丰的，但 $q(F)=0$ （例如， $F\subset\mathbb{P}^N$ 是次数和余维都足够高的完全交，参见 BD18、Xie18]），则乘积$X:=\mathbb{P}^1\times F$ 具有伪有效余切丛，但 $\mathcal{V}=p_{\mathbb{P}^1}^*(p_{\mathbb{P}^1})_*\Omega_X\simeq p_{\mathbb{P}^1}^*\Omega_{\mathbb{P}^1}$ 不是伪有效的，其中 $p_{\mathbb{P}^1}:X\to\mathbb{P}^1$ 是自然投影。

由于定理 1.3 的证明实质上是通过限制到一般纤维上完成的，因此人们可能会认为，该证明无需改动即可推广到更高维的基 Y。然而，定理 3.1 的证明依赖于扩张 (1) 的形式；事实上，例 3.10 表明，对于任意如下形式的扩张，定理 3.1 的陈述已经不成立

$$0\to\mathcal{O}_X^{\oplus 2}\to V\to\mathcal{O}_X^{\oplus 2}\to 0.$$

若要在这一方向上取得进一步进展，似乎有必要给出一种确实利用该扩张源自纤维化的余切序列 f这一事实的论证。

1.B. **余切丛非消失猜想**。在 [HP20]中，第二位署名作者与 Peternell 提出了以下猜想：

1.4. 猜想。设 X 为一个射影流形[1]，，且 $1\le q\le$ 维数 X。那么Ω_X^q 是伪有效的，当且仅当存在某个正整数 m使得

$$H^0(X,S^m\Omega_X^q)\neq 0.$$

这个猜想推广了众所周知的关于典范类的非消失猜想，但即使对于一般型曲面而言，它也远非显然。研究这一问题的一般策略是将其分为两部分：具有（对数）一般型的簇

[1]在 [HP20] 中，该猜想针对具有 klt 奇点的簇提出。鉴于可能通过极小模型纲领进行约化步骤，在如此一般的情形下开展研究确实至关重要。本综述仅讨论光滑空间，以保持论述简洁。

以及允许存在纤维化、且其纤维具有非正的 Kodaira 维数的簇。在这篇综述中，我们特别讨论一种几何上相当简单的情形，但它引出了关于向量丛的正性的一些有趣问题：

1.5. 问题。 设 X 是一个射影流形，且其余切丛Ω_X伪有效。假设 K_X 半丰沛且数值维数为一，因此饭高纤维化是一个态射 $f\colon X \to C$，映到一条曲线 C上。

关于该纤维化，我们能说些什么？是否存在

$$H^0(X, S^k\Omega_X) \neq 0$$

某个 $k \in \mathbb{N}$使得?

如果曲线 C 的亏格至少为一，或者更一般地， $q(X) \neq 0$，这便解释了 Ω_X 的伪有效性，除此之外无从得知更多。因此我们可以假设 $q(X) = 0$，特别是 $C \simeq \mathbb{P}^1$。对一般纤维应用Beauville-Bogomolov分解（参见引理2.11），可见最困难的情形是一般纤维 F 为阿贝尔簇。在这种情形下，我们可以应用定理 1.3，得到

1.6. 推论。 设 X 是一个射影流形，且其余切丛Ω_X伪有效。假设 X 存在一个阿贝尔纤维化 $f : X \to C$，映到一条曲线 C上。若 $f_*\Omega_X$ 的秩为一，则存在一个有限 *étale* 覆盖 $X' \to X$，使得$q(X') \neq 0$。特别地，对某个 $k \in \mathbb{N}$，有 $H^0(X, S^k\Omega_X) \neq 0$。

对于椭圆纤维化， $f_*\Omega_X$ 具有秩一这一条件仅仅意味着f 不是等变的，因此这是对 [HP20，定理1.2a)]的推广。相反的情形，即 $\mathrm{rk} f_*\Omega_X = \dim X$，对应于 f 是等变的情况：在此情形下，我们有一个自然的 $f_*\Omega_X$ 分裂（参见引理 2.13），这反映了这样一个性质： X 在有限基变换之后与一个乘积双有理等价。我们预期，这种“乘积结构”能够通过显式计算证明不消失性；特别地，在这种情形下应当可以验证猜想 1.8。

这引出了中间情形，即 $1 < \mathrm{rk} f_*\Omega_X < \dim X$ （下文小节1.C中给出了一个例子）。由于 $\mathcal{V} \subsetneq \Omega_X$，我们可以考虑分布

$$\mathcal{F} := (\Omega_X/\mathcal{V})^* \subset T_X$$

事实上，这是阿贝尔纤维化 f的光滑轨迹上的一个线性叶状结构。

1.7. 问题。设 X 是一个射影流形，其余切丛Ω_X 是伪有效的。假设 X 具有一个阿贝尔纤维化 $f\colon X \to C$ 到曲线 C 上。如果 $1 < \mathrm{rk} f_*\Omega_X < \dim X$，叶层 $\mathcal{F} \subset T_X$ 是否代数可积，即一般叶是否为阿贝尔簇?

由定理 1.3 的证明可知，商 $\Omega_X/\mathcal{V}$ 包含于典范类 ζ_X 中每个正流的奇异轨迹内。这似乎表明，叶层的余切层 $\mathcal{F}^*$ 满足 Campana-P$\check{\text{a}}$un [CP19、Dru18]，判据的条件；然而，例如对于 $\mathrm{rk}\mathcal{F} = 1$，根据 Brunella 定理 [Bru06] （另见例3.11），这一条件从未成立。因此，若能有一种代数可积性判据，不仅考虑叶层 $\mathcal{F}$ 的正性，也考虑其嵌入 $\mathcal{F} \subset T_X$，将会非常有意义。

若要更充分地利用定理 1.3，我们可以尝试为伪有效子层 $\mathcal{V} \subset \Omega_X$ 推导出更强的性质。

1.8. 猜想。设 X 是一个射影流形，且其余切丛Ω_X 是伪有效的。假设 X 存在一个阿贝尔纤维化 $f\colon X \to C$，其映射到一条曲线 C 上。设 f 的一般纤维为 F。那么 $\mathcal{V} \subset \Omega_X$ 含有一个非零反身子层 $\mathcal{W}$，满足以下条件之一：

- $\mathcal{W}$ 是数值射影平坦的（参见定义 *4.2*）；
  对于某个 $\varepsilon > 0$， $\mathbb{Q}$-扭曲的 $\mathcal{W} \otimes \mathcal{O}_X(-\varepsilon F)$ 是伪有效的。

注意，我们并未声称 $\mathcal{W} \subset \Omega_X$ 是饱和的；事实上，为了避免出现某些负商丛，可能有必要不将其饱和。若猜想 1.8 成立，我们便可立即对问题 1.5 中的不消失性问题给出肯定答案，见命题 4.4 和 4.5。作为研究该猜想的第一步，我们在命题 4.6 中证明，在某些条件下，$\kappa(X, \mathcal{V}) \geq 0$，除非 $\mathcal{V}$ 余维一数值有效。尽管这让我们对该猜想更有信心，但即便 $\operatorname{rk}\mathcal{V} = 2$，也无法据此得出结论。

1.9. 问题。设 X 是一个射影流形，$\mathcal{V}$ 是 X 上秩为二的反身层。假设 $\mathcal{V}$ 几乎丰沛 [DPS01], [HP19, Defn.1.7]，且行列式 $\det \mathcal{V}$ 数值有效但不大。向量丛 $\mathcal{V}$ 是否数值有效?

如果 $\det \mathcal{V}$ 数值平凡，答案是肯定的 [HP19，定理 1.8]。如果 $\mathcal{V}$ 是椭圆曲面的余切丛，问题同样有肯定答案 [HP20，第 6 节。D], 但该论证严重依赖于 Kodaira 分类对奇异纤维的分类 [Kod63]。

1.C. **一个例子**。定理 1.3 证明了直接像 $f^* f_* \Omega_X$的饱和化具有伪有效性，而 $f_* \Omega_X$ 通常非常负。即使在几何上受到严格限制的情形下，这也使得理解余切丛的（子层的）正性变得困难：

1.10. 例。设 $f_S\colon S \to \mathbb{P}^1$ 是一个非等变的相对极小椭圆纤维化，设 $f_Z\colon Z \to \mathbb{P}^1$ 是一个等变的相对极小椭圆纤维化。假设 f_S 和 f_Z 在 $\mathbb{P}^1$中同一点上没有奇异纤维，因此纤维积 $X \coloneqq S \times_{\mathbb{P}^1} Z$ 是光滑的，并且具有两个椭圆纤维化 $g_S\colon X \to S$ 和 $g_Z\colon X \to Z$。于是我们得到两个正合列

$$0 \to g_Z^* \Omega_Z \to \Omega_X \to \Omega_{X/Z} \simeq g_S^* \Omega_{S/\mathbb{P}^1} \to 0$$

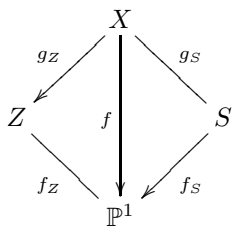
and

$$0 \to g_S^* \Omega_S \to \Omega_X \to \Omega_{X/S} \simeq g_Z^* \Omega_{Z/\mathbb{P}^1} \to 0.$$

记

$$f \coloneqq f_Z \circ g_Z = f_S \circ g_S : X \to \mathbb{P}^1$$

阿贝尔纤维化，因此我们有一个交换图



直接像 $f_*\Omega_X$ 的秩为二，其饱和化 $(f^*f_*\Omega_X)^{sat} \subset \Omega_X$ 与饱和化 $(g_Z^*\Omega_Z)^{sat} \subset \Omega_X$ 相同。
现在假设在这种情况下，余切丛 Ω_X 是伪有效的。由定理 1.3 可知

$$\mathcal{V} := (f^*f_*\Omega_X)^{sat}$$

是伪有效的。由于

$$\mathcal{V} = (g_Z^*\Omega_Z)^{sat},$$

我们很容易认为 Ω_Z 是伪有效的，但如果 Ω_S 是伪有效的，这很可能并不成立。即使 Ω_Z 是伪有效的，我们仍须证明等变椭圆纤维化的非消失猜想，这是一项出乎意料地困难的任务，参见 [HP20，推论 6.8]。

1.D. **展望——双有理模型**。在命题 4.6 中，我们朝着猜想 1.8 迈出了第一步，前提是纤维化 f 具有不可约纤维。作出这一假设有许多技术上的优势；此外，我们可以通过使用（对数）极小模型纲领实现这一设定：从一个射影流形 X_0 及如问题 1.5 中所述的饭高纤维化 $f_0 : X_0 \to C$ 出发，我们总能找到一个双有理模型

$$X_0 \dashrightarrow X_m$$

使得 X_m 是具有典范 $\mathbb{Q}$-阶乘奇点的正规射影簇，并带有饭高纤维化 $f_m : X_m \to C$，且所有纤维均不可约。事实上，若 $\sum_{i=1}^k a_iF_i$ 是可约纤维，我们可以找到一个 $1 > \epsilon > 0$，使得对 $(X_0, \epsilon F_1)$ 是 Kawamata 对数终端的。由于

$$(K_{X_0} + \epsilon F_1)|_{F_1} \equiv -\frac{1}{a_1}\sum_{i=2}^{k} a_iF_i$$

是一个非零反伪有效除子，对数典范除子 $K_{X_0} + \epsilon F_1$ 在 C上不是数值有效的。因此，根据 [Fuj11, Thm.1.3]，我们可以运行一个终止的极小模型纲领

$$\mu_1 : X_0 \dashrightarrow X_1$$

在 C 上，使得 $K_{X_1} + \epsilon(\mu_1)_*F_1$ 相对平凡。由于此极小模型纲领中的所有收缩都在 C 上进行，且 f_0 是饭高纤维化，因此该极小模型纲领中的所有收缩都是 K-平凡的。因此， X_1 具有典范奇点，且 $f_1 : X_1 \to C_1$ 是饭高纤维化。重复上述计算可知， μ_1 收缩除子F_1。现在我们进行归纳，因为 f 只有有限多个可约纤维，所以经过有限步后这一过程终止。
根据 [HP20，推论 4.3]，双有理模型 Ω_{X_m} 的余切层是伪有效的，由此得到问题 1.5 的一个弱形式：

1.11. 问题。设 X 是一个射影流形，其余切丛Ω_X 是伪有效的。假设 K_X 是数值维数为一的半丰沛线丛，因此饭高纤维化是一个态射 $f : X \to C$，映到一条曲线 C。

设 $f_m : X_m \to C$ 是饭高纤维化的一个双有理模型，使得所有纤维都不可约。是否有

$$H^0(X, S^{[k]}\Omega_X^{[1]}) \neq 0$$

对于某个 $k \in \mathbb{N}$?

虽然全纯对称形式的空间是射影流形的双有理不变量，但对于具有典范奇点的射影簇，这一结论并不成立。因此，问题 1.11 与问题 1.5 并不等价。尽管如此，我们预计，只要充分了解 $S^{[k]}\Omega_X^{[1]}$ 的整体截面，就能判定它们是否可以提升到奇点消解上（参见 [Sak79, §4,(D)] 和 [BTVA22, 命题 3.2]）。

致谢。 法国大学研究院和法国国家研究署项目 Karmapolis（ANR-21-CE40-0010）为本项目提供了良好的工作条件。感谢 C. Gachet 和 M. P˘aun 富有帮助的交流。

2. 记号与基本结果

我们在复数域上工作；关于复数和代数几何中的一般定义，请参阅 [Dem12、Har77]。关于双有理几何和极小模型纲领中的概念，我们采用 [Deb01] 和[KM98] 的术语；关于向量丛正性的代数概念，则采用[Laz04] 的术语（特别参见 [Laz04, 第 6 节2] ，其中介绍了 $\mathbb{Q}$-扭曲的概念）。我们将经常使用 [Bou04、Nak04]中所定义的除子的除子Zariski分解。
流形和簇始终假定为不可约且既约。

2.1. 定义。 设 X 为一个射影流形。那么，按照通常的约定，

$$q(X) = h^1(X, \mathcal{O}_X) = h^0(X, \Omega_X)$$

˜是 X的不规则度。此外，我们用 $\tilde{q}(X)$表示最大不规则度 $q(X)$，˜其中 $X \to X$ 是任意有限 *étale* 覆盖。

2.2. 定义。 [Dru18], [HP19, 定义 2。1]。设 X 是一个正规射影簇，且 $\mathcal{E}$ 是 X上的反身层。若存在 X 上的某个丰沛卡蒂埃除子 H，使得对所有 $c > 0$，均存在数 $j \in \mathbb{N}$ 和 $i \in \mathbb{N}$ 满足 $i > cj$，则称 $\mathcal{E}$ 是伪有效的，并且

$$H^0(X, S^{[i]}\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(jH)) \neq 0.$$

用典范类来刻画伪有效性会更方便:

2.3. 定义。 设 X 是一个正规簇，且 $\mathcal{E}$ 是 X上的反身层。

- 记

$$\nu : \mathbb{P}'(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}(\mathcal{E})$$

  $\mathbb{P}$中支配 X的唯一分支的正规化，其中 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 。
- *Set* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}'(\mathcal{E})}(1) := \nu^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1))$.
- 令 $X_0 \subset X$ 为 X 光滑且 $\mathcal{E}$ 局部自由的轨迹，并令

$$r : P \to \mathbb{P}'(\mathcal{E})$$

  存在一个从流形 P 出发的双有理态射，使得 $(p \circ \nu \circ r)^{-1}(X_0) \subset P$的补集是一个除子 D。
- 置 $\pi := p \circ \nu \circ r$ 以及 $\mathcal{O}_P(1) := r^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}'(\mathcal{E})}(1))$，其中 $p : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to X$ 为投影。
- 根据 [Nak04, III.5.10.3], 存在一个支撑于 D 上的有效除子 Λ，使得

$$\pi_*(\mathcal{O}_P(m) \otimes \mathcal{O}_P(m\Lambda)) \simeq S^{[m]}\mathcal{E} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

- 我们称 $\zeta := c_1(\mathcal{O}_P(1) \otimes \mathcal{O}_P(\Lambda)) \in N^1(P)$ 为 $\mathcal{E}$ 的典范类。

注记。 我们将经常把反身层限制到一个子簇 $W \subset X$，使得 $\mathcal{E}$ 在 W 的某个解析邻域内局部自由。在此邻域中，P 与 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 重合，因此典范类 ζ 的限制与 $\zeta_{\mathbb{P}(\mathcal{E}\otimes\mathcal{O}_W)}$ 重合。

虽然在构造典范类时我们作出了若干选择，但其伪有效性与这些选择无关：

2.4. 引理。 [Dru18, 引理 2。7] [HP19, 引理 2。3]. 设 X 是一个正规射影簇。设 $\mathcal{E}$ 是 X上的反身层，且 ζ 是 π 上的典范类： $P \to X$ （参见定义 *2.3*）。那么，ζ 是伪有效的，当且仅当 $\mathcal{E}$ 是伪有效的。

2.5. 注记。 在定义 2.3 的情形下，假设我们可以在 $\mathcal{O}_P(1)$上找到一个可能有奇点的度量 h，使得对于某个常数C_1，有 $i\Theta_h(\mathcal{O}_P(1)) + C_1[D] \geq 0$。那么，对某个 $m \in \mathbb{N}$，除子 $\Lambda' := C_1[D] + m\Lambda$ 是有效的。此外，只需将 m 替换为某个 $m' \gg m$，我们便可假设，对于每个素分量 $\Gamma \subset D$，$(C_1[D] + m\Lambda)|_\Gamma$ 都不是$\pi|_\Gamma$-伪有效的（事实上， Λ 具有这一性质，参见 Nak04, III, 引理 5.10.(3) 的证明]。因此， $\mathcal{O}_P(1)+\Lambda'$也是 $\mathcal{E}$的一个典范类。由于它是伪有效的，反身层 $\mathcal{E}$ 是伪有效的。

2.6. 定义。 设 X 为一个正规射影簇， $\mathcal{E}$ 为 X上的一个反身层。令 π： $P \to X$ 如定义 *2.3* 中所述，并令 ζ 为 P上的一个典范类。我们定义

$$\kappa(X, \mathcal{E}) = \kappa(P, \zeta).$$

由构造可知， $\kappa(P,\zeta) \geq 0$ 当且仅当对某个 $m \in \mathbb{N}$，有 $H^0(X, S^{[m]}(\mathcal{E})) \neq 0$。
注记。 若 π： $P \to X$ 表示投影，则

$$H^0(P, \mathcal{O}_P(m\zeta)) = H^0(X, S^{[m]}(\mathcal{E}))$$

对所有正数 m都成立，因此该定义与所作的选择无关。

2.7. 引理。 设 X 是一个维数为 n 的射影流形，它存在一个到曲线 C的纤维化f：$X \to C$。设 D 为 X 上的一个 $\mathbb{R}$-除子类，满足

$$D^2 \cdot A^{n-2} \geq 0, \qquad D|_F \equiv 0$$

其中 A 是 X 上的一个丰沛类， F 是 f的一般纤维。则对某个 $\lambda \in \mathbb{R}$，我们有 $D \equiv \lambda F$。

证明。 令 i： $S \subset X$ 为由 A的某个充分高倍数的一般元素切出的一个光滑曲面。由Lefschetz超平面定理可知，拉回映射

$$i^* : N^1(X) \to N^1(S)$$

是单射，因此只需证明等式在对 S 的限制上成立。由于该命题对 $D \equiv 0$ 显然成立，所以可以假设 $D|_S \neq 0$。类 $F|_S$数值有效、非零，且数值维数为一。由霍奇指数定理， $F|_S \cdot D|_S = 0$可得 $D|_S^2 \leq 0$。根据假设， $D^2 \cdot A^{n-2} \geq 0$，因此有 $D|_S^2 = 0$。于是由 [LP18，引理 2.2]，可得 $D|_S \equiv \lambda F|_S$，其中某个 $\lambda \in \mathbb{R}$。□

2.8. 引理。 设 X' 为一个正规射影簇，且设 $\mathcal{E}'$ 为 X' 上的伪有效反身层。设 μ : $X' \to X$ 为到正规射影簇 X 上的双有理态射，并令 $\mathcal{E}$: $=(\mu_*\mathcal{E}')^{[**]}$。则 $\mathcal{E}$ 是伪有效的。

证明。 设 A 是 X 上的丰沛卡蒂埃除子，则其拉回 μ^*A 是数值有效且大。由于 $\mathcal{E}'$ 是伪有效的，根据 [HLS22，引理 2.2][2] ，我们知道对于每个 $c > 0$，存在正整数 i、j，使得 $i > cj$，并且

$$H^0(X', S^{[i]}\mathcal{E}' \otimes \mathcal{O}_{X'}(j\mu^*A)) \neq 0.$$

由于例外轨迹的像在 X 中具有余维二，且 $S^{[i]}\mathcal{E}$ 是反身的，投影公式给出一个包含映射

$$H^0(X', S^{[i]}\mathcal{E}' \otimes \mathcal{O}_{X'}(j\mu^*A)) \hookrightarrow H^0(X, S^{[i]}\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(jA)).$$

因此 $\mathcal{E}$ 是伪有效的。 □

2.9. 定义。 设 X 为一个射影流形，且设 f : $X \dashrightarrow Z$ 为映至射影簇 Z 的亚纯映射。设 i : $X_0 \hookrightarrow X$ 为一个非空的 *Zariski*开集，使得 $f|_{X_0}$ 是一个态射。于是，我们将凝聚层 $i_*(f|_{X_0})^*\Omega_Z$ 在 Ω_X 中的饱和化记为 $(f^*\Omega_Z)^{sat}$。

2.10. 引理。 设 X 是一个射影流形，且 f : $X \dashrightarrow Z$ 是到射影簇 Z上的亚纯映射。假设存在一个双有理态射 μ : $X' \to X$ 以及 f 的一个双亚纯模型 f' : $X' \dashrightarrow Z'$ ，使得$((f')^*\Omega_{Z'})^{sat}$是伪有效的。那么$(f^*\Omega_Z)^{sat}$是伪有效的。

证明。 设 $X_0 \subset X$ 是 μ^{-1} 有定义的最大 Zariski开集，并将该集合与其在 X'中的像等同。存在一个扎里斯基开子集 $X_1 \subset X_0$ ，使得 f_{X_1}和 f'_{X_1}都是态射。因此，$((f')^*\Omega_{Z'})^{sat}$与$(f^*\Omega_Z)^{sat}$在$X_1$上重合。由于 $\Omega_X|_{X_0} \simeq \Omega$，且层的饱和化是唯一的，我们看到$((f')^*\Omega_{Z'})^{sat}$与$(f^*\Omega_Z)^{sat}$在 X_0上重合。由于 $X \setminus X_0$的余维至少为二，这说明$(\mu_*((f')^*\Omega_{Z'})^{sat})^{**} \simeq (f^*\Omega_Z)^{sat}$。现在由引理 2.8 得出结论。□

2.11. 引理。 设 X 是一个余切丛Ω_X伪有效的射影流形。假设 X 存在纤维化 f : $X \to C$ ，其一般纤维 F的典范丛数值平凡。那么，存在一个几乎全纯映射 g : $X \dashrightarrow Z$ ，映到射影流形 h : $Z \to C$ ，使得h 的一般纤维与某个阿贝尔簇的商双有理等价，且$(g^*\Omega_Z)^{sat}$ 伪有效。

证明。 记 π : $\mathbb{P}(\Omega_X) \to X$ 为射影化， ζ_X 为典范类。取一个群为 G 的étale伽罗瓦覆盖 $F' \to F$ ，给出 F的 Beauville-Bogomolov 分解，即 F'是乘积 $A \times Y$，其中 A是阿贝尔簇，且 $\pi_1(Y) = 1$。

第一种情况。 维数 $A = 0$。 在这种情况下，我们令 $Z = C$，因此我们的目标是证明 $(f^*\Omega_C)^{sat}$ 是伪有效的。由 [HP19 定理 1.6]，我们知道 Ω_F 不是伪有效的。现在考虑正合列

$$0 \to (f^*\Omega_C)^{sat} \to \Omega_X \to \mathcal{G} \to 0. \tag{3}$$

[2]该结论针对向量丛，但证明对反身层同样适用。

由于 $\mathcal{G}$ 是无挠的，纤维化 $\mathbb{P}(\mathcal{G}) \to X$ 不等维的轨迹余维至少为二。由于 $\mathbb{P}(\mathcal{G}) \subset \mathbb{P}(T_X)$，每个纤维的维数至多为维数 $X-1$。因此 $\mathbb{P}(\mathcal{G}) \subset \mathbb{P}(T_X)$ 有唯一的除子分支 E，并且

$$[E] = \zeta - \pi^*(f^*\Omega_C)^{sat}.$$

由于一般纤维

$$\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_F \simeq \Omega_F$$

不是伪有效的，典范类 ζ_X 在 E 上的限制不是伪有效的。由于 ζ_X 是伪有效的，因此存在某个 $\lambda > 0$，使得 $\zeta_X - \lambda E$ 在 E 上的限制是伪有效的。我们断言 $\lambda \geq 1$: 令 $\pi_E\colon E \to X$为诱导的纤维化，并对 F 非常一般纤维置 $E_F\colon = \pi_E^{-1}(F)$。于是（$\zeta_X - \lambda E$）$_{E_F}$ 是伪有效的。然而，(3) 在 F 上的限制就是

$$0 \to \mathcal{O}_F \to \Omega_X \otimes \mathcal{O}_F \to \Omega_F \to 0,$$

因此 $-E|_{E_F} = -E_F|_{E_F} = \zeta_{\mathbb{P}(\Omega_F)}$ 得到

$$(\zeta_X - \lambda E)_{E_F} = (1-\lambda)\zeta_{\mathbb{P}(\Omega_F)}.$$

由于 $\zeta_{\mathbb{P}(\Omega_F)}$ 不是伪有效的，我们有 $\lambda \geq 1$。回顾 $\zeta - [E] = \pi^*(f^*\Omega_C)^{sat}$，即可得到该结论。

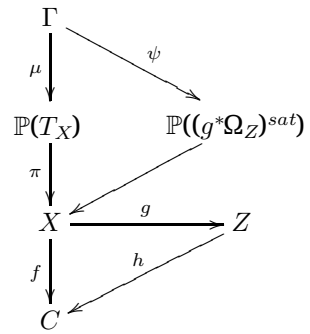
第二种情形。$\dim A > 0$。根据 [Bea83，引理，第 8] 页，群 G 在乘积 $A \times Y$ 上对角作用，因此 F 具有一个纤维化 $F \to A/G$，其映到正规射影簇 A/G上。由于 F 是一般纤维，该纤维化的纤维确定了 Chow(X/C) 的一个不可约分支 $Z \subset$，使得自然态射 $X \dashrightarrow Z$是几乎全纯的，并且限制在 F上时是全纯的。将 Z 替换为一个消奇异化后，不妨设 Z 光滑；此外，根据引理 2.10，只需证明对于该纤维化的某个双有理模型 g'，$((g')^*\Omega_Z)^{sat}$ 是伪有效的。由于具有伪有效余切丛这一性质对于射影流形而言是双有理不变量（ [HP20，命题 4.1] ），我们可以消除 g的不定点。为简化记号，我们用相同的字母表示这些双有理模型，并将自然映射记为 $g\colon X \to Z$ 和 $h\colon Z \to C$。根据构造，一般 g-纤维 G 是 Y的 étale 商，因此由 [HP19，定理 1.6] ，其余切丛不是伪有效的。

Let

$$0 \to (g^*\Omega_Z)^{sat} \to \Omega_X \to \mathcal{G} \to 0 \tag{4}$$

为由纤维化 g 定义的正合列。令 $\mu\colon \Gamma \to \mathbb{P}(\Omega_X)$ 为 $\mathbb{P}(\mathcal{G}) \subset \mathbb{P}(\Omega_X)$ 的嵌入消解与 $\mathbb{P}(\mathcal{G})$ 中唯一一个映射到 X 上的不可约分支的胀开的复合，并将例外轨迹记为 E。于是存在自然纤维化 $\psi\colon \Gamma \to \mathbb{P}((g^*\Omega_Z)^{sat})$，使得 $\mu^*\zeta_X - E \simeq \psi^*\zeta_Z$，其中 ζ_Z 是 $\mathbb{P}((g^*\Omega_Z)^{sat})$ 上的典范类。我们

用交换图概述这一构造:



如果我们证明 $\mu^*\zeta_X - E$ 是伪有效的，就完成了：由于ζ_X 在 $\mathbb{P}(\mathcal{G})$上的限制不是伪有效的，我们知道 $\mu^*\zeta_X$ 在 E 上的限制不是伪有效的。因此存在一个正数 $\lambda > 0$, 使得 $\mu^*\zeta_X - \lambda E$ 在 E 上的限制是伪有效的。与第一种情形一样，我们通过证明 $\lambda \geq 1$来证明该结论：设 $z \in Z$ 是一个非常一般点， G 是其上的 g-纤维，则 (4) 在 G 上的限制是

$$0 \to \mathcal{O}_G^{\oplus \dim Z} \to \Omega_X \otimes \mathcal{O}_G \to \Omega_G \to 0.$$

因此， $E \to \mathbb{P}(\mathcal{G}) \to X \to Z$ 在 z 上的纤维就是

$$E_z \simeq \mathbb{P}(N^*_{\mathbb{P}(\Omega_G)/\mathbb{P}(\Omega_X \otimes \mathcal{O}_G)} \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_G)}(-1)^{\oplus \dim Z}) \simeq \mathbb{P}(\Omega_G) \times \mathbb{P}^{\dim Z - 1}.$$

and

$$-E|_{E_z} = \mu^*\zeta^*_{\mathbb{P}(\Omega_G)} + p^*_{\mathbb{P}^{\dim Z-1}} H$$

其中 H 是超平面类。因此我们有

$$(\mu^*\zeta_X - \lambda E)|_{E_z} = (1-\lambda)\mu^*\zeta^*_{\mathbb{P}(\Omega_G)} + \lambda p^*_{\mathbb{P}^{\dim Z-1}} H.$$

由于 E_z 是一个乘积，我们最终得到 $\lambda \geq 1$。 □

2.12. 注记。 正如引理2.11的证明中对 Z 的构造所示，若接受 Z 仅为正规簇这一点，我们可以假设 $Z \to C$ 的一般纤维同构于阿贝尔簇的商。根据 [Shi21，定理 1.2] ，阿贝尔簇的商是阿贝尔簇的拟 étale 覆盖，并且是 $\mathbb{Q}$-Fano 簇。对于后者，其切丛一般充足 [Pet12，定理1.3],，因此其余切层不是伪有效的。于是重复同样的论证，我们得到一个分解 $Z \to C$ ，使得一般纤维与阿贝尔簇的拟 *étale* 商双有理。

2.13. 引理。 设 X 是一个维数为 n 的射影流形，满足 $q(X) = 0$，且 $f:\ X \to \mathbb{P}^1$ 是一个纤维化。令 $T_1 \subset f_*\Omega_X$ 为$\omega_{\mathbb{P}^1} \to f_*\Omega_X$的饱和化。则有

$$f_*\Omega_X \simeq T_1 \oplus T_2.$$

注意，虽然该引理对一般纤维没有任何假设也成立，但除非一般纤维 F 满足 $q(F) \neq 0$, 否则结论显然成立。事实上，$\mathrm{rk} f_*\Omega_X \leq 1 + q(F)$，因此若 $q(F) = 0$，则 $f_*\Omega_X \simeq T_1$。

证明。 首先回忆一下， $f_*\Omega_X$ 是一个向量丛，因为曲线上的无挠层是局部自由的。出于同样的原因，商层 $T_2 := \Omega_X/T_1$ 是局部自由的，因此我们有一个向量丛正合列

$$0 \to T_1 \to f_*\Omega_X \to T_2 \to 0,$$

我们的目标是证明该正合列分裂。由于 $h^0(\mathbb{P}^1, f_*\Omega_X) = q(X) = 0$ and$\omega_{\mathbb{P}^1} \to T_1$ 非零，因此有 $T_1 \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$，其中 $a = -1$ or $a = -2$。我们断言该映射

$$\iota : H^1(\mathbb{P}^1, T_1) \to H^1(\mathbb{P}^1, f_*\Omega_X)$$

是单射。暂且假设这一点成立，我们来完成证明：由于 $h^0(\mathbb{P}^1, f_*\Omega_X)$ =0，单射性意味着 $h^0(\mathbb{P}^1, T_2) = 0$。由于 T_2 是 $\mathbb{P}^1$上的向量丛，因此它是反丰的。由于 $a = -1$ or $a = -2$，我们很容易推出

$$H^1(\mathbb{P}^1, T_1 \otimes T_2^*) = 0.$$

因此该正合列分裂。

断言的证明。 若 $a = -1$ ，则有 $H^1(\mathbb{P}^1, T_1) = 0$ ，结论显然成立。因此我们可以假设 $a = -2$ ，从而 $T_1 \simeq \omega_{\mathbb{P}^1}$。在这种情况下

$$\iota : H^1(\mathbb{P}^1, T_1) = H^1(\mathbb{P}^1, \omega_{\mathbb{P}^1}) \to H^1(\mathbb{P}^1, f_*\Omega_X)$$

与自然映射 $H^1(\mathbb{P}^1, f_*\Omega_X) \to H^1(X, \Omega_X)$ 复合后，等同于拉回

$$f^* : H^1(\mathbb{P}^1, \omega_{\mathbb{P}^1}) \to H^1(X, \Omega_X).$$

由于 X 是 Kähler 的，拉回 f^* 是单射。这意味着 ι是单射。 □

2.14. 例。设 C 是一个亏格为 $g \geq 2$ 的超椭圆曲线，并记i_C 为超椭圆对合。设 E 是一个椭圆曲线，并记 i_E 为由二重覆盖 $E \to \mathbb{P}^1$确定的对合。记 X 为 $(C \times E)/\langle i_C \times i_E\rangle$的极小解消，则 X 具有一个相对极小等变椭圆纤维化

$$f : X \to \mathbb{P}^1 \simeq C/\langle i_C\rangle.$$

椭圆纤维化 f恰有 $2g+2$ 个奇异纤维，且它们全都属于 Kodaira 类型 I_0^*。特别地，我们有 $K_X \simeq f^*M$ ，其中 M 是 $\mathbb{P}^1$上的一个线丛。

考察对合在不动点附近的作用，我们看到

$$H^0(X, \Omega_X) = 0, \qquad H^0(X, K_X) \simeq \mathbb{C}^g,$$

因此我们有 $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 + g$。根据 [BHPVdV04, V, Prop.12.2] ，我们有

$$\deg f_*\omega_{X/\mathbb{P}^1} = g + 1,$$

特别地， $f_*\omega_X$ 是一个丰线丛。

直接像 $f_*\Omega_X$的表现则大不相同：由于 $h^0(X, f_*\Omega_X) = q(X) = 0$，秩二向量丛 $f_*\Omega_X$ 是反丰的。事实上，我们断言

$$f_*\Omega_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m)$$

其中 $m \geq g+1$。因此，引理 2.13 中的直接因子 T_2 可以任意负。

证明。 回忆一下，所有奇异纤维均为 I_0^* 型。因此我们有一个正合列

$$0 \to f^*\omega_{\mathbb{P}^1}(D) \to \Omega_X \to \mathcal{I}_Z \otimes \omega_{X/\mathbb{P}^1}(-D) \to 0$$

其中，对每个奇异纤维，D 是唯一的重数分量（梳形曲线的梳柄），而 Z 是梳柄与梳形曲线四个梳齿的交点。将其推前到 $\mathbb{P}^1$，我们得到一个序列

$$0 \to \omega_{\mathbb{P}^1} \to f_*\Omega_X \to f_*(\mathcal{I}_Z \otimes \omega_{X/\mathbb{P}^1}(-D))$$

以及态射

$$f_*\Omega_X \to f_*(\mathcal{I}_Z \otimes \omega_{X/\mathbb{P}^1}(-D))$$

由于 f 是等变的，因此它不为零。注意，$f_*(\mathcal{I}_Z \otimes \omega_{X/\mathbb{P}^1}(-D))$ 是 $\mathbb{P}^1$ 上的秩一无挠层，因此它同构于某个 $d \in \mathbb{Z}$ 的 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$。只需证明 $d \leq -(g+1)$ 即可：由于 $f_*(\mathcal{I}_Z \otimes \omega_{X/\mathbb{P}^1}(-D)) \subset f_*(\mathcal{I}_Z \otimes \omega_{X/\mathbb{P}^1})$，只需证明后者的陈述。由于 $\omega_X \simeq f^*M$，我们可以应用投影公式得到

$$f_*(\mathcal{I}_Z \otimes \omega_{X/\mathbb{P}^1}) \simeq f_*(\mathcal{I}_Z) \otimes f_*\omega_{X/\mathbb{P}^1}.$$

由于 Z 是有限集，因此有

$$f_*(\mathcal{I}_Z) \subset \mathcal{I}_{f(Z)} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}.$$

集合 $f(Z)$ 由 $2g+2$ 个点组成，而 $f_*\omega_{X/\mathbb{P}^1}$ 的次数为 $g+1$，这就证明了该陈述。□

2.15. 例。例 2.14 中出现的流形 X 的余切丛并非伪有效 [HP20，定理 6.7]，但我们可以通过将超椭圆曲线替换为一条以分歧双覆盖 $C \to Y$ 覆于椭圆曲线 Y 上的曲线，来修改这一构造。由此得到的构造给出一个等变椭圆纤维化 $X \to Y$，它有 $2g-2$ 个 I_0^* 型奇异纤维。应用上述论证，我们得到

$$f_*\Omega_X \simeq \Omega_Y \oplus L$$

其中 L 是次数至多为 $-g$ 的线丛。

3. Ω_F 的扩张与伪有效子层

本节考虑紧致凯勒流形 X 上的向量丛，它们由平凡线丛的扩张给出

$$0 \to \mathcal{O}_X \to V \to \mathcal{O}_X^{\oplus r} \to 0.$$

与该正合列对应的扩张类是一个元素

$$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_r) \in H^1(X, (\mathcal{O}_X^{\oplus r})^*) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X)^{\oplus r}.$$

考察余边界映射 $H^0(X, \mathcal{O}_X^{\oplus r}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$，我们看到，当且仅当 $h^0(X, V) = 1$ 时，$\eta_1, \ldots, \eta_r$ 在 $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ 中线性无关。

一般而言，对于某个 $0 \leq a \leq r$，我们有 $h^0(X, V) = 1+a$，因此 V 的截面诱导出另一个扩张

$$0 \to \mathcal{O}_X^{\oplus 1+a} \to V \to \mathcal{O}_X^{\oplus r-a} \to 0.$$

由于 V 是平凡向量丛的扩张，我们知道 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ 是半正线丛。因此，存在一个可能是奇异的度量 h，定义在 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ 上，使得 $\frac{i}{2\pi}\Theta_h(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \geq 0$。本节旨在完整描述度量 h。

3.1. 定理。 设 X 是一个紧致凯勒流形，且设 V 是一个扩张

$$0 \to \mathcal{O}_X \to V \to \mathcal{O}_X^{\oplus r} \to 0,$$

使得维数 $H^0(X,\ V) = 1+a$，其中某个 $a \in \mathbb{N}$ 满足此条件。包含映射 $\mathcal{O}_X^{\oplus 1+a} \to V$ 诱导出一个商态射

$$V^* \to (\mathcal{O}_X^{\oplus 1+a})^\star. \tag{5}$$

设 h 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ 上的一个可能带奇点的度量，使得 $i\Theta_h(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \geq 0$。令$\varphi :=$ 对数 h^*，这是一个函数

$$\varphi : V^* \to \mathbb{R}$$

定义在 V^* 上。

- 那么，存在定义在 $\mathbb{C}^{1+a}$ 上的拟次调和函数 ψ，使得 $\varphi = \psi \circ pr$，其中 pr 是自然映射 $V^* \to (\mathcal{O}_X^{\oplus 1+a})^* = X \times \mathbb{C}^{1+a} \to \mathbb{C}^{1+a}$。
- 若 $a = 0$，则 $\frac{i}{2\pi}\Theta_h(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$ 是沿除子$\mathbb{P}(\mathcal{O}_X^{\oplus r}) \subset \mathbb{P}(V)$的积分流。

- 若 $a \geq 1$，令 $\tau :\ \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{O}_X^{\oplus 1+a})$ 为由(5)诱导的有理映射。那么，存在定义在 $\mathbb{P}^a$ 上的半正定流 T，使得 $\frac{i}{2\pi}\Theta_h(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) = \tau^* pr^* T^3$，其中 pr 是投影 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_X^{\oplus 1+a}) = X \times \mathbb{P}^a \to \mathbb{P}^a$。

注意， $a = 0$ 这一情形对应于定理 1.2 的陈述。在证明定理 3.1 之前，我们需要做一些准备。

3.2. 注记。 为方便读者，我们回顾一下关于从商丛作投影的一些基本事实。设

$$0 \to K \to V \to Q \to 0 \tag{6}$$

是流形 X 上向量丛的一个扩张，因此有射影化丛的包含映射 $\mathbb{P}(Q) \subset \mathbb{P}(V)$。记 $\pi_K :\ \mathbb{P}(K) \to X$ 为 K 的射影化。

设 $\mu :\ \widehat{\mathbb{P}}(V) \to \mathbb{P}(V)$ 是沿着 $\mathbb{P}(Q)$ 对 $\mathbb{P}(V)$ 作的爆破，并记例外除子为 E。我们有一个纤维化

$$q : \widehat{\mathbb{P}}(V) \to \mathbb{P}(K)$$

使得 $\mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \simeq q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(K)}(1) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{P}}(V)}(E)$。此外，我们有 $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(W)$，其中 $W \to \mathbb{P}(K)$ 是由一个扩张给出的向量丛

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(K)}(1) \to W := q_*\mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \to \pi_K^* Q \to 0. \tag{7}$$

π_K 的每个纤维上的扩张都分裂，但其整体扩张类属于

$$H^1(\mathbb{P}(K), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(K)}(1) \otimes \pi_K^* Q^*) \simeq H^1(X, K \otimes Q^*).$$

事实上，(6) 和 (7) 的扩张类相同。

---

[3]By Remark 3.2 the projection τ is obtained as the composition of a blowup $\mu : \widehat{\mathbb{P}}(V) \to \mathbb{P}(V)$ and a smooth fibration $q : \widehat{\mathbb{P}}(V) \to \mathbb{P}(\mathcal{O}_X^{\oplus 1+a})$. In particular the current

$$\tau^* pr^* T := \mu_* q^* pr^* T$$

是良定义的。

3.3. 注记。 在定理 3.1 的情形下，向量丛 V 是数值平坦的。由 [Sim92、Den21]，可知， V 是一个局部系统。我们考虑~万有覆盖 $\sigma : X \to X$ ，并得到如下图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\sigma^* V) \simeq \widetilde{X} \times \mathbb{P}^r & \xrightarrow{\sigma_V} & \mathbb{P}(V) \\ \tilde{\pi}\downarrow & & \downarrow \pi \\ \widetilde{X} & \xrightarrow[\sigma]{} & X \end{array} \tag{8}$$

~其中同构 $\mathbb{P}(\sigma^* V) \simeq X \times \mathbb{P}^r$ 由局部系统 V的平坦联络诱导。固定一个点 $x \in X$ 和 V_x的一组基。平坦联络诱导出一个表示

$$\rho : \pi_1(X) \to GL(r+1, \mathbb{C}). \tag{9}$$

关于这个同构，我们有以下关于 $i\Theta_h(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$ 的除子部分的引理。

3.4. 引理。 设 X 是一个紧致凯勒流形， V 是 X上的一个秩为 r 的数值平坦向量丛。设 h 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ 上的一个可能奇异的度量$i\Theta_h(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \geq 0$。我们考虑 *Siu* 分解

$$i\Theta_h(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) = \sum a_i E_i + \Theta_0,$$

其中 E_i 是除子， $\Theta_0 \geq 0$ 是一个流，其正 *Lelong* 数点集的余维至少为2。

沿用图(8)中的记号，若 $\pi(E_i) = X$，则存在一个超曲面 $Z \subset \mathbb{P}^{r-1}$ ，使得

$$\sigma_V^{-1}(E_i) = \pi_2^{-1}(Z),$$

~其中， π_2 ： $X \times \mathbb{P}^r \to \mathbb{P}^r$ 是自然投影。特别地， $c_1(E_i) = \lambda_i c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$ 对某个常数 $\lambda_i \geq 0$成立。

证明。 设 m, m_1 为满足 $m \geq m_1$的任意两个正整数。我们有自然包含映射

$$\pi_*(K_{\mathbb{P}(V)/X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(m) \otimes \mathcal{I}(m_1 h)) \subset \pi_*(K_{\mathbb{P}(V)/X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(m)). \tag{10}$$

根据假设， $\pi_*(K_{\mathbb{P}(V)/X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(m))$是数值平坦的。
由于 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$是数值有效且相对丰沛的，对每个 $\epsilon > 0$，我们都可以在 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$上取一个光滑度量 h_ϵ，使得 $i\Theta_{h_\epsilon}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \geq -\epsilon\pi^*\omega_X$。现在我们在 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(m)$上赋予度量 $h^{\otimes(m-m_1)}{}_\epsilon \cdot h^{\otimes m_1}$。它诱导出 L^2 度量 H_ϵ，定义在 $\pi_*($
$K_{\mathbb{P}(V)/X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(m) \otimes \mathcal{I}(m_1 h))$上，并且根据 [PT18]，我们知道

$$i\Theta_{H_\epsilon}(\pi_*(K_{\mathbb{P}(V)/X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(m) \otimes \mathcal{I}(m_1 h))) \succeq -\epsilon\omega_X.$$

特别地， $\pi_*(K_{\mathbb{P}(V)/X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(m) \otimes \mathcal{I}(m_1 h))$ 是弱正曲率的，参见CCM21，定义 2.1]。结合包含映射 (10) 以及$c_1(\pi_*(K_{\mathbb{P}(V)/X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(m))) = 0$这一事实，我们知道

$$c_1(\pi_*(K_{\mathbb{P}(V)/X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(m) \otimes \mathcal{I}(m_1 h))) = 0.$$

根据 [Wu22，推论，第 3], 页，我们知道 $\pi_*(K_{\mathbb{P}(V)/X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(m) \otimes \mathcal{I}(m_1 h))$ 是数值平坦的，且其平坦联络与V的平坦联络相容。

现在对于 $m \gg m_1 \gg 1$，我们知道 $\pi_*(K_{\mathbb{P}(V)/X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(m) \otimes \mathcal{I}(m_1 h))$ 沿着 $\sum E_i$ 在纤维上逐点是一些 $(m-r+1)$ 次多项式，并且这些多项式均为零。数值平坦性意味着这些多项式的系数局部为常数。因此E_i 在平坦联络下是不变的。□

下面的引理是初等的，为方便读者，我们给出详细证明:

3.5. 引理。设 X 是一个紧致 *Kähler* 流形，且 V 是一个扩张

$$0 \to \mathcal{O}_X \to V \to \mathcal{O}_X^{\oplus r} \to 0. \tag{11}$$

我们假设对某个 $a \geq 0$，有维数 $H^0(X, V) = 1 + a$。那么，与 V^* 的平坦联络相对应的表示ρ： $\pi_1(X) \to GL(r+1, \mathbb{C})$ 可以取为如下形式

$$\rho(\Lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_1(\Lambda) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & 0 & \ddots & 0 & b_{r-a}(\Lambda) \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{对于 } \Lambda \in \pi_1(X)。$$

此外，向量 $\{(b_1(\Lambda) \cdots, \ b_{r-a}(\Lambda))\}_{\Lambda \in \pi_1(X)}$的 $\mathbb{C}$-线性组合生成整个空间 $\mathbb{C}^{r-a}$。

~证明。设 $\pi: X \to X$ 是万有覆盖。我们固定一个点 $x \in X$。由于 V^* 是 $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ 对 $\mathcal{O}_X$ 的扩张，根据 Den21，定理 A 的证明，我们可以找到 V_x^*的一个基 $\{e_i^*\}_{i=1}^{r+1}$，使得在基 $\{e_i^*\}_{i=1}^{r+1}$ 下，由 V^*的平坦联络所诱导的表示具有如下形式

$$\rho(\Lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & b_1(\Lambda) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & b_2(\Lambda) \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & b_{r-1}(\Lambda) \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & b_r(\Lambda) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{for } \Lambda \in \pi_1(X).$$

也就是说,

$$\rho(\Lambda)(e_i^*) = e_i^* \qquad \text{for every } i \leq r,$$

and

$$\rho(\Lambda)(e_{r+1}^*) = e_{r+1}^* + \sum_{i \leq r} b_i(\Lambda) e_i^*.$$

现在令 $\{e_i\}_{i=1}^{r+1}$为 $\{e_i^*\}_{i=1}^{r+1}$的对偶基。对于任意一组 a_1、.....、 $a_{r+1} \in \mathbb{C}$, $\sum_{i=1}^{r+1} a_i e_i$ 的平行移动诱导出 $H^0(\widetilde{X}, \pi^* V)$ 的一个平坦截面。通过

稍微滥用一下记号，我们仍将诱导出的平坦截面记为 $\sum_{i=1}^{r+1} a_i e_i$。现在，该平坦截面

$$\sum_{i=1}^{r+1} a_i e_i \in H^0(\widetilde{X}, \pi^* V)$$

当且仅当对于任意 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1} \in \mathbb{C}$ 以及任意 $\Lambda \in \pi_1(X)$，我们有.....时，它来自 V 的一个截面

$$\langle \sum_{i=1}^{r+1} a_i e_i, \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i \ e_i^* \rangle = \langle \sum_{i=1}^{r+1} a_i e_i, \rho(\Lambda)(\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i \ e_i^*) \rangle$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{r+1} a_i e_i, \sum_{i \le r} \lambda_i e_i^* + \lambda_{r+1} \cdot (\sum_{i \le r} b_i(\Lambda) e_i^* + e_{r+1}^*) \rangle.$$

也就是说

$$\sum_{i=1}^{r+1} a_i \lambda_i = \sum_{i=1}^{r+1} a_i \lambda_i + \lambda_{r+1} \cdot (\sum_{i \le r} b_i(\Lambda) a_i) \qquad \text{for every } \lambda_i \in \mathbb{C}$$

因此，当且仅当.....时，$\sum_{i=1}^{r+1} a_i e_i$ 来自 $H^0(X, V)$ 的一个截面

$$\sum_{i \le r} b_i(\Lambda) a_i = 0 \qquad \text{for any } \Lambda \in \pi_1(X). \tag{12}$$

注意，(12) 蕴含 e_{r+1} 来自 $H^0(X, V)$ 的一个截面。它对应于正合列 (11) 中的平凡子线丛。

根据假设，$\dim H^0(X, V) = 1 + a$。那么 e_{r+1} 是一个截面，我们可以找到另一个与之线性无关的平坦截面 a，并将其写为：对于 $1 \le j \le a$,

$$s_j := \sum_{1 \le i \le r} a_{j,i} e_i \tag{13}$$

来自 V。利用 (12)，我们有

$$\sum_{1 \le i \le r} a_{j,i} b_i(\Lambda) = 0 \qquad \text{for any } \Lambda \in \pi_1(X), 1 \le j \le a. \tag{14}$$

由于 $\{s_j\}$ 线性无关，我们可以找到一个可逆的 $r \times r$矩阵 $A = (a_{j,\ i})$，使得前 a 条直线由向量 $(a_{j,\ 1}, \ \ldots, \ a_{j,\ r})$ 给出，其中 $1 \le j \le a$。

现在我们为 V_x^*选择一个新的基 $\widetilde{e}_i^*$：

$$e_{r+1}^* = \widetilde{e}_{r+1}^* \qquad \text{and} \qquad e_i^* = \sum_{1 \le j \le r} a_{j,i} \widetilde{e}_j^* \text{ for } 1 \le i \le r.$$

对于这个新基，我们仍有

$$\rho(\Lambda) \widetilde{e}_i^* = \widetilde{e}_i^* \qquad \text{for every } i \le r.$$

此外，

$$\rho(\Lambda) \widetilde{e}_{r+1}^* = \rho(\Lambda)(e_{r+1}^*) = e_{r+1}^* + \sum_{i \le r} b_i(\Lambda) e_i^*$$

$$= \widetilde{e}_{r+1}^* + \sum_{1 \le j \le r} \big(\sum_{1 \le i \le r} b_i(\Lambda) a_{j,i} \big) \cdot \widetilde{e}_j^*.$$

由 (14) 可知,

$$\sum_{i\le r} b_i(\Lambda)a_{j,i}=0 \qquad \text{for every } 1\le j\le a.$$

因此

$$\rho(\Lambda)\widetilde{e}^*_{r+1}=\sum_{a+1\le j\le r} c_j(\Lambda)\widetilde{e}^*_j+\widetilde{e}^*_{r+1}.$$

调整 $\widetilde{e}^*_j$ 的顺序后，在新的基下，表示 $\pi_1(X)\to GL(r+1,\mathbb{C})$ 具有如下形式

$$\rho(\Lambda)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & c_1(\Lambda)\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & c_2(\Lambda)\\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & c_{r-a}(\Lambda)\\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \cdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{for } \Lambda\in\pi_1(X).$$

最后，如果 $\{(b_1(\Lambda)\cdots,b_{r-a}(\Lambda))\}_{\Lambda\in\pi_1(X)}$ 生成的空间是 $\mathbb{C}^{r-a}$ 中的真子空间，那么我们可以找到某个 $c_i\in\mathbb{C}$，使得对每个 $\Lambda\in\pi_1(X)$，都有 $\sum_{i\le r-a}c_ib_i(\Lambda)=0$。利用 (12)，我们知道 $\sum_{i\le r-a}c_ie_i\in H^0(X,V)$，且该截面与上面构造的截面线性无关。这与 $\dim H^0(X,V)=a+1$ 矛盾。□

下面的引理是定理 3.1 的一个特殊情形，证明定理 3.1 时并不需要它。不过，我们认为，看看表示如何直接证明主定理的代数对应结果颇具启发性。

3.6. 引理。 设 X 为一个紧致 *Kähler* 流形，且令 V 为一个扩张

$$0\to\mathcal{O}_X\to V\to\mathcal{O}_X^{\oplus r}\to 0. \tag{15}$$

则对于每个 $k\in\mathbb{N}$，都有 $H^0(X,\ S^kV)=S^kH^0(X,\ V)$。

证明。我们有 $\dim H^0(X,V)=1+a$ 对于某个 $0\le a\le r$成立。固定一个点 $x_0\in X$ 以及引理 3.5 中 $V^*_{x_0}$ 的基 $\{e^*_i\}_{i=1}^{r+1}$。则与局部系统 V^* 对应的基本群表示在此基下变为

$$\rho(\Lambda)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_1(\Lambda)\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \vdots\\ \vdots & \vdots & 1 & 0 & \ddots & 0 & b_{r-a}(\Lambda)\\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{对于 } \Lambda\in\pi_1(X)。$$

设 $s \in H^0(X, S^k V)$。那么， $s(x_0)$ 可视为 $V_{x_0}^* = \mathbb{C}^{r+1}$ 上的 k 次齐次多项式 P。利用 Cao15 的引理 4.1], , 我们知道 s 是平坦的。特别地，多项式 P 在 ρ-作用下不变，即 (16)

$P(w_1, \cdots, w_{r+1}) = P(w_1 + b_1(\Lambda) w_{r+1}, \cdots, w_{r-a} + b_{r-a}(\Lambda) w_{r+1}, w_{r-a+1}, \cdots, w_{r+1})$ 对任意 $\Lambda \in \pi_1(X)$ 成立，其中 $(w_1, \cdots, w_{r+1})$ 是关于基 $\{e_i^*\}_{i=1}^{r+1}$ 的系数。

要证明该引理，只需证明 $P(w)$ 仅取决于 w_{r-a+1}、 $\cdots$ 和 w_{r+1}。我们对 P 的次数进行归纳证明。

若 $k = 1$，由于 $\dim H^0(X, V) = a + 1$，我们知道， w_{r-a+1}、 $\cdots$、 w_{r+1} 的线性组合是满足（16）的唯一一次齐次多项式。对于归纳步骤，设 $P(w_1, w_2, \ldots, w_r, w_{r+1})$ 是满足（16）的 k 次齐次多项式。

由于 $\rho(\Lambda)$ 的作用不涉及变量 $w_1, \ldots, w_r$，根据偏导数的定义可知，次数为 $(k-1)$ 的齐次多项式

$$\frac{\partial P}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial P}{\partial w_r}$$

也满足 (16)。根据归纳，对每个 $i \leq r$，我们得到 $\frac{\partial P}{\partial w_i}(z)$ 仅依赖于 $w_{r-a+1}, \cdots, w_{r+1}$。
因此，我们有

$$P(w) = Q(w_{r-a+1}, \cdots, w_{r+1}) + \sum_{i \leq r-a} w_i P_i(w_{r-a+1}, \cdots, w_{r+1}),$$

其中 $P_i(w_{r-a+1}, \cdots, w_{r+1})$ 和 $Q(w_{r-a+1}, \cdots, w_{r+1})$ 是次数为 $k-1$、仅依赖于 $w_{r-a+1}, \cdots, w_{r+1}$ 的多项式。结合 (16)，我们得到

$$\sum_{1 \leq i \leq r-a} w_i P_i(w_{r-a+1}, \cdots, w_{r+1}) = \sum_{1 \leq i \leq r-a} (w_i + b_i(\Lambda) w_{r+1}) \cdot P_i(w_{r-a+1}, \cdots, w_{r+1}).$$

因此

$$\sum_{1 \leq i \leq r-a} b_i(\Lambda) \cdot P_i(w_{r-a+1}, \cdots, w_{r+1}) \equiv 0. \tag{17}$$

根据引理 3.5，向量

$$\{(b_1(\Lambda), \cdots, b_{r-a}(\Lambda))\}_{\Lambda \in \pi_1(X)} \subset \mathbb{C}^{r-a}$$

生成线性空间 $\mathbb{C}^{r-a}$。于是 (17) 推出 $P_i(w_{r-a+1}, \cdots, w_{r+1}) \equiv 0$。因此 $P(w) = Q(w_{r-a+1}, \cdots, w_{r+1})$，它仅依赖于 $w_{r-a+1}, \cdots, w_{r+1}$。 □

作为引理 3.4 和引理 3.6 的推论，我们得到

3.7. 推论。 设 X 是一个紧致 *Kähler* 流形，且设 V 是一个扩张

$$0 \to \mathcal{O}_X \to V \to \mathcal{O}_X^{\oplus r} \to 0$$

使得 $h^0(X, V) = 1$。那么，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $h^0(X, S^k V) = 1$。特别地，若 $D \subset \mathbb{P}(V)$ 是一个有效除子，且满足 $D \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)|$，则 $D = kE$，其中 E 是由 V 的典范截面诱导的除子。

现在我们可以证明定理 3.1 的关键步骤:

3.8. 命题。 设 X 是一个紧致凯勒流形，且 V 是一个扩张

$$0 \to \mathcal{O}_X \to V \to \mathcal{O}_X^{\oplus r} \to 0 \tag{18}$$

满足维数 $H^0(X, V) = 1$。设 h 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ 上的一个可能具有奇点的度量，使得$i\Theta_h(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \geq 0$。那么 $[\frac{i}{2\pi}\Theta_h(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))] = [E]$，其中 E 是由 $H^0(X, V)$的典范截面所诱导的除子。

证明。 我们考虑纤维化 $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ 以及流的 Siu 分解

$$\frac{i}{2\pi}\Theta_h(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) = \sum a_i[E_i] + \sum b_i[E_i'] + \Theta_0,$$

其中 $\pi(E_i) = X$ 且 $\pi(E_i') \subsetneq X$。由引理 3.4 可知

$$c_1([E_i]) = \lambda_i \cdot c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$$

对于某个常数 λ_i ，且 $[E_i]$ 由一个平坦截面诱导。由引理 3.7 可知 $[E_i] = [E]$。因此

$$\frac{i}{2\pi}\Theta_h(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) = a[E] + \sum b_i[E_i'] + \Theta_0,$$

若 $a = 1$，则$\frac{i}{2\pi}\Theta_h(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) = [E]$，引理得证。

若 $a < 1$，则 $\sum b_i[E_i'] + \Theta_0$不为零，并且我们可以在 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ 上找到一个度量 h_1，使得

$$\frac{i}{2\pi}\Theta_{h_1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) = \frac{1}{1-a} \cdot (\sum b_i[E_i'] + \Theta_0) \qquad \text{on } \mathbb{P}(V).$$

第一种情况。假设 $r = 1$。令 F 为 π的一般纤维。由于 $\dim F = 1$ 且 Θ_0 的非零 Lelong 数点集的余维至少为 2，因此 $i\Theta_{h_1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$ 在非常一般纤维 F 上的 Lelong 数为零。

现在我们在 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(3)$ 上赋予度量 $h_1^{\otimes 3}$，它诱导出一个 L^2-度量 h_{L^2} ，定义在

$$\pi_*(K_{\mathbb{P}(V)/X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(3)) = V \otimes \det V \simeq V.$$

这里我们用到一个关键点：$i\Theta_{h_1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$ 的 Lelong 数在一般纤维 F 上的限制为零。因此，我们在直接像中无需对乘子理想层进行扭曲。感谢 [PT18], ，我们知道

$$i\Theta_{h_{L^2}}(V \otimes \det V) \succeq 0$$

按照 Griffiths 的意义（奇异情形的版本，参见例如 [Pˇau16，定义 2.9]）。由于$c_1(V) = 0$ ，我们可以利用 [CP17，推论 2.9 (b)] 得到 V是酉平坦的，由此便与 V是一个非平凡扩张这一事实产生矛盾。

第二种情形。假设 $r > 1$。 我们对 r 进行归纳，情形 $r = 1$ 已在上文处理。

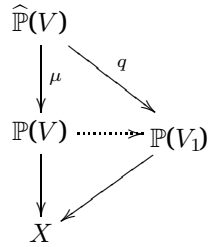
取一个非常一般的商线丛 $\mathcal{O}_X^{\oplus r} \to \mathcal{O}_X$，并令 $V_1 \subset V$ 为 $V \to \mathcal{O}_X^{\oplus r} \to \mathcal{O}_X$. 的核。于是我们得到正合列

$$0 \to \mathcal{O}_X \to V_1 \to \mathcal{O}_X^{\oplus(r-1)} \to 0 \tag{19}$$

and

$$0 \to V_1 \to V \to \mathcal{O}_X \to 0, \tag{20}$$

特别地， $1 \le h^0(X, V_1) \le h^0(X, V) \le 1$，因此 V_1 满足归纳假设。现在令 $\mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V_1)$ 为从 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_X) \subset \mathbb{P}(V)$ 到 $\mathbb{P}(V_1)$ 的投影。沿用备注 3.2 中的记号，我们有一个交换图



我们断言， q 的非常一般纤维上 $\mu^* i\Theta_{h_1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$ 的限制的 Lelong 数为零。

断言的证明。由于 E_i' 不满射到 X，只需证明 q 的非常一般纤维上 $\mu^*\Theta_0$ 的 Lelong 数为零。Θ_0 的奇异轨迹 Z 的不可约分支余维至少为二，特别是$Z \cap \mathbb{P}(\mathcal{O}_X^{\oplus r})$是除子 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_X^{\oplus r}) \subset \mathbb{P}(V)$的真子集。由于我们选取了一个非常一般的商线丛 $\mathcal{O}_X^{\oplus r} \to \mathcal{O}_X$，簇 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_X) \subset \mathbb{P}(V)$不包含于 Z中。现在选取 $x \in X$ 一个非常一般点，使得

$$F := \pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{P}^r$$

具有这样的性质： $Z \cap F$的所有不可约分支余维至少为二，且点 $y := \mathbb{P}(\mathcal{O}_X) \cap F$ 不在 Z中。经过点 y 的直线族构成自由族，因此根据 [Kol95, II, Prop.3.7] ，经过y 的一条非常一般直线与 Z不相交。由于 q 的纤维与经过 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_X)$的直线相对应，这就证明了该断言。

现在我们赋予 $\mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(3)$ 度量 $\mu^* h_1^{\otimes 3}$。于是， $h_1^{\otimes 3}$在 $q_*(K_{\widehat{\mathbb{P}}(V)/\mathbb{P}(V_1)} \otimes \mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(3))$ 上诱导出一个 L^2-度量h_{L^2}，并且有

$$i\Theta_{h_{L^2}}(q_*(K_{\widehat{\mathbb{P}}(V)/\mathbb{P}(V_1)} \otimes \mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(3))) \succeq 0 \qquad \text{on } \mathbb{P}(V_1).$$

这里我们使用了这样一个事实： $\mu^* i\Theta_{h_1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$ 在 q 的一般纤维上的限制的 Lelong 数为零。因此，我们不需要相对于度量 $\mu^* h_1^{\otimes 3}$ 进行乘子理想层扭曲。取行列式后，得到

$$i\Theta_{\det h_{L^2}}(\det q_*(K_{\widehat{\mathbb{P}}(V)/\mathbb{P}(V_1)} \otimes \mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(3))) \ge 0 \qquad \text{on } \mathbb{P}(V_1)$$

在流的意义下。

由（7）我们计算得到一个扩张

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(2) \to q_*(K_{\widehat{\mathbb{P}}(V)/\mathbb{P}(F)} \otimes \mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(3)) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(1) \to 0. \tag{21}$$

由于这个扩张是（7）的一个扭曲，且扩张（19）不是分裂的，根据备注 3.2，我们知道（21）不分裂。

由于

$$\det q_*(K_{\widehat{\mathbb{P}}(V)/\mathbb{P}(V_1)} \otimes \mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(3)) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(3)$$

并且 V_1 满足归纳假设，我们知道

$$\frac{i}{2\pi}\Theta_{\det h_{L^2}}(\det q_*(K_{\widehat{\mathbb{P}}(V)/\mathbb{P}(V_1)} \otimes \mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(3))) = 3[E_1],$$

其中 $E_1 \subset \mathbb{P}(V_1)$ 是由 V_1 的典范截面诱导的除子。

现在我们将 [CP17, Cor 2.9 (b)] 应用于 $i\Theta_{h_{L^2}}(q_*(K_{\widehat{\mathbb{P}}(V)/\mathbb{P}(V_1)} \otimes \mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(3)))$ over$\mathbb{P}(V_1) \setminus E_1$，可知

$$i\Theta_{h_{L^2}}(q_*(K_{\widehat{\mathbb{P}}(V)/\mathbb{P}(V_1)} \otimes \mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(3))) \equiv 0 \qquad \text{on } \mathbb{P}(V_1) \setminus E_1. \tag{22}$$

因此，扩张 (21) 在 $\mathbb{P}(V_1) \setminus E_1$ 上分裂，即存在一个单射全纯态射

$$\varphi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(b) \to q_*(K_{\widehat{\mathbb{P}}(V)/\mathbb{P}(V_1)} \otimes \mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(3)) \qquad \text{on } \mathbb{P}(V_1) \setminus E_1$$

且该态射也保持度量。注意，扩张 (21) 在 $\mathbb{P}(V_1) \to X$ 的一般纤维上的限制分裂，并且该分裂保持度量。因此，φ 延拓到 $\mathbb{P}(V_1)$ 的某个开子集上，该开子集的余维至少为 2。根据 Hartogs，φ 在总空间 $\mathbb{P}(V_1)$ 上定义良好。特别地，(21) 分裂，从而得到矛盾。□

命题 3.8 基本解决了定理 3.1 的 $a = 0$ 情形。对于 $a > 0$ 情形，我们还需要另一个引理。

3.9. 引理。 设 X 为一个紧致 *Kähler* 流形，并设 V 为一个扩张

$$0 \to \mathcal{O}_X^{\oplus r_1} \to V \to \mathcal{O}_X^{\oplus r_2} \to 0$$

使得 维数 $H^0(X,\ V) = r_1$。设 h 为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$上的一个可能具有奇点的度量$(1)$，使得 $i\Theta_h(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \geq 0$。令 $\varphi :=$对数 h^*，这是定义在 V^*上的函数:

$$\varphi : V^* \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

~设 $\sigma :\ X \to X$ 为万有覆盖，并考虑如(8)所示的图表

$$\begin{array}{ccc} \sigma^*V^* \simeq \widetilde{X} \times \mathbb{C}^{r_1+r_2} & \xrightarrow{\sigma_{V^*}} & V^* \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \widetilde{X} & \xrightarrow[\sigma]{} & X \end{array} \tag{23}$$

那么存在定义在 $\mathbb{C}^{r_1+r_2}$ 上的拟次调和函数 ψ，使得 $\sigma_{V^*}^*\varphi = \psi \circ pr$，其中 pr 是~自然映射 $\sigma^*V^* \simeq X \times \mathbb{C}^{r_1+r_2} \to \mathbb{C}^{r_1+r_2}$。

证明。 我们通过对 $r := r_1 + r_2$进行归纳来证明该定理。

若 $r_1 + r_2 = 2$，根据命题 3.8，我们知道 $\frac{i}{2\pi}\Theta_h(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) = [E]$，其中 $[E]$ 是对应于 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_X^{\oplus r_2}) \subset \mathbb{P}(V)$ 的除子。于是 $\sigma_{V^*}^*\varphi = \psi \circ pr$，其中 $\psi = \log|z_1|^2 + C$ 是定义在 $\mathbb{C}^2$ 上的拟次调和函数，且某个常数为 C。

现在我们通过归纳假设定理对 $r_1 + r_2 = r - 1$ 成立。若 $r_1 = 1$，则结合上述论证，命题 3.8 已证明该结论。此后，我们假设 $r_1 \geq 2$。

~设 $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ 为标准坐标，并设 $z \in X$ 为任意一点。由于 V^* 是一个扩张

$$0 \to (\mathcal{O}_X^{\oplus r_2})^* \to V^* \to (\mathcal{O}_X^{\oplus r_1})^* \to 0,$$

$\pi_1(X)$ 在 σ^*V^* 上的作用由下式给出

$$(z, w_1, w_2) \to (\Psi(\Lambda, z), w_1, w_2 + M(\Lambda) \cdot w_1) \qquad \text{for } \Lambda \in \pi_1(X), w_1 \in \mathbb{C}^{r_1}, w_2 \in \mathbb{C}^{r_2}, \tag{24}$$

~ ~其中 $\Psi(\Lambda, z)$ 是自然作用 $\Psi\colon \pi_1(X) \times X \to X$，而 $M(\Lambda)$ 是由局部系统诱导的一个 $r_2 \times r_1$ 矩阵。

~现在我们考虑 $\sigma^* V^* \simeq X \times \mathbb{C}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ 上的拟次调和函数 $\sigma_{V^*}^* \varphi$。取一个一般的非零截面 $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X^{\oplus r_1})$。它对应一个单射态射

$$\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^{\oplus r_1}. \tag{25}$$

将它与 $\mathcal{O}_X^{\oplus r_1} \to V$ 复合，我们得到一个滤过

$$0 \to \mathcal{O}_X \to V \to V_s := V/\mathcal{O}_X \to 0.$$

通过对偶，我们知道 $V_s^* \subset V^*$ 是一个子丛。现在，对于一个一般的截面 $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X^{\oplus r_1})$，其限制 $\varphi|_{V_s^*}$ 并非恒等于 $-\infty$。
对于某个 $b \geq 0$，我们有 $\dim H^0(X, V_s) = r_1 - 1 + b$，因此存在一个扩张

$$0 \to \mathcal{O}_X^{\oplus r_1 - 1 + b} \to V_s \to \mathcal{O}_X^{\oplus r_2 + 1 - b} \to 0$$

使得 $h^0(X, V_s) = r_1 - 1 + b$。将归纳假设应用于 V_s，我们~知道 $(\sigma_{V^*}^* \varphi)|_{\sigma^* V_s^*}$ 关于 $z \in X$ 是常数。由于子丛$\sigma^* V_s^*$覆盖了 $\sigma^* V^*$ 的一个扎里斯基开子集，我们知道 $\sigma_{V^*}^* \varphi$ 关于 z 是常数。□

现在我们可以证明定理 3.1。

定理 *3.1* 的证明。 固定一点 $x \in X$。根据引理 3.5，我们可以选取 V_x^* 的一个基，使得表示 $\rho\colon \pi_1(X) \to GL(r+1, \mathbb{C})$ 具有以下形式

$$\rho(\Lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & b_1(\Lambda) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & b_2(\Lambda) \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & b_{r-a}(\Lambda) \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{for } \Lambda \in \pi_1(X).$$

根据引理 3.9，我们知道 $\sigma_{V^*}^* \varphi = \psi \circ pr$，其中 ψ 是 $\mathbb{C}^{r+1}$ 上的某个函数。由于 $\psi \circ pr$ 是 V^* 上某个函数的拉回，我们得到

$$\psi(w_1, \cdots, w_{r+1}) = \psi(w_1 + b_1(\Lambda) w_{r+1}, \cdots, w_{r-a} + b_{r-a}(\Lambda) w_{r+1}, w_{r-a+1}, \cdots, w_{r+1}), \tag{26}$$

对任意 $\Lambda \in \pi_1(X)$ 成立。

固定一个 $\Lambda \in \pi_1(X)$ 和一点 $(w_1, \cdots, w_{r+1}) \in \mathbb{C}^{r+1}$，使得 $w_{r+1} \neq 0$ 且 $\psi(w_1, \cdots, w_{r+1})$ 是有限的。我们将 S 在 $\mathbb{C}$ 上的函数定义如下

$$S(\lambda) := \psi(w_1 + \lambda \cdot b_1(\Lambda) \cdots, \ w_{r-a} + \lambda \cdot b_{r-a}(\Lambda) \ w_{r-a+1}, \ \cdots, \ w_{r+1}), \text{ 其中 } \lambda \in \mathbb{C}. \tag{27}$$

由 (26) 可知， $S(\lambda) = S(\lambda + w_{r+1})$。于是， S 是 $\mathbb{C}$ 上的 1-周期拟次调和函数，在无穷远处具有对数增长。正如在[DPS94，例 1.7]的证明中所述， S 是一个常数函数。

现在我们固定一些数 w_{r-a+1}、 $\cdots$、 w_{r+1}，使得 $w_{r+1} \neq 0$。我们考虑定义在 $\mathbb{C}^{r-a}$ 上的以下函数：

$$(w_1, \cdots, w_{r-a}) \in \mathbb{C}^{r-a} \to \psi(w_1, \cdots, w_{r-a}, w_{r-a+1}, \cdots, w_{r+1}) \tag{28}$$

由于 (27) 中的 $S(\lambda)$ 是常数，并且

$$\{(b_1(\Lambda), \cdots, b_{r-a}(\Lambda)\}_{\Lambda \in \pi_1(X)}$$

根据引理 3.5，生成 $\mathbb{C}^{r-a}$ 作为一个 $\mathbb{C}$-复数向量空间，因此函数 (28) 为常数。换言之，ψ 相对于 w_1、$\cdots$、w_{r-a}为常数。因此，φ 来自 $\mathbb{C}^{1+a}$上的一个函数。□

在更一般的情形下证明定理 3.1 将非常有趣，例如当 V 是两个厄米平坦向量丛的扩张时。然而，下面的例子告诉我们，情况将相当复杂：

3.10. 例。设 A 为一条椭圆曲线，设 V_A 为 Serre 向量丛，参见例 1.1。令 $V := V_A^{\oplus 2}$，于是 V 是如下对象的扩张

$$0 \to \mathcal{O}_X^{\oplus 2} \to V \to \mathcal{O}_X^{\oplus 2} \to 0$$

使得 $h^0(X, V) = h^0(X, \mathcal{O}_X^{\oplus 2}) = 2$。根据 [Ati57，引理 17，1)] 我们有$h^0(X, V_A \otimes V_A) = 2$，因此

$$\mathbb{C}^4 \simeq H^0(X, S^2 V) \not\simeq S^2 H^0(X, V) \simeq \mathbb{C}^3.$$

因此，即使是代数引理 3.6，也不能推广到这种情形。更明确地说，该表示

$$\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$$

由如下形式的矩阵给出

$$\rho(\Lambda) = \begin{bmatrix} 1 & b_1(\Lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_1(\Lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{for } \Lambda \in \pi_1(X).$$

在这些坐标下，w_1^2、w_3^2、$w_1 w_3$ 是 $H^0(X, S^2 V)$的显然截面，但

$$w_1 w_4 - w_2 w_3$$

它也在 ρ-作用下保持不变，因此它同样定义了$H^0(X, S^2 V)$的一个平坦截面。特别地，$\ln |w_3 w_2 - w_1 w_4|$ 在 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$上定义了一个依赖于全部四个变量的奇异度量。

定理 1.3 的证明。自然态射 $f^* f_* \Omega_X \to \Omega_X$ 在一般纤维 A 上的限制，与求值映射相同

$$H^0(A, \Omega_X \otimes \mathcal{O}_A) \otimes \mathcal{O}_A \to \Omega_X \otimes \mathcal{O}_A.$$

由于 $\Omega_X \otimes \mathcal{O}_A$ 是数值平坦向量丛，求值映射的像与平凡丛 $H^0(A, \Omega_X \otimes \mathcal{O}_A) \otimes \mathcal{O}_A$ 同构（结合 [DPS94，引理 1.20] 与 [DPS94，命题 1.16]）。特别地，在一般纤维的一个邻域内，$f^* f_* \Omega_X \to \Omega_X$ 是 Ω_X 的饱和子丛，因此其饱和化 $\mathcal{V} \subset \Omega_X$ 在 A 上的限制是一个平凡向量丛。

包含映射 $\mathcal{V} \to \Omega_X$ 作为向量丛的态射，在一个余维至少为二的子集 $Z \subset X$ 的补集上是单射的。在那里，其对偶映射

$$i : \Omega_X^* \to \mathcal{V}^*$$

在 $X \setminus Z$ 上按向量丛的意义是满射的。

由于 Ω_X 是伪有效的，存在一个可能是奇异度量的 h，其定义在 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_X)}(1)$ 上，使得 $i\Theta_h(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_X)}(1)) \geq 0$。根据 Poincaré-Lelong公式，$\log h^*$：$\Omega_X^* \to \mathbb{R}$ 是一个拟次调和函数。我们希望证明，$\log h^*|_{\Omega_X^*|_{X\setminus Z}}$ 是某个定义在 $\mathcal{V}^*|_{X\setminus Z}$ 上的拟次调和函数 ψ 的拉回。如果这一点得到证明，则 e^{ψ} 通过对偶在 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{V}|_{X\setminus Z})}(1)$ 上诱导出一个具有半正曲率流的度量。于是，$\mathcal{V}|_{X\setminus Z}$ 是伪有效的。
设 A 是 f：$X \to Y$ 的一般纤维。那么

$$0 \to \mathcal{V} \otimes \mathcal{O}_A \to \Omega_X \otimes \mathcal{O}_A \to Q \otimes \mathcal{O}_A \to 0,$$

是环面 A 上的一个扩张，并且我们有 $\mathrm{rk}\mathcal{V} \otimes \mathcal{O}_A = h^0(A, \mathcal{V} \otimes \mathcal{O}_A) = h^0(A, \Omega_X \otimes \mathcal{O}_A)$。于是可以应用定理 3.1：也就是说，$\log h^*|_{\Omega_X^* \otimes \mathcal{O}_A}$ 来自 $\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{O}_A$ 上的一个拟次调和函数。由于这对一般纤维 A 也成立，因此我们可以找到一个 Zariski开集 $U \subset X$，使得 $\log h^*|_{\Omega_X^*|_U}$ 是 $\mathcal{V}^*|_U$ 上某个函数 ψ 的拉回，即

$$\log h^* = i^*\psi \qquad \text{on } \Omega_X^*|_U,$$

其中 i 是 $\Omega_X^* \to \mathcal{V}^*$ 的自然态射。特别地，ψ 在 $\mathcal{V}^*|_U$ 上是拟次调和函数。下面证明 ψ 可扩张为空间 $\mathcal{V}^*|_{X\setminus Z}$ 上的拟次调和函数：由于 i 是 $X \setminus Z$ 上向量丛意义下的满射态射，$\log h^*$ 的局部上有界性意味着 ψ 在 $(X \setminus Z)\setminus U$ 的一般点附近局部上有界。因此，ψ 可以扩张为 $\mathcal{V}^*|_{X\setminus Z}$ 上的拟次调和函数。它在 $X \setminus Z$ 上诱导出 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{V})}(1)$ 上一个可能奇异的度量 $h_{\mathcal{V}}$，使得

$$i\Theta_{h_{\mathcal{V}}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{V})}(1)) \geq 0 \qquad \text{over } X \setminus Z.$$

令 r：$P \to \mathbb{P}'(\mathcal{E})$ 和 ν：$\mathbb{P}'(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}(\mathcal{E})$ 为定义 2.3 中的解消。由于态射 $\mathcal{V} \to \Omega_X$ 是代数的，我们知道 $(r \circ \nu)^* h_{\mathcal{V}}$ 可以延拓为 $\mathcal{O}_P(1)$ 上一个可能带奇点的度量 h_1，使得

$$i\Theta_{h_1}(\mathcal{O}_P(1)) + C_1[D] \geq 0 \qquad \text{on } P$$

对某个常数 C_1，成立。于是，根据注2.5，$\mathcal{V}$ 是伪有效的。 □

虽然子层 $\mathcal{V} \subset \Omega_X$ 体现了 Ω_X 的伪有效性，但我们不应期待商 $\Omega_X/\mathcal{V}$ 是“负”的：

3.11. 例。令 f：$X \to Y$ 是曲线 Y 上的光滑非等变纤维化，且所有纤维都是阿贝尔簇。则相对余切层 $\Omega^{X/Y}$ 是数值有效的。若 $g(Y) \geq 1$（基变换后可假设如此），则余切层 Ω_X 是伪有效的。由于 f 不是等变的，我们有 $\mathcal{V} \subsetneq \Omega_X$。因此，商层 $\Omega_X/\mathcal{V}$ 的秩至少为一，且是 $\Omega^{X/Y}$ 的一个商。由于 $\Omega^{X/Y}$是数值有效的，其商 $\Omega_X/\mathcal{V}$ 也是数值有效的。

4. 两个不消失性结果

在本节最后，我们为猜想 1.8 提供一些支持证据。具体而言，我们证明，预期的二分性 1.8 实际上蕴含了关于曲线上的纤维化的非消失猜想。

4.A. **基本群**。

4.1. 引理。设 X 是一个射影流形，存在纤维化 $f\colon X \to C$ 到曲线 C 上，且其一般纤维 F 具有 $c_1(F) = 0$。那么 $\tilde{q}(X) > 0$，或者 X 的基本群是有限群。

证明。不失一般性，我们可以假设 $C \simeq \mathbb{P}^1$，否则$q(X) > 0$。将基 C[上的轨形结构记为（C, $\Delta = \sum(1 - \frac{1}{m_i})p_i$，参见 CC14，定义 3.5]。

如果 $K_C + \Delta$ 的次数为正，我们可以仿照 HP20，命题 5.2] 的证明，说明存在一个分歧覆盖 $C' \to C$，其在p_i 中恰好以阶数 m_i 分歧，并且在其他地方 étale。因此，纤维积 $X \times_C C'$的正规化 X' 到 X 有一个 étale 映射。由 Hurwitz 公式可得 $g(C') > 0$，于是得到$q(X') > 0$。

如果 $K_C+\Delta$ 的次数非正，则基本群 $\pi_1(C, \Delta)$ 几乎阿贝尔[（CC14，例 4.1]）。由于 $c_1(F) = 0$，Beauville–Bogomolov 分解定理蕴含基本群 $\pi_1(F)$ 也几乎阿贝尔。因此，由 CC14，定理 4.1] ，基本群 $\pi_1(X)$ 几乎阿贝尔。如果 $\pi_1(X)$ 不是有限群，则存在一个 étale 覆盖 $X' \to X$，使得 $q(X') \neq 0$。□

若射影流形上的向量丛 V存在光滑厄米度量 h，使其 Chern 曲率张量 $R =\nabla^2$ 可写为 $R = \alpha \cdot \mathrm{id}_V$，其中 α为某个 2-形式，则称该向量丛为射影厄米平坦。特别地，相应的射影化丛 $\mathbb{P}(V)$由一个表示 $\pi_1(X) \to PU(\mathrm{rk}V)$ 给出。在我们的情形中，从一个更灵活的概念入手更为方便：

4.2. 定义。 [LOY20, Defn.4.1]设 X 为射影流形。设 V 为 X上的向量丛，记 $\pi\colon \mathbb{P}(V) \to X$ 为其射影化，记 ζ_V 为 $\mathbb{P}(V)$上的典范类。若除子类 $\zeta_V - \frac{1}{\mathrm{rk}V}\pi^* c_1(V)$ 数值有效，则称 V 为数值射影平坦。

以下结果阐明了这两个概念之间的关系：

4.3. 定理。 [Nak04,IV,Thm.4.1] 设 X 为射影流形，且 V 为 X上的数值射影平坦向量丛。则存在一个子丛滤子

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_p = V$$

使得分次部分 V_i/V_{i-1} 是射影厄米平坦的，并且$\frac{1}{\mathrm{秩}V_i/V_{i-1}} c_1(V_i/V_{i-1})$ 与 $\frac{1}{\mathrm{秩}V} c_1(V)$数值等价。

4.4. 命题。设 X 是一个射影流形，具有 $\tilde{q}(X) = 0$，并且存在一个纤维化 $f\colon X \to C$ 映到一条曲线 C，其一般纤维 F 满足 $c_1(F) = 0$。设 $V \to X$ 是一个秩为 r 的射影平坦向量丛，满足 $V \otimes \mathcal{O}_F \simeq \mathcal{O}_F^{\oplus \mathrm{rk}V}$。如果 V是伪有效的，则有 $\kappa(X, V) \geq 0$。

更准确地说，存在一个有限 *étale* 覆盖 $\nu\colon X' \to X$，使得 $\nu^* V \simeq L^{\oplus r}$，其中 L 是一个线丛，满足 $\kappa(X, L) \geq 0$。

证明。由引理 4.1，基本群 $\pi_1(X)$是有限的。由于数值射影平坦性 [LOY20, 引理 4.3.(3)] 以及 Kodaira维数 [HP20，引理 3.15]在有限覆盖下保持不变，因此不失一般性，可假设X 是单连通的。

Let

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_p = V$$

为定理 4.3 中的滤过。由于 $\pi_1(X)$是平凡的，射影 Hermitian 平坦向量丛 V_i/V_{i-1} 是同构线丛 L_i的直和。由定理 4.3 ${}^{1\ \mathrm{rk}V_i/V_{i-1}}c_1(V_i/V_{i-1}) \simeq L_i$ 数值等价于${}^{1\ \mathrm{rk}V}c_1(V)$。由于 $\pi_1(X)$是平凡的，数值等价的线丛实际上同构，因此线丛 L_i 不依赖于 i。由于 $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$，我们推得由该滤过定义的扩张分裂，因此得到

$$V \simeq L^{\oplus r}$$

其中 L 是 X上的线丛。由于 V 是伪有效的且为直和，根据定义 2.2，不难推得线丛 L 是伪有效的。此外，由于 $V \otimes \mathcal{O}_F \simeq \mathcal{O}_F^{\oplus \mathrm{rk}V}$，我们还有 $L \otimes \mathcal{O}_F \simeq \mathcal{O}_F$。

现在我们将证明 $\kappa(X, L) \geq 0$: 令 $L = P + N$为 L的除子 Zariski 分解。由于 $c_1(L)|_F \equiv 0$，负部分 N包含于 f的纤维中，因此 $P|_F \equiv 0$。令 A 为 X上的任意丰沛类，则有 $P^2 \cdot A^{n-2} \geq 0$ （这是[Bou04，命题 2.4]的推论）。因此，我们可以应用引理 2.7，得到对于某个$\lambda \in \mathbb{R}$，有 $P \equiv \lambda F$。由于 X 是单连通的，实际上有线性等价关系 $P \sim_{\mathbb{R}} \lambda F$。由于类 P是伪有效的，我们有 $\lambda \geq 0$，从而 $\kappa(X, P) \geq 0$。由于$\kappa(X, L) = \kappa(X, P)$，故证明完毕。□

4.B. **扩张论证**。

4.5. 命题。 设 $f\colon\ X \to Y$是射影流形之间的纤维化。设$\mathcal{V}$是 X 上的伪有效反身层，满足一般纤维 F上 $\mathcal{V} \otimes \mathcal{O}_F \simeq \mathcal{O}_F^{\oplus \mathrm{rk}V}$，并假设 $\kappa(F) \geq 0$。设 $a \in \mathbb{N}^*$满足 $H^0(F, aK_F) \neq 0$。

则存在 Y 上的丰线丛 A_Y，使得限制映射的像

(29)

$$H^0(X, aK_{X/Y} \otimes S^{[m]}\mathcal{V} \otimes f^*A_Y) \to H^0(F, aK_F \otimes S^{[m]}\mathcal{V} \otimes A_Y) \simeq H^0(F, aK_F \otimes \mathcal{O}_F^{\oplus \binom{m+\mathrm{rk}V-1}{\mathrm{rk}V}})$$

对于一般纤维 F 以及每个 $m \in \mathbb{N}^*$都非零。

特别地，若 $c_1(K_F) = 0$，则对每个 $\varepsilon > 0$， $\mathbb{Q}$-扭曲 $V(\varepsilon \cdot c_1(f^*A_Y))$ 的*Kodaira*维数至少为$\mathrm{rk}\mathcal{V} - 1 +$ 维数Y。

证明。 设$p\colon\ \mathbb{P}(\mathcal{V}) \to X$为投影，设$\nu \circ r\colon\ P \to \mathbb{P}(\mathcal{V})$为定义 2.3 中的解消。置 $\pi = p \circ \nu \circ r\colon\ P \to X$。

设 ζ 是 P 上的典范类，并令 $g := f \circ \pi$。

注意，存在 $\mathcal{O}_P(\zeta)$ 上一个可能是奇异的度量 h_1，满足以下两个条件:

(i) h_1 在 g 的一般纤维上光滑

(ii) $i\Theta_{h_1}(\mathcal{O}_P(\zeta)) \geq -g^*\omega_Y$，其中 Y 上存在某个 Kähler 度量 ω_Y。

事实上，我们可以在 Y 上找到一个丰线丛 A_Y，使得 $f_*\mathcal{V} \otimes A_Y$ 全局生成。由于 $\mathcal{V} \otimes \mathcal{O}_F$ 是平凡的，自然态射

$$f^*(f_*\mathcal{V} \otimes A_Y) \to \mathcal{V} \otimes f^*A_Y$$

在一般纤维上是满射。因此， $\mathcal{V} \otimes f^*A_Y$在一般纤维 F附近全局生成，我们可以使用 $\mathcal{O}_P(\zeta) \otimes \pi^*f^*A_Y$的相应整体截面，构造满足上述两个条件的奇异度量。

根据假设， $\mathcal{V}$ 是伪有效的，因此存在 $\mathcal{O}_P(\zeta)$上的一个可能为奇异的度量 h_2，使得 $\Theta_{h_2}(\mathcal{O}_P(\zeta)) \geq 0$在 P上。现在我们考虑线丛

$$aK_{P/Y} \otimes \mathcal{O}_P(\zeta)^{\otimes(m+r)} \otimes g^* A_Y$$

我们赋予 $\mathcal{O}_P(\zeta)^{\otimes(m+r)}$ 度量 $mh_2 + rh_1$。令 G 为 g的一般纤维。由于 $\mathcal{V}$ 在一般纤维附近局部自由，因此我们有

$$G \simeq \mathbb{P}(\mathcal{V} \otimes \mathcal{O}_F),$$

特别地， $\mathcal{O}_P(\zeta) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{O}_F)}(1)$。
由 Ohsawa-Takegoshi 扩张定理 [PT18, Thm.4.1.1], , 结合 h_1 光滑这一事实，我们知道

$$H^0(P, aK_{P/Y}\otimes\mathcal{O}_P(\zeta)^{\otimes(m+r)}\otimes g^*A_Y) \to H^0(G, aK_{P/Y}\otimes\mathcal{O}_P(\zeta)^{\otimes(m+r)}\otimes\mathcal{I}(mh_2+rh_1)\otimes g^*A_Y)$$
$$= H^0(G, aK_{P/Y} \otimes \mathcal{O}_P(\zeta)^{\otimes(m+r)} \otimes \mathcal{I}(mh_2) \otimes g^*A_Y)$$

对于一般纤维 G 和每个 $m \in \mathbb{N}^*$，它都是满射。注意到 $G = F \times \mathbb{P}^{r-1}$。我们有

$$H^0(G, aK_{P/Y} \otimes \mathcal{O}_P(\zeta)^{\otimes(m+r)} \otimes \mathcal{I}(mh_2) \otimes g^*A_Y) \tag{30}$$
$$\simeq H^0(F, aK_F) \otimes H^0(\mathbb{P}^{r-1}, \mathcal{O}(m) \otimes \mathcal{I}(mh_2)).$$

利用 [CCP19, Lemma 4.4], , 我们知道 $H^0(\mathbb{P}^{r-1}, \mathcal{O}(m) \otimes \mathcal{I}(mh_2)) \neq 0$。因此得到 (29)。
对于命题的第二部分，采用相同的论证，我们知道限制

$$H^0(P, aK_{P/Y}\otimes\mathcal{O}_P(\zeta)^{\otimes(m+m')}\otimes g^*m'A_Y) \to H^0(G, aK_{P/Y}\otimes\mathcal{O}_P(\zeta)^{\otimes(m+m')}\otimes\mathcal{I}(mh_2+m'h_1)\otimes g^*m'A_Y)$$
$$= H^0(G, aK_{P/Y} \otimes \mathcal{O}_P(\zeta)^{\otimes(m+m')} \otimes \mathcal{I}(mh_2) \otimes g^*m'A_Y)$$

对任意 m、 $m' \in \mathbb{N}$ 都是满射。特别地，若取 $m' = m \cdot \epsilon$，我们知道

$$H^0(G, aK_{P/Y} \otimes \mathcal{O}_P(\zeta)^{\otimes(m+m')} \otimes \mathcal{I}(mh_2) \otimes g^*m'A_Y) \sim (\epsilon m)^{r-1}.$$

第二部分得证。 □

4.C. **迈向二分法**。

4.6. 命题。 设 X 是一个射影流形，满足 $q(X) = 0$。假设 X 存在一个纤维化 $f\colon X \to \mathbb{P}^1$，其纤维不可约。设 $\mathcal{V}$ 是 X 上的伪有效反身层，并且对于一般纤维 F，有 $\mathcal{V} \otimes \mathcal{O}_F \simeq \mathcal{O}_F^{\oplus \mathrm{rk}\mathcal{V}}$。则以下情形之一成立

- 我们有 $\kappa(X, \mathcal{V}) \geq 0$
- $\mathcal{V}$ 的典范类在余维一数值有效。

4.7. 注记。 我们先澄清一下 $\mathcal{V}$ 不一定是局部自由时的表述：令 $p\colon \mathbb{P}'(\mathcal{V}) \to X$，并且

$$r \circ \nu : P \to \mathbb{P}'(\mathcal{V})$$

是如定义 2.3 中所述、从射影流形 P 出发的双有理态射，并令

$$\zeta := c_1(\mathcal{O}_P(1) \otimes \mathcal{O}_P(\Lambda)) \in N^1(P)$$

是 $\mathcal{V}$的典范类。设 $\pi := p \circ r \circ \nu$。根据 Λ [Nak04, III,5.10(2)] 的构造， ζ 在一个 π-例外除子 Z 上的限制不是伪有效的。正如我们在定义 2.3 之后的讨论中所看到的，这些例外

除子对反身层的伪有效性没有任何影响。因此，若对每个非 π-例外的素除子 $Z \subset P$，限制 $\zeta|_Z$ 都是伪有效的，我们就称 ζ 余维一数值有效。注意，这比 Boucksom [Bou04, Prop.2.4] 意义下的 ζ 为修正 nef 稍弱。

命题 4.6 的证明在关键处使用了以下基本事实：

4.8. 引理。 设 X 是一个维数为 n 的射影流形，且存在一个纤维化 $f\colon X \to C$ 到曲线 C，其所有纤维均不可约。
设 D 是 X 上的一个除子类，满足 $\mathcal{O}_F(D) \simeq \mathcal{O}_F$。则对某个 $\lambda \in \mathbb{Q}$，有 $D \sim_{\mathbb{Q}} \lambda F$。

证明。 由于 $\mathcal{O}_F(D) \simeq \mathcal{O}_F$，直接像层 $f_*\mathcal{O}_X(D)$ 是秩一的无挠层，因而是局部自由的。此外，求值态射

$$f^* f_* \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_X(D)$$

在一般纤维上是满射，因此可写成 $D = f^* f_* \mathcal{O}_X(D) + E$，其中 E 是一个支撑在纤维上的有效除子。由于 f 具有不可约纤维，我们有 $E \sim_{\mathbb{Q}} f^* M$，其中 M 是 C 上的一个 $\mathbb{Q}$-除子类。□

注意，引理 4.8 立即推出在 $\operatorname{rk}\mathcal{V} = 1$ 的情况下命题 4.6 成立，因此在接下来的证明中，我们可以假设 $\operatorname{rk}\mathcal{V} > 1$:

命题 *4.6* 的证明。 我们采用注 4.7 中引入的记号。我们用反证法，假设 ζ 不是余维一数值有效的。因此存在一个素除子 $Z \subset P$，使得限制 $\zeta|_Z$ 不是伪有效的。此外，Z 不是 π-例外的（参见注 4.7），所以 $\pi(Z)$ 的余维至多为一。

第一种情况。假设 $\pi(Z)$ 包含在一个 f-纤维中。 由于我们假设 f 的纤维不可约，这意味着在集合论意义下，$\pi(Z) = f^{-1}(y)$，其中某个 $y \in Y$ 如此，因此

$$(f \circ \pi)^* y = Z + E$$

其中 E 是 π-例外除子的并。ζ 在 E 的任一不可约分支上的限制都不是伪有效的（再次参见注 4.7），因此 ζ 在 $(f \circ \pi)^* y$ 的每个不可约分支上的限制都不是伪有效的。然而，根据假设 $\mathcal{V} \otimes \mathcal{O}_F \simeq \mathcal{O}_F^{\oplus \operatorname{rk}\mathcal{V}}$，所以 ζ 在一般的 $f \circ \pi$-纤维上的限制是有效的。由于 $f \circ \pi$ 是平坦的，且 $\mathcal{O}_P(\zeta)$ 是局部自由的，由半连续性可知，ζ 在 $(f \circ \pi)^* y$ 上有一个非零截面。特别地，其在至少一个不可约分支上的限制是伪有效的，矛盾。

第二种情形。假设 $\pi(Z)$ 不包含在某个 f-纤维中。令

$$\zeta = P + (\mu Z + E) \tag{31}$$

为 ζ 的除子Zariski分解，其中 P 为正部。由于 $\zeta|_Z$ 不是伪有效的，我们有 $\mu > 0$。

令 F 为一个一般的 f-纤维。由于 $\mathcal{V} \otimes \mathcal{O}_F \simeq \mathcal{O}_F^{\oplus \operatorname{rk}\mathcal{V}}$，我们有

$$\mathbb{P}(\mathcal{V} \otimes \mathcal{O}_F) \simeq F \times \mathbb{P}^{\operatorname{rk}\mathcal{V}-1}$$

并且，将 ζ限制到 $\mathbb{P}(\mathcal{V} \otimes \mathcal{O}_F)$ 后所得的结果与 $p^*_{\mathbb{P}^{\operatorname{rk}\mathcal{V}-1}} H$ 同构，其中 H 是 $\mathbb{P}^{\operatorname{rk}\mathcal{V}-1}$上的一个超平面。特别地，对于每个 $t \in \mathbb{P}^{\operatorname{rk}\mathcal{V}-1}$， $\mathcal{O}_{F\times t}(\zeta)$ 都是平凡的。

由于 $\pi(Z)$ 不包含在一个 f纤维中， Z与 $\mathbb{P}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{O}_F)$ 的交集非空。因此，将（31）限制到 $\mathbb{P}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{O}_F)$，我们得到

$$Z\cap\mathbb{P}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{O}_F)\sim p^*_{\mathbb{P}^{\mathrm{rk}\mathcal{V}-1}}(\lambda H) \tag{32}$$

对于某个 $\lambda>0$。特别地，这意味着 $\pi(Z)=X$。
我们现在断言，可以写成

$$[Z]\sim\lambda\zeta+\pi^*M+E,$$

其中 M 是 X 上的一个 Cartier除子类，而 E 是一个未必有效的 π-例外除子。事实上，反身层 $\mathcal{V}\to X$ 在余维二处局部自由，因此若 $B\subset X$ 是 $\mathcal{V}$ 不局部自由的轨迹，则原像 $\pi^{-1}(B)$ 由 π-例外除子组成。由于

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{O}_{X\setminus B}))\simeq\pi^*\mathrm{Pic}(X\setminus B)\oplus\mathbb{Z}\zeta\simeq\pi^*\mathrm{Pic}(X)\oplus\mathbb{Z}\zeta,$$

该断言由通常正合序列 [Har77, II,Prop.6.5] 推出。
限制到一个一般纤维 F 上，由 (32) 可得

$$p^*_{\mathbb{P}^{\mathrm{rk}\mathcal{V}-1}}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\mathrm{rk}\mathcal{V}-1}}(\lambda)\simeq\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{O}_F)}(Z)\simeq(p^*_{\mathbb{P}^{\mathrm{rk}\mathcal{V}-1}}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\mathrm{rk}\mathcal{V}-1}}(1))^{\otimes\lambda}\otimes\pi^*\mathcal{O}_F(M),$$

因此 $\mathcal{O}_F(M)\simeq\mathcal{O}_F$。由于 f 具有不可约纤维，根据引理 4.8 可知，$M\sim_{\mathbb{Q}} f^*M_Y$，其中 M_Y 是 $\mathbb{P}^1$ 上的一个 $\mathbb{Q}$-除子类。最后，我们得到 Z 给出了如下对象的一个截面

$$S^{[\lambda]}\mathcal{V}\otimes\mathcal{O}_X(f^*M_Y)$$

在 $X\setminus B$ 上。由于 B 的余维至少为二，且 $S^{[\lambda]}\mathcal{V}$ 是反身的，这个截面可延拓至 X。因此，根据典范类的构造，参见 (2)，我们得到 $\mathcal{O}_P(\lambda\zeta+(f\circ\pi)^*M_Y)$ 的一个整体截面，它在 $Z+E'$ 上消失，其零点包含一个 有效π-例外除子 E'。

若 $\deg M_Y\le 0$，则我们已经完成证明：对某个 $d\in\mathbb{N}$， $\mathbb{Q}$-除子类 dM_Y 是整数且反有效的，因此

$$d\lambda\zeta\sim_{\mathbb{Q}} d\,(Z+E'+(f\circ\pi)^*M_Y^*)$$

是有效的。
若 $\deg M_Y>0$，由命题 4.5 可知 $\kappa(X,S^{[\lambda]}\mathcal{V}\otimes\mathcal{O}_X(f^*M_Y))\ge\mathrm{rk}\mathcal{V}-1\ge 1$。若 $S^{[\lambda]}\mathcal{V}\otimes\mathcal{O}_X(f^*M_Y)$ 的某个对称幂的两个截面在 $X\setminus B$ 上相同，则它们在 X 上也相同。由于 Z 是

$$\lambda\zeta+(f\circ\pi)^*M_Y\sim_{\mathbb{Q}} Z+E$$

不是 π-例外的，因此我们得到 $\kappa(P,Z)\ge 1$。然而， Z 属于 ζ 的除子Zariski分解的负部分，因此 $\kappa(P,Z)=0$ [Bou04，命题3.13]。由此得到最终的矛盾。□

参考文献

[Ati57] Michael F. Atiyah。椭圆曲线上的向量丛。伦敦数学学会会刊 *(3)*，7：414–452，1957。

[BD18] Damian Brotbek 和 Lionel Darondeau。具有充足余切丛的完全交簇。《数学发明》，212(3)：913–940，2018。

[Bea83] Arnaud Beauville。关于具有 $c_1=0$ 的凯勒流形的一些注记。代数流形与解析流形的分类，研讨会论文集，片田/日本，1982，39，126 1983 1983 数学进展 - ( )。，。

[BHPVdV04] Wolf P. Barth、Klaus Hulek、Chris A. M. Peters 和 Antonius Van de Ven。《紧复曲面》，《数学及其边界领域成果》第4卷，第3辑。施普林格出版社，柏林，第二版，2004年。[Bou04] Sébastien Boucksom。紧复流形上的除子扎里斯基分解。高等师范学校科学年刊（第4辑），37(1):45–76，2004年。[Bru06] Marco Brunella。紧凯勒流形上叶状结构的一种正性性质。国际数学杂志，17(1):35–43，2006年。[BTVA22] Nils Bruin、Jordan Thomas 和 Anthony Várilly-Alvarado。对称微分的显式计算及其在拟双曲性中的应用。代数与数论，16(6):1377–1405，2022年。[Cao15] Junyan Cao。关于用代数簇逼近凯勒流形。数学年刊，363(1):393–422，2015年。[CC14] Fréderic Campana 和 Benoît Claudon。特殊紧凯勒三维簇的阿贝尔性猜想。爱丁堡数学学会会刊（第2辑），57(1):55–78，2014年。[CCM21] Frédéric Campana、Junyan Cao 和 Shin-ichi Matsumura。具有数值有效反典范除子的射影 Kawamata 对数终端对。代数几何，8(4):430–464，2021年。[CCP19] Frédéric Campana、Junyan Cao 和 Mihai Paun。直接像的次调和性及其应用。arXiv 预印本，2019年。[CP17] Junyan Cao 和 Mihai P˘aun。阿贝尔簇上代数纤维空间的 Kodaira维数。《数学发明》，207:345–387，2017年。[CP19] Frédéric Campana 和 Mihai Păun。具有正斜率的叶层与轨形余切丛的双有理稳定性。高等科学研究所数学出版物，129:1–49，2019年。[Deb01] Olivier Debarre。《高维代数几何》。大学教材丛书。施普林格出版社，纽约，2001年。[Dem92a] Jean-Pierre Demailly。闭正流的正则化与交理论。代数几何杂志，1(3):361–409，1992年。[Dem92b] Jean-Pierre Demailly。正线丛上的奇异厄米度量。载于《复代数簇》。1990年4月2日至6日在德国拜罗伊特举行的会议论文集，第87–104页。柏林等：施普林格出版社，1992年。[Dem12] Jean-Pierre Demailly。《代数几何中的解析方法》，《现代数学综述》第1卷。国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔；高等教育出版社，北京，2012年。[Den21] Ya Deng。凯勒流形上半稳定 Higgs 丛的 Simpson 对应。17(5):1899–1911，2021年。[DPS94] Jean-Pierre Demailly、Thomas Peternell 和 Michael Schneider。具有数值有效切丛的紧复流形。代数几何杂志，3(2):295–345，1994年。[DPS01] Jean-Pierre Demailly、Thomas Peternell 和 Michael Schneider。紧凯勒流形上的伪有效线丛。国际数学杂志，12(6):689–741，2001年。[Dru18] Stéphane Druel。维数至多为五且典范类平凡的奇异空间的分解定理。《数学发明》，211(1):245–296，2018年。doi: 10.1007/s00222-017-0748-y。[Fuj11] Osamu Fujino。具有平凡典范除子的簇的半稳定极小模型纲领。日本学士院院刊，A辑，87(3):25–30，2011年。[Har77] Robin Hartshorne。《代数几何》。施普林格出版社，纽约，1977年。数学研究生教材，第52号。[HLS22] Andreas Höring、Jie Liu 和 Feng Shao。切丛非伪有效的 Fano 流形实例。伦敦数学学会杂志（第2辑），106(1):27–59，2022年。[HP19] Andreas Höring 和 Thomas Peternell。典范丛数值平凡的叶层的代数可积性。《数学发明》，216(2):395–419，2019年。[HP20] Andreas Höring 和 Thomas Peternell。余切丛非消失猜想。arXiv 预印本，即将在《图卢兹科学学院年刊》发表，2020年。[KM98] János Kollár 和 Shigefumi Mori。《代数簇的双有理几何》，剑桥数学丛书第134卷。剑桥大学出版社，剑桥，1998年。与 C. H. Clemens 和 A. Corti 合作。

[Kod63] K. Kodaira. 紧致解析曲面论。II、III。《数学年刊》(2) 77 (1963), 563–626；同刊，78:1–40, 1963.[Kol95] János Kollár.《代数簇上的有理曲线》，《数学及其边界领域成果》第三辑第32卷。柏林：施普林格出版社，1995.[Laz04] Robert Lazarsfeld.《代数几何中的正性》第二卷，《数学及其边界领域成果》第49卷。施普林格出版社，柏林，2004年。向量丛的正性与乘子理想。[LOY20] Jie Liu、Wenhao Ou 和 Xiaokui Yang. 切丛含有严格数值有效子层的射影流形。arXiv 预印本 2004.08507，即将在《代数几何杂志》发表，2020. [LP18] Vladimir Lazić 和 Thomas Peternell. 具有大量微分形式的簇的丰盛性。《代数几何电子期刊》，EPIGA，2:35，2018。编号 1. [Nak04] Noboru Nakayama.《Zariski 分解与丰盛性》，《日本数学会回忆录》第14卷。日本数学会，东京，2004年。[P˘au16] Mihai P˘aun. 奇异厄米度量与多重典范丛直接像的正性。https://arxiv.org/pdf/1706.08814.pdf，2016. [Pet12] Thomas Peternell. 具有一般数值有效切丛的簇。《欧洲数学会杂志》(JEMS)，14(2):571–603，2012. [PT18] Mihai Păun 和 Shigeharu Takayama. 扭曲相对多重典范丛及其直接像的正性。《代数几何杂志》，27(2):211–272，2018. [Sak79] Fumio Sakai. 余切丛的对称幂与代数簇的分类。载于《代数几何》（哥本哈根大学暑期会议论文集，哥本哈根，1978），《数学讲义》第732卷，第545–563页。施普林格，柏林，1979.[Shi21] Takahiro Shibata. 阿贝尔簇的 Q-阿贝尔与 $\mathbb{Q}$-Fano 有限商。arXiv 预印本 2112.09826，2021.[Sim92] Carlos T. Simpson. Higgs 丛与局部系统。高等科学研究所数学出版物，(75):5–95，1992. [Wu22] Xiaojun Wu. 伪有效与数值平坦反身层。《几何分析杂志》，32，2022. [Xie18] Song-Yan Xie. 完全交余切丛的丰性。《数学创刊》，212:941–996，2018.

JunyanCao，蔚蓝海岸大学，法国国家科学研究中心，让·亚历山大·迪厄东数学实验室，法国电子邮箱地址：junyan.cao@unice.fr

Andreas Höring，蔚蓝海岸大学，法国国家科学研究中心，让·亚历山大·迪厄东数学实验室，法国电子邮箱地址：Andreas.Hoering@unice.fr