arXiv:2302.12659v2 [math.AT] 8 Aug 2023

关于动机 Segal 猜想

THOMAS GREGERSEN 和 JOHN ROGNES

Abstract. 我们建立了 Lin–Gunawardena 定理的动机版本，从而证实了代数群 μ_ℓ 关于 ℓ次单位根的动机塞加尔猜想，其中 ℓ 为任意素数。为此，我们发展了与对称群 S_ℓ 和 μ_ℓ相关的动机 Singer 构造，并引入了一种延迟极限 Adams 谱序列。

Contents

1. 引言 1
2. 动机 Steenrod 代数及其对偶 3
3. 一些双余模代数 4
4. .....及其对偶双模 5
5. 小动机 Singer 构造 6
6. 大动机 Singer 构造 7
7. 这些赋值是 Ext 等价 8
8. 广义 Eilenberg–MacLane 谱 9
9. 延迟极限 Adams 谱序列 10
10. Thom 谱塔 11
11. 动机 Lin–Gunawardena 定理 参考文献

1. Introduction

令 $\gamma^1 \downarrow \mathbb{R}P^\infty \simeq BC_2$ 为无穷维实射影空间上的典范线丛，令 $\mathbb{R}P^\infty_{-m} = Th(-m\gamma^1)$ 为 m 乘以 γ^1 的负向量丛的托姆谱，并令 $\mathbb{R}P^\infty_{-\infty} = \operatorname{holim}_m \mathbb{R}P^\infty_{-m}$。Mahowald 猜想存在一个 2-进等价 $\mathbb{R}P^\infty_{-\infty} \simeq S^{-1}$，参见 Adams [3, 第 5] 页。更一般地，Segal 猜想对于有限群 G ，存在一个 $I(G)$-进等价 $(S_G)^G \simeq (S_G)^{hG}$ ，将 G-等变球谱的不动点映射到同伦不动点。这里， $I(G)$ 表示 G的伯恩赛德环中的增广理想。

Mahowald 猜想与 C_2的塞加尔伯恩赛德环猜想等价，Lin 在 [37, 定理 1.2] 中证明了该猜想。对于奇素数 ℓ，Gunawardena [21]证明了 C_ℓ的塞加尔猜想，得到了一个 ℓ-进等价 $L^\infty_{-\infty} \simeq S^{-1}$。这里，$L^\infty_{-\infty}$ 表示以无穷维透镜空间 $L^\infty \simeq BC_\ell$为基底的托姆谱的同伦极限。此后，Carlsson [12], 在 May-McClure [45], 、Adams–Gunawardena–Miller [4] 以及 Caruso–May–Priddy [13]的工作基础上，证明了塞加尔猜想对所有有限群均成立。

在本文中，我们将 Lin 和 Gunawardena 的经典定理推广到动机语境，得到 $\pi_{*,*}$-同构 $\mathbb{S} \simeq \Sigma^{1,0} L^\infty_{-\infty}$；在对所有素数 π_* 进行 (ℓ, η)-进完备化之后，

Date:2023年8月8日.2010 *Mathematics Subject Classification.* 14F42, 55P42, 55 Q45, 55S10, 55T15 .

其中 $\mathbb{S}$ 表示动机球谱，$\eta \in \pi_{1,1}(\mathbb{S})$ 是 Hopf 纤维化，而现在 $L^\infty_{-\infty} = \operatorname{holim}_m L^\infty_{-2m}$，其中 L^∞_{-2m} 是代数群 μ_ℓ 在 ℓ 次单位根上的几何分类空间 $L^\infty = B\mu_\ell$ 上的某个虚代数向量丛的托姆谱。更准确地说，$L^\infty_{-2m} = \operatorname{hocolim}_n L^{2n-2m-1}_{-2m}$，其中 $L^{2n-2m-1}_{-2m} = Th(-m\gamma_n^* \downarrow L^{2n-1})$，而 γ_n^* 是 $L^{2n-1} = (\mathbb{A}^n \setminus \{0\})/\mu_\ell$ 上典范代数线丛的对偶。

定理 1.1。设 S 是有限维诺特概形，本质光滑于一个包含 $1/\ell$ 的域或戴德金整环之上。存在一个$\pi_{*,\,*}$-同构

$$e^\wedge_{\ell,\eta} \colon \mathbb{S}^\wedge_{\ell,\eta} \longrightarrow (\Sigma^{1,0} L^\infty_{-\infty})^\wedge_{\ell,\eta}$$

它位于稳定动机同伦范畴 $SH(S)$ 中。若 $S = \operatorname{谱} k$ 对应一个域，则$e^\wedge_{\ell,\,\eta}$ 是动机等价。

换言之，对于任意素数 ℓ，我们证明了代数群 μ_ℓ 情形下塞加尔猜想的非等变形式。对于 $\ell = 2$，这是马霍瓦尔德猜想和林定理的动机版本。对于 ℓ 为奇数的情形，这是古纳瓦德纳定理的动机版本。

即使在代数闭情形 $k = \mathbb{C}$ 下的 $S = \operatorname{谱} k$，关于动机权的额外信息也已证明是用于计算的宝贵新工具，参见 Isaksen [30] 和 Isaksen–Wang–Xu [31]。在实数域情形$k = \mathbb{R}$，出现了许多新现象，参见 Hill [24],、Dugger–Isaksen [16] 和 Belmont–Isaksen [7]。我们的结果甚至适用于算术上最重要的情形，即数域（的 ℓ-整数环）。特别是，我们努力避免假设模 ℓ 动机上同调群 $H^{*,\,*} = H^{*,\,*}(S; \mathbb{Z}/\ell)$ 在每个双次数上都是有限的。我们的结果使得能够通过与塔 $\{L^\infty_{-2m}\}_m$ 所关联的同伦谱序列进行比较，来分析 $\pi_{*,\,*}(\mathbb{S})$，即动机马霍瓦尔德根不变量，从而细化 Mahowald [41] 和 Mahowald–Ravenel [42] 的结果。此类应用已见于 Quigley 的论文 [54], [55], [56]。我们预计数域的动机上同调与 Mahowald 根不变量之间的相互作用将十分丰富。

在第 2 节中，我们回顾 Voevodsky 的文章 [64] 中关于动机对偶 Steenrod 代数 $\mathscr{A}_{*,*}$及其商 $A(n)_{*,*} = \mathscr{A}_{*,*}/I(n)$ 的 Hopf 代数胚结构。在第 3 节中，我们将 Adams–Gunawardena–Miller 在 [4, §2],中的方法加以推广，并引入 $A(n)_{*,*}$-$A(n-1)_{*,*}$ 双余模代数 $C(n)_{*,*} = \mathscr{A}_{*,*}/J(n)$，以及远离 ξ_1 的局部化 $B(n)_{*,*}$。在第 4 节中，我们沿用 Boardman [8, §3], 的方法对这些构造进行对偶化，得到动机 Steenrod 代数 $\mathscr{A}$、其有限子代数 $A(n)$，以及 $A(n)$-$A(n-1)$-双模 $C(n)$ 和 $B(n)$。在第 5 节中，我们推广 Singer [60] 和 Li–Singer [36],的小 Singer 构造，得到一个 $\mathscr{A}$-模 $R_S(M) = \operatorname{colim}_n B(n) \otimes_{A(n-1)} M$，以及对每个 $\mathscr{A}$-模 M的一个自然同态 $\epsilon\colon R_S(M) \to M$。

我们在定理 5.8 中证明，$R_S(H^{*,\,*}) \cong \Sigma^{1,\,0} H^{*,\,*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}}$ 是对称群 S_ℓ 作用在 ℓ 个字母上所对应的几何分类空间的动机上同调的移位局部化。在第 6 节中，我们重述 Adams–Gunawardena–Miller [4, §5]，并构造一个（较大的）Singer 构造 $R_\mu(M)$ 以及一个自然的 $\mathscr{A}$-模同态 $\epsilon\colon R_\mu(M) \to M$。我们在推论 6.6 中证明，$R_\mu(H^{*,\,*}) \cong \Sigma^{1,\,0} H^{*,\,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}}$ 是无限透镜空间 $B\mu_\ell$的动机上同调的移位局部化。在第 7 节中，我们证明求值同态 ϵ 是 Ext 等价。这里，由于 Hopf 代数胚具有双边性质，我们不采用 [4, §2], 中的 Tor 等价方法。

在第 10 节中，我们构造动机谱的塔 $\{L^\infty_{-2m}\}_m$，以及映射$e\colon \mathbb{S} \to \Sigma^{1,\,0} L^\infty_{-\infty}$ 到其同伦极限的悬挂。我们在命题 10.10 中证明，连续上同调 $H^{*,\,c}(L^\infty_{-\infty}) = \operatorname{colim}_m H^{*,\,*}(L^\infty_{-2m})$ 同构于一个 $\mathscr{A}$-模 $H^{*,\,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}}$，并且 e 诱导出 Ext 等价 ϵ,

通过上述识别。现在的计划是将 $\mathbb{S}$ 的动机模 ℓ Adams 谱序列与关联于 L^{∞}_{-2m} 的 Adams 谱序列塔进行比较。在有足够有限性的情况下，这种做法行之有效，可确保这些 Adams 谱序列的代数极限仍是一个谱序列；经典情形下的 Caruso–May–Priddy [13] 就是如此。然而，对于满足 $H^{*,\,*}$ 在每个双次数上都不是有限的基概形 S，这种方法可能会失效。我们转而构造一种修正 Adams 谱序列，称为延迟极限 Adams 谱序列；其中，任何因非正合性而产生的 $\lim^1$-类都会移至下一个滤过次数。

第 8 节中，我们通过引入动机广义埃ilenberg–MacLane 谱的一些术语，为这一构造做准备，并提出一种称为双有限型的有限性条件，使我们能够用代数术语识别动机阿达姆斯谱序列的 E_1-项和 E_2-项。第 9 节中，我们在定义 9.1 中引入延迟极限 Adams 谱序列，并在命题 9.2 中将其 E_2-项识别为连续上同调 $\mathscr{A}$-模的 Ext。在命题 9.6 中，我们证明延迟极限 Adams 谱序列条件收敛；在命题 9.7 中，我们将 Boardman [9] 关于条件收敛谱序列态射的比较定理加以改编。第 11 节将各条线索汇集起来。定理 1.1 的证明见定理 11.1。

本文基于第一作者在第二作者指导下完成的博士论文 [19], 。

2. The motivic Steenrod algebra and its dual

设 S 是一个有限（克鲁尔）维数 d 的诺特（分离）概形，本质光滑于某个域或戴德金整环之上，并设 ℓ 是在 S 上可逆的素数。

设 $SH(S)$ 是 Voevodsky 的动机稳定同伦范畴 [63, Def. 5.7], [33], 它与 S 上的光滑概形相关联。该范畴是三角范畴，并具有相容的闭对称幺半结构，由动机球谱 $\mathbb{S}=\Sigma^{\infty}S_{+}$、楔积配对 $-\wedge-$、扭转同构 γ 和函数谱 $F(-,-)$ 给出。设 $H=H\mathbb{Z}/\ell$ 是表示系数取自 $\mathbb{Z}/\ell$ 的动机上同调的动机埃ilenberg–MacLane 谱。它是一个交换环谱，具有单位映射 $\eta\colon \mathbb{S}\to H$ 和乘积 $\mu\colon H\wedge H\to H$。此外，已知 H 是胞腔的 [25, Prop. 8.1], [61, Cor. 10.4], , 即稳定动机球的迭代同伦余极限。

令 $H_{*,*}=\pi_{*,*}(H)=H^{-*,-*}$ 表示基概形 S 的动机同调和上同调群。那么，除非 $0\le p\le \min\{q+d,2q\}$，否则有 $H^{p,q}=0$，参见 [18, Cor. 4.4], [25, Cor. 4.26]。对于 $x\in\pi_{t,u}(X)$，其中 X 是任意动机谱，我们分别将 t 和 u 称为 x 的拓扑次数和权。我们记作 $|x|=\deg(x)=t$、$\mathrm{wt}(x)=u$ 以及 $\|x\|=(t,u)$。由 μ 诱导的杯积使 $H^{*,*}=H_{-*,-*}$ 具有分次交换 $\mathbb{Z}/\ell$-代数的结构。在分次交换性中，只有拓扑次数的奇偶性起作用。

令 $\mathscr{A}=H^{*,*}(H)=\pi_{-*,-*}F(H,H)$ 表示动机 Steenrod 代数，并令 $\mathscr{A}_{*,*}=H_{*,*}(H)=\pi_{*,*}(H\wedge H)$ 表示其对偶。则 $\mathscr{A}_{*,*}$ 作为左 $H_{*,*}$-模是自由的，参见引理 2.1，因此这一对 $(H_{*,*},\mathscr{A}_{*,*})$ 具有双分次 Hopf 代数胚的结构 [1, Lec. 3], [47, §1], [57, Def. A1.1.1]。其结构映射如下，均为 $\mathbb{Z}/\ell$-代数同态：

(1) 左单位 $\eta_L\colon H_{*,*}\to\mathscr{A}_{*,*}$ 由 $1\wedge\eta\colon H=H\wedge\mathbb{S}\to H\wedge H$ 诱导；(2) 右单位 $\eta_R\colon H_{*,*}\to\mathscr{A}_{*,*}$ 由 $\eta\wedge 1\colon H=\mathbb{S}\wedge H\to H\wedge H$ 诱导；(3) 乘积 $\phi\colon \mathscr{A}_{*,*}\otimes\mathscr{A}_{*,*}\to\mathscr{A}_{*,*}$ 由 $(\mu\wedge\mu)(1\wedge\gamma\wedge 1)\colon H\wedge H\wedge H\wedge H\to H\wedge H$ 诱导；(4) 余单位 $\epsilon\colon \mathscr{A}_{*,*}\to H_{*,*}$ 由 $\mu\colon H\wedge H\to H$ 诱导；

(5) 余乘法 $\psi\colon\ \mathscr{A}_{*,*} \to \mathscr{A}_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} \mathscr{A}_{*,*}$ 由 $1 \wedge \eta \wedge 1\colon\ H \wedge H = H \wedge \mathbb{S} \wedge H \to H \wedge H \wedge H \cong (H \wedge H) \wedge_H (H \wedge H)$ 诱导；(6) 共轭 $\chi\colon\ \mathscr{A}_{*,*} \to \mathscr{A}_{*,*}$ 由 $\gamma\colon\ H \wedge H \to H \wedge H$ 诱导。

我们利用左单位和右单位，将 $\mathscr{A}_{*,*}$ 视为一个 $H_{*,*}$-$H_{*,*}$-双模，而 (5) 中的 $-\otimes_{H_{*,*}}-$表示双模张量积。

更明确地说，

$$\mathscr{A}_{*,*} = H_{*,*}[\tau_0, \tau_1, \dots, \xi_1, \xi_2, \dots]/(\tau_i^2 - T_i \mid i \geq 0)$$

是一个双分次交换 $H_{*,*}$-代数，由双次数为 $\|\tau_i\| = (2\ell^i - 1, \ell^i - 1)$ 的类 τ_i 和双次数为 $\|\xi_i\| = (2\ell^i - 2, \ell^i - 1)$ 的类 ξ_i 生成，其中

$$T_i = \begin{cases} \tau\xi_{i+1} + \rho\tau_{i+1} + \rho\tau_0\xi_{i+1} & \text{for } \ell = 2, \\ 0 & \text{for } \ell \text{ odd.} \end{cases}$$

这里，元素 $\rho \in H^{1,1} = H_{-1,-1}$ 和 $\tau \in H^{0,1} = H_{0,-1}$ 在 [64, 定理 6.10] 中为 $\ell = 2$ 指定。对于奇数 ℓ，它们应解释为零。用这些术语表示，

(1) 代数单位为 η_L；(2) $\eta_R = \chi\eta_L$ 满足 $\eta_R(\rho) = \rho$ 和 $\eta_R(\tau) = \tau + \rho\tau_0$；(3) 代数乘法为 ϕ；(4) 余单位 ϵ 将每个 τ_i 和 ξ_i 映射为 0；(5) 余乘法 ψ 满足

$$\psi(\tau_k) = \tau_k \otimes 1 + \sum_{i+j=k} \xi_i^{\ell^j} \otimes \tau_j \qquad \text{and} \qquad \psi(\xi_k) = \sum_{i+j=k} \xi_i^{\ell^j} \otimes \xi_j\,,$$

其中 $\xi_0 = 1$；

(6) 共轭 χ 满足

$$\tau_k + \sum_{i+j=k} \xi_i^{\ell^j} \chi(\tau_j) = 0 \qquad \text{and} \qquad \sum_{i+j=k} \xi_i^{\ell^j} \chi(\xi_j) = 0\,,$$

and $\chi^2 = 1$.

证明见 [64, 定理 12.6、引理 12.11、注 12.12], [66, 定理 3.49], [58, 定理 5.2.13], [27, 定理 5.6] 和 [61, 定理 10.26]。

引理 2.1。单项式

$$\tau^E\xi^R = \tau_0^{e_0}\tau_1^{e_1}\cdots\xi_1^{r_1}\xi_2^{r_2}\cdots\,,$$

其中 $E = (e_0, e_1, \dots)$ 和 $R = (r_1, r_2, \dots)$ 遍历满足 $e_s \in \{0, 1\}$ 和 $r_s \geq 0$的有限长度整数序列，它们构成 的一组基

$$\mathscr{A}_{*,*} = \frac{H_{*,*}[\tau_0, \tau_1, \dots, \xi_1, \xi_2, \dots]}{(\tau_i^2 - T_i \mid i \geq 0)}$$

作为自由左 $H_{*,*}$-模。

证明。对于 ℓ 奇数的情形，这是显然的。关于 $\ell = 2$ 的断言可由关系式 $\tau_i^2 = T_i$的形式推出，因为 ξ_{i+1}、 τ_{i+1}和 $\tau_0\xi_{i+1}$的权都高于 τ_i^2。□

引理 2.2. 与引理 2.1 中相同的单项式 $\tau^E\xi^R$ 构成 $\mathscr{A}_{*,*}$的一个基，使其成为自由右 $H_{*,*}$-模。

证明。对于 $t \geq 0$，令

$$F^t\mathscr{A}_{*,*} = \langle \tau^E\xi^R \mid \deg(\tau^E\xi^R) \geq t \rangle \subset \mathscr{A}_{*,*}$$

是由引理 2.1 中拓扑次数为 $\geq t$ 的单项式生成的左 $H_{*,\ *}$-子模。这些也是右 $H_{*,\ *}$-子模，因为 $\epsilon\eta_L = \mathrm{id} = \epsilon\eta_R$ 意味着 $\eta_L \equiv \eta_R \bmod F^1\mathscr{A}_{*,\ *} = \ker(\epsilon)$，且 $F^t\mathscr{A}_{*,\ *} \cdot F^1\mathscr{A}_{*,\ *} \subset F^{t+1}\mathscr{A}_{*,\ *} \subset F^t\mathscr{A}_{*,\ *}$。（第一个包含关系用到了 $\tau_i^2 = T_i$ 的拓扑次数小于或等于该值

ξ_{i+1}、 τ_{i+1} 和 $\tau_0\xi_{i+1}$的拓扑次数。）这定义了 $\mathscr{A}_{*,\,*}$ 的一个递减滤过，其各项均为 $H_{*,\,*}$-$H_{*,\,*}$-双模，并且左、右 $H_{*,\,*}$-模作用在每个滤过商上相同

$$\mathrm{gr}^t\,\mathscr{A}_{*,*} = \frac{F^t\mathscr{A}_{*,*}}{F^{t+1}\mathscr{A}_{*,*}}\,.$$

引理 2.1 中的次数为 $=t$ 的单项式 $\tau^E\xi^R$ 自由生成该商作为左 $H_{*,*}$-模，因此也作为右 $H_{*,*}$-模自由生成。由此可知，次数为 ≥ 0 的单项式 $\tau^E\xi^R$ 作为右 $H_{*,*}$-模自由生成 $\mathscr{A}_{*,*}$，因为在任意给定的双次数 $F^t\mathscr{A}_{*,*}=0$ 中，对所有充分大的 t均成立。□

[62, §II.3、§VI.4] 中的经典定义推广到动机语境。

定义 2.3。对于 $n\geq -1$，令 $I(n)\subset\mathscr{A}_{*,*}$ 为理想

$$I(n) = (\tau_{n+1},\tau_{n+2},\dots,\xi_1^{\ell^n},\xi_2^{\ell^{n-1}},\dots,\xi_n^{\ell},\xi_{n+1},\xi_{n+2},\dots)$$

由 τ_k（当 $k\geq n+1$ 时）以及 $\xi_i^{\ell^j}$（当 $i\geq 1$、 $j\geq 0$ 和 $i+j\geq n+1$时）生成。注意，对于 $i\geq n$，有 $T_i\in I(n)$。令

$$A(n)_{*,*} = \mathscr{A}_{*,*}/I(n) = \frac{H_{*,*}[\tau_0,\dots,\tau_n,\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n]}{(\tau_0^2-T_0,\dots,\tau_{n-1}^2-T_{n-1},\tau_n^2,\xi_1^{\ell^n},\xi_2^{\ell^{n-1}},\dots,\xi_n^{\ell})}$$

是商代数。

例 2.4。

$$\begin{aligned} I(-1) &= (\tau_0,\tau_1,\dots,\xi_1,\xi_2,\dots)\\ I(0) &= (\tau_1,\tau_2,\dots,\xi_1,\xi_2,\dots)\\ I(1) &= (\tau_2,\tau_3,\dots,\xi_1^{\ell},\xi_2,\xi_3,\dots) \end{aligned}$$

so

$$\begin{aligned} A(-1)_{*,*} &= H_{*,*}\\ A(0)_{*,*} &= H_{*,*}[\tau_0]/(\tau_0^2)\\ A(1)_{*,*} &= H_{*,*}[\tau_0,\tau_1,\xi_1]/(\tau_0^2-T_0,\tau_1^2,\xi_1^{\ell})\,. \end{aligned}$$

引理 2.5。在 $(H_{*,*},A(n)_{*,*})$ 上存在唯一的 Hopf 代数胚结构，使典范投影 $\pi_n\colon \mathscr{A}_{*,\,*}\to\mathscr{A}_{*,*}/I(n) = A(n)_{*,*}$ 成为 Hopf 代数胚同态。

证明。$(H_{*,*},A(n)_{*,*})$ 的 Hopf 代数胚结构映射是 $\mathbb{Z}/\ell$-代数同态，由下述方式确定：

(1) 左单位 $\eta_{L,n}\colon H_{*,*}\to A(n)_{*,*}$ 是复合映射 $\pi_n\circ\eta_L$。(2) 右单位 $\eta_{R,n}\colon H_{*,\,*}\to A(n)_{*,*}$ 是复合映射 $\pi_n\circ\eta_R$。(3) 代数乘法 $\phi_n\colon A(n)_{*,*}\otimes A(n)_{*,*}\to A(n)_{*,\,*}$ 由$\phi_n\circ(\pi_n\otimes\pi_n) = \pi_n\circ\phi$刻画；它存在是因为 $I(n)\subset\mathscr{A}_{*,*}$ 是一个理想。(4) 余单位 $\epsilon_n\colon A(n)_{*,*}\to H_{*,*}$ 由 $\epsilon_n\circ\pi_n=\epsilon$刻画；它存在是因为对于 $I(n)$ 的每个生成元 x，都有 $\epsilon(x)=0$。(5) 余乘法 $\psi_n\colon A(n)_{*,*}\to A(n)_{*,*}\otimes_{H_{*,*}}A(n)_{*,*}$ 由$\psi_n\circ\pi_n = (\pi_n\otimes\pi_n)\psi$刻画；它存在是因为对于 $I(n)$ 的每个生成元 x，都有 $(\pi_n\otimes\pi_n)\psi(x) = 0$。(6) 共轭 $\chi_n\colon A(n)_{*,*}\to A(n)_{*,*}$ 由 $\chi_n\circ\pi_n=\pi_n\circ\chi$ 刻画；它存在是因为对于 $I(n)$ 的每个生成元 x，都有 $\chi(x)\in I(n)$。

更具体地说，余乘法的显式公式表明，对于所有 $k\geq n+1$， $\psi(\tau_k)$ 都在.....的像中；并且对于所有满足 $i+j\geq n+1$ 的 $i\geq 1$、 $j\geq 0$， $\psi(\xi_i^{\ell^j}) = \psi(\xi_i)^{\ell^j}$ 也在.....的像中

$$I(n)\otimes_{H_{*,*}}\mathscr{A}_{*,*}\ \oplus\ \mathscr{A}_{*,*}\otimes_{H_{*,*}}I(n)\longrightarrow\mathscr{A}_{*,*}\otimes_{H_{*,*}}\mathscr{A}_{*,*}\,,$$

因此， $\psi(I(n))$ 包含在这个像中。同样，共轭的递归公式表明，对于相同的 k、 i 和 j， $\chi(\tau_k)$ 和 $\chi(\xi_i^{\ell^j}) = \chi(\xi_i)^{\ell^j}$ 都属于 $I(n)$，因此 $\chi(I(n)) = I(n)$。验证这些结构映射使 $(H_{*,*}, A(n)_{*,*})$ 成为一个 Hopf 代数胚，且 $(\mathrm{id}\ \pi_n)$ 是一个 Hopf 代数胚同态，这可由 $(H_{*,*}, \mathscr{A}_{*,*})$ 是一个 Hopf 代数胚这一事实形式地推出。□

引理 2.6. 单项式 $\tau^E\xi^R$，其中 $E = (e_0, \dots, e_n)$ 和 $R = (r_1, \dots, r_n)$ 遍历满足 $e_s \in \{0, 1\}$ 和 $0 \le r_s < \ell^{n+1-s}$的整数序列，构成 $A(n)_{*,\,*}$ 作为有限生成自由左 $H_{*,\,*}$-模的一组基。

证明. 理想 $I(n)$ 等于由引理 2.1 中满足以下条件的单项式 $\tau^E\xi^R$ 生成的 $\mathscr{A}_{*,\,*}$ 的自由左 $H_{*,\,*}$-子模：对于某个 $s \ge n+1$ 有 $e_s = 1$，或者对于某个 $s \ge 1$有 $r_s \ge \ell^{n+1-s}$。这就得到了所需结论。□

引理 2.7. 引理 2.6 中的同一组单项式 $\tau^E\xi^R$ 构成 $A(n)_{*,\,*}$作为自由右 $H_{*,\,*}$-模的一组基。

证明。将引理 2.2 的证明中的 $\mathscr{A}_{*,\,*}$ 和引理 2.1 替换为 $A(n)_{*,\,*}$ 和引理2.6。□

包含映射 $I(n) \subset I(n-1)$ 诱导出一个由满射 Hopf 代数胚同态构成的塔

$$\mathscr{A}_{*,*} \longrightarrow \dots \longrightarrow A(n)_{*,*} \longrightarrow A(n-1)_{*,*} \longrightarrow \dots \longrightarrow H_{*,*}\,. \tag{2.1}$$

复合映射

$$\lambda\colon \mathscr{A}_{*,*} \xrightarrow{\psi} \mathscr{A}_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} \mathscr{A}_{*,*} \xrightarrow{\pi_n \otimes \mathrm{id}} A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} \mathscr{A}_{*,*}$$

and

$$\rho\colon \mathscr{A}_{*,*} \xrightarrow{\psi} \mathscr{A}_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} \mathscr{A}_{*,*} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \pi_{n-1}} \mathscr{A}_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} A(n-1)_{*,*}$$

是 $\mathbb{Z}/\ell$-代数同态，从而赋予 $\mathscr{A}_{*,\,*}$ 以一个 $A(n)_{*,\,*}$-$A(n-1)_{*,\,*}$-双余模代数结构，而投影 $\pi_n\colon \mathscr{A}_{*,\,*} \to A(n)_{*,\,*}$ 是此类双余模代数范畴中的一个态射。

定义 2.8。令

$$X(n)_{*,*} = H_{*,*}\{\tau^E\xi^R \mid e_0 = \dots = e_n = 0, \ell^n \mid r_1, \dots, \ell \mid r_n\}$$

为由单项式 $\tau^E\xi^R$ 生成的自由左 $H_{*,\,*}$-模，其中 $E = (e_0, e_1, \dots)$ 和 $R = (r_1, r_2, \dots)$ 满足：对 $0 \le s \le n$ 有 $e_s = 0$，且对 $1 \le s \le n$ 有 $\ell^{n+1-s} \mid r_s$。令 $\alpha_n\colon \mathscr{A}_{*,\,*} \to X(n)_{*,\,*}$ 为左 $H_{*,\,*}$-模同态；若 $e_0 = \dots = e_n = 0$ 且 $\ell^n \mid r_1, \dots, \ell \mid r_n$，则它将 $\tau^E\xi^R$ 映为相同的单项式，否则映为 0。

引理 2.9。复合映射

$$\mathscr{A}_{*,*} \xrightarrow{\lambda} A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} \mathscr{A}_{*,*} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \alpha_n} A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} X(n)_{*,*}$$

是一个左 $A(n)_{*,\,*}$-余模同构。

证明。 λ 和 $\mathrm{id} \otimes \alpha_n$ 都与左侧 $A(n)_{*,\,*}$-余作用相容，因此只需证明它们的复合是左侧 $H_{*,\,*}$-模同构。$\mathscr{A}_{*,\,*}$的引理 2.1 中基的每个单项式都可唯一分解为 $\tau^E\xi^R = \tau^{E'}\xi^{R'} \cdot \tau^{E''}\xi^{R''}$，其中

$$\begin{cases} E' = (e_0, \dots, e_n, 0, \dots) & \\ R' = (r_1, \dots, r_n, 0, \dots) & \text{where } r_s < \ell^{n+1-s} \text{ for } 1 \le s \le n, \\ E'' = (0, \dots, 0, e_{n+1}, \dots) & \\ R'' = (r_1, \dots, r_n, r_{n+1}, \dots) & \text{where } \ell^{n+1-s} \mid r_s \text{ for } 1 \le s \le n, \end{cases}$$

并且 $E = E' + E''$、 $R = R' + R''$。因此，受限乘法

$$\begin{aligned} A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} X(n)_{*,*} &\xrightarrow{\phi} \mathscr{A}_{*,*} \\ \tau^{E'}\xi^{R'} \otimes \tau^{E''}\xi^{R''} &\longmapsto \tau^{E'}\xi^{R'} \cdot \tau^{E''}\xi^{R''} \end{aligned}$$

定义了一个左 $H_{*,*}$-模同构。我们证明复合映射

$$(\mathrm{id} \otimes \alpha_n)\lambda\phi \colon A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} X(n)_{*,*} \longrightarrow A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} X(n)_{*,*}$$

是双射的。对于 $t \geq 0$ 令 $F^t X(n)_{*,*}$ 为由定义 2.8 中拓扑次数为 $\geq t$ 的单项式生成的自由左 $H_{*,*}$-子模。这些子模给出 $X(n)_{*,*}$的一个递减滤过，其伴随分次模为 $\mathrm{gr}^t X(n)_{*,*} = F^t X(n)_{*,*}/F^{t+1}X(n)_{*,*}$。直接计算 $\lambda = (\pi_n \otimes \mathrm{id})\psi$ 可得

$$\lambda(\tau^{E'}\xi^{R'}) \equiv \tau^{E'}\xi^{R'} \otimes 1 \mod A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} F^1\mathscr{A}_{*,*},$$

其中 $F^1\mathscr{A}_{*,*} = \ker(\epsilon)$ 与之前相同，并且

$$\lambda(\tau^{E''}\xi^{R''}) = 1 \otimes \tau^{E''}\xi^{R''},$$

因为每个 τ_k for $k \geq n+1$ 以及每个 $\xi_i^{\ell^j}$ for $i + j \geq n+1$ 都是左 $A(n)_{*,*}$-余模本原元。因此，对于 $\tau^{E'}\xi^{R'} \in A(n)_{*,*}$和 $\tau^{E''}\xi^{R''} \in F^t X(n)_{*,*}$，我们有

$$(\mathrm{id} \otimes \alpha_n)\lambda(\tau^{E'}\xi^{R'} \cdot \tau^{E''}\xi^{R''}) \equiv \tau^{E'}\xi^{R'} \otimes \tau^{E''}\xi^{R''} \mod A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} F^{t+1}X(n)_{*,*}.$$

因此，对每个 $t \geq 0$，$(\mathrm{id} \otimes \alpha_n)\lambda\phi$ 都将 $A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} F^t X(n)_{*,*}$ 映到自身，而诱导同态

$$A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} \mathrm{gr}^t X(n)_{*,*} \longrightarrow A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} \mathrm{gr}^t X(n)_{*,*}$$

是恒等映射。引理得证，因为 $A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} F^t X(n)_{*,*}$ 在任意给定的双次数中最终为零。□

3. Some bicomodule algebras

[4, §2] 的经典定义也可以推广到动机语境中。

定义 3.1. 对于 $n \geq 0$，令 $J(n) \subset \mathscr{A}_{*,*}$ 为由以下元素生成的理想

$$J(n) = (\tau_{n+1}, \tau_{n+2}, \dots, \xi_2^{\ell^{n-1}}, \xi_3^{\ell^{n-2}}, \dots, \xi_n^{\ell}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots)$$

由 τ_k（对应 $k \geq n+1$）以及 $\xi_i^{\ell^j}$（对应 $i \geq 2$、 $j \geq 0$ 和 $i + j \geq n+1$）生成。注意， $I(n) = J(n) + (\xi_1^{\ell^n})$。令

$$C(n)_{*,*} = \mathscr{A}_{*,*}/J(n) = \frac{H_{*,*}[\tau_0, \dots, \tau_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]}{(\tau_0^2 - T_0, \dots, \tau_n^2 - T_n, \xi_2^{\ell^{n-1}}, \dots, \xi_n^{\ell})}$$

为商代数。设

$$B(n)_{*,*} = C(n)_{*,*}[1/\xi_1] = \frac{H_{*,*}[\tau_0, \dots, \tau_n, \xi_1^{\pm 1}, \xi_2, \dots, \xi_n]}{(\tau_0^2 - T_0, \dots, \tau_n^2 - T_n, \xi_2^{\ell^{n-1}}, \dots, \xi_n^{\ell})}$$

为远离 ξ_1 的 $C(n)_{*}$局部化$_{*}$。

例 3.2。

$$\begin{aligned} J(0) &= (\tau_1, \tau_2, \dots, \xi_2, \xi_3, \dots) \\ J(1) &= (\tau_2, \tau_3, \dots, \xi_2, \xi_3, \dots) \\ J(2) &= (\tau_3, \tau_4, \dots, \xi_2^{\ell}, \xi_3, \dots) \end{aligned}$$

so

$$C(0)_{*,*} = H_{*,*}[\tau_0, \xi_1]/(\tau_0^2 - T_0)$$
$$C(1)_{*,*} = H_{*,*}[\tau_0, \tau_1, \xi_1]/(\tau_0^2 - T_0, \tau_1^2)$$
$$C(2)_{*,*} = H_{*,*}[\tau_0, \tau_1, \tau_2, \xi_1, \xi_2]/(\tau_0^2 - T_0, \tau_1^2 - T_1, \tau_2^2, \xi_2^\ell)$$

and

$$B(0)_{*,*} = H_{*,*}[\tau_0, \xi_1^{\pm 1}]/(\tau_0^2 - T_0)$$
$$B(1)_{*,*} = H_{*,*}[\tau_0, \tau_1, \xi_1^{\pm 1}]/(\tau_0^2 - T_0, \tau_1^2)$$
$$B(2)_{*,*} = H_{*,*}[\tau_0, \tau_1, \tau_2, \xi_1^{\pm 1}, \xi_2]/(\tau_0^2 - T_0, \tau_1^2 - T_1, \tau_2^2, \xi_2^\ell)\,.$$

引理 3.3。（a）单项式 $\tau^E\xi^R$，其中 $E=(e_0,\dots,e_n)$ 和 $R=(r_1,\dots,r_n)$ 遍历所有满足 $e_s \in \{0,1\}$ for $0 \le s \le n$, $r_1 \ge 0$ and $0 \le r_s < \ell^{n+1-s}$ for $2 \le s \le n$ 的序列，构成 $C(n)_{*,\,*}$ 作为自由左 $H_{*,\,*}$-模的一组基。

(b) 单项式

$$\tau^E\xi^R = \tau_0^{e_0} \cdots \tau_n^{e_n} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \cdots \xi_n^{r_n}$$

其中 (E, R) 与 (a) 中相同，只是现在 r_1 可以是任意整数。这些单项式构成 $B(n)_{*,*}$ 的一组基，使其成为一个自由左 $H_{*,*}$-模。

证明。理想 $J(n)$ 等于由引理 2.1 中满足以下条件的单项式 $\tau^E\xi^R$ 生成的 $\mathscr{A}_{*,*}$ 的自由左 $H_{*,\,*}$-子模：对于某个 $s \ge n+1$，有 $e_s = 1$；或者对于某个 $s \ge 2$，有 $r_s \ge \ell^{n+1-s}$。这就推出了 (a) 部分。(b) 部分由对 ξ_1 求逆可得。□

引理 3.4. (a) 与引理 3.3(a) 中相同的单项式 $\tau^E\xi^R$ 构成$C(n)_{*,*}$ 的一组基，使其成为一个自由右 $H_{*,*}$-模。

(b) 与引理 3.3(b) 中相同的单项式 $\tau^E\xi^R$ 构成了 $B(n)_{*,\,*}$ 作为自由右 $H_{*,\,*}$-模的一组基。

证明。对于 (a)，在引理 2.2 的证明中，将 $\mathscr{A}_{*,\,*}$ 和引理 2.1 替换为$C(n)_{*,\,*}$ 和引理 3.3(a)。

对于 (b)，则将它们替换为 $B(n)_{*,\,*}$ 和引理 3.3(b)，并允许引理 2.2 的证明中的滤子指标 t 取遍所有整数；注意，对于任意给定的双次数 $F^tB(n)_{*,\,*} = B(n)_{*,\,*}$，当 t充分小时，结论总是成立。（或者，也可以通过对 ξ_1取逆，从 (a) 推出 (b)；不过，给出的证明还保证了 $\mathrm{gr}^t B(n)_{*,\,*}$ 上的左、右 $H_{*,\,*}$-作用一致，这一点将在引理 4.16(b) 中用到。）□

例 3.5。（a）单项式

$$\{\tau_0^e\xi_1^r \mid e \in \{0,1\}, r \ge 0\}$$

构成 $C(0)_{*,\,*}$ 的一组基，既是左 $H_{*,\,*}$-模，也是右$H_{*,\,*}$-模。（b）单项式

$$\{\tau_0^e\xi_1^r \mid e \in \{0,1\}, r \in \mathbb{Z}\}$$

构成 $B(0)_{*,\,*}$ 的一组基；它既是左 $H_{*,\,*}$-模的基，也是右 $H_{*,\,*}$-模的基。$\tau_0^e\xi_1^r$ 的同调双次数为 $(e+(2\ell-2)r,\ (\ell-1)r)$。

包含映射 $J(n) \subset I(n)$ 和局部化同态给出一个由 $\mathbb{Z}/\ell$-代数及代数同态构成的交换图

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathscr{A}_{*,*} & \xrightarrow{\pi_n} & A(n)_{*,\,*} & \twoheadrightarrow & A(n-1)_{*,\,*} & \twoheadrightarrow & A(0)_{*,*} \longrightarrow H_{*,*} \\
\| & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathscr{A}_{*,*} & \xrightarrow{\pi'_n} & C(n)_{*,\,*} & & \xrightarrow{\gamma_n} & & C(0)_{*,*} \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\mathscr{A}_{*,\,*}[1/\xi_1] & \longrightarrow & B(n)_{*,\,*} & & \xrightarrow{\beta_n} & & B(0)_{*,*}
\end{array}
\tag{3.1}
$$

引理 3.6. 在 $C(n)_{*,\,*}$ 上存在唯一的 $A(n)_{*,\,*}$-$A(n-1)_{*,\,*}$-双余模代数结构，使典范投影 $\pi'_n\colon \mathscr{A}_{*,\,*} \to \mathscr{A}_{*,\,*}/J(n) = C(n)_{*,\,*}$ 成为一个$A(n)_{*,\,*}$-$A(n-1)_{*,\,*}$-双余模代数同态。

证明。双余模结构映射是 $\mathbb{Z}/\ell$-代数同态，确定如下：

(1) 左余作用 $\lambda_n\colon C(n)_{*,*} \to A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} C(n)_{*,*}$ 由$\lambda_n \circ \pi'_n = (\mathrm{id} \otimes \pi'_n) \circ \lambda$刻画；它之所以存在，是因为对 $J(n)$的每个生成元 x，均有$(\pi_n \otimes \pi'_n)\psi(x) = 0$。
(2) 右余作用 $\rho_n\colon C(n)_{*,*} \to C(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} A(n-1)_{*,*}$由 $\rho_n \circ \pi'_n = (\pi'_n \otimes \mathrm{id}) \circ \rho$ 刻画；它之所以存在，是因为对 $J(n)$的每个生成元 x，均有$(\pi'_n \otimes \pi_{n-1})\psi(x) = 0$。

更明确地说，$\psi(\tau_k)$ 和 $\psi(\xi_i^{\ell^j})$ 都属于

$$I(n) \otimes_{H_{*,*}} \mathscr{A}_{*,*} \;\oplus\; \mathscr{A}_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} J(n) \longrightarrow \mathscr{A}_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} \mathscr{A}_{*,*}$$

and

$$J(n) \otimes_{H_{*,*}} \mathscr{A}_{*,*} \;\oplus\; \mathscr{A}_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} I(n-1) \longrightarrow \mathscr{A}_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} \mathscr{A}_{*,*}$$

分别对每个 $k \geq n+1$ 和每个 $i \geq 2$、$j \geq 0$ 及 $i+j \geq n+1$。代数同态 λ_n 和 ρ_n 定义余作用且彼此可交换，这一点可由以下事实形式地推出：$\mathscr{A}_{*,\,*}$ 是一个 $A(n)_{*,\,*}$-$A(n-1)_{*,\,*}$- 双余模。□

引理 3.7. 令 $\|\xi_1^{\ell^n}\| = ((2\ell-2)\ell^n, (\ell-1)\ell^n)$ 表示 $\xi_1^{\ell^n}$ 的双次数。存在一个短正合列

$$0 \to \Sigma^{\|\xi_1^{\ell^n}\|} C(n)_{*,*} \xrightarrow{\cdot \xi_1^{\ell^n}} C(n)_{*,*} \longrightarrow A(n)_{*,*} \to 0$$

$A(n)_{*,\,*}$-$A(n-1)_{*,\,*}$-双余模，其中 $\cdot\xi_1^{\ell^n}$ 表示 $x \mapsto x \cdot \xi_1^{\ell^n}$。

证明。根据 $I(n)$和 $J(n)$的定义，显然乘以 $\xi_1^{\ell^n}$ 在 $C(n)_{*,*}$ 上是单射，其余核为 $A(n)_{*,*}$。还需验证 $\cdot\xi_1^{\ell^n}$ 是一个 $A(n)_{*,*}$-$A(n-1)_{*,*}$-双余模同态，即它与左 $A(n)_{*,*}$-余作用以及右 $A(n-1)_{*,*}$-余作用相容。这等价于 $\xi_1^{\ell^n}$ 是左 $A(n)_{*,*}$-余模本原元，也是右 $A(n-1)_{*,*}$-余模本原元；这一点由以下观察可得：

$$\psi(\xi_1^{\ell^n}) \equiv 1 \otimes \xi_1^{\ell^n} \mod I(n) \otimes_{H_{*,*}} \mathscr{A}_{*,*}$$

and

$$\psi(\xi_1^{\ell^n}) \equiv \xi_1^{\ell^n} \otimes 1 \mod \mathscr{A}_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} I(n-1)\,.$$

□

定义3.8。我们赋予

$$B(n)_{*,*} = C(n)_{*,*}[1/\xi_1^{\ell^n}] = \operatorname*{colim}_j \big(\Sigma^{-j\|\xi_1^{\ell^n}\|} C(n)_{*,*}\big)$$

由图表的余极限给出的 $A(n)_{*,*}$-$A(n-1)_{*,*}$-双余模结构

$$C(n)_{*,*} \xrightarrow{\cdot\xi_1^{\ell^n}} \Sigma^{-\|\xi_1^{\ell^n}\|} C(n)_{*,*} \xrightarrow{\cdot\xi_1^{\ell^n}} \Sigma^{-2\|\xi_1^{\ell^n}\|} C(n)_{*,*} \xrightarrow{\cdot\xi_1^{\ell^n}} \dots .$$

引理 3.9. $B(n)_{*,*}$ 是一个 $A(n)_{*,*}$-$A(n-1)_{*,*}$-双余模代数，并且典范态射 $C(n)_{*,*} \to B(n)_{*,*}$ 是一个 $A(n)_{*,*}$-$A(n-1)_{*,*}$-双余模代数同态。

证明。左 $A(n)_{*,*}$-余作用

$$\lambda_n \colon B(n)_{*,*} \longrightarrow A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} B(n)_{*,*}$$

由左余作用得到

$$\lambda_n \colon C(n)_{*,*} \longrightarrow A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} C(n)_{*,*}$$

通过对 ξ_1 取逆（某个正幂）。由于后一个余作用是代数同态，前一个也如此。右 $A(n-1)_{*,*}$-余作用的情形完全类似。□

定义 3.10. 设 $\gamma_n \colon C(n)_{*,*} \to C(0)_{*,*}$ 以及 $\beta_n \colon B(n)_{*,*} \to B(0)_{*,*}$ 为 (3.1) 中所示的 $\mathbb{Z}/\ell$-代数同态。设 $\gamma_n' \colon C(n)_{*,*} \to H_{*,*}[\xi_1^{\ell^n}]$ 为 γ_n 与给定的左 $H_{*,*}$-模同态的复合

$$C(0)_{*,*} = H_{*,*}[\tau_0, \xi_1]/(\tau_0^2 - T_0) \longrightarrow H_{*,*}[\xi_1^{\ell^n}]$$

由下式给出，其中 $e \in \{0,1\}$ 和 $r \geq 0$ 为

$$\tau_0^e \xi_1^r \longmapsto \begin{cases} \xi_1^r & \text{if } e = 0 \text{ and } \ell^n \mid r, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并设 $\beta_n' \colon B(n)_{*,*} \to H_{*,*}[\xi_1^{\pm\ell^n}]$ 为其局部化。

注意，在 $C(0)_{*,*}$ 中的 $\tau_0 \cdot \eta_R(\tau)$ 经 γ_0' 映射到 $\rho\tau\xi_1$。因此， γ_n' 有时并非右 $H_{*,*}$-线性的。

命题 3.11. 这些复合映射

$$C(n)_{*,*} \xrightarrow{\lambda_n} A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} C(n)_{*,*} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\gamma_n'} A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} H_{*,*}[\xi_1^{\ell^n}]$$

and

$$B(n)_{*,*} \xrightarrow{\lambda_n} A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} B(n)_{*,*} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\beta_n'} A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} H_{*,*}[\xi_1^{\pm\ell^n}]$$

是左 $A(n)_{*,*}$-余模同构。

证明. $\mathbb{Z}/\ell$-代数同态

$$(\mathrm{id}\otimes\gamma_n)\lambda_n \colon C(n)_{*,*} \longrightarrow A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} C(0)_{*,*}$$

是左$H_{*,*}$-线性的，并将其余代数生成元映射为

$$\begin{cases} \tau_0 \longmapsto \tau_0 \otimes 1 + 1 \otimes \tau_0 & \\ \tau_k \longmapsto \tau_k \otimes 1 + \xi_k \otimes \tau_0 & \text{for } 1 \leq k \leq n, \\ \xi_1 \longmapsto \xi_1 \otimes 1 + 1 \otimes \xi_1 & \\ \xi_k \longmapsto \xi_k \otimes 1 + \xi_{k-1}^{\ell} \otimes \xi_1 & \text{for } 2 \leq k \leq n. \end{cases}$$

特别地，它和（$\mathrm{id}\otimes\gamma'_n$）$\lambda_n$ 保持了为 $m\geq 0$ 定义的递减（$\xi_1^{\ell^n}$）-进滤过（在本证明内部定义），其形式为

$$\begin{aligned}F^mC(n)_{*,*}&=C(n)_{*,*}\cdot(\xi_1^{\ell^n})^m\\F^mC(0)_{*,*}&=C(0)_{*,*}\cdot(\xi_1^{\ell^n})^m\\F^mH_{*,*}[\xi_1^{\ell^n}]&=H_{*,*}[\xi_1^{\ell^n}]\cdot(\xi_1^{\ell^n})^m\,.\end{aligned}$$

诱导同态

$$\frac{F^mC(n)_{*,*}}{F^{m+1}C(n)_{*,*}}\longrightarrow A(n)_{*,*}\otimes_{H_{*,*}}\frac{F^mH_{*,*}[\xi_1^{\ell^n}]}{F^{m+1}H_{*,*}[\xi_1^{\ell^n}]}$$

伴随分次左 $A(n)_{*,*}$-余模的同构由下式给出：

$$\tau^E\xi^R\cdot(\xi_1^{\ell^n})^m\longmapsto\tau^E\xi^R\otimes(\xi_1^{\ell^n})^m\,,$$

其中 $e_s\in\{0,1\}$ 表示 $0\leq s\leq n$，而 $0\leq r_s<\ell^{n+1-s}$ 表示 $1\leq s\leq n$。每个滤过在每个双次数下最终都为零，因此这意味着 $(\mathrm{id}\otimes\gamma'_n)\lambda_n$ 是一个同构。将 $\xi_1^{\ell^n}$ 取逆后，可得

$$(\mathrm{id}\otimes\beta'_n)\lambda_n\colon B(n)_{*,*}\xrightarrow{\cong}A(n)_{*,*}\otimes_{H_{*,*}}H_{*,*}[\xi_1^{\pm\ell^n}]$$

也是一个同构。 □

命题 3.12。复合映射

$$B(n)_{*,*}\xrightarrow{\rho_n}B(n)_{*,*}\otimes_{H_{*,*}}A(n-1)_{*,*}\xrightarrow{\beta_n\otimes\mathrm{id}}B(0)_{*,*}\otimes_{H_{*,*}}A(n-1)_{*,*}$$

是一个右 $A(n-1)_{*,*}$-余模代数同构。

证明。$\mathbb{Z}/\ell$-代数同态 $(\beta_n\otimes\mathrm{id})\rho_n$ 是左 $H_{*,*}$-线性的，并将其余代数生成元映射为

$$\begin{cases}\tau_0\longmapsto\tau_0\otimes 1+1\otimes\tau_0\\\tau_k\longmapsto\xi_1^{\ell^{k-1}}\otimes\tau_{k-1}+1\otimes\tau_k&\text{for }1\leq k\leq n,\\\xi_1\longmapsto\xi_1\otimes 1+1\otimes\xi_1\\\xi_k\longmapsto\xi_1^{\ell^{k-1}}\otimes\xi_{k-1}+1\otimes\xi_k&\text{for }2\leq k\leq n,\\\xi_1^{-\ell^n}\longmapsto\xi_1^{-\ell^n}\otimes 1\,.\end{cases}$$

令

$$\begin{cases}\check{\tau}_k=\tau_k\cdot\xi_1^{-\ell^{k-1}}&\text{for }1\leq k\leq n,\\\check{\xi}_k=\xi_k\cdot\xi_1^{-\ell^{k-1}}&\text{for }2\leq k\leq n,\end{cases}$$

我们可以将定义 3.1 中的表示改写为

$$B(n)_{*,*}=\frac{H_{*,*}[\tau_0,\check{\tau}_1,\dots,\check{\tau}_n,\xi_1^{\pm1},\check{\xi}_2,\dots,\check{\xi}_n]}{(\tau_0^2-T_0,\check{\tau}_1^2-\check{T}_1,\dots,\check{\tau}_n^2-\check{T}_n,\check{\xi}_2^{\ell^{n-1}},\dots,\check{\xi}_n^{\ell})}\,,$$

其中对于 $1\leq i\leq n$，我们使用记号

$$\check{T}_i=\begin{cases}\tau\check{\xi}_{i+1}+\rho\check{\tau}_{i+1}+\rho\tau_0\check{\xi}_{i+1}&\text{for }\ell=2,\\0&\text{for }\ell\text{ odd.}\end{cases}$$

注意，$\check{}\tau_k=\tau_k\cdot\xi_1^{\ell^n-\ell^{k-1}}\cdot\xi_1^{-\ell^n}$ 和 $\check{}\xi_k=\xi_k\cdot\xi_1^{\ell^n-\ell^{k-1}}\cdot\xi_1^{-\ell^n}$。因此，$(\beta_n\otimes\mathrm{id})\rho_n$满足

$$\begin{aligned}\check{\tau}_k\longmapsto 1\otimes\tau_{k-1}+\xi_1^{-\ell^{k-1}}\otimes\tau_k+\dots\\+\xi_1^{\ell^{k-1}-\ell^n}\otimes\tau_{k-1}\xi_1^{\ell^n-\ell^{k-1}}+\xi_1^{-\ell^n}\otimes\tau_k\xi_1^{\ell^n-\ell^{k-1}}\end{aligned}$$

对于 $1 \le k \le n$，并且

$$\check{\xi}_k \longmapsto 1 \otimes \xi_{k-1} + \xi_1^{-\ell^{k-1}} \otimes \xi_k + \dots \\ + \xi_1^{\ell^{k-1}-\ell^n} \otimes \xi_1^{\ell^n-\ell^{k-1}} \xi_{k-1} + \xi_1^{-\ell^n} \otimes \xi_1^{\ell^n-\ell^{k-1}} \xi_k$$

对于 $2 \le k \le n$。省略的各项包含二项式系数，且第一项之后的每一项都以 ξ_1 的负次幂作为左侧张量因子。因此，$(\beta_n \otimes \mathrm{id})\rho_n$ 保持为 $m \in \mathbb{Z}$ 定义的递增滤过（在本证明中内部定义），其定义为

$$F_m B(n)_{*,*} = H_{*,*}\{\tau_0^{e_0} \check{\tau}_1^{e_1} \cdots \check{\tau}_n^{e_n} \xi_1^{r_1} \check{\xi}_2^{r_2} \cdots \check{\xi}_n^{r_n} \mid e_0 + 2r_1 \le m\}$$
$$F_m B(0)_{*,*} = H_{*,*}\{\tau_0^{e_0} \xi_1^{r_1} \mid e_0 + 2r_1 \le m\},$$

其中，对于 $0 \le s \le n$，$e_s \in \{0,1\}$；对于 $2 \le s \le n$，$r_1 \in \mathbb{Z}$ 和 $0 \le r_s < \ell^{n+1-s}$ 如引理 3.3(b) 中所述。诱导同态

$$\frac{F_m B(n)_{*,*}}{F_{m-1} B(n)_{*,*}} \longrightarrow \frac{F_m B(0)_{*,*}}{F_{m-1} B(0)_{*,*}} \otimes_{H_{*,*}} A(n-1)_{*,*}$$

伴随分次右 $A(n-1)_{*,*}$-余模的 $H_{*,*}$-左模同构由下式给出

$$\tau_0^{e_0} \check{\tau}_1^{e_1} \cdots \check{\tau}_n^{e_n} \xi_1^{r_1} \check{\xi}_2^{r_2} \cdots \check{\xi}_n^{r_n} \longmapsto \tau_0^{e_0} \xi_1^{r_1} \otimes \tau_0^{e_1} \cdots \tau_{n-1}^{e_n} \xi_1^{r_2} \cdots \xi_{n-1}^{r_n}$$

对于 $e_0 + 2r_1 = m$。特别地，$\check{\tau}_k \mapsto \tau_{k-1}$ 和 $\xi_k \mapsto \xi_{k-1}$。每个滤过都是穷尽的，并且在每个双次数上最终为零，因此这表明 $(\beta_n \otimes \mathrm{id})\rho_n$ 是一个同构。□

4. ... AND THEIR DUAL BIMODULES

现在按照 [8]，将上一节的结果对偶化。

定义 4.1（[8, 定义 3.2]）。给定一个左 $H_{*,*}$-模 M，我们将对偶左 $H_{*,*}$-模定义为

$$M^\vee = \mathrm{Hom}_{H_{*,*}}(M, H_{*,*}).$$

$h \in H_{*,*}$ 在 $f \in M^\vee$ 上的左作用定义为

$$(hf)(m) = h\, f(m) = (-1)^{|h||f|} f(hm)$$

对于 $m \in M$，其中 $|h|$ 和 $|f|$ 分别是 h 和 f 的拓扑次数。若 M 是一个 $H_{*,*}$-$H_{*,*}$-双模，则 $M^\vee$ 也是一个双模，其右作用定义为

$$(fh)(m) = (-1)^{|h||m|} f(mh).$$

例 4.2。将 f 映射到 $f(1)$ 的典范同构 $H^\vee_{*,*} \cong H_{*,*} = H^{-*,-*}$ 是 $H_{*,*}$-$H_{*,*}$-双线性的。

引理 4.3（[8, 引理 3.3]）。设 M 是一个 $H_{*,*}$-$H_{*,*}$-双模，并设 N 是一个左 $H_{*,*}$-模。

(a) 存在一个自然同态 $\theta\colon M^\vee \otimes_{H_{*,*}} N^\vee \longrightarrow (M \otimes_{H_{*,*}} N)^\vee$，它是左 $H_{*,*}$-模的同态（若 N 是双模，则它也是 $H_{*,*}$-$H_{*,*}$-双模的同态），定义如下：

$$\theta(f \otimes g)(m \otimes n) = (-1)^{|g||m|} f(m\, g(n))$$

对于 $f \in M^\vee$、$g \in N^\vee$、$m \in M$ 和 $n \in N$。

(b) 若 L 是另一个双模，则该图表

$$\begin{array}{ccc} L^\vee \otimes_{H_{*,*}} M^\vee \otimes_{H_{*,*}} N^\vee & \xrightarrow{\theta \otimes \mathrm{id}} & (L \otimes_{H_{*,*}} M)^\vee \otimes_{H_{*,*}} N^\vee \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \theta} & & \downarrow{\scriptstyle \theta} \\ L^\vee \otimes_{H_{*,*}} (M \otimes_{H_{*,*}} N)^\vee & \xrightarrow{\theta} & (L \otimes_{H_{*,*}} M \otimes_{H_{*,*}} N)^\vee \end{array}$$

可交换。

(c) 两个复合映射 $M^\vee \cong M^\vee \otimes_{H_{*,*}} H^\vee_{*,*} \xrightarrow{\theta} (M \otimes_{H_{*,*}} H_{*,*})^\vee = M^\vee$ 和 $M^\vee \cong H^\vee_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} M^\vee \xrightarrow{\theta} (H_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} M)^\vee = M^\vee$ 都是恒等同态。

引理 4.4 ([8, 引理 3.4])。(a) 设 $(H_{*,*}, \Gamma)$ 是一个 Hopf 代数胚。其对偶 $\Gamma^\vee$ 是一个双分次 $\mathbb{Z}/\ell$-代数，包含 $H^\vee_{*,*}$ 作为子代数。

(b) 设 M 是一个左 Γ-余模。其对偶 $M^\vee$ 是一个左 $\Gamma^\vee$-模。

(c) 设 $(H_{*,*}, \Sigma)$ 是第二个 Hopf 代数胚，并设 N 是一个 Γ-Σ-双余模。其对偶 $N^\vee$ 是一个 $\Gamma^\vee$-$\Sigma^\vee$-双模。

证明。设 $\psi\colon \Gamma \to \Gamma \otimes_{H_{*,*}} \Gamma$ 是余乘法，设 $\lambda\colon M \to \Gamma \otimes_{H_{*,*}} M$ 是左余作用。Boardman 使用引理 4.3，将 $\Gamma^\vee$ 上的乘法定义为以下复合

$$\Gamma^\vee \otimes \Gamma^\vee \longrightarrow \Gamma^\vee \otimes_{H_{*,*}} \Gamma^\vee \xrightarrow{\theta} (\Gamma \otimes_{H_{*,*}} \Gamma)^\vee \xrightarrow{\psi^\vee} \Gamma^\vee$$

并将 $M^\vee$ 上的左作用定义为以下复合

$$\Gamma^\vee \otimes M^\vee \longrightarrow \Gamma^\vee \otimes_{H_{*,*}} M^\vee \xrightarrow{\theta} (\Gamma \otimes_{H_{*,*}} M)^\vee \xrightarrow{\lambda^\vee} M^\vee .$$

类似地，我们将 $N^\vee$ 上的双模作用定义为显然的复合

$$\Gamma^\vee \otimes N^\vee \otimes \Sigma^\vee \longrightarrow \Gamma^\vee \otimes_{H_{*,*}} N^\vee \otimes_{H_{*,*}} \Sigma^\vee \longrightarrow (\Gamma \otimes_{H_{*,*}} N \otimes_{H_{*,*}} \Sigma)^\vee \longrightarrow N^\vee .$$

Hopf 代数胚余单位的对偶 $\epsilon^\vee\colon H^\vee_{*,*} \to \Gamma^\vee$ 由 $\eta_L^\vee$（以及 $\eta_R^\vee$）分裂，并将 $H^\vee_{*,*}$ 表示为 $\Gamma^\vee$ 的子代数。□

对偶的 $\mathbb{Z}/\ell$-代数 $\Gamma^\vee$ 通常是非交换的。改用上同调分次后，我们现在将（左或右）$H_{*,*}$-模作用的对偶称为（左或右） $H^{*,*}$-模作用。

记号 4.5. 动机 Steenrod 代数 $\mathscr{A} = \mathscr{A}^\vee_{*,*}$ 是 Hopf 代数胚 $(H_{*,*}, \mathscr{A}_{*,*})$ 的对偶，参见 [64, §13], ，并包含 $H^{*,*}$ 作为子代数。它作为左 $H^{*,*}$-模由 Milnor 基 $\{\rho(E,R)\}_{E,R}$ 自由生成；该基定义为与引理 2.1 的单项式基 $\{\tau^E\xi^R\}_{E,R}$ 对偶。 $\rho(E,R)$ 的上同调双次数等于 $\tau^E\xi^R$ 的同调双次数。特别地，Steenrod 运算 $\beta^e P^r$ 与 $\tau_0^e\xi_1^r$ 对偶，其中 $e \in \{0,1\}$ 且 $r \geq 0$，参见 [64, 引理 13.1、引理 13.5]。根据 [64, 引理 11.1、推论 12.5] 以及 Adem 关系 [64, 定理 10.3],[58, 定理 4.5，运算 $\beta, P^1, P^\ell, P^{\ell^2}, \ldots$ 与 $H^{*,*}$中的元素共同生成 $\mathscr{A}$，使其成为一个 $\mathbb{Z}/\ell$-代数。当 $\ell = 2$ 时，我们用 Sq^{2r} 表示上同调双次数为 $(2r, r)$ 的 P^r ，用 Sq^{2r+1} 表示上同调双次数为 $(2r+1, r)$ 的 βP^r。

引理 4.6. 对于引理 2.1 中的 (E,R)，运算 $\rho(E,R)$ 也构成 $\mathscr{A}$ 作为右 $H^{*,*}$-模的一组基。

证明. 回忆引理 2.2 的证明中 $\mathscr{A}_{*,*}$ 的递减 $H_{*,*}$-$H_{*,*}$-双模滤过 $F^t\mathscr{A}_{*,*}$。对于 $t \geq 0$ ，令

$$F_{t-1}\mathscr{A} = \langle \rho(E,R) \mid \deg(\tau^E\xi^R) < t \rangle \subset \mathscr{A}$$

它是由上同调拓扑次数为 $< t$ 的运算 $\rho(E,R)$ 生成的左 $H^{*,*}$-子模。鉴于短正合列，它也是右 $H^{*,*}$-子模

$$0 \to F_{t-1}\mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}^\vee_{*,*} \longrightarrow (F^t\mathscr{A}_{*,*})^\vee \to 0 .$$

因此， $\{F_t\mathscr{A}\}_t$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个递增滤过，其各项为 $H^{*,*}$-$H^{*,*}$-双模，滤过商为

$$\mathrm{gr}_t\,\mathscr{A} = \frac{F_t\mathscr{A}}{F_{t-1}\mathscr{A}} \cong (\mathrm{gr}^t\,\mathscr{A}_{*,*})^\vee .$$

由于左、右 $H_{*,*}$-模作用在 $\mathrm{gr}^t\,\mathscr{A}_{*,*}$ 上相同，因此 $\mathrm{gr}_t\,\mathscr{A}$ 上的对偶左、右$H^{*,*}$-模作用也相同。因此，这些运算（的陪集）

$\rho(E,R)$ 次数为 $=t$ 的元素自由生成 $\mathrm{gr}_t\mathscr{A}$，使其成为右 $H^{*,*}$-模。由于滤过是穷尽的，次数为 ≥ 0 的运算集合构成 $\mathscr{A}$ 的右 $H^{*,*}$-模基。□

定义 4.7. 对于 $n\geq -1$，令 $\mathbb{Z}/\ell$-代数 $A(n)=A(n)^\vee_{*,*}\subset\mathscr{A}$ 为 Hopf 代数胚 $(H_{*,*}, A(n)_{*,*})$ 的对偶。

引理 4.8. 对于如引理 2.6 中的 (E,R)，运算 $\rho(E,R)$ 构成 $A(n)$ 的一个基，其中 $A(n)$ 是有限生成自由左 $H^{*,*}$-模。特别地，存在一个穷尽的 $\mathbb{Z}/\ell$-代数同态序列

$$H^{*,*}\subset\cdots\subset A(n-1)\subset A(n)\subset\cdots\subset\mathscr{A}\,.$$

证明. 由（引理 2.6 的证明）可得，因为 $I(n)\subset\mathscr{A}_{*,*}$ 是一个单项式理想。该序列与塔 (2.1) 对偶。□

引理 4.9. 对于如引理 2.6 中的 (E,R)，运算 $\rho(E,R)$ 也构成 $A(n)$ 的一个基，其中 $A(n)$ 是自由右 $H^{*,*}$-模。

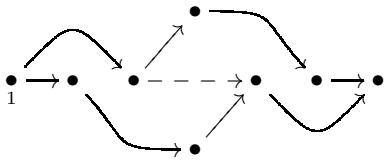
证明。在引理 4.6 的证明中，将 $\mathscr{A}_{*,*}$ 和引理 2.2 替换为 $A(n)_{*,*}$ 和 Lemma2.7。□

例 4.10。（a） $A(0)=H^{*,*}\langle\beta\rangle/(\beta^2)$，其中 $[\beta,x]=\beta(x)$ 对于 $x\in H^{*,*}$，$[\beta,x]=\beta x-(-1)^{|x|}x\beta$ 表示分次交换子。

（b）对于 $\ell=2$,

$$A(1)=\frac{H^{*,*}\langle\beta,P^1\rangle}{(\beta^2,P^1P^1=\tau\beta P^1\beta,(\beta P^1)^2=(P^1\beta)^2)}$$

其中 $[\beta,x]=\beta(x)$ 和 $[P^1,x]=P^1(x)$ 对于 $x\in H^{*,*}$。在下图中，每个圆点表示 $H^{*,*}$ 的一个副本，运算 $\beta=Sq^1$ 和 $P^1=Sq^2$ 分别将一列和两列向右移动，并且虚线箭头表示 $P^1P^1=Sq^2Sq^2$ 是生成元 $\beta P^1\beta=Sq^3Sq^1$ 的 τ 倍。



以下性质有时被视为 $A(n)$ 的定义。

引理 4.11. 对于 $n\geq 0$，运算 β、P^1、P^ℓ、.....、$P^{\ell^{n-1}}$，连同 $H^{*,*}$ 中的元素，一起生成 $A(n)$ 作为一个 $\mathbb{Z}/\ell$-代数。

证明. 当 ℓ 为奇数时，Adem 关系 [64, 定理 10.3] 表明，由 β、P^1、P^ℓ、.....、$P^{\ell^{n-1}}$ 生成的 $A(n)$ 的子代数同构于经典有限子代数 $A(n)^{\mathrm{cl}}$，它是经典 Steenrod代数的子代数。根据 [48, 命题 2]，其 $\mathbb{Z}/\ell$-模基等于引理 4.8 中 $A(n)$ 的 $H^{*,*}$-模基。

对于 $\ell=2$，Adem 关系 τ 和 ρ 中的系数 [58, Thm. 4.5.1]（修正了 [64, Thm. 10.2]）意味着，米尔诺乘积公式 [48, Thm. 4b] 在动机语境中需要调整。对于 $i\geq 0$，令 Q_i 为与 τ_i 对偶的 Milnor 基元素；对于 $i\geq 1$ 和 $j\geq 0$，令 P_i^j 为与之对偶的 Milnor 基元素

于 $\xi_i^{\ell^j}$。特别地， $Q_0=\beta$ 和 $P_1^j=P^{\ell^j}$。数组

$$\begin{array}{ccccc}\xi_1^{\ell^{n-1}} & & & & \\ \xi_1^{\ell^{n-2}} & \xi_2^{\ell^{n-2}} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n & \\ \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_{n-1} & \tau_n\end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccccc}P_1^{n-1} & & & & \\ P_1^{n-2} & P_2^{n-2} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ P_1^0 & P_2^0 & \dots & P_n^0 & \\ Q_0 & Q_1 & \dots & Q_{n-1} & Q_n\end{array}$$

可能会有帮助，参见 [44, 第 232] 页。令 $n\geq 1$ ，并假设根据归纳法，该引理对 A（$n-1$）成立。我们证明包含映射

$$\begin{aligned}A(n-1)\langle P_1^{n-1}\rangle \subset A(n-1)\langle P_1^{n-1},P_2^{n-2}\rangle \subset \dots \\ \subset A(n-1)\langle P_1^{n-1},\dots,P_n^0,Q_n\rangle \subset A(n)\end{aligned}$$

全都是等式。这里用 A（$n-1$）$\langle P_1^{n-1}$、.....、$P_k^{n-k}\rangle$ 表示由 A（$n-1$）以及满足 $1\leq t\leq k$ 的 P_t^{n-t} 生成的 A （ n ）的子代数； Q_n 的情形也类似。这就完成了归纳步骤，因为 A（$n-1$）$\langle P_1^{n-1}\rangle$ 由 β、P^1、.....、$P^{\ell^{n-2}}$、$P^{\ell^{n-1}}$ 以及 $H^{*,\,*}$ 中的元素生成。考虑 $2\leq k\leq n$。我们断言

$$[P_{k-1}^{n+1-k},P_1^{n-k}]=P_k^{n-k} \mod A(n-1)\,. \tag{4.1}$$

左侧的交换子是 $H^{*,\,*}$-线性组合，由 A（n）中的米尔诺基元素ρ（E， R）组成，如引理 4.8 所示。 ρ（E， R）的 $H^{*,\,*}$-系数是以下各项的 $H_{*,\,*}$-系数之和

$$\xi_{k-1}^{\ell^{n+1-k}}\otimes\xi_1^{\ell^{n-k}} \quad \text{and} \quad \xi_1^{\ell^{n-k}}\otimes\xi_{k-1}^{\ell^{n+1-k}} \tag{4.2}$$

在 $\psi(\tau^E\xi^R)$ 中，由于 $\ell=2$，我们可以忽略符号。基元素 P_k^{n-k} 出现时的系数为 1，这是因为 $\psi(\xi_k^{\ell^{n-k}})$ 中的项 $\xi_{k-1}^{\ell^{n+1-k}}\otimes\xi_1^{\ell^{n-k}}$。

对于不属于 $A(n-1)$ 的其他 $\rho(E,R)$，根据次数可知，$\xi_1^{\ell^{n-1}}$、.....、$\xi_{k-1}^{\ell^{n+1-k}}$ 中恰有一个必须整除 $\tau^E\xi^R$。当 $1\leq t\leq k-2$ 时，余乘法中没有任何项

$$\psi(\xi_t^{\ell^{n-t}})=\sum_{i+j=t}\xi_i^{\ell^{n-i}}\otimes\xi_j^{\ell^{n-t}}$$

整除 (4.2) 中的任一张量积。因此，这些 $\xi_t^{\ell^{n-t}}$ 整除 $\tau^E\xi^R$ 的 $\rho(E,R)$ 不会对 (4.1) 中的交换子产生贡献。在剩下的唯一情形 $t=k-1$ 中，余乘法 $\psi(\xi_{k-1}^{\ell^{n+1-k}})$ 含有两项分别整除 (4.2) 中的项，即 $1\otimes\xi_{k-1}^{\ell^{n+1-k}}$ 和 $\xi_{k-1}^{\ell^{n+1-k}}\otimes 1$。互补因子 $\xi_1^{\ell^{n-k}}\otimes 1$ 和 $1\otimes\xi_1^{\ell^{n-k}}$ 仅出现在

$$\psi(\xi_1^{\ell^{n-k}})=1\otimes\xi_1^{\ell^{n-k}}+\xi_1^{\ell^{n-k}}\otimes 1\,,$$

因此，对断言（4.1）的最后一个可能贡献是与 $\xi_1^{\ell^{n-k}}\cdot\xi_{k-1}^{\ell^{n+1-k}}$ 对偶的 $\rho(E,R)$，其$H^{*,\,*}$-系数是以下各项的$H_{*,\,*}$-系数之和

$$\psi(\xi_1^{\ell^{n-k}}\cdot\xi_{k-1}^{\ell^{n+1-k}})=\psi(\xi_1^{\ell^{n-k}})\cdot\psi(\xi_{k-1}^{\ell^{n+1-k}})\,.$$

由于 $\xi_{k-1}^{\ell^{n+1-k}}\otimes\xi_1^{\ell^{n-k}}$ 和 $\xi_1^{\ell^{n-k}}\otimes\xi_{k-1}^{\ell^{n+1-k}}$ 在这个乘积中各出现两次，因此最后这个贡献模 ℓ 为 0。这就证明了断言（4.1）。类似的公式

$$[P_n^0,Q_0]=Q_n \tag{4.3}$$

在 $A(n)$ 中严格成立，并且已在 [64, 命题 13.6] 中证明。对 k 进行归纳可得

$$A(n-1)\langle P_1^{n-1}\rangle=A(n-1)\langle P_1^{n-1},\dots,P_n^0\rangle=A(n-1)\langle P_1^{n-1},\dots,P_n^0,Q_n\rangle\,.$$

最后，恒等式

$$A(n-1)\langle P_1^{n-1},\dots,P_n^0,Q_n\rangle = A(n)$$

由经典的过剩度过滤论证可得，正如 [44, 命题 15。8],其中， $\rho(E,R)$ 的过剩度定义为 $\sum_s e_s + 2\sum_s r_s$。□

引理 4.12。对于定义 2.8 中的 (E,R)，运算 $\rho(E,R)$ 构成 $\mathscr{A}$ 作为自由左 $A(n)$-模的一个基。

证明。这由引理 2.9 对偶化而得。□

引理 4.13。设 $E_n = (1,\dots,1)$ 和 $R_n = (\ell^n-1,\dots,\ell-1)$，使得 $t_n = \deg(\tau^{E_n}\xi^{R_n})$ 是 $A(n)_{*,*}$ 中单项式的最高拓扑次数。那么，除非 $0 \le p \le q+d+t_n$，$A(n)^{p,q} = 0$。因此，子集

$$\{(e,r) \mid A(n)^{p-e-(2\ell-2)r,q-(\ell-1)r} \neq 0\} \subset \{0,1\}\times\mathbb{Z}$$

对于给定的上同调双次数，其数量有限 (p,q)。

证明。$H_{*,*}$-模 $A(n)_{*,*}$ 的生成元位于同调双次数 (t,u)，且满足 $0 \le t \le t_n$ 和 $u \ge 0$。因此， $A(n)$ 的 $H^{*,*}$-模生成元位于上同调双次数 (p,q)，且满足 $0 \le p \le t_n$ 和 $q \ge 0$。由于 $H^{*,*}$ 集中在满足 $0 \le p \le q+d$ 的双次数上，因此 $A(n)$ 集中在满足 $0 \le p \le q+d+t_n$ 的无限三角区域内。斜率为 $1/2$ 的每条直线在 (p,q) 平面上与该三角区域相交于一个有界区间，这就说明了有限性。□

定义 4.14。对于 $n \ge 0$，令 $C(n) = C(n)^\vee_{*,*} \subset \mathscr{A}$ 和 $B(n) = B(n)^\vee_{*,*}$ 为 $A(n)_{*,*}$-$A(n-1)_{*,*}$-双余模 $C(n)_{*,*}$ 和 $B(n)_{*,*}$ 的对偶。令符号

$$\rho(E,R) \in B(n)$$

在单项式左$H_{*,*}$-模基中与 $\tau^E\xi^R$ 对偶，对应于 $B(n)_{*,*}$。局部化单态射 $C(n)_{*,*} \to B(n)_{*,*}$ 的对偶是一个典范的 $A(n)$-$A(n-1)$-双模满同态 $B(n) \to C(n)$。

引理 4.15。(a) 对于引理 3.3(a) 中的(E,R)，运算 $\rho(E,R)$构成 $C(n)$作为自由左 $H^{*,*}$-模的一组基。

(b) 对于引理 3.3(b) 中的(E,R)，符号 $\rho(E,R)$构成 $B(n)$作为自由左 $H^{*,*}$-模的一组基。

(c) 典范满同态 $B(n) \to C(n)$满足

$$\rho(E,R) \longmapsto \begin{cases} \rho(E,R) & for\ r_1 \ge 0, \\ 0 & for\ r_1 < 0. \end{cases}$$

证明。(a)由（证明中的）引理 3.3(a)推出，因为 $J(n) \subset \mathscr{A}_{*,*}$ 是一个单项式理想。(b)同理由引理 3.3(b)推出。因此，$\rho(E,R)$在 $C(n)_{*,*}$ 上的限制，当 $r_1 \ge 0$时与 $\tau^E\xi^R$ 对偶，否则为零，从而证明了(c)。□

引理 4.16. (a) 对于引理 3.3(a) 中的 (E,R)，运算 $\rho(E,R)$ 也构成 $C(n)$ 作为自由右 $H^{*,\,*}$-模的一组基。

(b) 对于引理 3.3(b) 中的 (E,R)，符号 $\rho(E,R)$ 也构成$B(n)$ 作为自由右 $H^{*,\,*}$-模的一组基。

证明. 对于部分 (a)，在引理 4.6 的证明中，将 $\mathscr{A}_{*,\,*}$ 和引理 2.2 替换为$C(n)_{*,\,*}$ 和引理 3.4(a)。

对于 (b)，则将这些替换为 $B(n)_{*,\,*}$ 和引理 3.4(b)，并允许引理 4.6 的证明中的滤子指标 t 取遍所有整数；注意，对于任意给定的双次数 $F_tB(n) = 0$，当 t充分小时，这一结论都成立。□

例 4.17。(a) Steenrod 运算

$$\{\beta^e P^r \mid e \in \{0,1\}, r \geq 0\}$$

构成 $C(0)$ 的基，作为左 $H^{*,*}$-模，以及右 $H^{*,*}$-模。当 $\ell = 2$ 时，这些是 $k \geq 0$ 的 Steenrod 运算 Sq^k。

(b) 符号

$$\{\beta^e P^r \mid e \in \{0,1\}, r \in \mathbb{Z}\},$$

与 $\tau_0^e \xi_1^r$ 对偶的 $\beta^e P^r$ 构成 $B(0)$ 的基，作为左 $H^{*,*}$-模，以及右 $H^{*,*}$-模。当 $\ell = 2$ 时，这些是 $k \in \mathbb{Z}$ 的符号 Sq^k。同态 $B(0) \to C(0)$ 将 $\beta^e P^r$ 映射为 $r \geq 0$ 对应的 Steenrod 运算，而在 $r < 0$ 时映射为零。

引理 4.18. 对每个 $n \geq 0$，存在一个交换图，其中的双模为 $A(n)$-$A(n-1)$- 双模

$$\begin{array}{ccc} A(n) & \rightarrowtail & A(n+1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(n) & \rightarrowtail & C(n+1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ B(n) & \rightarrowtail & B(n+1), \end{array}$$

其中右侧的双模结构是通过限制从固有的 $A(n+1)$-$A(n)$-双模结构得到的。

证明。这可通过比较图 (3.1) 与将 n 替换为 $n+1$ 后得到的对应图，并取对偶而直接得出。□

命题 4.19。(a) 包含映射 $H_{*,\ *}[\xi_1^{\ell^n}]^\vee \subset C(n)$ 可延拓为一个同构

$$A(n) \otimes_{H^{*,*}} H_{*,*}[\xi_1^{\ell^n}]^\vee \xrightarrow{\cong} C(n)$$

左 $A(n)$-模的同构。因此 Steenrod 运算

$$\{P^r \mid r \geq 0 \ with\ \ell^n \mid r\}$$

构成 $C(n)$ 作为自由左 $A(n)$-模的一组基。

(b) 包含映射 $H_{*,\ *}[\xi_1^{\pm\ell^n}]^\vee \subset B(n)$ 可延拓为一个同构

$$A(n) \otimes_{H^{*,*}} H_{*,*}[\xi_1^{\pm\ell^n}]^\vee \xrightarrow{\cong} B(n)$$

左 $A(n)$-模。因此这些符号

$$\{P^r \mid r \in \mathbb{Z} \ with\ \ell^n \mid r\}$$

构成 $B(n)$ 作为自由左 $A(n)$-模的基。P^r 的上同调双次数为 $((2\ell-2)r, (\ell-1)r)$。

证明。上述同态

$$\theta\colon A(n)^\vee_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} H_{*,*}[\xi_1^{\ell^n}]^\vee \longrightarrow (A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} H_{*,*}[\xi_1^{\ell^n}])^\vee$$

and

$$\theta\colon A(n)^\vee_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} H_{*,*}[\xi_1^{\pm\ell^n}]^\vee \longrightarrow (A(n)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} H_{*,*}[\xi_1^{\pm\ell^n}])^\vee$$

是同构。这由引理 4.3(c) 和 4.13 得出，因为在每种情况下，θ 的源都是 $A(n)$ 的移位副本的直和，θ 的目标是相应的乘积，并且对于每个双次数 (p,q)，乘积中只有有限多个因子非零。

于是，(a) 和 (b) 中的结论可由命题 3.11 对偶化得到。□

命题 4.20。包含映射 $B(0) \subset B(n)$ 可延拓为一个同构

$$B(0) \otimes_{H^{*,*}} A(n-1) \xrightarrow{\cong} B(n)$$

$A(n-1)$-右模的。因此，符号

$$\{\beta^e P^r \mid e \in \{0,1\}, r \in \mathbb{Z}\}$$

构成 $B(n)$ 作为自由 $A(n-1)$-右模的一组基。$\beta^e P^r$ 的上同调双次数为 $(e + (2\ell-2)r, (\ell-1)r)$。

证明。该同态

$$\theta\colon B(0)^\vee_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} A(n-1)^\vee_{*,*} \longrightarrow (B(0)_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} A(n-1)_{*,*})^\vee$$

由引理 4.3(c) 和 4.13 可知，这是一个同构。因此，由命题 3.12 和例 4.17(b) 对偶化即可得出该结论。□

5. The small motivic Singer construction

本节和下一节中，我们遵循 [4] 的策略，将 [60] 和 [36] 的经典 Singer 构造$R_+(M)$推广到动机背景。我们将用 $R_S(M)$ 表示与对称群S_ℓ相关的（小）构造；在 [36] 中记作 $R_+(M)$，在 [4], 中记作 $T''(M)$，而其降悬构造$\Sigma^{-1}R_S(M)$在 [59] 和 [60] 中记作 $R_+(M)$，在 [4] 中记作 $T'(M)$。我们将用 $R_\mu(M)$ 表示与循环群 C_ℓ 及由 ℓ 次单位根构成的代数群 μ_ℓ 相关的（大）构造；在 [4] 中记作 $T(M)$，在 [39] 中记作 $R_+(M)$。当 $\ell = 2$ 时，这两种构造相同。

引理 5.1. 设 $n \geq 0$。

(a) 对每个左 $A(n-1)$-模 M，张量积 $B(n) \otimes_{A(n-1)} M$ 是左 $A(n)$-模。包含映射 $B(0) \subset B(n)$ 诱导一个同构

$$B(0) \otimes_{H^{*,*}} M \xrightarrow{\cong} B(n) \otimes_{A(n-1)} M\,.$$

(b) 若 M 是左 $A(n)$-模，则包含映射 $B(n) \subset B(n+1)$ 诱导一个同构

$$B(n) \otimes_{A(n-1)} M \xrightarrow{\cong} B(n+1) \otimes_{A(n)} M$$

左 $A(n)$-模之间的同构。

(c) 若 M 是左 $\mathscr{A}$-模，则复合映射 $B(n) \to C(n) \subset \mathscr{A}$ 诱导一个左 $A(n)$-模同态

$$\epsilon_n\colon B(n) \otimes_{A(n-1)} M \longrightarrow \mathscr{A} \otimes_{A(n-1)} M \longrightarrow M\,,$$

并且这些映射在 n 变化时彼此相容。

证明。(a) 这由 $B(n)$ 的 $A(n)$-$A(n-1)$-双模结构以及命题 4.20 显然可得。

(b) 该态射存在，因为 $B(n) \subset B(n+1)$ 是一个 $A(n)$-$A(n-1)$-双模同态，其中目标端取限制后的双模结构。通过比较 n 和 $n+1$ 对应的 (a) 部分中的同构，可知它是一个同构。

(c) 这是因为包含映射 $C(n) \subset C(n+1) \subset \mathscr{A}$是 $A(n)$-$A(n-1)$- 双模同态。在每种情况下，态射 $\mathscr{A} \otimes_{A(n-1)} M \longrightarrow M$ 均由左模作用 $\mathscr{A} \otimes M \to M$诱导。□

定义 5.2. 设 M 是任意左 $\mathscr{A}$-模。

(a) 令小动机 Singer 构造

$$R_S(M) = \operatorname*{colim}_n (B(n) \otimes_{A(n-1)} M)$$

是这一列同构的余极限

$$B(0) \otimes_{H^{*,*}} M \xrightarrow{\cong} \dots \xrightarrow{\cong} B(n) \otimes_{A(n-1)} M \xrightarrow{\cong} B(n+1) \otimes_{A(n)} M \xrightarrow{\cong} \dots\,,$$

赋予其唯一的左 $\mathscr{A}$-模结构，使得典范映射$B(n)\otimes_{A(n-1)}M\to R_S(M)$ 是 $A(n)$-模的同构，对每个 $n\geq 0$ 都成立。

(b) 令小求值同态

$$\epsilon\colon R_S(M)\longrightarrow M$$

为左 $\mathscr{A}$-模同态，使得对于每个 $n\geq 0$，其在 $B(n)\otimes_{A(n-1)}M$上的限制等于引理 5.1(c) 的 $A(n)$-模同态 ϵ_n。

显然， R_S 是左 $\mathscr{A}$-模的一个正合且保余极限自函子，并且 $\epsilon\colon R_S\to \mathrm{id}$ 是一个自然变换。

引理 5.3. 作为左 $A(0)$-模，小动机 Singer 构造由张量积

$$\begin{aligned} R_S(M)&\cong B(0)\otimes_{H^{*,*}}M\\ &= H^{*,*}\{\beta^e P^r \mid e\in\{0,1\}, r\in\mathbb{Z}\}\otimes_{H^{*,*}}M\,, \end{aligned}$$

给出，其中 $B(0)$ 赋予 $A(0)$-作用。因此， $R_S(M)$ 的每个元素都是形如 $\beta^e P^r\otimes m$ 的有限项之和，其中 $e\in\{0,1\}$、 $r\in\mathbb{Z}$和 $m\in M$，且 $\beta(P^r\otimes m)=\beta P^r\otimes m$以及 $\beta(\beta P^r\otimes m)=0$。小求值同态由下式给出

$$\epsilon\big(\beta^e P^r\otimes m\big)=\begin{cases}\beta^e P^r(m) & \text{for } r\geq 0,\\ 0 & \text{for } r<0.\end{cases}$$

证明。显然。 □

以下公式推广了 Singer 的公式 [59, (2.1)] （适用于 $\ell=2$ ），并改写了 Li–Singer 在 [36, §3] 中给出的公式（适用于 ℓ 为奇数的情形）。 $\tau^{j\bmod 2}$表示 $\tau^0=1$在 j 为偶数时以及 $\tau^1=\tau$ 在 j 为奇数时。

命题 5.4. 对于 $\ell=2$ 且 $a\geq 0$ 为偶数， Sq^a 在 $R_S(M)$ 上的作用为

$$Sq^a(Sq^b\otimes m)=\sum_{j=0}^{[a/2]}\binom{b-1-j}{a-2j}\tau^{j\bmod 2}\cdot Sq^{a+b-j}\otimes Sq^j(m)$$

当 $b\in\mathbb{Z}$ 为偶数时，

$$\begin{aligned} Sq^a(Sq^b\otimes m)=&\sum_{j=0}^{[a/2]}\binom{b-1-j}{a-2j}Sq^{a+b-j}\otimes Sq^j(m)\\ &+\sum_{\substack{j=1\\ odd}}^{[a/2]}\binom{b-1-j}{a-2j}\rho\cdot Sq^{a+b-j-1}\otimes Sq^j(m) \end{aligned}$$

当 $b\in\mathbb{Z}$ 为奇数时。

对于 ℓ 为奇数且 $a\geq 0$， P^a 在 $R_S(M)$ 上的作用为

$$P^a(P^b\otimes m)=\sum_{j=0}^{[a/\ell]}(-1)^{a+j}\binom{(\ell-1)(b-j)-1}{a-\ell j}P^{a+b-j}\otimes P^j(m)$$

and

$$\begin{aligned} P^a(\beta P^b\otimes m)=&\sum_{j=0}^{[a/\ell]}(-1)^{a+j}\binom{(\ell-1)(b-j)}{a-\ell j}\beta P^{a+b-j}\otimes P^j(m)\\ &+\sum_{j=0}^{[(a-1)/\ell]}(-1)^{a+j-1}\binom{(\ell-1)(b-j)-1}{a-\ell j-1}P^{a+b-j}\otimes\beta P^j(m) \end{aligned}$$

对所有 $b\in\mathbb{Z}$。

证明。对于 $a = 0$，这些公式证实 Sq^0 和 P^0 是恒等运算。

对于 $\ell = 2$ 且 $a > 0$ 为偶数，选取 n 使得 $Sq^a \in A(n)$。于是对所有 $0 \le j \le [a/2]$，都有 $Sq^j \in A(n-1)$，并且 $Sq^i Sq^j \otimes m = Sq^i \otimes Sq^j(m)$ 属于 $B(n) \otimes_{A(n-1)} M$。当 $a < 2b$ 时，$Sq^a(Sq^b \otimes m)$ 的公式便由 Adem 关系 [64, 定理 10.2]（适用于 $Sq^a Sq^b$）推出，修正见 [58, 定理 4.5.1]。

类似地，对于 ℓ 为奇数且 $a > 0$，选取 n 使得 $P^a \in A(n)$。于是对所有 $0 \le j \le [a/\ell]$，都有 $P^j, \beta P^j \in A(n-1)$，并且 $P^i P^j \otimes m = P^i \otimes P^j(m)$ 和 $P^i \beta P^j \otimes m = P^i \otimes \beta P^j(m)$ 属于 $B(n) \otimes_{A(n-1)} M$。当 $a < \ell b$ 时，$P^a(P^b \otimes m)$ 和 $P^a(\beta P^b \otimes m)$ 的公式便由 Adem 关系 [64, 定理 10.3]（适用于 $P^a P^b$ 和 $P^a \beta P^b$）推出。（最后一个 Adem 关系对 $0 < a \le \ell b$ 有效，参见 [58, 定理 4.5.2]。）

在接下来的论证中，ℓ 可以是偶数，也可以是奇数。根据定义3.8，$B(n)_*$，$*$ 上的左$A(n)_*$，$*$-余作用与乘以 $\xi_1^{\ell^n}$ 可交换，因此 $B(n)$上的左 $A(n)$-作用与运算 $\beta^e P^r \mapsto \beta^e P^{r+\ell^n}$可交换。这里出现的所有模 ℓ 二项式系数也都以 ℓ^n为周期在 b中重复。因此，$a \ge \ell b$的公式可由 $a < \ell b$的公式推出。□

推论 5.5. 当 $\ell = 2$ 和 $a \ge 0$ 为偶数时，$R_S(H^*, *) \cong B(0)$上的 Sq^a 作用由下式给出

$$Sq^a(Sq^b) = \binom{b-1}{a} Sq^{a+b}$$

当 $b \in \mathbb{Z}$时。

当 ℓ 为奇数且 $a \ge 0$ 时，$R_S(H^*, *) \cong B(0)$上的 P^a 作用由下式给出

$$P^a(P^b) = (-1)^a \binom{(\ell-1)b-1}{a} P^{a+b}$$

and

$$P^a(\beta P^b) = (-1)^a \binom{(\ell-1)b}{a} \beta P^{a+b}$$

当 $b \in \mathbb{Z}$时。

证明。这是命题 5.4 的特殊情形，其中我们将$R_S(H^*,*) \cong B(0) \otimes_{H^{*,*}} H^{*,*} = B(0)$ 视为相同，并注意到对于所有 $j > 0$，$Sq^j(1) = 0$ 和 $P^j(1) = 0$在 $H^{*,*}$中。当 $\ell = 2$时，$P^a(P^b)$ 和 $P^a(\beta P^b)$ 的公式与给定的 $Sq^{2a}(Sq^{2b})$ 和 $Sq^{2a}(Sq^{2b+1})$ 的公式一致，因为 $\binom{b-1}{a} \equiv \binom{2b-1}{2a}$ 和$\binom{b}{a} \equiv \binom{2b}{2a}$ 模 2。□

记号 5.6. 设 $B\mu_\ell$ 和 BS_ℓ 分别是线性代数群 μ_ℓ 和 S_ℓ的几何分类空间。特别地，$B\mu_\ell \simeq \operatorname{hocolim}_n L^{2n-1}$，如第 10 节所述。回顾 [64, 定理 6.10、定理 6.16]，

$$H^{*,*}(B\mu_\ell) = H^{*,*}[u, v]/(u^2 = \tau v + \rho u)$$

其中 $\beta(u) = v$，且

$$H^{*,*}(BS_\ell) = H^{*,*}[c, d]/(c^2 = \tau d + \rho c)$$

以 $\beta(c) = d$ 为分次交换 $\mathscr{A}$-模 $H^{*,*}$-代数。u、v、c 和 d 的上同调双次数分别为 (1, 1)、(2, 1)、$(2\ell-3, \ell-1)$ 和 $(2\ell-2, \ell-1)$。当 ℓ 为奇数时，系数 τ 和 ρ 均解释为 0。任取一个本原 ℓ 次单位根 ζ，即可定义映射 $p_\zeta\colon B\mu_\ell \to BS_\ell$，它诱导出

$$p_\zeta^*\colon c \longmapsto -uv^{\ell-2}$$
$$p_\zeta^*\colon d \longmapsto -v^{\ell-1}\,.$$

我们在记号中省略 p_ζ^*，将 $H^{*,*}(BS_\ell)$ 视为 $H^{*,*}(B\mu_\ell)$ 的一个 $\mathscr{A}$-模子代数。$H^{*,*}(B\mu_\ell)$ 上自然的左 $\mathscr{A}$-模结构由以下情形确定

$$\beta^e P^r(u) = \begin{cases} u & \text{for } (e,r) = (0,0), \\ v & \text{for } (e,r) = (1,0), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\beta^e P^r(v) = \begin{cases} v & \text{for } (e,r) = (0,0), \\ v^\ell & \text{for } (e,r) = (0,1), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

以及 Cartan 公式 [64, 命题 9.7], ，从而得到以下表达式

$$\begin{aligned} P^r(uv^k) &= \binom{k}{r} uv^{(\ell-1)r+k} \\ \beta P^r(uv^k) &= \binom{k}{r} v^{(\ell-1)r+1+k} \\ P^r(v^k) &= \binom{k}{r} v^{(\ell-1)r+k} \\ \beta P^r(v^k) &= 0\,. \end{aligned}$$

在 $H^{*,*}(BS_\ell)$ 上受限的 $\mathscr{A}$-模作用由下式给出

$$\begin{aligned} P^r(cd^k) &= (-1)^r \binom{(\ell-1)(k+1)-1}{r} cd^{r+k} \\ \beta P^r(cd^k) &= (-1)^r \binom{(\ell-1)(k+1)-1}{r} d^{r+1+k} \\ P^r(d^k) &= (-1)^r \binom{(\ell-1)k}{r} d^{r+k} \\ \beta P^r(d^k) &= 0\,, \end{aligned}$$

对于 $r \geq 0$ 和 $k \geq 0$，参见 [58, 命题 4.4.6]。

特别地，对于所有 $0 < r < \ell^n$，$\beta(v^{\ell^n}) = 0$ 且 $P^r(v^{\ell^n}) = 0$，因此乘以 v^{ℓ^n} 在左侧对 $A(n)$ 线性作用于 $H^{*,*}(B\mu_\ell)$，参见引理 4.11。同理，乘以 d^{ℓ^n} 在左侧对 $A(n)$ 线性作用于 $H^{*,*}(BS_\ell)$。因此，以下两个局部化继承了相容的左 $A(n)$- 模结构，对所有 $n \geq 0$ 均成立。这些结构结合起来，给出良定义的左 $\mathscr{A}$-模结构，使得局部化同态是 $\mathscr{A}$-模 $H^{*,*}$-代数的映射。

定义 5.7. 令

$$\begin{aligned} H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}} = H^{*,*}(B\mu_\ell)[1/v] &= H^{*,*}[u, v^{\pm 1}]/(u^2 = \tau v + \rho u) \\ &= H^{*,*}\{u^i v^k \mid i \in \{0,1\}, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} H^{*,*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}} = H^{*,*}(BS_\ell)[1/d] &= H^{*,*}[c, d^{\pm 1}]/(c^2 = \tau d + \rho c) \\ &= H^{*,*}\{c^i d^k \mid i \in \{0,1\}, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

分别表示远离 v 和 d 的局部化。

定理 5.8。设 $\Sigma = \Sigma^{1,\,0}$。存在一个左 $\mathscr{A}$-模同构

$$R_S(H^{*,*}) \xrightarrow{\cong} \Sigma H^{*,*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}}$$

定义如下

$$P^k \longmapsto \Sigma cd^{k-1} \qquad and \qquad \beta P^k \longmapsto -\Sigma d^k$$

对于 $k \in \mathbb{Z}$。复合映射 $\Sigma H^{*,*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}} \cong R_S(H^{*,*}) \xrightarrow{\epsilon} H^{*,*}$ 是由下式给出的左 $\mathscr{A}$-线性同态

$$\Sigma cd^{-1} \longmapsto 1 \qquad and \qquad \Sigma c^i d^k \longmapsto 0$$

对于 $(i,k) \neq (1,-1)$，其中 $i \in \{0,1\}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$。

证明。由推论 5.5、记号 5.6 和定义 5.7，所指的 $H^{*,*}$-模同构分别将 $P^r(P^k)$ 和 $P^r(\beta P^k)$ 映射到 $P^r(\Sigma cd^{k-1})$ 和 $P^r(-\Sigma d^k)$，对所有 $r \geq 0$ 和 $k \in \mathbb{Z}$均成立。此外，$\beta(\Sigma cd^{k-1}) = -\Sigma d^k$ 以及 $\beta(-\Sigma d^k) = 0$。因此，该同构是 $\mathscr{A}$-线性的。复合映射的计算源于注意到 $\beta^e P^r(1) = 0$ in $H^{*,*}$，除非 $(e,r) = (0,0)$。□

6. The large motivic Singer construction

接下来，我们的目标是沿用 [4, §5]，，将大 Singer 构造$R_\mu(M)$ 构造为 $R_S(M)$ 的扩张，其中 $R_\mu(H^{*,*}) \cong \Sigma H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}}$。我们首先注意到，$H^{*,*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}} \subset H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}}$ 是一对分次 Frobenius 代数。这些对偶结构为 [4, 引理 5.1]中出现的显式公式提供了概念上的根源。

定义 6.1. 设留数同态

$$\mathrm{res}\colon \Sigma H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}} \longrightarrow H^{*,*}$$
$$\mathrm{res}\colon \Sigma H^{*,*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}} \longrightarrow H^{*,*}$$

为左 $H^{*,*}$-线性 Frobenius 形式，定义在 $i \in \{0,1\}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$ 上如下：

$$\mathrm{res}(\Sigma u^i v^k) = \mathrm{res}(\Sigma c^i d^k) = \begin{cases} 1 & \text{for } (i,k) = (1,-1), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

相应的 Frobenius 配对

$$\Sigma H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}} \otimes_{H^{*,*}} H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}} \longrightarrow H^{*,*}$$
$$\Sigma H^{*,*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}} \otimes_{H^{*,*}} H^{*,*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}} \longrightarrow H^{*,*}$$

将 $\Sigma x \otimes y$ 映射到 $\mathrm{res}(\Sigma xy)$，而伴随的 $H^{*,*}$-线性同态

$$\Sigma H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}} \xrightarrow{\cong} (H^{-*,-*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}})^\vee$$
$$\Sigma H^{*,*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}} \xrightarrow{\cong} (H^{-*,-*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}})^\vee$$

是由以下同构给出的

$$\Sigma v^k \longmapsto (uv^{-k-1})^\vee$$
$$\Sigma uv^{k-1} \longmapsto (v^{-k})^\vee + \rho \cdot (uv^{-k})^\vee$$

and

$$\Sigma d^k \longmapsto (cd^{-k-1})^\vee$$
$$\Sigma cd^{k-1} \longmapsto (d^{-k})^\vee + \rho \cdot (cd^{-k})^\vee$$

对于 $k \in \mathbb{Z}$。

引理 6.2. Frobenius 形式、相关的 Frobenius 配对以及伴随同构，全都是左 $\mathscr{A}$-线性的。

证明. 当 $B\mu_\ell$ 时，留数同态是 $\mathscr{A}$-线性的，因为对于 $r>0$，只要 $(\ell-1)r+k=-1$，就有 $P^r(uv^k)=0$，因为

$$\binom{(\ell-1)(-r)-1}{r}=(-1)^r\binom{\ell r}{r}\equiv 0 \mod \ell .$$

BS_ℓ 的情形可由此推出，也可由定理 5.8 的第二部分推出。其余同态的 $\mathscr{A}$-线性性形式上即可得到。□

回顾余模的余张量积 $\square$，例如参见 [17, §2]。

定义 6.3。令

$$R^S(H_{*,*})=\lim_n (B(n)_{*,*}\square_{A(n-1)_{*,*}} H_{*,*})\cong B(0)_{*,*}$$

为 $B(n)_{*,*}$ 中右 $A(n-1)_{*,*}$-余模本原元的（实现）极限。对每个 $n\geq 0$，它都是左 $A(n)_{*,*}$-余模代数，而这些余作用结合起来构成一个完备的左 $\mathscr{A}_{*,*}$-余模代数结构。记作

$$R^S(H_{*,*})=H^{*,*}[\tilde\tau,\tilde\xi^{\pm 1}]/(\tilde\tau^2=\tau\tilde\xi+\rho\tilde\tau\tilde\xi),$$

$\tilde{}$，其中 $\tilde\tau$ 和 $\tilde\xi$ 分别映到 $B(0)_{*,*}$ 中的 τ_0 和 ξ_1。注意，$R_S(H^{*,*})\cong R^S(H_{*,*})^\vee$，其中 $\beta^e P^r$ 在单项式基下与 $\tilde\tau^e\tilde\xi^r$ 对偶。

引理 6.4。复合的左 $\mathscr{A}$-模同构

$$R_S(H^{*,*})\xrightarrow{\cong}\Sigma H^{*,*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}}\xrightarrow{\cong}(H^{-*,-*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}})^\vee$$

是 $H^{*,*}$-代数同构的对偶

$$\Phi\colon H^{-*,-*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}}\xrightarrow{\cong}R^S(H_{*,*})$$

由下式给出

$$c\longmapsto -\tilde\tau\tilde\xi^{-1}+\rho\cdot 1 \qquad and \qquad d\longmapsto\tilde\xi^{-1}.$$

证明。复合同构将 P^k 映到 $(d^{-k})^\vee+\rho\cdot(cd^{-k})^\vee$，并将 βP^k 映到 $-(cd^{-k-1})^\vee$，因此它是如下 $H^{*,*}$-线性同态的对偶：该同态将 d^{-k} 映到 $(P^k)^\vee=\tilde\xi^k$，并将 cd^{-k} 映到 $-(\beta P^{k-1})^\vee+\rho\cdot(P^k)^\vee=-\tilde\tau\tilde\xi^{k-1}+\rho\cdot\tilde\xi^k$。这确实是一个代数同构。□

对于左 $\mathscr{A}_{*,*}$-余模 $M_{*,*}$，$A(n)_{*,*}$-$A(n-1)_{*,*}$-双余模代数乘积 ϕ 在 $B(n)_{*,*}$ 上诱导出一个配对

$$(B(n)_{*,*}\square_{A(n-1)_{*,*}}H_{*,*})\otimes_{H_{*,*}}(B(n)_{*,*}\square_{A(n-1)_{*,*}}M_{*,*})\longrightarrow(B(n)_{*,*}\square_{A(n-1)_{*,*}}M_{*,*})$$

对每个 $n\geq 0$，构成左 $A(n)_{*,*}$-余模

$$R^S(M_{*,*})=\lim_n(B(n)_{*,*}\square_{A(n-1)_{*,*}}M_{*,*})$$

一个完备左 $\mathscr{A}_{*,*}$-余模中的 $R^S(H_{*,*})$-模。通过代数同构 Φ，将 $R^S(M_{*,*})$ 视为一个$H^{-*,-*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}}$-模，由此可以构造诱导的$H^{-*,-*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}}$-模

$$R^\mu(M_{*,*})=H^{-*,-*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}}\underset{H^{-*,-*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}}}{\otimes}R^S(M_{*,*}).$$

作为左 $A(n)_{*,*}$-余模，它同构于一个有限直和

$$R^\mu(M_{*,*})\cong H^{*,*}\{1,v^{\ell^n},\dots,v^{\ell^n(\ell-2)}\}\otimes_{H^{*,*}}R^S(M_{*,*}),$$

其中 v^{ℓ^n} 的每个幂都是 $A(n)_{*,*}$-余模本原元。

对偶地，对于左 $\mathscr{A}$-模 M，完备的 $A(n)$-$A(n-1)$-双模余乘法

$$B(n)=B(n)^\vee_{*,*}\xrightarrow{\phi^\vee}(B(n)_{*,*}\otimes_{H_{*,*}}B(n)_{*,*})^\vee=B(n)\,\widehat{\otimes}_{H^{*,*}}\,B(n)$$

诱导出一个“余配对”

$$B(n) \otimes_{A(n-1)} M \longrightarrow (B(n) \otimes_{A(n-1)} H^{*,*}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{H^{*,*}} (B(n) \otimes_{A(n-1)} M)$$

对每个 $n \geq 0$，左 $A(n)$-模，从而得到小 Singer 构造

$$R_S(M) = \operatorname*{colim}_n (B(n) \otimes_{A(n-1)} M)$$

左 $\mathscr{A}$-模中的一个完备 $R_S(H^{*,*})$-余模。这里， $R_S(H^{*,*})$ 具有完备的 $H^{*,*}$-余代数结构，它与引理 6.4 中出现的 $R^S(H_{*,*})$ 上的 $H_{*,*}$-代数结构互为对偶。通过定理 5.8 中的同构，它对应于 $\Sigma H^{*,*}(BS\ell)_{\mathrm{loc}}$ 上的一个完备 $H^{*,*}$- 余代数结构。此外，代数包含 $H^{-*,-*}(BS\ell)_{\mathrm{loc}} \subset H^{-*,-*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}}$ 在左 $\mathscr{A}$-模中，经由对偶和定义 6.1 中的 Frobenius 同构，对应于一个完备的 $H^{*,*}$-余代数满射

$$\pi\colon \Sigma H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}} \twoheadrightarrow \Sigma H^{*,*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}}$$

在左 $\mathscr{A}$-模中，由下式给出

$$\Sigma v^{(\ell-1)k} \longmapsto (-1)^k \Sigma d^k \qquad \text{and} \qquad \Sigma u v^{(\ell-1)k-1} \longmapsto (-1)^k \Sigma c d^{k-1}\,,$$

而其余的 $H^{*,*}$-模生成元 $\Sigma u^i v^k$ 与 $i \in \{0,1\}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$ 一起映射为零。这一讨论启发了以下定义。

定义 6.5. 设 M 为任意左 $\mathscr{A}$-模。

（a）令大型动机 Singer 构造

$$R_\mu(M) = \Sigma H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}} \mathop{\square}_{\Sigma H^{*,*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}}} R_S(M)$$

为沿完备的 $H^{*,*}$-余代数满射 π，从 $R_S(M)$ 余诱导得到的左 $\mathscr{A}$-模。作为左 $A(n)$-模，它同构于有限直和

$$R_\mu(M) \cong H^{*,*}\{1, v^{\ell^n}, \dots, v^{\ell^n(\ell-2)}\} \otimes_{H^{*,*}} R_S(M)$$

其中， $A(n)$ 平凡作用，即通过 $\eta_{L,n}^{\vee}\colon A(n) \to H^{*,*}$，作用于 v^{ℓ^n} 的每个幂。

(b) 设大求值同态

$$\epsilon\colon R_\mu(M) \longrightarrow M$$

为复合映射 $\epsilon(\pi \,\square\, 1)\colon R_\mu(M) \to R_S(M) \to M$。

推论 6.6。存在一个左 $\mathscr{A}$-模同构

$$R_\mu(H^{*,*}) \cong \Sigma H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}}\,.$$

复合映射 $\Sigma H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}} \cong R_\mu(H^{*,*}) \xrightarrow{\epsilon} H^{*,*}$ 等于关于 $B\mu_\ell$的剩余同态。

证明。此结论可由定理 5.8 直接推出。 □

引理 6.7。作为左 $A(0)$-模，大动机 Singer 构造由张量积给出

$$R_\mu(M) \cong H^{*,*}\{\Sigma u^i v^k \mid i \in \{0,1\}, k \in \mathbb{Z}\} \otimes_{H^{*,*}} M$$

带有来自 $\Sigma H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}}$ 的 $A(0)$-作用。因此， $R_\mu(M)$ 的每个元素都是有限个项 $\Sigma u^i v^k \otimes m$ 的和，其中 $i \in \{0,1\}$、 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $m \in M$，且 $\beta(\Sigma u v^k \otimes m) = -\Sigma v^{k+1} \otimes m$，$\beta(\Sigma v^k \otimes m) = 0$。

证明。显然。 □

下面的公式推广了 Singer 在 [60, (3.2)] 中给出的经典公式（适用于 $\ell = 2$），以及 Lunøe–Nielsen 和第二作者在 [39, 定义 3.1] 中给出的公式（适用于 ℓ 奇数）。后两个公式的作者想必早已知道这些公式，见 [4]。

命题 6.8. 对于 $\ell=2$ 和 $r\geq 0$， Sq^{2r} 在 $R_\mu(M)\cong R_S(M)$上的作用由下式给出

$$Sq^{2r}(\Sigma uv^k\otimes m)=\sum_{j=0}^{[r/2]}\binom{k-j}{r-2j}\Sigma uv^{r+k-j}\otimes Sq^{2j}(m)$$
$$+\sum_{j=0}^{[(r-1)/2]}\binom{k-j}{r-2j-1}\tau\cdot\Sigma v^{r+k-j}\otimes Sq^{2j+1}(m)$$

and

$$Sq^{2r}(\Sigma v^k\otimes m)=\sum_{j=0}^{[r/2]}\binom{k-j}{r-2j}\Sigma v^{r+k-j}\otimes Sq^{2j}(m)$$
$$+\sum_{j=0}^{[(r-1)/2]}\binom{k-j-1}{r-2j-1}\Sigma(u+\rho)v^{r+k-j-1}\otimes Sq^{2j+1}(m)\,.$$

此处 $\Sigma(u+\rho)v^{r+k-j-1}=\Sigma uv^{r+k-j-1}+\rho\cdot\Sigma v^{r+k-j-1}$。

对于 ℓ为奇数的情形， P^r在 $R_\mu(M)$ 上的作用由下式给出

$$P^r(\Sigma uv^{k-1}\otimes m)=\sum_{j=0}^{[r/\ell]}\binom{k-(\ell-1)j-1}{r-\ell j}\Sigma uv^{k+(\ell-1)(r-j)-1}\otimes P^j(m)$$

and

$$P^r(\Sigma v^k\otimes m)=\sum_{j=0}^{[r/\ell]}\binom{k-(\ell-1)j}{r-\ell j}\Sigma v^{k+(\ell-1)(r-j)}\otimes P^j(m)$$
$$+\sum_{j=0}^{[(r-1)/\ell]}\binom{k-(\ell-1)j-1}{r-\ell j-1}\Sigma uv^{k+(\ell-1)(r-j)-1}\otimes\beta P^j(m)\,.$$

证明。对于 $\ell=2$，根据定理 5.8，将 Sq^{2k}和 Sq^{2k+1} 分别替换为 $\Sigma cd^{k-1}=\Sigma uv^{k-1}$ 和 $-\Sigma d^k=\Sigma v^k$，即可由命题 5.4 得到这些公式。对 $0\leq j\leq[a/2]$ 的求和分为两种情形，具体取决于 j的奇偶性，所得各项可以按所示方式合并。

对于 ℓ 为奇数的情形，我们首先将 $R_S(M)$ 改写为

$$\Sigma H^{*,*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}}\otimes_{H^{*,*}}M=H^{*,*}\{\Sigma c^id^k\mid i\in\{0,1\},k\in\mathbb{Z}\}\otimes_{H^{*,*}}M\,,$$

分别将 P^k和 βP^k替换为 Σcd^{k-1}和 $-\Sigma d^k$。对于 $r\geq 0$，P^r在 $R_S(M)$ 上的作用于是由下式给出

$$P^r(\Sigma(cd^{-1})(-d)^b\otimes m)=\sum_{j=0}^{[r/\ell]}\binom{(\ell-1)(b-j)-1}{r-\ell j}\Sigma(cd^{-1})(-d)^{r+b-j}\otimes P^j(m)$$

and

$$P^r(\Sigma(-d)^b\otimes m)=\sum_{j=0}^{[r/\ell]}\binom{(\ell-1)(b-j)}{r-\ell j}\Sigma(-d)^{r+b-j}\otimes P^j(m)$$
$$+\sum_{j=0}^{[(r-1)/\ell]}\binom{(\ell-1)(b-j)-1}{r-\ell j-1}\Sigma(cd^{-1})(-d)^{r+b-j}\otimes\beta P^j(m)$$

对于 $b\in\mathbb{Z}$。代入 $cd^{-1}=uv^{-1}$、 $-d=v^{\ell-1}$ 和 $k=(\ell-1)\,b$，即可得到所述公式，适用于 k 是 $\ell-1$的倍数的情形。一般情形也随之成立，因为当 n 足够大，使得 $0<r<\ell^n$ 时， P^r 在 $R_\mu(M)$ 上的作用与乘以 $b\in\mathbb{Z}$ 可交换

，且 ℓ^n 与 $\ell-1$ 互素。所有出现的模 ℓ 二项式系数都是关于 $k\in\mathbb{Z}$ 的 ℓ^n-周期函数。□

7. The evaluations are Ext-equivalences等价

现在，我们可以将 [4, 引理 2.2] 推广到动机语境。我们不再采用其中对 $\mathbb{F}_p\otimes_{\mathscr{A}}(-)$ 和 Tor-等价的使用，因为 $H^{*,\,*}$ 并非自然的右 $\mathscr{A}$-模，而是直接转向 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,H^{*,\,*})$ 和 Ext 等价。

引理 7.1. 设 M 是一个自由左 $\mathscr{A}$-模。对每个 n，Singer 构造 $R_S(M)$ 和 $R_\mu(M)$ 都是左 $A(n)$-模中的自由模，并且是左 $\mathscr{A}$-模中的平坦模。

证明。由于 M 是左 $\mathscr{A}$-自由的，根据引理 4.12，它也是左 $A(n-1)$-自由的。因此，左 $A(n)$-模 $R_S(M)=B(n)\otimes_{A(n-1)}M$ 是（适当移位的） $B(n)$ 的直和，而根据命题 4.19(b)，其中每个都是左 $A(n)$-自由的。因此，对每个 n，$R_S(M)$ 都是左 $A(n)$-自由的，故

$$\mathrm{Tor}_s^{\mathscr{A}}(K,R_S(M))\cong\operatorname*{colim}_n\mathrm{Tor}_s^{A(n)}(K,R_S(M))=0$$

对每个右 $\mathscr{A}$-模 K 和 $s\geq 1$。等价地， $R_S(M)$ 是左 $\mathscr{A}$-平坦的。

此外， $R_\mu(M)$ 作为左 $A(n)$-模，是若干个 $R_S(M)$ 的直和。因此，对每个 n，它也是左 $A(n)$-自由的，故由与之前相同的论证可知，它是左 $\mathscr{A}$-平坦的。□

命题 7.2. 设 M 是一个左 $\mathscr{A}$-自由模。求值同态诱导出同构

$$\mathrm{Hom}(\epsilon,\mathrm{id})\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,H^{*,*})\xrightarrow{\cong}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(R_S(M),H^{*,*})$$
$$\mathrm{Hom}(\epsilon,\mathrm{id})\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,H^{*,*})\xrightarrow{\cong}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(R_\mu(M),H^{*,*})\,.$$

证明. 只需考虑 $M=\mathscr{A}=\mathrm{colim}_n A(n-1)$ 的情形。于是

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{A(n)}(R_S(A(n-1)),H^{*,*})&=\mathrm{Hom}_{A(n)}(B(n)\otimes_{A(n-1)}A(n-1),H^{*,*})\\&=\mathrm{Hom}_{A(n)}(B(n),H^{*,*})\\&\cong\mathrm{Hom}_{H^{*,*}}(H^{*,*}\{P^r\mid r\in\mathbb{Z}\text{ with }\ell^n\mid r\},H^{*,*})\\&\cong\prod_{\ell^n|r}H^{*,*}\{\xi_1^r\}\end{aligned}$$

根据命题 4.19(b)，其中我们将 ξ_1^r 视为左 $A(n)$-模生成元 $P^r\in B(n)$ 的对偶。类 ξ_1^r 与 $\ell^n\mid r$ 的双次数是 $((2\ell-2)\ell^n,(\ell-1)\ell^n)$ 的整数倍。在任意固定的双次数中，当 n 足够大时，只有由 ξ_1^0 生成的因子能对这个乘积作出非零贡献。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(R_S(\mathscr{A}),H^{*,*})&\cong\lim_n\mathrm{Hom}_{A(n)}(R_S(A(n-1)),H^{*,*})\\&\cong\lim_n\prod_{\ell^n|r}H^{*,*}\{\xi_1^r\}\cong H^{*,*}\{\xi_1^0\}\,.\end{aligned}$$

由于 ϵ 将 $P^0\otimes 1$ 映射到 $P^0(1)=1$，因此

$$H^{*,*}\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A},H^{*,*})\xrightarrow{\mathrm{Hom}(\epsilon,1)}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(R_S(\mathscr{A}),H^{*,*})\cong H^{*,*}\{\xi_1^0\}$$

是一个同构。

类似地，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{A(n)}(R_\mu(A(n-1)),H^{*,*})\\&\qquad\cong H^{*,*}\{1,v^{\ell^n},\dots,v^{\ell^n(\ell-2)}\}\otimes_{H^{*,*}}\prod_{\ell^n|r}H^{*,*}\{\xi_1^r\}\,.\end{aligned}$$

类 $v^{\ell^n j}\otimes\xi_1^r$、 $0\le j\le \ell-2$ 和 $\ell^n \mid r$ 的双次数都是 $(2\ell^n,\ell^n)$ 的整数倍。同样，对于任意固定的双次数，当 n 足够大时，只有由 $v^0\otimes\xi_1^0$ 生成的因子才能作出非零贡献。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(R_\mu(\mathscr{A}),H^{*,*}) &\cong \lim_n \mathrm{Hom}_{A(n)}(R_\mu(A(n-1)),H^{*,*})\\ &\cong H^{*,*}\{v^0\otimes\xi_1^0\}\,.\end{aligned}$$

由于 $\epsilon(\pi\,\square\,1)$ 映射 $v^0\otimes P^0$ 到 $P^0(1)=1$，因此

$$H^{*,*}\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A},H^{*,*})\xrightarrow{\mathrm{Hom}(\epsilon,1)}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(R_\mu(\mathscr{A}),H^{*,*})\cong H^{*,*}\{v^0\otimes\xi_1^0\}$$

是一个同构。 □

关于 $\mathscr{A}$ 或 $A(n)$ 的模的Ext群具有三重分次。对于一个$\mathscr{A}$-模 M，我们用 $\mathrm{Ext}^{s}_{\mathscr{A}}{}^{,\,u,\,t,}(M,H^{*,\,*})$ 表示三重次数为 (s,t,u) 的群，其中s 是上同调次数，而 (t,u) 是内部双次数。

定义7.3. 若一个 $\mathscr{A}$-模同态 $\theta\colon L\to M$ 满足诱导同态

$$\theta^*\colon \mathrm{Ext}^{*,*,*}_{\mathscr{A}}(M,H^{*,*})\longrightarrow \mathrm{Ext}^{*,*,*}_{\mathscr{A}}(L,H^{*,*})$$

是一个同构。

现在我们可以推广命题 1.2、定理 1.3] 的一部分。

定理 7.4. 设 M 是任意左 $\mathscr{A}$-模。（小型和大型）求值同态

$$\epsilon\colon R_S(M)\longrightarrow M\qquad and\qquad \epsilon\colon R_\mu(M)\longrightarrow M$$

都是 Ext-等价。

证明. 设

$$\ldots\longrightarrow F_1\longrightarrow F_0\longrightarrow M\to 0$$

是 $\mathscr{A}$ 的一个自由模分解 M。于是

$$\ldots\longrightarrow R_S(F_1)\longrightarrow R_S(F_0)\longrightarrow R_S(M)\to 0$$

由引理 7.1，对每个 n，它都是一个平坦的 $\mathscr{A}$-模分解，也是一个自由的 $A(n)$-模分解。由命题 7.2，求值同态诱导出一个同构

$$\mathrm{Hom}(\epsilon,1)\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F_s,H^{*,*})\xrightarrow{\cong}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(R_S(F_s),H^{*,*})$$

对每个 $s\ge 0$。取上同调后，它还诱导出同构

$$\epsilon'\colon \mathrm{Ext}^s_{\mathscr{A}}(M,H^{*,*})\xrightarrow{\cong}H^s(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(R_S(F_*),H^{*,*}))$$

对所有 $s\ge 0$。令

$$\ldots\longrightarrow E_1\longrightarrow E_0\longrightarrow R_S(M)\to 0$$

是 $R_S(M)$ 的自由 $\mathscr{A}$-模分解，并选取一个 $\mathscr{A}$-模链映射$\zeta\colon E_*\to R_S(F_*)$ 到 $R_S(M)$。于是得到一个由 lim-lim^1 短正合列构成的诱导映射 ζ^*，从

$$\begin{aligned}0\to\lim_n{}^1\, H^{s-1}(\mathrm{Hom}_{A(n)}(R_S(F_*),H^{*,*}))&\longrightarrow H^s(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(R_S(F_*),H^{*,*}))\\ &\longrightarrow \lim_n H^s(\mathrm{Hom}_{A(n)}(R_S(F_*),H^{*,*}))\to 0\end{aligned}$$

to

$$\begin{aligned}0\to\lim_n{}^1\,\mathrm{Ext}^{s-1}_{A(n)}(R_S(M),H^{*,*})&\longrightarrow \mathrm{Ext}^s_{\mathscr{A}}(R_S(M),H^{*,*})\\ &\longrightarrow \lim_n \mathrm{Ext}^s_{A(n)}(R_S(M),H^{*,*})\to 0\,,\end{aligned}$$

参见 [44, 命题 11.9、命题 13.4]。视为 $A(n)$-模链映射时，ζ 成为链同伦等价，因此诱导出同构

$$\zeta^*\colon H^s(\mathrm{Hom}_{A(n)}(R_S(F_*), H^{*,*})) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ext}^s_{A(n)}(R_S(M), H^{*,*})$$

对所有 n 和 s。应用 $\lim_n$ 和 $\lim^1{}_n$，我们推得

$$\zeta^*\colon H^s(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(R_S(F_*), H^{*,*})) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ext}^s_{\mathscr{A}}(R_S(M), H^{*,*})$$

是一个同构。因此，复合映射 $\epsilon^* = \zeta^*\epsilon'$ 也是一个同构，正如所声称的那样。

将 R_S 换成 R_μ 的证明完全相同。 □

推论 7.5. 留数同态

$$\mathrm{res}\colon \Sigma H^{*,*}(BS_\ell)_{\mathrm{loc}} \longrightarrow H^{*,*} \qquad \textit{and} \qquad \mathrm{res}\colon \Sigma H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}} \longrightarrow H^{*,*}$$

是 Ext-等价。

证明。根据定理 5.8 和推论 6.6，这是定理 7.4 的情形 $M = H^{*,*}$。□

8. Generalized Eilenberg–MacLane spectra

由于 H 是胞腔的，$\mathscr{A}_{*,*}$ 的单项式基 $\{\tau^E\xi^R\}_{(E,R)}$ 作为右（或左）$H_{*,*}$-模，确定了右（或左） H-模谱的一个等价 $H \wedge H \simeq \bigvee_{(E,R)} \Sigma^{\|E,R\|} H$。这里，$(E,R)$ 遍历引理 2.1 中的序列，且 $\|E,R\| = \|\tau^E\xi^R\|$。由此可得自然同态

$$\mathscr{A}_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} H_{*,*}(X) \xrightarrow{\cong} \pi_{*,*}((H \wedge H) \wedge_H (H \wedge X)) = \pi_{*,*}(H \wedge H \wedge X)$$

对于任意动机谱 X，它都是一个同构；并且 $1 \wedge \eta \wedge 1\colon H \wedge X = H \wedge \mathbb{S} \wedge X \to H \wedge H \wedge X$ 在 $H_{*,*}(X)$ 上诱导出一个自然的左 $\mathscr{A}_{*,*}$-余作用。

若对于某个动机谱 X，$M \simeq H \wedge X$，则该叉

$$\pi_{*,*}M \xrightarrow{\eta} \pi_{*,*}(H \wedge M) \underset{1\wedge\eta}{\overset{\eta\wedge 1}{\rightrightarrows}} \pi_{*,*}(H \wedge H \wedge M)$$

由 μ 分裂：$\pi_{*,*}(H \wedge M) \cong \pi_{*,*}(H \wedge H \wedge X) \to \pi_{*,*}(H \wedge X) \cong \pi_{*,*}M$ 以及 $\mu\colon \pi_{*,*}(H \wedge H \wedge M) \to \pi_{*,*}(H \wedge M)$，因此将 $\pi_{*,*}M$ 表示为一个分裂等化子 [40,§VI.6]。在同一化 $\pi_{*,*}(H \wedge M) = H_{*,*}(M)$ 和 $\pi_{*,*}(H \wedge H \wedge M) \cong \mathscr{A}_{*,*} \otimes_{H_{*,*}} H_{*,*}(M)$ 下，这给出了一个同构

$$\pi_{*,*}M \cong H_{*,*} \,\square_{\mathscr{A}_{*,*}}\, H_{*,*}(M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{*,*}}(H_{*,*}, H_{*,*}(M)) \tag{8.1}$$

$\pi_{*,*}M$ 其中具有 $H_{*,*}(M)$ 中左侧 $\mathscr{A}_{*,*}$-余模本原元的。

定义 8.1。我们将动机广义埃伦伯格–麦克莱恩谱（motivic generalized Eilenberg–MacLane spectrum 的简称）定义为左 H-模谱

$$M \simeq \bigvee_{\alpha\in J} \Sigma^{p_\alpha,q_\alpha} H$$

它等价于 H 的双分次悬移的楔和。

这些恰好是 H-胞腔的模谱 M，其含义见 [14, §7，且满足 $\pi_{*,*}(M)$ 是左 $H_{*,*}$-模上的自由模。这推广了 [66, §2 中的分裂泰特对象，因为我们允许任意双分次悬移。

如果 M 是一个动机广义埃伦伯格–麦克莱恩谱，我们可以将 $M \simeq H \wedge X$ 写成带有 $X = \bigvee_{\alpha\in J} S^{p_\alpha,q_\alpha}$ 的形式。于是

$$H_{*,*}(X) \cong \bigoplus_{\alpha\in J} \Sigma^{p_\alpha,q_\alpha} H_{*,*}$$

作为左 $\mathscr{A}_*$, $*$-余模，以及自然同态

$$\pi_{*,*}F(X,H)=\pi_{*,*}F_H(H\wedge X,H)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Hom}_{H_{*,*}}(H_{*,*}(X),H_{*,*})=H_{*,*}(X)^\vee$$

是一个同构，因此

$$H^{*,*}(X)\cong\prod_{\alpha\in J}\Sigma^{p_\alpha,q_\alpha}H^{*,*}$$

作为左 $\mathscr{A}$-模。

定义 8.2. 使用这些记号，我们称 $H\wedge X$ （或 $H_{*,*}(X)$，或 $H^{*,*}(X)$）为双有限型，如果对每个双次数 (p,q)，满足下式的 $\alpha\in J$ 只有有限多个

$$p_\alpha\le p\qquad\text{or}\qquad p_\alpha-q_\alpha\le p-q\,.$$

这个条件比 [15, 定义 2.11、定义 2.12] 中的动机有限型概念，以及 [29, §2] 中的有限型概念更严格。它保证两个包含映射

$$\bigoplus_{\alpha\in J}\Sigma^{p_\alpha,q_\alpha}H_{*,*}\xrightarrow{\cong}\prod_{\alpha\in J}\Sigma^{p_\alpha,q_\alpha}H_{*,*}$$
$$\bigoplus_{\alpha\in J}\Sigma^{p_\alpha,q_\alpha}H^{*,*}\xrightarrow{\cong}\prod_{\alpha\in J}\Sigma^{p_\alpha,q_\alpha}H^{*,*}$$

都是同构，因此典范同态

$$H_{*,*}(X)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Hom}_{H^{*,*}}(H^{*,*}(X),H^{*,*})=H^{*,*}(X)^\vee$$

是一个同构。此外，若 $H\wedge X$ 为双有限型，则 $H\wedge H\wedge X\simeq\bigvee_{(E,R)}\Sigma^{\|E,R\|}H\wedge X$ 也为双有限型。因此，$f\mapsto f^\vee$ 定义了一个同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{*,*}}(H_{*,*},H_{*,*}(X))\xrightarrow{\cong}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(H^{*,*}(X),H^{*,*})\tag{8.2}$$

从 $\mathscr{A}_{*,*}$-余模同态 $H_{*,*}\to H_{*,*}(X)$ 到 $\mathscr{A}$-模同态 $H^{*,*}(X)\to H^{*,*}$。

9. A delayed limit Adams spectral sequence

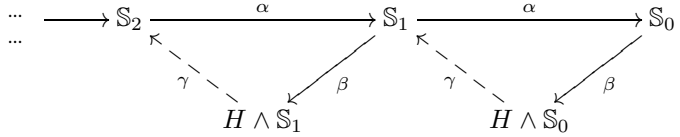
Let

$$\cdots\to Y(m+1)\xrightarrow{f_{m+1}}Y(m)\xrightarrow{f_m}Y(m-1)\to\dots\tag{9.1}$$

设其为任意动机谱塔。其同伦极限 $Y=\mathsf{holim}_m Y(m)$ 位于一个同伦余纤维序列中

$$\Sigma^{-1}\prod_m Y(m)\xrightarrow{i}Y\xrightarrow{j}\prod_m Y(m)\xrightarrow{k}\prod_m Y(m)\,,$$

参见 [49, 引理 2], ，其中 k 是恒等映射与映射 f_m 的乘积之差。令



为动机球谱 $\mathbb{S}=\mathbb{S}_0$ 的典范模 ℓ Adams 分解，该分解由以下同伦余纤维序列归纳定义

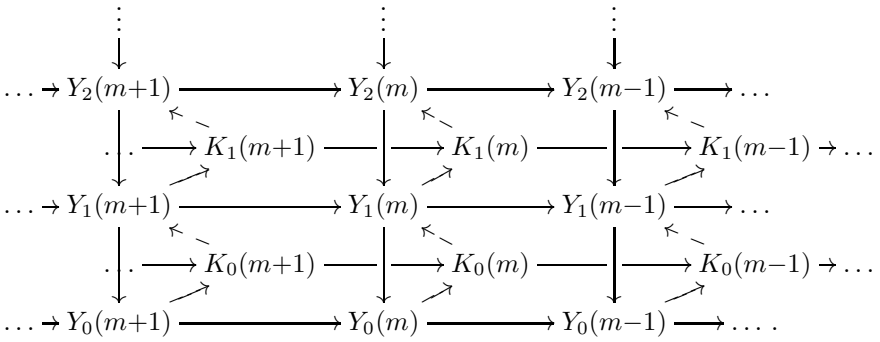
$$\mathbb{S}_{s+1}\xrightarrow{\alpha}\mathbb{S}_s\xrightarrow{\beta}H\wedge\mathbb{S}_s\xrightarrow{\gamma}\Sigma\mathbb{S}_{s+1}$$

其中 $\beta = \eta \wedge 1$, 参见 [2, 第 318] 页。（虚线箭头表示次数为 -1 的态射。）构造楔积

$$Y_s(m) = \mathbb{S}_s \wedge Y(m)$$
$$K_s(m) = H \wedge \mathbb{S}_s \wedge Y(m)$$

以获得一座规范的亚当斯分解塔

(9.2)

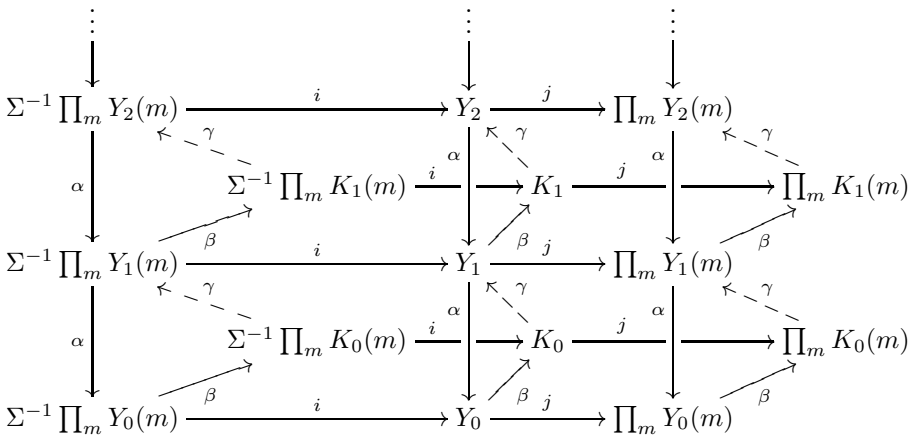


Let

$$Y_s = \operatorname*{holim}_m Y_s(m)$$
$$K_s = \operatorname*{holim}_m K_s(m)$$

是这些亚当斯分解中各项的同伦极限。这些对象适合排列成一个交换图

(9.3)

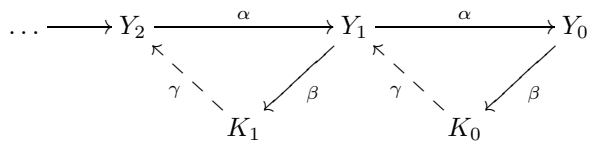


其中水平箭头表示延伸至以下对象的同伦余纤维序列

$$\Sigma^{-1} \prod_m Y_s(m) \xrightarrow{i} Y_s \xrightarrow{j} \prod_m Y_s(m) \xrightarrow{k} \prod_m Y_s(m)$$
$$\Sigma^{-1} \prod_m K_s(m) \xrightarrow{i} K_s \xrightarrow{j} \prod_m K_s(m) \xrightarrow{k} \prod_m K_s(m)\,.$$

该子图

(9.4)



通常并不是亚当斯分解。尽管如此，我们仍可以考虑其相关的同伦谱序列，其 E_1 项为

$$^{\lim}E_1^{s,*,*} = \pi_{*,*}(K_s)$$

及收敛项 $\pi_{*,\ *}(Y_0) = \pi_{*,\ *}(Y)$。在确保所涉及的一切极限均为正合的有限性假设下，此极限亚当斯谱序列的 E_2-项已在 [13, 命题 7。1] 及 [39, 命题 2。2]中得到描述。在我们的动机背景中，只有当 $H^{*,\ *}$ 在每个双次数中均为有限时，这些有限性假设才是现实可行的；这排除了一些非常有趣的基概形 S，例如某个整体域的谱。(例如，欧几里得知道 $H^{1,\ 1}(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^\times/(\mathbb{Q}^\times)^\ell \cong \mathbb{Z}/(2,\ell)^\oplus \bigoplus_{p\ \text{素数}} \mathbb{Z}/\ell$ 是无限生成的。)

为避免这一限制性假设，我们将转而证明，存在一种修正亚当斯谱序列，其形式仿照 [46, 引理 5.3。1]及 [10], ，并且具有与先前相同的收敛项；在更灵活的有限性条件下，其 E_2-项是可辨认的。这类修正，在 [11, 第 12 节。6] 中被称为延迟亚当斯谱序列，以区别于当前使用的另一类（加速型）修正亚当斯谱序列，参见 [6, 第 3] 节。

为了构造延迟极限 Adams 谱序列，我们可以假设 (9.3) 中的映射 i 和 α 都是余纤维化。令 $W_0 = Y_0$，并构造以下推出

$$W_s = Y_s \cup \Sigma^{-1}\prod_m Y_{s-1}(m)$$

沿着 $\Sigma^{-1}\prod_m Y_s(m)$，对所有 $s \geq 1$皆如此。于是得到同伦余纤维序列

$$W_1 \longrightarrow W_0 \xrightarrow{\beta j} L_0 = \prod_m K_0(m) \longrightarrow \Sigma W_1$$

and

$$W_{s+1} \longrightarrow W_s \xrightarrow{\beta j \cup \beta} L_s = \prod_m K_s(m) \vee \Sigma^{-1}\prod_m K_{s-1}(m) \longrightarrow \Sigma W_{s+1}$$

对所有 $s \geq 1$皆如此，由此定义谱 L_s。这将产生一个延迟分解

(9.5)
$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & W_2 \arrow[rr, "\alpha"] & & W_1 \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dl, "\beta"] & & W_0 \arrow[dl, "\beta"] \\
& & L_1 \arrow[ul, dashed, "\gamma"] & & L_0 \arrow[ul, dashed, "\gamma"] &
\end{tikzcd}$$

$W_0 = Y_0 \simeq Y$。包含映射 $Y_s \subset W_s$ 诱导出一个从 (9.4) 到 (9.5) 的图表映射。

定义 9.1。塔 (9.1) 的延迟极限 Adams 谱序列是与分解 (9.5) 相关联的同伦谱序列，其 E_1- 项为

$$^{\mathrm{del}}E_1^{s,*,*} = \pi_{*,*}(L_s)$$

以及由复合映射诱导的 d_1-微分

$$\beta\gamma\colon L_s \longrightarrow \Sigma W_{s+1} \longrightarrow \Sigma L_{s+1}\,.$$

现在我们假设每个 $H \wedge Y(m)$ 都是双有限型的动机广义埃伦伯格–麦克莱恩谱。例如，当每个 $Y(m)$ 都是胞腔的，且 $H_{*,*}(Y(m))$ 作为左 $H_{*,*}$-模是双有限型自由模时，情况便是如此。对 s 进行归纳可知，每个 $K_s(m)$ 都是双有限型的动机广义埃伦伯格–麦克莱恩谱。因此，同构 (8.1) 和 (8.2) 确定了 (E_1, d_1)-项

$$\ldots \longleftarrow \pi_{*,*}K_2(m) \longleftarrow \pi_{*,*}K_1(m) \longleftarrow \pi_{*,*}K_0(m) \leftarrow 0$$

$Y(m)$ 的亚当斯谱序列，其中将 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, H^{*,\ *})$ 应用于自由$\mathscr{A}$-模分解

$$\dots \longrightarrow H^{*,*}(K_2(m)) \xrightarrow{\partial} H^{*,*}(K_1(m)) \xrightarrow{\partial} H^{*,*}(K_0(m)) \to 0$$

$H^{*,*}(Y(m))$。鉴于 (9.2)，这些分解对于变化的 m 是相容的。对 m 取余极限，我们得到一个平坦的 $\mathscr{A}$-模分解

$$\dots \longrightarrow H_c^{*,*}(K_2) \xrightarrow{\partial} H_c^{*,*}(K_1) \xrightarrow{\partial} H_c^{*,*}(K_0) \to 0$$

$H^{*,*}_c(Y)$，其中我们记

$$H_c^{*,*}(Y) = \operatorname*{colim}_m H^{*,*}(Y(m))$$
$$H_c^{*,*}(K_s) = \operatorname*{colim}_m H^{*,*}(K_s(m))$$

分别表示塔 $\{Y(m)\}_m$ 和 $\{K_s(m)\}_m$的“连续”上同调群。 $\mathscr{A}$-模 $H^{*,*}_c(K_s)$可能不是自由的，但仍然是平坦的，因为这类模在滤过余极限下保持不变。这些余极限也可以写成余核，如下图所示，其中各行与列均正合。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_m H^{*,*}(K_1(m)) & \xrightarrow{k^*} & \bigoplus_m H^{*,*}(K_1(m)) & \xrightarrow{j^*} & H^{*,*}_c(K_1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_m H^{*,*}(K_0(m)) & \xrightarrow{k^*} & \bigoplus_m H^{*,*}(K_0(m)) & \xrightarrow{j^*} & H^{*,*}_c(K_0) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon} & & \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_m H^{*,*}(Y(m)) & \xrightarrow{k^*} & \bigoplus_m H^{*,*}(Y(m)) & \xrightarrow{j^*} & H^{*,*}_c(Y) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

省略最底下一行和最右边一列后，我们得到一个由自由$\mathscr{A}$-模构成的双复形，其全复形 (F_*, ∂) 是 $H^{*,*}_c(Y)$的自由分解。这里

$$F_0 = \bigoplus_m H^{*,*}(K_0(m))$$

and

$$F_s = \bigoplus_m H^{*,*}(K_s(m)) \oplus \bigoplus_m H^{*,*}(\Sigma^{-1}K_{s-1}(m))$$

对于 $s \geq 1$。因此我们可以识别

$$\begin{aligned}
{}^{\mathrm{del}}E_1^{0,*,*} = \pi_{*,*}L_0 = \prod_m \pi_{*,*}K_0(m) &\cong \prod_m \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(H^{*,*}(K_0(m)), H^{*,*}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\bigoplus_m H^{*,*}(K_0(m)), H^{*,*}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F_0, H^{*,*})
\end{aligned}$$

and

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{del}}E_1^{s,*,*} = \pi_{*,*}L_s &\cong \prod_m \pi_{*,*}K_s(m) \oplus \prod_m \pi_{*,*}\Sigma^{-1}K_{s-1}(m) \\
&\cong \prod_m \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(H^{*,*}(K_s(m)), H^{*,*}) \oplus \prod_m \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(H^{*,*}(\Sigma^{-1}K_{s-1}(m)), H^{*,*}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\bigoplus_m H^{*,*}(K_s(m)) \oplus \bigoplus_m H^{*,*}(\Sigma^{-1}K_{s-1}(m)), H^{*,*}) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F_s, H^{*,*})
\end{aligned}
$$

对于 $s \geq 1$。此外， d_1: 删除$E^{s,1}{}^{**} \to$，删除$E^{s+1,1}{}^{**}$，由全复形中的边界算子 ∂: $F_{s+1} \to F_s$ 诱导，这一点可以通过追溯定义加以验证。由于 (F_*, ∂) 是 $H^{*,c}{}^*(Y)$ 的一个自由 $\mathscr{A}$-模分解，我们得到所需的同构

$$
{}^{\mathrm{del}}E_2^{s,*,*} \cong \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,*,*}(H_c^{*,*}(Y), H^{*,*})
$$

对每个 $s \geq 0$。

命题 9.2. 设 $\cdots \to Y(m+1) \to Y(m) \to \ldots$为一个动机谱塔，其中每个 $H \wedge Y(m)$ 都是双有限型的动机广义埃伦伯格–麦克莱恩谱。令 $Y = \mathsf{holim}_m Y(m)$ 和 $H^{*,c}{}^*(Y) = \mathsf{colim}_m H^{*,*}(Y(m))$。延迟极限 Adams 谱序列

$$
{}^{\mathrm{del}}E_1^{s,*,*} \Longrightarrow \pi_{*,*}(Y)
$$

具有 E_2-项

$$
{}^{\mathrm{del}}E_2^{s,*,*} = \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,*,*}(H_c^{*,*}(Y), H^{*,*}),
$$

其中 Ext 在 $\mathscr{A}$-模范畴中计算。

证明。此处概括了本节迄今为止的讨论。 □

令 $Y_\infty(m) = \mathsf{holim}_s Y_s(m)$。 $Y(m)$ 的亚当斯谱序列是条件收敛的 [9, 定义 5.10] 到 $\pi_{*,*}Y(m)$ 当且仅当 $\pi_{*,*}Y_\infty(m) = 0$。许多有趣的例子并不满足这一点，例如当 $\pi_{*,*}Y(m)$ 含有阶与 ℓ互素的挠元时；但在以下意义下，经过 (ℓ, η)-进完备化后，这一结论通常成立。

定义 9.3。令 $\ell \in \pi_{0,0}(\mathbb{S})$ 为 ℓ times 恒等映射 $\mathbb{S} \to \mathbb{S}$的类，并令 $\eta \in \pi_{1,1}(\mathbb{S})$ 为 Hopf 纤维化 $S^{3,2} \simeq \mathbb{A}^2 - \{0\} \to \mathbb{P}^1 \simeq S^{2,1}$ 的类。对于任意动机谱 X，令

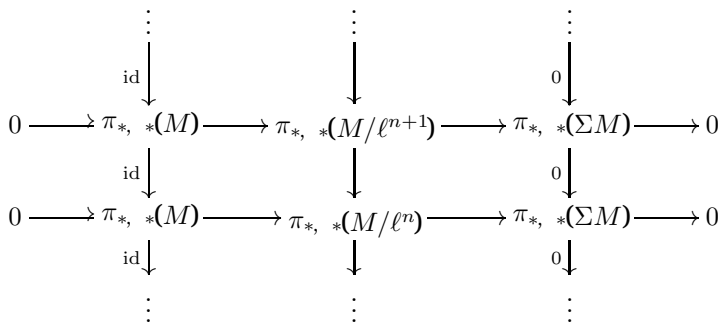
$$
\begin{aligned}
X_\ell^\wedge &= \operatorname*{holim}_n X/\ell^n \\
X_{\ell,\eta}^\wedge &= \operatorname*{holim}_n (X_\ell^\wedge)/\eta^n \simeq \operatorname*{holim}_n X/(\ell^n, \eta^n)
\end{aligned}
$$

分别令其为 X 的 ℓ-进完备化和 (ℓ, η)-进完备化，如 [29, 第 574] 页及 [43,定义 3.2.9] 中所述。存在典范完备化映射 $X \to X_\ell^\wedge \to X_{\ell,\eta}^\wedge$。

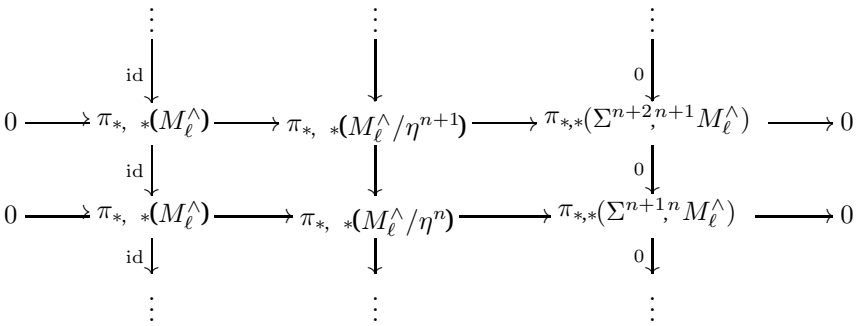
我们注意到 $X_\ell^\wedge \simeq X_{\ell,\eta}^\wedge$ 当 η 幂零地作用时，例如对于 ℓ 为奇数的情形。

引理 9.4. 对于每个 H-模谱 M，完备化映射 $M \to M_{\ell,\eta}^\wedge$ 是一个 $\pi_{*,*}$-同构。

证明. 乘以 ℓ 和乘以 η 在 $H_{*,\,*}$ 上作用平凡，因此在 $\pi_{*,\,*}M$ 上也作用平凡。短正合列构成的塔



以及 lim-lim^1 序列推出 $M \to M^\wedge_\ell$是一个 $\pi_{*,\,*}$-同构。类似地，短正合列的塔

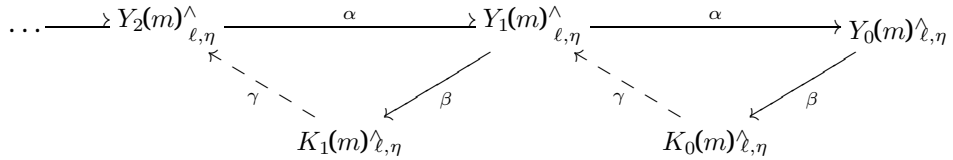


且 lim-lim^{1}序列表明，$M^\wedge_\ell \to M^\wedge_{\ell,\,\eta}$是一个 $\pi_{*,\,*}$-同构。 □

对 Adams 分解塔 (9.2) 应用 (ℓ,η)-进完备化，可得到另一个形状相同的图。在其下边缘，谱的塔

$$\cdots \to Y(m+1)^\wedge_{\ell,\eta} \longrightarrow Y(m)^\wedge_{\ell,\eta} \longrightarrow Y(m-1)^\wedge_{\ell,\eta} \to \dots$$

具有同伦极限 $Y^\wedge_{\ell,\,\eta}$。对于每个 m， $Y(m)$ 的 Adams 分解映射到图



同伦余纤维序列，并且根据引理 9.4，诱导的同伦谱序列映射从 E_1 项起及其后均为同构。新的谱序列的收敛项为 $\pi_{*,*}(Y(m)^\wedge_{\ell,\eta})$；当且仅当 $\pi_{*,*}(Y_\infty(m)^\wedge_{\ell,\eta}) = 0$ 时，它条件收敛到该目标。

现在我们对每个 m作出附加假设： $Y(m)$的亚当斯谱序列条件收敛到$\pi_{*,\,*}(Y(m)^\wedge_{\ell,\,\eta})$。以下定理由 Hu–Kriz–Ormsby [29, 定理 1] 在 X为谱 k 上特征为 0 的域 k 上的有限型胞腔谱的情形下证明。随后， Mantovani [43]将其推广到了我们所考虑的一般情形下 S上的有界下谱 X 。

t上的同伦结构定义见 [25, §2, 1], 动机谱称为下有界的，是指它属于 $SH(S)^{\geq -m}$ ，其中某个有限的 m。 （当$S = \operatorname{Spec} k$ 为一个域 k时， Morel 的稳定 $\mathbb{A}^1$连通性定理 [51, 定理 3] 表明

当且仅当同伦层$\pi_{t,\ u}(X)$在 $t-u<-m$时均消失时， X 才属于 $SH(S)_{\geq -m}$ 。）

定理 9.5. 假设 X in $SH(S)$ 在同伦 t-结构中有下界。那么，针对 X 的模 ℓ Adams 谱序列条件收敛到 $\pi_{*,*}(X^{\wedge}_{\ell},\eta)$。

证明. 如 [43, §5], 中所述，这是 [43, 定理 1.0.2、定理 1.0.4] 在情形 $E=H$ 下的应用；由于 [25, 定理 3.8、定理 7.12] 和 [61, 定理 10.3], 该情形满足 Mantovani 的假设。□

命题 9.6. 设 $Y=\operatorname{holim}_m Y(m)$ 是一个动机谱塔的同伦极限。假设对每个 m，针对$Y(m)$ 的模 ℓ Adams 谱序列条件收敛到 $\pi_{*,*}(Y(m)^{\wedge}_{\ell},\eta)$。那么，极限 Adams 谱序列和延迟极限 Adams 谱序列

$$
\begin{aligned}
{}^{\lim}E_1^{s,*,*} &= \pi_{*,*}(K_s) \Longrightarrow \pi_{*,*}(Y^{\wedge}_{\ell,\eta}) \\
{}^{\mathrm{del}}E_1^{s,*,*} &= \pi_{*,*}(L_s) \Longrightarrow \pi_{*,*}(Y^{\wedge}_{\ell,\eta})
\end{aligned}
$$

都条件收敛于 Y 的 (ℓ,η)-进完备化的双分次同伦群。

证明。令 $Y_\infty=\operatorname{holim}_s Y_s$ 和 $W_\infty=\operatorname{holim}_s W_s$。这些包含映射

$$W_{s+1}\subset Y_s\subset W_s\subset Y_{s-1}$$

意味着 $Y_\infty\simeq W_\infty$。假设对所有 m， $\pi_{*,*}(Y_\infty(m)^{\wedge}_{\ell},\eta)=0$ ，则短正合 lim-lim^1 序列表明 $\pi_{*,*}((Y_\infty)^{\wedge}_{\ell},\eta)\cong\pi_{*,*}((W_\infty)^{\wedge}_{\ell},\eta)\ =0$，因此极限亚当斯谱序列和延迟极限 Adams 谱序列都条件收敛于 $\pi_{*,*}(Y^{\wedge}_{\ell},\eta)$。□

设 $g\colon X\to Y=\operatorname{holim}_m Y(m)$ 是一个动机谱之间的映射。由此得到的从 X 的典范亚当斯分解到 $Y(m)$ 的典范亚当斯分解的相容映射，诱导出一个从前者到图 (9.4) 的映射，而后者可自然延拓为一个到延迟极限亚当斯分解 (9.5) 的映射。对其进行 (ℓ,η)-进完备化，并转到相应的同伦谱序列，我们得到谱序列之间的态射

$$g\colon E_1^{*,*,*}(X)\longrightarrow {}^{\lim}E_1^{*,*,*}(Y)\longrightarrow {}^{\mathrm{del}}E_1^{*,*,*}(Y)$$

其收敛项为

$$g\colon \pi_{*,*}(X^{\wedge}_{\ell,\eta})\longrightarrow \pi_{*,*}(Y^{\wedge}_{\ell,\eta})\xrightarrow{=}\pi_{*,*}(Y^{\wedge}_{\ell,\eta})\,.$$

现在，我们可以应用 Boardman 比较定理 [9, 定理 7.2]中针对条件收敛谱序列的一个特例。鉴于 Kylling–Wilson 在 [35, 推论 7.8]中证明，数域上的球谱的动机阿达姆斯谱序列不满足强收敛，这一版本的比较定理尤其方便。

命题 9.7. 设 $g\colon X\to Y=\operatorname{holim}_m Y(m)$，其中 $H\wedge X$，且每个 $H\wedge Y(m)$ 都是双有限型动机广义埃伦伯格–麦克莱恩谱。假设 X 和 $Y(m)$ 的模 ℓ Adams 谱序列分别条件收敛到 $\pi_{*,\ *}(X^{\wedge}_{\ell,\ \eta})$ 和 $\pi_{*,\ *}(Y(m)^{\wedge}_{\ell,\ \eta})$。若 $\mathscr{A}$-模同态

$$g^*\colon H_c^{*,*}(Y)\longrightarrow H^{*,*}(X)$$

是一个 Ext 同构，因此

$$
\begin{aligned}
g\colon E_2^{s,*,*}(X)=\operatorname{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,*,*}(H^{*,*}(X),H^{*,*}) \\
\xrightarrow{\cong}{}^{\mathrm{del}}E_2^{s,*,*}(Y)=\operatorname{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,*,*}(H_c^{*,*}(Y),H^{*,*})
\end{aligned}
$$

是一个同构，那么 g 诱导出一个同构

$$g\colon \pi_{*,*}(X^{\wedge}_{\ell,\eta}) \xrightarrow{\cong} \pi_{*,*}(Y^{\wedge}_{\ell,\eta})\,.$$

证明。 X 的（E_1- 和） E_2-项的识别照常由 (8.1) 和 (8.2) 得出，而 Y的延迟极限 E_2-项由命题 9.2 给出。现在我们应用 [9, 定理 7.2(i)]。若 g 在 E_2-项上诱导一个同构，那么它当然也会在 E_∞-项和 RE_∞-项上诱导同构。因此， g 诱导了所述收敛项（带滤过）的同构。□

10. A tower of Thom spectra

我们的下一个目标是构造一个图表

$$\begin{array}{ccccc} & & & & L^{\infty}_{-\infty} \\ & & & & \downarrow \\ Th(-(m+1)\gamma_n^*) & \xrightarrow{i} & Th(-(m+1)\gamma_{n+1}^*) & \longrightarrow & L^{\infty}_{-2m-2} \\ \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ Th(-m\gamma_n^*) & \xrightarrow{i} & Th(-m\gamma_{n+1}^*) & \longrightarrow & L^{\infty}_{-2m} \end{array}$$

由动机 Thom 谱组成，其中 $H^{*,\,*}_{c}(L^{\infty}_{-\infty})$ 实现 $H^{*,\,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}\circ}$ 左侧方块将交换到一个广义符号差，而以 i^4 替换 i ，将得到稳定同伦范畴 $SH(S)$ 中严格交换的图表。

对于光滑概形 X （在我们的基概形 S 上）的代数向量丛 $\alpha \downarrow X$ ，我们记其全空间为 $E(\alpha)$，将 $E_0(\alpha) = E(\alpha) \setminus z(X)$ 记为其零截面的补集，并将 Thom 空间 $Th(\alpha) = E(\alpha)/E_0(\alpha)$ 记为按 [64, §4] 中所述方式构造的动机商空间。

对于 $n \geq 1$，令其对角地作用于 $\mathbb{A}^n$，令 $\mathbb{A}^n_0 = \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$，并令 $L^{2n-1} = \mathbb{A}^n_0/\mu_\ell$ 表示第 n 个代数透镜空间，该空间是光滑且拟射影的。在 L^{2n-1} 中记 $[x_1, \dots, x_n]$ 为 $(x_1, \dots, x_n)$ 在 $\mathbb{A}^n_0$ 中的像。包含映射 $\mu_\ell \subset \mathbb{G}_m$ 诱导出一个投影 $L^{2n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$。令 $\gamma_n = \gamma_n^1 \downarrow L^{2n-1}$ 为典范线丛 $\mathscr{O}(-1)$ 在 $\mathbb{P}^{n-1}$ 上的拉回，其全空间由以下平衡积给出

$$E(\gamma_n) = \mathbb{A}^n_0 \times_{\mu_\ell} \mathbb{A}^1$$

以及丛投影映射 $[x_1, \dots, x_n;\ y]$ 到 $[x_1, \dots, x_n]$。令 $\epsilon_n = \epsilon_n^n \downarrow L^{2n-1}$为 L^{2n-1}上的平凡秩 n 丛，其全空间为 $E(\epsilon_n) = L^{2n-1} \times \mathbb{A}^n$ ，丛投影映射到第一个因子。存在一个典范嵌入 $\gamma_n \to \epsilon_n$，其坐标表示为

$$[x_1, \dots, x_n; y] \longmapsto ([x_1, \dots, x_n], x_1 y, \dots, x_n y)\,.$$

令 $\zeta_n = \zeta_n^{n-1} \downarrow L^{2n-1}$ 为其余核，因此存在一个短正合列

$$0 \to \gamma_n \longrightarrow \epsilon_n \longrightarrow \zeta_n \to 0$$

关于 L^{2n-1}上的代数向量丛。令 γ_n^*、 ϵ_n^* 和 ζ_n^* 表示对偶丛，它们构成一个短正合列

$$0 \to \zeta_n^* \xrightarrow{j} \epsilon_n^* \longrightarrow \gamma_n^* \to 0\,. \tag{10.1}$$

这里， γ_n^* 的全空间由轨道空间 $E(\gamma_n^*) = (\mathbb{A}^n_0 \times \mathbb{A}^1)/\mu_\ell$给出，其中$\mu_\ell$ 对角地作用。

更一般地， $k \geq 0$ 重直和 $k\gamma_n^* = \gamma_n^* \oplus \cdots \oplus \gamma_n^*$ 的全空间，其中 $k \geq 0$，为

$$E(k\gamma_n^*) = (\mathbb{A}^n_0 \times \mathbb{A}^k)/\mu_\ell\,,$$

它配有一个到 $\mathbb{A}_0^{n+k}/\mu_\ell = L^{2n+2k-1}$ 的典范映射。根据 [53, 引理 3.1.6]，包含映射

$$Th(k\gamma_n^*) = \frac{E(k\gamma_n^*)}{E_0(k\gamma_n^*)} = \frac{(\mathbb{A}_0^n \times \mathbb{A}^k)/\mu_\ell}{(\mathbb{A}_0^n \times \mathbb{A}_0^k)/\mu_\ell} \longrightarrow \frac{(\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^k)_0/\mu_\ell}{(\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}_0^k)/\mu_\ell}$$

是 Nisnevich 层的一个等价；根据 [53, 例 3.2.2]，投影 $(\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}_0^k)/\mu_\ell \to \mathbb{A}_0^k/\mu_\ell = L^{2k-1}$ 是一个 $\mathbb{A}^1$-同伦等价，因此存在一个同伦余纤维序列

$$L^{2k-1} \xrightarrow{i^n} L^{2n+2k-1} \longrightarrow Th(k\gamma_n^*) \tag{10.2}$$

动机空间。沿用 James [32, 第 117], 页、Atiyah [5, 命题 4.3] 以及 Kambe–Matsunaga–Toda [34, 定理 1] 的做法，我们因此可以将 $Th(k\gamma_n^*) = L_{2k}^{2n+2k-1}$ 记作 $k\gamma_n^*$ 在 L^{2n-1}上的 Thom 空间，并称之为动机截短透镜空间。

然而，沿用 Mahowald 和 Adams [3, 第 4], 页的做法，我们更关注 $k = -m$ 为负的情形，此时对应于虚丛 $-m\gamma_n^*$的 Thom 谱 $Th(-m\gamma_n^*) = L_{-2m}^{2n-2m-1}$。鉴于 (10.1)，$-m\gamma_n^* \equiv m\zeta_n^* - m\epsilon_n^*$ 是 L^{2n-1}上的虚丛，其中 $m\epsilon_n^*$ 为秩 mn的平凡丛，由此得到以下定义。

定义 10.1. 对于 $m \geq 0$，令

$$L_{-2m}^{2n-2m-1} = Th(-m\gamma_n^*) = \Sigma^{-2mn,-mn} Th(m\zeta_n^*)$$

表示一个（有限的动机）截断透镜谱。

考虑包含 $i\colon L^{2n-1} \to L^{2n+1}$。存在自然同构$i^*(\gamma_{n+1}) \cong \gamma_n$, $i^*(\epsilon_{n+1}) \cong \epsilon_n \oplus \epsilon_n^1$ 以及 $i^*(\zeta_{n+1}) \cong \zeta_n \oplus \epsilon_n^1$，其中 ϵ_n^1 是秩为 1 的平凡对象。对偶地，$i^*(\gamma_{n+1}^*) \cong \gamma_n^*$, $i^*(\epsilon_{n+1}^*) \cong \epsilon_n^* \oplus (\epsilon_n^1)^*$ 以及 $i^*(\zeta_{n+1}^*) \cong \zeta_n^* \oplus (\epsilon_n^1)^*$。

还要考虑丛在 L^{2n-1} 上的包含映射 $j\colon \zeta_n^* \to \epsilon_n^*$。

定义 10.2。令

$$i\colon L_{-2m}^{2n-2m-1} = Th(-m\gamma_n^*) \longrightarrow Th(-m\gamma_{n+1}^*) = L_{-2m}^{2n-2m+1}$$

and

$$j\colon L_{-2m-2}^{2n-2m-3} = Th(-(m+1)\gamma_n^*) \longrightarrow Th(-m\gamma_n^*) = L_{-2m}^{2n-2n-1}$$

分别为对 $\Sigma^{-2m(n+1),-m(n+1)}$ 和 $\Sigma^{-2(m+1)n,-(m+1)n}$ 应用所得的映射

$$\Sigma^{2m,m} Th(m\zeta_n^*) \overset{\mathrm{sh}}{\cong} Th(m(\zeta_n^* \oplus (\epsilon_n^1)^*)) \xrightarrow{mi} Th(m\zeta_{n+1}^*)$$

and

$$Th((m+1)\zeta_n^*) \xrightarrow{m\,\mathrm{id} \oplus j} Th(m\zeta_n^* \oplus \epsilon_n^*) = \Sigma^{2n,n} Th(m\zeta_n^*)\,,$$

这里，sh 表示由洗牌$m\zeta_n^* \oplus m(\epsilon_n^1)^* \cong m(\zeta_n^* \oplus (\epsilon_n^1)^*)$诱导的谱的同构。

定义 10.3。令 $-\epsilon \in \pi_{0,0}(\mathbb{S})$ 表示对称同构$\gamma\colon S^{2,1} \wedge S^{2,1} \cong S^{2,1} \wedge S^{2,1}$ 的等价类。它满足 $(-\epsilon)^2 = 1$，因为 $\gamma^2 = \mathrm{id}$。

引理 10.4。矩形

$$\begin{array}{ccc}
L_{-2m-2}^{2n-2m-3} = Th(-(m+1)\gamma_n^*) & \xrightarrow{i} & Th(-(m+1)\gamma_{n+1}^*) = L_{-2m-2}^{2n-2m-1} \\
\downarrow{\scriptstyle j} & & \\
L_{-2m}^{2n-2m-1} = Th(-m\gamma_n^*) & & \downarrow{\scriptstyle j} \\
\downarrow{\scriptstyle (-\epsilon)^{mn}} \simeq & & \\
L_{-2m}^{2n-2m-1} = Th(-m\gamma_n^*) & \xrightarrow{i} & Th(-m\gamma_{n+1}^*) = L_{-2m}^{2n-2m+1}
\end{array}$$

在同伦意义下交换。

证明。图表

$$\begin{array}{ccc} Th((m+1)(\zeta_n^* \oplus (\epsilon_n^1)^*)) & \xrightarrow{(m+1)i} & Th((m+1)\zeta_{n+1}^*) \\ \downarrow{\scriptstyle m\,\mathrm{id}\oplus j\oplus \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle m\,\mathrm{id}\oplus j} \\ Th(m(\zeta_n^* \oplus (\epsilon_n^1)^*) \oplus \epsilon_n^* \oplus (\epsilon_n^1)^*) & \xrightarrow{mi\oplus i} & Th(m\zeta_{n+1}^* \oplus \epsilon_{n+1}^*) \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc} Th((m+1)\zeta_n^* \oplus (m+1)(\epsilon_n^1)^*) & \xrightarrow{\mathrm{sh}} & Th((m+1)(\zeta_n^* \oplus (\epsilon_n^1)^*)) \\ \downarrow{\scriptstyle m\,\mathrm{id}\oplus j\oplus \mathrm{id}} & & \\ Th(m\zeta_n^* \oplus \epsilon_n^* \oplus (m+1)(\epsilon_n^1)^*) & & \downarrow{\scriptstyle m\,\mathrm{id}\oplus j\oplus \mathrm{id}} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\oplus\chi_{m,n}\oplus\mathrm{id}}\cong & & \\ Th(m\zeta_n^* \oplus m(\epsilon_n^1)^* \oplus \epsilon_n^* \oplus (\epsilon_n^1)^*) & \xrightarrow{\mathrm{sh}\oplus\mathrm{id}} & Th(m(\zeta_n^* \oplus (\epsilon_n^1)^*) \oplus \epsilon_n^* \oplus (\epsilon_n^1)^*) \end{array}$$

严格交换，其中 $\chi_{m,\ n}$ 由对称同构诱导

$$\epsilon_n^* \oplus m(\epsilon_n^1)^* \cong m(\epsilon_n^1)^* \oplus \epsilon_n^*\,,$$

因此与乘以 $(-\epsilon)^{mn}$ 同伦。应用

$$\Sigma^{-2(m+1)(n+1),-(m+1)(n+1)}$$

得到所述的同伦交换矩形。 □

推论 10.5。该方块

$$\begin{array}{ccc} L^{2n-2m-3}_{-2m-2} = Th(-(m+1)\gamma_n^*) & \xrightarrow{i^4} & Th(-(m+1)\gamma_{n+4}^*) = L^{2n-2m+5}_{-2m-2} \\ \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ L^{2n-2m-1}_{-2m} = Th(-m\gamma_n^*) & \xrightarrow{i^4} & Th(-m\gamma_{n+4}^*) = L^{2n-2m+7}_{-2m} \end{array}$$

在同伦意义下交换。

证明。由引理 10.4 可知这一点成立，因为 $mn + m(n+1) + m(n+2) + m(n+3)$ 总是偶数。□

定义 10.6。令（无限的动机）截断透镜谱

$$L^\infty_{-2m} = \operatorname*{hocolim}_n L^{2n-2m-1}_{-2m} = \operatorname*{hocolim}_n Th(-m\gamma_n^*)$$

为下列映射的同伦余极限

$$\cdots \to L^{2n-2m-1}_{-2m} \xrightarrow{i} L^{2n-2m+1}_{-2m} \to \cdots\,.$$

对于推论 10.5 中交换同伦的一种固定选择，令 $j\colon L^\infty_{-2m-2} \longrightarrow L^\infty_{-2m}$ 为诱导映射。令

$$L^\infty_{-\infty} = \operatorname*{holim}_m L^\infty_{-2m}$$

为所得塔的同伦极限

$$\cdots \to L^\infty_{-2m-2} \xrightarrow{j} L^\infty_{-2m} \to \cdots\,.$$

回顾记号 5.6。

引理 10.7。

$$H^{*,*}(L^{2n-1}) = H^{*,*}[u,v]/(u^2 = \tau v + \rho u, v^n)\,,$$

其中 v 是 $\gamma_n^* \downarrow L^{2n-1}$ 的模 ℓ 欧拉类，且 $\beta(u) = v$。

证明。这可由与 [64, 定理 6.10], 相同的论证得出，只需用 $L^{2n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$ 代替 $B\mu_\ell \to \mathbb{P}^\infty$。□

定义 10.8. 令 $U_{m\zeta_n^*} \in H^{2m(n-1),m(n-1)}(Th(m\zeta_n^*))$ 为 $m\zeta_n^* \downarrow L^{2n-1}$ 的模 ℓ 托姆类。令

$$U_{-m\gamma_n^*} \in H^{-2m,-m}(L^{2n-2m-1}_{-2m}) = H^{-2m,-m}(Th(-m\gamma_n^*))$$

为它在（去）悬挂同构下的像。我们将 $x \mapsto x \cdot U_{m\zeta_n^*}$ 和 $x \mapsto x \cdot U_{-m\gamma_n^*}$ 记作托姆同构

$$H^{*,*}(L^{2n-1}) \cong H^{*+2m(n-1),*+m(n-1)}(Th(m\zeta_n^*))$$
$$H^{*,*}(L^{2n-1}) \cong H^{*-2m,*-m}(Th(-m\gamma_n^*))\,,$$

参见 [64, 命题 4.3]。

引理 10.9. 同态

$$i^*\colon H^{*,*}(Th(-m\gamma_{n+1}^*)) \longrightarrow H^{*,*}(Th(-m\gamma_n^*))$$
$$j^*\colon H^{*,*}(Th(-m\gamma_n^*)) \longrightarrow H^{*,*}(Th(-(m+1)\gamma_n^*))$$

由下式给出

$$i^*(x \cdot U_{-m\gamma_{n+1}^*}) = i^*(x) \cdot U_{-m\gamma_n^*}$$
$$j^*(x \cdot U_{-m\gamma_n^*}) = xv \cdot U_{-(m+1)\gamma_n^*}\,.$$

证明。 $m\zeta_{n+1}^*$ 的托姆类在 i^* 下映到 $i^*(m\zeta_{n+1}^*) = m(\zeta_n^* \oplus \epsilon_n^1)^*$ 的托姆类，它在悬挂同构下对应于 $m\zeta_n^*$ 的托姆类。这证明了第一个公式，其中 $x \in H^{*,*}(L^{2n+1})$。

$m\zeta_n^*$ 的托姆类在悬挂同构下对应于 $m\zeta_n^* \oplus \epsilon_n^*$ 的托姆类。根据 Jouanolou技巧 [64, 引理 4.7]，它在 j^* 下映到 γ_n^* 的欧拉类 v 乘以 $(m+1)\zeta_n^*$ 的托姆类。这证明了第二个公式，其中 $x \in H^{*,*}(L^{2n-1})$。□

命题 10.10。结构映射 $L^{2n-2m-1}_{-2m} \to L^\infty_{-2m}$ 和 $L^\infty_{-\infty} \to L^\infty_{-2m}$诱导出 $\mathscr{A}$-模同构

$$H^{*,*}(L^\infty_{-2m}) \cong H^{*,*}(B\mu_\ell)\{U_{-m\gamma^*}\} \cong H^{*,*}(B\mu_\ell)\{v^{-m}\}$$

and

$$H_c^{*,*}(L^\infty_{-\infty}) = \operatorname*{colim}_m H^{*,*}(L^\infty_{-2m}) \cong H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}}\,.$$

证明。由于每个 $i^*\colon H^{*,*}(Th(-m\gamma_{n+1}^*)) \to H^{*,*}(Th(-m\gamma_n^*))$ 都是满射，lim-lim^1 序列给出了一个同构

$$H^{*,*}(L^\infty_{-2m}) \cong \lim_n H^{*,*}(Th(-m\gamma_n^*)) \cong \lim_n H^{*,*}(L^{2n-1})\{U_{-m\gamma_n^*}\}\,.$$

令 $U_{-m\gamma^*}$ 对应于相容序列 $(U_{-m\gamma_n^*})_n$，得到第一个同构。第二个同构将 $U_{-m\gamma^*}$ 映射为 v^{-m}。诱导出的同态 $j^*\colon H^{*,*}(B\mu_\ell)\{U_{-m\gamma^*}\} \to H^{*,*}(B\mu_\ell)\{U_{-(m+1)\gamma^*}\}$ 将 $U_{-m\gamma^*}$ 映射为$v \cdot U_{-(m+1)\gamma^*}$，因此对应于同态

$$H^{*,*}(B\mu_\ell)\{v^{-m}\} \longrightarrow H^{*,*}(B\mu_\ell)\{v^{-m-1}\}$$

将 v^{-m} 发送至 $v \cdot v^{-m-1}$。由此可得，$\operatorname{colim}_m H^{*,*}(L^\infty_{-2m})$，即连续上同调 $H^{*,*}_c(L^\infty_{-\infty})$，同构于局部化 $H^{*,*}(B\mu_\ell)[1/v] = H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}}$。

仍需证明这些同构与 Steenrod 运算相容。短正合序列

$$0 \to H^{*,*}(Th(m\gamma_n^*)) \longrightarrow H^{*,*}(L^{2n+2m-1}) \xrightarrow{i^{n*}} H^{*,*}(L^{2m-1}) \to 0$$

由（10.2）诱导，表明 $U_{m\gamma_n^*}$ 上的 Steenrod 作用与 v^m 在 $H^{*,*}(L^{2n-1})\{v^m\}$ 中的 Steenrod 作用一致。再应用 Jouanolou技巧和 Cartan 公式，可知 $U_{m\zeta_n^*}$ 上的 Steenrod 作用与 $\Sigma^{2mn,mn}v^{-m}$ 上的作用相容。因此，由稳定性可知，$U_{-m\gamma_n^*}$ 上的 Steenrod 作用与 v^{-m} 在 $H^{*,*}(L^{2n-1})\{v^{-m}\}$ 中的 Steenrod 作用一致。对 n 取极限，并对 m 取余极限，即完成证明。□

接下来的两个引理验证了对 $\Sigma L^\infty_{-\infty}$ 的延迟极限 Adams 谱序列所需的假设（用于识别 E_2-项及条件收敛）。

引理 10.11. 谱 $L^{2n-2m-1}_{-2m}$ 是有限型胞腔的。谱 L^∞_{-2m} 是胞腔的，且有下界。

证明. L^{2n-1} 的 Zariski覆盖由仿射空间 $(\mathbb{A}^{i-1}\times\mathbb{A}^1_0\times\mathbb{A}^{n-i})/\mu_\ell$ 构成，其中 $1\le i\le n$；按照 [14, Def. 3.7] 的意义，它是完全稳定胞腔的。它平凡化了 γ_n，因此也平凡化了 $m\zeta_n^*$。由此，仿照 [14, Cor. 3.10] 可知，$L^{2n-2m-1}_{-2m}=\Sigma^{-2mn,-mn}Th(m\zeta_n^*)$ 是胞腔的。检查这一论证可知，它具有由有限个胞腔构成的胞腔结构，且这些胞腔的双次数 (p_α,q_α) 均满足 $p_\alpha-q_\alpha\ge -m$。

由于这个界是统一的，通过取同伦余极限可知，L^∞_{-2m} 也是胞腔的，其胞腔位于相同范围的双次数中。因此，L^∞_{-2m} 在同伦 t-结构的$SH(S)^{\ge -m}$ 中。□

回顾定义 8.1 和 8.2。

引理 10.12。 H-模谱 $H\wedge L^{2n-2m-1}_{-2m}$和 $H\wedge L^\infty_{-2m}$ 是双有限型的动机GEM。

证明。这些谱由引理 10.11 可知是 H-胞腔的。引理 10.7 的同调版本表明，$H_{*,*}(L^{2n-1})$在$H_{*,*}$ 上有限生成且为自由模，其生成元的双次数为$(i+2k,i+k)$，对应 $i\in\{0,1\}$ 和 $0\le k<n$。由此，根据动机同调中的 Thom同构可知，$H_{*,*}(L^{2n-2m-1}_{-2m})$在 $i\in\{0,1\}$ 和 $-m\le k<n-m$上有限生成且为自由模，生成元的双次数与之类似；而$H_{*,*}(L^\infty_{-2m})$在 $i\in\{0,1\}$和 $k\ge -m$的每个双次数$(i+2k,i+k)$上均由一个生成元自由生成。特别地，$H_{*,*}(L^\infty_{-2m})$是双有限型的。□

最后，我们构造映射

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{S} & \xrightarrow{c} & \Sigma^{2,1}\mathbb{P}^{-1}_{-\infty} & \xrightarrow{d} & \Sigma L^{-1}_{-\infty}\\ & & \downarrow & & \downarrow\\ & & \Sigma^{2,1}\mathbb{P}^\infty_{-\infty} & & \Sigma L^\infty_{-\infty}\,,\end{array}\tag{10.3}$$

其复合映射在动机上同调中诱导出定义 6.1 中的（大）留数同态。

为定义 $\mathbb{P}^\infty_{-\infty}$，令（有限的、动机的）截断射影谱 $\mathbb{P}^{n-m-1}_{-m}=Th(-m\gamma_n^*\downarrow\mathbb{P}^{n-1})$ 为 $m\gamma_n^*=\mathscr{O}(1)^m$ 在$\mathbb{P}^{n-1}$上的负元的托姆谱。我们有映射 $i\colon \mathbb{P}^{n-m-1}_{-m}\to\mathbb{P}^{n-m}_{-m}$和 $j\colon\mathbb{P}^{n-m-2}_{-m-1}\to\mathbb{P}^{n-m-1}_{-m}$，如定义 10.2 中所述，并令 $\mathbb{P}^\infty_{-m}=\operatorname{hocolim}_n\mathbb{P}^{n-m-1}_{-m}$和 $\mathbb{P}^\infty_{-\infty}=\operatorname{holim}_m\mathbb{P}^\infty_{-m}$，如定义 10.6 中所述。通过与透镜谱相同的论证，我们得到 $H^{*,*}(\mathbb{P}^\infty_{-\infty})\cong H^{*,*}[v^{\pm1}]$。

命题 10.13. 存在一个映射 $c\colon\mathbb{S}\to\Sigma^{2,1}\mathbb{P}^{-1}_{-\infty}$，它诱导

$$\Sigma^{2,1}v^{-1}\longmapsto 1$$

在上同调中。 $H^{*,*}$-模生成元 $\Sigma^{2,1}v^k$ 映射到零。

证明。我们利用 $\mathbb{P}^{n-1}$ 是一个光滑射影簇，其稳定法丛为

$$\nu = \epsilon_n^1 - n\gamma_n^* = \mathscr{O} - \mathscr{O}(1)^n .$$

通过构造代数 Atiyah 对偶的过程，参见 [65, 命题 2.7], [28, 类。 2]和 [26, §5.3], ，存在一个 Pontryagin–Thom 崩塌映射

$$c_n \colon \mathbb{S} \longrightarrow Th(\nu \downarrow \mathbb{P}^{n-1}) = \Sigma^{2,1}\mathbb{P}_{-n}^{-1}$$

它在上同调中诱导同态 $\Sigma^{2,\,1}v^{-1} \mapsto 1$ 。生成元 $\Sigma^{2,\,1}v^{k}$对于 $-n \le k \le -2$ ，因双次数的原因映射为零。结合 Thom 对角映射与一个伴随关系，可得 Atiyah 对偶等价$Th(\nu \downarrow \mathbb{P}^{n-1}) \simeq D(\mathbb{P}_+^{n-1}) = F(\mathbb{P}_+^{n-1}, \mathbb{S})$；在此等价下， c_n与崩塌映射 $\mathbb{P}_+^{n-1} \to S^0$函数对偶。特别地，当 n变化时，这些映射在同伦意义下相容，并组合起来定义映射 $c\colon \mathbb{S} \to \Sigma^{2,\,1}\mathbb{P}_{-\infty}^{-1} \simeq D(\mathbb{P}_+^{\infty})$，如所需。□

由于 L^{2n-1} 仅是拟射影的，我们需要采用不同的方法来获得 (10.3) 中的第二个映射。

命题 10.14. 存在一个映射 $d\colon \Sigma^{2,\,1}\mathbb{P}_{-\infty}^{-1} \to \Sigma L_{-\infty}^{-1}$ 其诱导出

$$\Sigma u v^{-1} \longmapsto \Sigma^{2,1} v^{-1}$$

在上同调中，模掉 $H^{*,\,*}\Sigma^{2,\,1}v^{k}$ 的倍数，其中 $k \le -2$。

证明。对于同一光滑概形 X 上的代数向量丛 α、$\beta \downarrow X$ ，其中 β 可以是虚的，存在一个同伦余纤维序列

$$Th(p^*\beta \downarrow E_0(\alpha)) \longrightarrow Th(\beta \downarrow X) \longrightarrow Th(\alpha \oplus \beta \downarrow X)$$

其对象为动机谱。这里 $p\colon E_0(\alpha) \to X$ 表示投影，而 $p^*\beta$ 是沿 p 对 β 的拉回。我们将其应用于 $X = \mathbb{P}^{n-1}$、 $\alpha = \gamma_n^{\otimes \ell} = \mathscr{O}(-\ell)$ 以及 $\alpha \oplus \beta = \nu$，即 $\mathbb{P}^{n-1}$ 的稳定法丛。按照 [64, 引理 6.3] 中的方式，我们将 $E_0(\gamma_n^{\otimes \ell}) \cong L^{2n-1}$ 视为同一个对象。此外，$p^*\gamma_n^{\otimes \ell} \cong \epsilon_n^1$ 在 L^{2n-1} 上，即 $\mathscr{O}(-\ell)$ 和 $\mathscr{O}$ 拉回为同一个丛，这意味着 $p^*\beta \cong -n\gamma_n^*$ 作为 L^{2n-1} 上的稳定丛。这导出同伦余纤维序列

$$L_{-2n}^{-1} \longrightarrow Th(\beta \downarrow \mathbb{P}^{n-1}) \longrightarrow \Sigma^{2,1}\mathbb{P}_{-n}^{-1} \xrightarrow{d_n} \Sigma L_{-2n}^{-1} .$$

上同调中的长正合序列表明，连接映射 d_n 诱导了一个同态，将 $\Sigma u v^{-1}$ 映射到 $\Sigma^{2,\,1}v^{-1}$，模去 $H^{*,\,*}$-倍的 $\Sigma^{2,\,1}v^{k}$ 对于$-n \le k \le -2$。同样地，当 n变化时，这些映射在同伦意义下相容，并组合定义所需的映射 d。□

命题 10.15. 存在一个映射 $e\colon \mathbb{S} \to \Sigma L_{-\infty}^{\infty}$ 个动机谱，诱导出留数同态

$$e^* = \mathrm{res}\colon \Sigma H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}} \longrightarrow H^{*,*}$$

在上同调中。

证明。我们取 e 为 dc 后接包含映射 $\Sigma L_{-\infty}^{-1} \to \Sigma L_{-\infty}^{\infty}$ （ $\Sigma L_{-\infty}^{\infty} \to \Sigma L_0^{\infty}$的同伦纤维）。为验证 e 诱导出留数同态，我们使用上同调次数 0 中的推论 7.5，得到一个同构

$$\mathrm{res}\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(H^{*,*}, H^{*,*}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\Sigma H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}}, H^{*,*}) .$$

换言之，任何 $\mathscr{A}$-模同态 $\Sigma H^{*,\,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}} \to H^{*,\,*}$ 都由其在 $\Sigma u v^{-1}$ 上的取值所确定。由于 e^* 与 res 在该元素上的取值相同，因此二者相等。□

11. The motivic Lin and Gunawardena theorems

现在我们可以证明 Lin [37]（针对$\ell = 2$）和 Gunawardena [21]（针对 ℓ 奇素数）的经典定理的动机化精化。

回顾一下， μ_ℓ 表示由 ℓ次单位根构成的代数群， $L^{2n-1} = (\mathbb{A}^n \setminus \{0\})/\mu_\ell$ 是一个代数透镜空间， $\gamma_n^* \downarrow L^{2n-1}$ 是 tau-拓扑线丛的对偶， $L^{2n-2m-1}_{-2m} = Th(-m\gamma_n^*)$ 是一个截断透镜谱，而$L^\infty_{-2m} = \operatorname{hocolim}_n L^{2n-2m-1}_{-2m}$和 $L^\infty_{-\infty} = \operatorname{holim}_m L^\infty_{-2m}$ 是无限透镜谱。连续模 ℓ 上同调 $H^{*,*}_c(L^\infty_{-\infty}) = \operatorname{colim}_m H^{*,*}(L^\infty_{-2m})$ 同构于局部化 $H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}} = H^{*,*}[u, v^{\pm 1}]/(u^2 = \tau v + \rho u)$。映射$e\colon \mathbb{S} \to \Sigma L^\infty_{-\infty}$ 诱导出 Ext 等价 res： $\Sigma H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}} \to H^{*,*}$。

定理 11.1. 设 S 是有限维 d的诺特概形，本质光滑于某个域或戴德金整环之上，并设 ℓ 是 S上可逆的素数。那么，(ℓ, η)-完备化映射

$$e^\wedge_{\ell,\eta}\colon \mathbb{S}^\wedge_{\ell,\eta} \longrightarrow (\Sigma L^\infty_{-\infty})^\wedge_{\ell,\eta}$$

是一个$\pi_{*,*}$-同构。若 $S = \operatorname{Spec} k$ 是 k 域，则$e^\wedge_{\ell,\eta}$是一个动机等价。

证明。我们对 $X = \mathbb{S}$、 $Y = \Sigma L^\infty_{-\infty}$、 $Y(m) = \Sigma L^\infty_{-2m}$ 和$g = e$应用命题 9.7。

$$\mathbb{S} \xrightarrow{e} \Sigma L^\infty_{-\infty} \to \cdots \to \Sigma L^\infty_{-2m} \to \dots .$$

由引理 10.12， H-模 $H \wedge \mathbb{S}$ 和 $H \wedge \Sigma L^\infty_{-2m}$ 是双有限型的动机GEM。此外，由引理 10.11， $\mathbb{S}$ 及每个 ΣL^∞_{-2m} 在 $SH(S)$上的同伦t-结构中都有下界。由定理 9.5， $\mathbb{S}$ 和 ΣL^∞_{-2m} 的亚当斯谱序列条件收敛到(ℓ, η)-进完备化。由命题 9.6， $\Sigma L^\infty_{-\infty}$的延迟极限 Adams 谱序列也条件收敛到$(\ell, \eta)$-进完备化。 $\mathscr{A}$-模同态

$$e^*\colon H^{*,*}_c(\Sigma L^\infty_{-\infty}) \longrightarrow H^{*,*}(\mathbb{S})$$

与.....一致

$$\mathrm{res}\colon \Sigma H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}} \longrightarrow H^{*,*}$$

根据命题 10.15，通过命题 10.10 的同构。最后，res 根据推论 7.5 是 Ext 等价。因此，所诱导的谱序列映射

$$e\colon E_2^{s,*,*}(\mathbb{S}) = \mathrm{Ext}^{s,*,*}_{\mathscr{A}}(H^{*,*}, H^{*,*}) \xrightarrow{\cong} {}^{\mathrm{del}}E_2^{s,*,*}(\Sigma L^\infty_{-\infty}) = \mathrm{Ext}^{s,*,*}_{\mathscr{A}}(\Sigma H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}}, H^{*,*})$$

从 E_2 项开始及之后都是同构，而汇合项映射

$$e\colon \pi_{*,*}(\mathbb{S}^\wedge_{\ell,\eta}) \xrightarrow{\cong} \pi_{*,*}((\Sigma L^\infty_{-\infty})^\wedge_{\ell,\eta})$$

是（过滤的）双分次阿贝尔群的同构。

令 $Ce^\wedge_{\ell,\eta}$ 表示 $e^\wedge_{\ell,\eta}$ 的同伦余纤维。若 $S = \operatorname{Spec} k$ 对某个域 k 成立，则同伦层$\underline{\pi}_{*,*}(Ce^\wedge_{\ell,\eta})$ 按照 [51, Def. 6.4.9], 的意义是纯的， [52, 因而按照 1], Def. 2. [51, 的意义是非分歧的，这由 11]Lem. 6.4. [52, 和 9]Thm. 1. k 得出。对于任意（不可约）光滑的 U -概形 k，其函数域为 U(π_*)， 若 $*,Ce^\wedge_\eta(\ell, k)$ 在 Spec U(π_*) 上消失，则 $*,Ce^\wedge_\eta(\ell, U)$ 在 $\underline{\pi}_*$ 上也消失，因此$*,Ce^\wedge_\eta(\ell, = 0)e^\wedge_\eta$， 且 ℓ , [23, 是动机等价。Morel 定理的这一应用也见于 4]Prop. □。

注记 11.2。作为我们在命题 10.15 中对 e: $\mathbb{S} \to \Sigma L^\infty_{-\infty}$进行相当显式构造的一种替代方法，可以借助 e的权重 0 部分的延迟极限 Adams 谱序列

$${}^{\mathrm{del}}E_2^{s,t,0} = \mathrm{Ext}^{s,t,0}_{\mathscr{A}}(\Sigma H^{*,*}(B\mu_\ell)_{\mathrm{loc}}, H^{*,*}) \Longrightarrow_s \pi_{t-s,0}((\Sigma L^\infty_{-\infty})^\wedge_{\ell,\eta})$$

来证明存在一个同伦类 $e' \in \pi_{0,\,0}((\Sigma L^{\infty}_{-\infty})^{\wedge}_{\ell,\,\eta})$，它由限制映射 res: $\Sigma H^{*,\,*}(B\mu_{\ell})_{\mathrm{loc}} \to H^{*,\,*}$ 检测到，且其 Adams 滤过为 $s=0$。

$$ {}^{\mathrm{del}}E_{\infty}^{0,0,0} \subset {}^{\mathrm{del}}E_{2}^{0,0,0} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\Sigma H^{*,*}(B\mu_{\ell})_{\mathrm{loc}}, H^{*,*}) . $$

由推论 7.5

$$ {}^{\mathrm{del}}E_{2}^{s,t,0} \cong \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,t,0}(H^{*,*}, H^{*,*}) , $$

且 res 对应于 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(H^{*,\,*}, H^{*,\,*})$ 中的恒等映射：$H^{*,\,*} \to H^{*,\,*}$。

若 $d<\ell-1$（对 $S=$ 谱 k 总是如此），则 $H^{*,\,*}$ 的典范（或标准化余边算子）$\mathscr{A}$-模分解表明，只要 $t-s=-1$，就有 ${}^{\mathrm{del}}E^{s,\,t\,0}_{2} \cong$, $\mathrm{Ext}^{s\;t\;0}_{\mathscr{A}\;,,}(H^{*,\,*}, H^{*,\,*}) = 0$。因此，对所有 $r \geq 2$，都有 $d^{0,\,}_{r}{}^{0\,0} = 0$, ，从而 ${}^{\mathrm{del}}E^{0,\,}_{\infty}{}^{0\,0} =$, ${}^{\mathrm{del}}E^{0,\,00\,2,}$ ，且 res 是一个无限循环。

为了确保 res 能检测到一个同伦类，我们还需要其双次数上的强收敛。根据 [9, 定理 7.3]，（另见 [22, 定理 3.9], ），只需知道只要 $t-s=+1$，就有$RE^{s,\,t\,0}_{\infty} = 0$, 。由 [35, 推论 6.1] ，对 $S=$ 谱 k，只要满足以下附加假设，该条件便成立：$\ell=2$ 的虚上同调维数有限。此时，同伦类 e' 可由映射 $e'\colon \mathbb{S} \to (\Sigma L^{\infty}_{-\infty})^{\wedge}_{\ell,\,\eta}$ 表示，该映射可替代 e。

References

[1] J. F. Adams, *Lectures on generalised cohomology*, 《范畴论、同调论及其应用》，III（巴特尔研究所会议，西雅图，华盛顿州，1968年，第3卷），施普林格，柏林，1969年，第1–138页。MR0251716[2] ，《芝加哥数学讲座》，芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州—伦敦，1974年。MR0402720[3] ， *Operations of the nth kind in K-theory, and what we don't know about RP∞*, 《拓扑学新进展》（《代数拓扑专题讨论会论文集》，牛津，1972年），伦敦数学会讲义系列，第 11, 1974, 1 9 0339178 号，剑桥大学出版社，伦敦，第–页。MR J. F. Adams、J. H. Gunawardena 和 H. Miller, *The Segal conjecture for elementary abelian p-groups* **24** 1985 4, 435 460, 10 1016 0040 9383 85 90014 ，《拓扑学》（），第–期，DOI . / - ( ) -X。MR816524[4] M. F. Atiyah, *Thom complexes*, 《伦敦数学会论文集》（第3辑）11（1961），291–310, DOI 10 1112 3 11 1 291 131880 。/plms/s - . . . MR M. Behrens、M. Hill、M. J. Hopkins 和 M. Mahowald, *On the existence of a v_2^{32}-self map on M 1, 4 at the prime 2* **10** 2008 3, 45 84 (), 《同调、同伦及应用》2475617（），第–期。MR[5] *$\mathbb{R}$-motivic stable stems* **15** 2022 Eva Belmont 和丹尼尔·C·伊萨克森，，《拓扑学杂志》（），第4期，1755 1793，10 1112 12256 – DOI . /topo. . MR 4461846[6] J. M. Boardman, *The eightfold way to BP-operations or E_*E and all that*, 《代数拓扑当前趋势》第1部分（伦敦，安大略省，1981年），CMS会议论文集，第2卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1982年，第187–226页。MR686116[7] , *Conditionally convergent spectral sequences*, 《同伦不变代数结构》（巴尔的摩，马里兰州，1998年），《当代数学》第239卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999年，第 49 84, 10 1090 239 03597 1718076 –页，DOI . /conm/ / 。MR Robert R. Bruner, *Two generalizations of the Adams spectral sequence*, 《代数拓扑当前趋势》第1部分（伦敦，安大略省，1981年），CMS会议论文集，第2卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1982, 275 287 686121 第–页。MR Robert R. Bruner 和 John Rognes, *The Adams spectral sequence for topological modular forms* 253, ，《数学调查与专著》，第卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2021年。MR4284897[8] Gunnar Carlsson, *Equivariant stable homotopy and Segal's Burnside ring conjecture*, 《数学年刊》（ 2 **120** 1984 2, 189 224, 10 2307 2006940 763905 ）（），第–期，DOI . / . MR J. Caruso、J. P. May 和 S. B. Priddy, *The Segal conjecture for elementary abelian p-groups. II. p-adic completion in equivariant cohomology* **26** 1987 4, 413 433, 《拓扑学》（），第–期，DOI 10 1016 0040 9383 87 90040 1 919728 。/ - ( ) - . MR Daniel Dugger 和丹尼尔·C·伊萨克森, *Motivic cell structures*, 《代数与几何拓扑》5（2005），615 652, 10 2140 2005 5 615 2153114 –页，DOI . /agt. . . . MR , ，《几何与拓扑》14（2010），第2期，967–1014，DOI 10 2140 2010 14 967 2629898 。/gt. . . . MR , *Low-dimensional Milnor-Witt stems over $\mathbb{R}$*, 《K理论年刊》2（2017），第2期，175–210，DOI 10.2140/akt.2017.2.175。MR3590344

[17] 塞缪尔·艾伦伯格和John C. Moore, *Homology and fibrations. I. Coalgebras, cotensor product and its derived functors* **40** 1966 199 236, , 《Commentarii Mathematici Helvetici》 （）， –页，DOI 10 1007 02564371 203730 。/BF 。MR 托马斯·盖瑟, [18] *Motivic cohomology over Dedekind rings*, 《Mathematische Zeitschrift》248（2004），第4期，773–794，DOI 10.1007/s00209-004-0680-x。MR2103541[19] THOMAS GREGERSEN, *A Singer construction in motivic homotopy theory*（2013），可访问：http://urn.nb.no/URN:NBN:no-38690。博士论文，奥斯陆大学。[20] 贝特朗·J·吉尤和丹尼尔·C·伊萨克森, *The η-local motivic sphere*, 《纯粹与应用代数杂志》 **219** 2015 10, 4728 4756, 10 1016 2015 03 004 3346515 （），第–期，DOI . /j.jpaa. . . . MR J. H. [21] *Cohomotopy of some classifying spaces* 1981 Gunawardena, （）。剑桥博士论文。[22] 加尔德·奥拉夫·赫勒和John Rognes, *Boardman's whole-plane obstruction group for Cartan-Eilenberg systems* **24** 2019 1855 1878 , 《数学文献》 （），–页。 4369361 MR[23] *Detecting motivic equivalences with motivic homology*戴维·赫明格, , 《美国数学会会刊》B辑 **9** 2022 180 185, 10 1090 82 4410405 （），–页，DOI . /bproc/ 。MR 迈克尔·A·希尔, , [24] *Ext and the motivic Steenrod algebra over* $\mathbb{R}$ 《纯粹与应用代数杂志》215（ 2011 5, 715 727, 10 1016 2010 06 017 2747214 ），第–期，DOI . /j.jpaa. . . . MR 马克·瓦约瓦, 《纯粹与应用代数杂志》702（ 2015 173 226 3341470 ），–页。MR , [25] *From algebraic cobordism to motivic cohomology* [26] *The six operations in equivariant motivic homotopy theory*, 《数学进展》305（2017），197–279，DOI 10.1016/j.aim.2016.09.031。MR3570135[27] 马克·瓦约瓦、谢恩·凯利和保罗·阿尔内·厄斯特卡尔, *The motivic Steenrod algebra in positive characteristic* **19** 2017 3849 , 《欧洲数学会杂志》（ JEMS） （），第 12, 3813 3730515 –期。MR 胡波, [28] *On the Picard group of the stable* $\mathbb{A}^1$*-homotopy category* **44** 2005 《拓扑学》 （），第3期，609 640，10 1016 2004 12 001 2122218 DOI . /j.top. . . . MR [29] 胡波、I·克里兹和K·奥姆斯比, *Convergence of the motivic Adams spectral sequence*, 《K理论杂志》 **7** 2011 3, 573 596, 10 1017 011003012 150 2811716 （），第–期，DOI . /is jkt 。MR 丹 [30] *Stable stems* **262** 2019 1269, 尼尔·C·伊萨克森, , 《美国数学会回忆录》 （），第viii+159页，DOI 10 1090 1269 4046815 。/memo/ 。 [31] MR 丹尼尔·C·伊萨克森、王国祯和徐周立, *Stable homotopy groups of spheres*, 《美国国家科学院院刊》117（2020），第40期，24757–24763，DOI 10.1073/pnas.2012335117。MR4250190[32] I·M·詹姆斯, *Spaces associated with Stiefel manifolds*, 《伦敦数学会论文集》（第3辑）9（1959），115 140, 10 1112 3 9 1 115 102810 –页，DOI . /plms/s - . . . MR J·F·贾丁, 《数学文献》 [33] *Motivic symmetric spectra* **5** 2000 445 552 1787949 （），–页。MR 神户常一、 [34] *A note on stunted lens space* 松永宏道和户田宏, 《京都大学数学杂志》5（1966），143–149，DOI 10.1215/kjm/1250524531。MR190929[35] 约纳斯·伊尔根斯·基林和格伦·马修·威尔逊, *Strong convergence in the motivic Adams spectral sequence* 2019 29 https://arxiv.org/abs/1901.03399 （），第页，可访问：[36] 李 *Resolutions of modules over the Steenrod algebra and the classical theory of invariants* **181** 1982 2, 269 286, 虎雄和William M. Singer, , 《Mathematische Zeitschrift》 （），第–期，DOI 10 1007 01215024 674277 。/BF 。MR 林文雄, [37] *On conjectures of Mahowald Segal and Sullivan*, 《剑桥哲学学会数学论文集》 **87** 1980 3, 449 458, 10 1017 0305004100056887 556925 （），第–期，DOI . /S 。MR 林 [38] 文雄、D·M·戴维斯、M·E·马霍瓦尔德和J. F. Adams, *Calculation of Lin's Ext groups* **87** 1980 3, 459 469, , 《剑桥哲学学会数学论文集》 （），第–期，DOI 10 1017 0305004100056899 569195 。/S 。MR 斯韦雷·卢内-尼尔森和John Rognes, [39] *The topological Singer construction*, 《数学文献》17（ 2012 861 909 3007679 ），–页。MR 桑德斯·麦克莱恩, [40] *Categories for the working mathematician*, 第2版, 《数学研究生教材》，第5卷，施普林格出版社，纽约，1998年。MR1712872[41] 马克·马霍瓦尔德, *Lin's theorem and the EHP sequence*, 《纪念彼得·希尔顿的代数拓扑会议》（圣约翰斯，纽芬兰省，1983年），《当代数学》第37卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1985, 115 119, 10 1090 037 789799 789799 第–页，DOI . /conm/ / 。MR 马 [42] *The root invariant in homotopy theory* 克·E·马霍瓦尔德和Douglas C. Ravenel, 《拓扑学》 **32** 1993 4, 865 898, 10 1016 0040 9383 93 90055 1241877 （），第–期，DOI . / - ( ) -Z。MR 洛伦佐· [43] *Localizations and completions of stable* ∞*-categories* 曼托瓦尼, （2021），41页，可访问：https://arxiv.org/abs/2105.02285。[44] H·R·马戈利斯, *Spectra and the Steenrod algebra*, 《北荷兰数学文库》第29卷，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1983年。《Steenrod代数上的模与稳定同伦范畴》。MR[45] 1388975 J. P. May 和 J·E·麦克卢尔, *A reduction of the Segal conjecture*, 《代数拓扑当前趋势》第2部分（伦敦，安大略省，1981年），CMS会议论文集，第2卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1982年，第209–222页。MR686147

[46] R. James Milgram, *Group representations and the Adams spectral sequence*, 《太平洋数学杂志》 **41** 1972 157 182 304463 ( ), –。MR Haynes R. Miller 和 Douglas C. Ravenel, [47] *Morava stabilizer algebras and the localization of Novikov's E_2-term* **44** 1977 2, 433 447 , 《杜克数学杂志》( ), 第 – 期。MR0458410 [48] *The Steenrod algebra and its dual* 2 **67** John Milnor, , 《数学年刊》( )(1958), 150–171, DOI 10 2307 1969932 99653 。/。MR J. Milnor, [49] *On axiomatic homology theory* **12** 1962 337 341 159327 , 《太平洋数学杂志》( ), –。MR John W. Milnor 和 John C. Moore, , 《数学年刊》( ) [50] *On the structure of Hopf algebras* 2 **81** 1965 211 264, 10 2307 1970615 0174052 ( ), – DOI 。/。MR Fabien Morel, , 《K-Theory 35》(2005), 第1-2期, 1–68, DOI 10 1007 10977 005 1562 7 2240215 。/s - - -。MR, , [51] *The stable $\mathbb{A}^1$-connectivity theorems* 《数学讲义》, 第2052卷, 施普林格, 海德堡, 2012。MR2934577[52] ———, *$\mathbb{A}^1$-algebraic topology over a field* [53] Fabien Morel 和 Vladimir Voevodsky, *A^1-homotopy theory of schemes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **90** 1999 45 143 2001 1813224 ( ), – ( )。MR J. D. Quigley, , 《代数与几何拓扑》19 5, 2485 2019 2534, 10 2140 2019 19 2485 ( )。第 期, DOI。/agt. . . . MR [54] *The motivic Mahowald invariant* 4028321 [55] ———, *Real motivic and C_2-equivariant Mahowald invariants*, 《拓扑学杂志》14 2, 369 2021 418, 4235014 10 1112 12185 ( ), 第 – 期, DOI。/topo. . MR[56] ———, *Motivic Mahowald invariants over general base fields*, 《数学文献》26 (2021), 561–582。MR4282796[57] Douglas C. Ravenel, *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*, 《纯粹与应用数学》, 第121卷, 学术出版社, 奥兰多, 佛罗里达州, 1986。MR860042[58] Jo¨el Riou, *Opérations de Steenrod motiviques* (2012), 可见https://arxiv.org/abs/1207.3121。[59] William M. Singer, *On the localization of modules over the Steenrod algebra*, 《Journal of Pure and Applied Algebra》 **16** 1980 1, 75 84, 10 1016 0022 4049 80 90043 2 549705 ( ), 第 – 期, DOI。/- ( ) -。MR, , [60] ———, *A new chain complex for the homology of the Steenrod algebra* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 90 (1981), 第2期, 279–292, DOI 10.1017/S0305004100058746 。MR620738[61] Markus Spitzweck, *A commutative $\mathbb{P}^1$-spectra representing motivic cohomology over Dedekind domains* **157** 2018 10 24033 465 , Mem. Soc. Math. Fr. (N.S.) ( ), 110, DOI。/msmf. . MR3865569[62] N. E. Steenrod, *Cohomology operations*, N. E. Steenrod 授课, D. B. A. Epstein 笔录并修订。《数学年刊研究丛书》第50号, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 1962。MR0145525[63] Vladimir Voevodsky, *A^1-homotopy theory*, 《国际数学家大会论文集》, 第I卷（柏林, 1998 1998, 579 604 1648048 ）, 第–页。MR, , [64] ———, *Reduced power operations in motivic cohomology* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 98 (2003), 1–57。MR2031198[65] , *Motivic cohomology with* Z /2*-coefficients*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 98 (2003), 59–104。MR2031199[66] , *Motivic Eilenberg–MacLane spaces*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 112 (2010), 1–99。MR2737977

Department of Technology Systems, University of Oslo, Norway
Email address: thomas.gregersen@its.uio.no

Department of Mathematics, University of Oslo, Norway
Email address: rognes@math.uio.no