在单值基础中形式化 Yoneda Ext

Jarl G. TaxeråsFlaten ✉加拿大安大略省伦敦市西

安大略大学

摘要

Ext 群是同调代数中的基础对象，也是同伦论中重要计算的根基。我们使用 Coq-HoTT 库 [3]，在同伦类型论（HoTT）中形式化 Yoneda Ext 群 [12] 。这种 Ext 方法无需射影或内射分解，不过会产生较大的阿贝尔群。借助单价性，我们展示了如何在 HoTT 中自然地表示这些 Ext 群。我们通过 1-型（或群胚）的纤维序列，给出了通常的六项正合序列的一种新颖证明及其形式化，并展示了一个应用。此外，我们还讨论了 Ext 的逆变长正合序列的形式化，这是一种重要的计算工具。在此过程中，我们实现并解释了扩张的 Baer 和，以及 Ext 如何构成一个双函子。

2012年 ACM 学科分类计算数学 → 代数拓扑；计算理论 → 逻辑与验证；计算理论 → 类型论

关键词与短语同伦类型论、同调代数、Yoneda Ext、形式化、Coq

相关版本完整版本： `https://arxiv.org/abs/2302.12678`

补充材料本文所述形式化的源代码见：软件（源代码）：
`https://github.com/HoTT/HoTT/tree/master/theories/Algebra/AbSES`软件（源代码）：
`https://github.com/jarlg/Yoneda-Ext`

经费支持我们感谢加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）提供的支持，项目编号为 RGPIN-2022-04739。

致谢同伦类型论中的 Yoneda Ext 理论是与 Dan Christensen 合作完成的；我也感谢他就形式化相关问题进行的讨论并作出的贡献。感谢 Jacob Ender 对 Baer 和形式化的贡献，也感谢 Coq-HoTT 库的合作者——尤其是 Ali Caglayan——审阅并参与了与本项目相关的各项拉取请求。我还要感谢匿名评审提供的宝贵意见。

arXiv:2302.12678v2 [cs.LO] 6 Jun 2023

1 引言

同伦类型论（HoTT）位于类型论与代数拓扑的交汇处，起到桥梁作用，将一个领域的工具和见解传递到另一个领域。从一个方向来看，类型论的形式体系已被证明是一种强大的语言，可用于推理现代代数拓扑诸分支中出现的一些高度相干的结构。其中若干结构是 HoTT“原生支持”的，因此我们能够比在经典的基于集合的方法中更直接地对其进行推理。这使 HoTT 成为形式化代数拓扑中的结果与结构的理想语言。此外，HoTT 中的定理在任意 ∞-托普斯 中均成立，而不仅限于普通空间。关于如何将我们的构造解释到一个 ∞-托普斯中，以及我们的 Ext 群与层 *Ext*之间的关系，详见 [2]。

我们遵循 Yoneda [12,13] 的方法，在同伦类型论中对 Ext 群进行了形式化。Ext 群是同调代数中的基本对象，在同伦论的计算中无处不在。例如，泛系数定理将 Ext 群与上同调联系起来，并出现在 $\pi_5(S^3) \simeq \mathbb{Z}/2$ 的经典证明中。我们的形式化工作大部分已被纳入 Coq-HoTT 库的 `Algebra.AbSES` 命名空间，不过在整个项目过程中，我们也为库的其他部分作出了贡献

。长正合序列以及我们所需的其他一些结果，目前存放在一个名为 `Yoneda-Ext` 的独立代码库中。我们在全文中使用尾随的 $\diamond$ 符号，为形式化陈述提供链接。

在通常的数学中，环上模的 Ext 群通常用投射（或内射）分解来定义。这是可行的，因为选择公理蕴含此类投射分解的存在，而且 Ext 群与所选的具体分解无关。（类似地，模层范畴总是存在内射分解。）然而，在我们的框架中，甚至阿贝尔群也不存在投射分解。这源于某些集合不是投射的；对于从事构造性数学或托普斯内部数学研究的人来说，这一点或许并不陌生。因此，要在同伦类型论中定义 Ext 群，我们不能依赖分解。幸运的是，Yoneda [12, 13] 提出了这种通用方法，其理论详见 [6],我们的主要参考文献。这种方法的一个缺点是，它会产生较大的阿贝尔群，正如我们在第 3.1 节中所说明的。

我们的工作基于 Coq-HoTT 库 [3], ；该库包含复杂的同伦论结果，但目前在“基础”代数方面有所欠缺。因此，我们选择只研究阿贝尔群的 Ext 群，而不研究环上模的 Ext 群，也不采用更一般的设置。尽管如此，显然，只要有一个完善的模论库，我们所做的一切都可以在任意环上完成。此外，我们强调，即使对于阿贝尔群，同伦类型论中的高阶 Ext 群也很有意义。虽然在经典数学中，阿贝尔群的此类 Ext 群在维数 2 及以上时都是平凡的，但在同伦类型论中，它们在所有维数上都可能非平凡！这是因为存在一些 HoTT 模型，其中这些 Ext 群是非平凡的 [2]。

在第 3 节中，我们说明单价性如何让我们能够在同伦类型论中自然地表示米田方法下的 Ext。我们构造类型 $\mathtt{AbSES}(B,\ A)$，其中包含两个阿贝尔群 A 和 B之间的短正合列，并定义 $\mathtt{Ext}^1(B,\ A)$ 为 $\mathtt{AbSES}(B,\ A)$ 的路径分支集合。我们通过刻画 $\mathtt{AbSES}(B,\ A)$ 中的路径来论证这一定义的合理性，而这关键地用到了单价性。我们还证明，$\mathtt{AbSES}(B,\ A)$ 的环路空间与群 $\mathtt{Hom}(B,\ A)$ 同构，其中 $\mathtt{Hom}(B,\ A)$ 是群同态构成的群；并且，当 P 是我们所定义意义下的射影对象时，$\mathtt{Ext}^1(P,\ A)$ 为零。这些结果都将在后续各节中发挥作用。

第 4 节的主要内容是证明并形式化以下定理：

▶**定理 13.** 设 $A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ 是阿贝尔群的一个短正合列。对于任意阿贝尔群 G，拉回给出一个纤维序列：$\mathtt{AbSES}(B,\ G) \xrightarrow{p^*} \mathtt{AbSES}(E,\ G) \xrightarrow{i^*} \mathtt{AbSES}(A,\ G)$.$^\diamond$

我们给出了这一结果的一种新颖而直接的证明，但需要处理大量的相干性。形式化针对阿贝尔群完成，不过该证明也适用于一般环上的模。其形式化得益于 Coq-HoTT 的 `WildCat` 库（见第 2.2 节）；借助该库，可以方便地处理带有预先规定的路径概念的类型。这使我们能够在 $\mathtt{AbSES}(B, A)$ 中使用具有更好计算性质的路径数据，而不是实际的路径；不过，根据前述刻画，它们与路径相对应。由该定理的纤维序列，我们推导出通常的六项正合序列（命题 19），随后利用它计算循环群的 Ext 群：

$$\mathtt{Ext}^1(\mathbb{Z}/n, A) \ \cong\ A/n$$

对于任意非零 $n : \mathbb{N}$ 和阿贝尔群 A （推论 21）。$^\diamond$ 六项正合序列以及这一推论已经在 [1] 中得到应用。我们还讨论了如何利用 Baer 和使 $\mathtt{Ext}^1$ 成为取值于阿贝尔群的双函子。

最后，在第 5 节中，我们定义 $\mathtt{Ext}^n$，适用于任意 $n : \mathbb{N}$，并讨论长正合序列的形式化，其中连接映射通过拼接给出：$^\diamond$

▶ **定理 26.** 设 $A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ 是阿贝尔群的一个短正合列。对于任意阿贝尔群 G，通过拉回可得一个长正合序列：◇◇◇

$$\cdots \xrightarrow{i^*} \mathtt{Ext}^n(A,G) \xrightarrow{-\circledcirc E} \mathtt{Ext}^{n+1}(B,G) \xrightarrow{p^*} \mathtt{Ext}^{n+1}(E,G) \xrightarrow{i^*} \cdots .$$

目前，我们只形式化了这个带基点集合的长正合序列。我们仍需构造 Baer 和，使 $\mathtt{Ext}^n$ 对 $n > 1$ 成为阿贝尔群；不过，一旦完成这一步，我们就能自动得到一个阿贝尔群的长正合序列。我们的证明沿用了定理 5.1 的证明，该定理最初由 Stephen Schanuel 提出。

记号与约定 我们使用打字机字体表示在代码中定义的概念，例如 `AbSES` 和 `Ext`。相较之下，当我们使用普通数学字体时，例如 $\mathrm{Ext}^n(B,A)$，指的是经典概念。对于数学陈述，我们倾向于贴近数学记号，例如写作 $\mathtt{Ext}^n(B,A)$，表示 Coq 中的`Ext n B A`。符号 ◇ 用于指代代码中的相关部分。

我们的术语沿用 [10]；特别是，对于也称为“恒等类型”或“相等类型”的概念，我们称之为“路径类型”。我们用 `pType` 表示带基点类型的宇宙，用 `pt` 表示带基点类型的基点。$\equiv$ 符号表示定义性相等。

2 预备知识

2.1 同伦类型论

我们简要介绍同伦类型论的形式化框架，以及一些我们所需的基本概念。若要全面了解同伦类型论，读者可以参阅 [10, 9]。

同伦类型论（HoTT）以 Martin–Löf 类型论（MLTT）为基础，引入单值性公理 以及通常所说的各种高阶归纳类型（HITs）。在后者中，我们只需要命题截断和集合截断，下面将对它们作更详细的解释。

单值性公理刻画了宇宙的恒等类型。在普通的 MLTT 中，总存在一个函数

$$\mathtt{idtoequiv} : \prod_{X,Y:\mathsf{Type}} (X = Y) \to (X \simeq Y)$$

该函数利用路径类型的归纳原理，将类型 X 上的自反路径映射到 X上的恒等自等价。单值性公理断言，对于所有 X 和 Y，`idtoequiv` 都是一个等价。在同伦类型论中，我们通常在定义一个新类型后所做的第一件事，就是刻画它的路径类型。单值性公理则为宇宙完成了这一点。

由单价性可推出一般的结构恒等原理 [10, 第 9 章8]，它刻画了结构化类型之间的路径，例如群及其他代数结构。对于群，单价性意味着群之间的路径对应于群同构。同样，模之间的路径对应于模同构。

命题、集合与群胚

在同伦类型论中，对于任意整数$n \geq -2$，都存在一个由 ***n*截断类型**（简称 ***n*-类型**）构成的层级。一般而言，当所有路径类型 $x_0 =_X x_1$ 都是n-类型时，类型 X 就是一个（$n+1$）-类型。递归从 -2开始，此时条件仅为映射 $X \to 1$ 是一个等价；在这种情况下，X 是**可缩的**。

我们只讨论这一层级中最底下的四个层次：**可缩类型**、**命题**（(-1-类型）、**集合**（0-类型）和 1-型。若任意两个点

在 X 中都相等（但也可能一个点都没有），则类型 X 是一个命题。若路径类型 $x_0 =_X x_1$ 全都是命题，则类型 X 是一个集合——这意味着 x_0 和 x_1 之间"至多"有一条路径。最后，若一个类型的路径类型都是集合，则该类型 X 是一个 1-型；特别地，对任意 x: X，**环路空间**$\Omega X :\equiv (x =_X x)$ 是一个集合，并且在路径复合下构成一个群。（取环路空间时，我们省略基点。）

我们可以通过截断运算从给定类型 X构造出命题或集合。我们用 $\|X\|$ 表示命题截断，用 $\pi_0 X$ 表示 X的集合截断（或路径分支的集合）。在 Coq-HoTT 中，对应的记法是 `merely X` 和 `Tr 0 X`。映射 $\mathtt{tr} : X \to \pi_0 X$ 将一个点映射到其连通分支。当我们说某个类型X **仅仅**成立时，意思是它的命题截断 $\|X\|$ 成立。

2.2 Coq-HoTT 库

Coq-HoTT 库 [3] 是一个开源代码库，收录了使用 Coq 进行同伦类型论形式化数学的成果。该库尤其致力于发展合成同伦论，内容包括球面、环路空间、分类空间、模态、"野性 ∞-范畴"，以及阿贝尔群的基础结果等。该库是*Coq* 平台的一部分，可通过标准 `opam` 软件包仓库获取。

下面我们介绍这个库以及 Coq 本身的一些主要特性，这些特性对本文至关重要。

宇宙与累积性

我们假设读者熟悉 Coq 中的宇宙和宇宙层级，尤其是了解它们具有累积性：类型 X : `Type@{u}` 可以重调整至 `Type@{v}` 中，前提是满足约束 $\mathtt{u} \leq \mathtt{v}$。（此处，`u` 和 `v` 是**宇宙层级**。）重调整由 Coq 隐式完成。

在 Coq-HoTT 库中，我们还让大多数结构具有累积性。这基本上意味着，重调整与数据结构的构造可交换——也就是说，无论是先重调整数据结构的输入，还是重调整构造出的数据结构，结果都一样。举例来说，考虑数据结构 `prod`，它在一个共同的（为简单起见）宇宙层级上取两个类型的积。假设有两个宇宙层级 `u` 和 `v`，满足约束 $\mathtt{u} < \mathtt{v}$。给定 `X Y : Type@{u}`，我们可以先在层级 `u` 上构造积，再进行重调整；也可以先重调整，再构造积。通过让`prod` 成为具有累积性的数据结构，这两种结果（在隐式重调整后）便相同：

```
prod@{u} X Y ≡ prod@{v} X Y.
```

数据结构的累积性是 Coq 的一项重要特性，有助于我们在本文中进行这类形式化工作。例如，它让我们能够调整群和同态的大小。它还让我们可以通过以下技巧减少某些定义中的宇宙数量：我们通常不必为不同的输入分别设置宇宙，而是可以使用一个（代表最大值的）单一宇宙，并利用累积性。

我们还使用了宇宙约束，因为我们的构造会在不同的宇宙层级之间转换。这些约束既记录了数学意图，也验证了它。

The `WildCat` 库

`WildCat` 命名空间包含"wild ∞-范畴"的发展、此类范畴之间的函子及相关内容。该库由 Ali Caglayan、tslil clingman、Floris van Doorn、Morgan Opie、Mike Shulman 和 Emily Riehl 牵头开发。这些概念推广了那些

出现在 [11, 第 4.3 节1], 中的概念，目前尚未见于文献。我们将介绍该库的基础知识，这些内容与我们的形式化尤其相关。

从**图**◇——一种带有二元运算（或对应）Hom 到 Type的类型 A ——的概念出发，**0-函子**◇ 的概念就是图同态:

```
Class IsGraph (A : Type) := { Hom : A -> A -> Type }.
Class Is0Functor {A B : Type} `{IsGraph A} `{IsGraph B} (F : A -> B)
  := { fmap : forall {a b : A} (f : Hom a b), Hom (F a) (F b) }.
```

在本文中，我们将经常使用记号 `Hom` ，而省略图结构。

从这里出发，可以通过定义复合运算，并使用类型 `Hom`(a, b) 的恒等类型来表达范畴需要满足的各种定律（例如复合的结合律），进而定义范畴。更灵活的方法是，允许 `Hom`(a, b) 本身成为一个图，从而使 A 成为一个 **2- 图**。◇ 这正是 `WildCat` 所采用的方法，而这种灵活性对于我们的形式化十分重要。

```
Class Is2Graph (A : Type) `{IsGraph A}
  := { isgraph_hom : forall (a b : A), IsGraph (Hom a b) }.
```

对于一个 2-图 A，随后可以使用 `isgraph_hom` 以直接的方式定义范畴结构，从而表达需要成立的各种定律。该结构被封装在一个名为 `Is1Cat` 的类中。◇ 例如，结合律可以如下表达，其中使用记号 `$==` 作为 2-图结构的简写，并使用 `$o` 表示复合:

```
  cat_assoc : forall (a b c d : A)
```

如果 A 中的所有态射都可逆，那么 A 就是一个 **群胚**。◇ 最后，对于范畴之间 **1-函子** 的概念，我们也用 2-图结构来表达这些定律。◇

```
Class Is1Functor {A B : Type} `{Is1Cat A} `{Is1Cat B}
```

术语 `fmap_id` 和 `fmap_comp` 表示函子 `F` 像往常一样尊重恒等态射和复合。如果我们使用恒等类型而非 2-图结构，使得 `f $== g` 仅表示 `f = g`，那么 `F` 就会自动尊重态射之间的等式，从而使 `fmap2` 变得多余。不过，在更一般的 2-图设置中，这一点需要作为一条定律纳入。

形容词“wild”用于描述刚定义的这类范畴，表示它们无法捕捉表示 ∞-范畴所需的全部相干性，只能捕捉 1-范畴结构。不过，在本文中我们只会遇到真正的 1-范畴和群胚。具体而言，任意类型 X 都可通过其恒等类型◇定义一个群胚；若 X 是一个 1-型，那么这种群胚结构就能完整地捕捉 X的一切。这使我们能够为某些感兴趣的类型规定自己的路径概念，以下称为路径数据 。

3 Yoneda Ext

如引言所述，我们将采用米田方法来处理 Ext 群 [12, 13],，这种方法不需要射影（或内射）分解，但会得到较大的 群。该方法及相关理论详见 [6], ，这是我们主要的参考文献。目前，Coq-HoTT 库——本工作正是在其中形式化的——并未包含多少关于一般环上模的理论（也不包含阿贝尔范畴理论或类似内容）。因此，我们只对阿贝尔群的结果进行形式化并加以陈述。不过，显然我们所述的一切也都可以推广到一般环上的模。

对于熟悉经典理论的读者，我们还要强调，在同伦类型论中，阿贝尔群范畴的整体维数并非1，因此我们在第 5 节定义的高阶 Ext 群不一定会消失。

3.1 短正合列的类型

给定两个阿贝尔群 A 和 B，Yoneda 通过考察所有短正合列 $A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ 所构成的大集合（或类），并对其按某个等价关系取商，定义了群 $\mathrm{Ext}^1(B,\ A)$。序列正合意味着 i 是单射， p 是满射，$p \circ i = 0$，并且 i 的像等于 p的核。当不会引起混淆时，我们通常将短正合列 $A \to E \to B$ 简记为 E。Yoneda 所取商的等价关系定义为：“$E \sim F$ 当且仅当存在一个同构 $E \cong F$，它与从 A 出发的映射以及到 B的映射相容。”从等价的角度来看，也可以更具拓扑意味地考察短正合列 $A \to E \to B$ 所构成的群胚，并将 $\mathrm{Ext}^1(B,\ A)$ 定义为该群胚的路径分支集合——关于这两种描述的详细信息，参见例如 [6, 第三章] 。

在同伦类型论中，给定两个阿贝尔群 A 和 B，我们将从 A 到 B 的**短正合列类型**构造为所有阿贝尔群 E 上的 Σ-类型，其中每个群都配备一个单射 $\mathtt{inclusion}_E : A \to E$、一个满射 $\mathtt{projection}_E : E \to B$，以及一个证明，表明这两个映射构成正合复形。我们将这些数据表示为如下记录类型：$\diamondsuit$

```
Record AbSES@{u v | u < v} (B A : AbGroup@{u}) : Type@{v} := {
    middle : AbGroup@{u};
    inclusion : Hom A middle;
    projection : Hom middle B;
    isembedding_inclusion : IsEmbedding inclusion;
    issurjection_projection : IsSurjection projection;
    isexact_inclusion_projection
      : IsExact (Tr (-1)) inclusion projection;
  }.
```

注意， $\mathtt{AbSES}(B,\ A)$ 表示从 A 到 B的短正合列。阿贝尔群`middle` 在此处扮演了上文正文中 E 的角色。这里，条件 $\mathtt{projection}_E \circ \mathtt{inclusion}_E = 0$ 已包含在 `IsExact` 字段中，该字段也表达了正合性。[1] 我们加入了宇宙标注，以表达 E 与阿贝尔群 A 和 B处于同一宇宙 `u` 中。因此，所得类型 $\mathtt{AbSES}(B,\ A)$ 所处的宇宙 `v`严格高于 `u`，与上文 Yoneda 的构造一样。类型 $\mathtt{AbSES}(B,\ A)$ 以**平凡短正合列**$\diamondsuit$ $A \to A \oplus B \to B$.为基点

[1] 术语 `Tr (-1)` 可以放心忽略；它表示从 A 到 $\mathtt{projection}_E$ 的核的诱导映射是 (-1)连通的，在这里这仅意味着它是一个满射。

现在，我们将 $\texttt{Ext}^1(B,\ A)$ 定义为短正合列类型的集合截断。◇

在第 3.3 节中，我们通过 *Baer* 和 将集合 $\texttt{Ext}^1(B,\ A)$ 构造成一个阿贝尔群。这些阿贝尔群，以及第 5 节中定义的更高阶变体，是我们研究的主要对象。

每当我们在同伦类型论中定义一种新类型时，通常首先要做的就是刻画它的路径类型。[10] 的定理 7.3.12 刻画了截断中的路径，从而得到

$$\left(|E|_0 =_{\text{Ext}^1} |F|_0\right) \ \simeq\ \|E = F\|$$

对于任意 $E,\ F\colon \texttt{AbSES}(B,\ A)$。因此，只需理解 $\texttt{AbSES}(B,\ A)$ 中的路径。这些路径又可由前引文献的定理 2.7.2 刻画；该定理刻画了一般 Σ-类型中的路径，并结合了这样一个事实： `AbGroup` 中的路径就是同构。在我们的情形中，短正合列之间的路径对应于使相应三角形交换的 `middle` 之间的同构。我们将这些数据称为路径数据，并将其打包为一个独立的类型（其中 `*` 表示类型的积）：◇

```
Definition abses_path_data_iso {B A : AbGroup} (E F : AbSES B A)
  := {phi : Iso E F & (phi $o inclusion E == inclusion F)
                      * (projection E == projection F $o phi)}.
```

这里 `Iso` 构成两个群之间同构的类型。根据上面的讨论，对于任意 $E,\ F\colon \texttt{AbSES}(B,\ A)$，我们得到类型等价◇

$$(E =_{\texttt{AbSES}(B,A)} F)\ \simeq\ \texttt{abses_path_data_iso}(E, F).$$

不过，还可以进一步说明：短五引理◇ 表明，如果我们将上面的 `Iso` 替换为`Hom` ，那么仍可推出 `phi` 是一个同构。我们将 `abses_path_data`◇定义为上面的 `abses_path_data_iso` ，但用 `Hom` 替代 `Iso`。同时保留这两种类型会很方便：构造 `abses_path_data`的元素更加容易；然而，我们稍后会看到一些情形，此时保留底层映射的特定逆映射会很方便，而 `abses_path_data_iso` 使我们能够做到这一点。

▶ **定义 1**。 类型 $\texttt{AbSES}(B, A)$ 是一个群胚，其图结构由`abses_path_data_iso`以及相应的范畴结构给出。对于2-图结构，我们断言，当且仅当两条路径数据的底层映射同伦时，它们相等。◇

根据前面的讨论，这一定义是合理的，由此可得：

▶ **引理 2.** 对于任意 $E, F\colon \texttt{AbSES}(B, A)$，存在类型之间的等价◇

$$(E = F)\ \simeq\ \texttt{abses_path_data_iso}(E, F)\ \simeq\ \texttt{abses_path_data}(E, F).$$

尽管这个引理很基础，但它有一个有趣的推论。这个陈述作为 $n, i = 1$ 情形出现在 [8, 定理 1]中。

▶ **命题 3.** $\texttt{AbSES}(B, A)$ 的环路空间自然同构于 $\texttt{Hom}(B, A)$。◇

证明. 根据前一个引理，只需给出 $\texttt{Hom}(B, A)$ 与$\texttt{abses_path_data}(A \oplus B, A \oplus B)$之间的一个同构。容易验证，满足路径数据约束的映射 $\phi\colon\ A \oplus B \to A \oplus B$由复合映射唯一确定◇

$$B \to A \oplus B \xrightarrow{\phi} A \oplus B \to A.$$

此外，这一对应定义了一个群同构——详情请参见形式化内容。◇ ◀

为了将前述命题形式化，我们首先建立了阿贝尔群双积的基础理论，这些理论现已收录于 Algebra.AbGroups.Biproduct中。

在通常的同调代数中，阿贝尔群 P 是射影的，如果对于任意同态f： $P \to B$ 和满同态 p： $A \to B$，都存在一个提升 l： $P \to A$，使得 $f = e \circ l$。众所周知，当 P 是射影的时，$\mathrm{Ext}^1(P, A)$ 总是消失；而且这一性质刻画了投射性。在我们的设定中，我们将阿贝尔群 P 定义为**射影的**，如果对于上述任意同态 f 和满同态 p，都仅仅存在一个提升 l，使得$f = l \circ l$。命题截断使这成为阿贝尔群的一个性质，而非结构。在 Coq 中，我们将其表示为一个类型类：◇

```
Class IsAbProjective (P : AbGroup) : Type :=
```

与经典情形一样，射影对象可由 Ext 的消失来刻画：

▶ **命题 4. </style}阿贝尔群 是射影的，当且仅当对所有，** $(P, A) = 0$ 。◇

由 $\mathbb{Z}$ 的归纳原理可知，$\mathbb{Z}$ 是射影的，◇ 符合我们上述的定义。因此，对于任意阿贝尔群 A，都有 $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, A) = 0$，我们稍后会用到这一点。

▶ 注 5. 关于投射性，有一点微妙之处值得讨论。我们的投射性定义只要求提升 l 存在（作为一个性质），但也可以要求其实际存在（作为一个结构）。普通数学中没有“仅仅存在”的概念；将概念转换为同伦类型论中的概念时，我们必须谨慎决定将某个事物视为结构还是性质。在此情形下，命题 4 为我们对投射性的定义提供了依据。如果将投射性定义为一种结构，那么甚至 $\mathbb{Z}$ 也不是射影的，而我们需要它是射影的。

3.2 Ext 作为双函子

Ext^1 的一些重要结构体现在它定义了一个双函子$\mathrm{Ext}^1(-, -) : \mathrm{Ab}^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$。这意味着 $\mathrm{Ext}^1(-, -)$ 对每个变量都是一个函子，并且满足以下“双函子定律”：

$$\mathrm{Ext}^1(f, -) \circ \mathrm{Ext}^1(-, g) = \mathrm{Ext}^1(-, g) \circ \mathrm{Ext}^1(f, -). \tag{1}$$

为满足我们的需求，我们在 WildCat 库中添加了双函子的基本实现，并利用 2-图结构断言双函子定律：◇

```
Class IsBifunctor {A B C : Type} `{IsGraph A, IsGraph B, Is1Cat C}
```

这里 flip 是用于反转二元函数参数顺序的映射。我们注意到，为了陈述双函子定律，只要求 F 在每个变量上都是一个 0-函子。因此，我们在此类中只包含这些实例。

$\texttt{Ext}^1$ 的双函子实例将来自 $\texttt{AbSES}$的双函子实例，因此我们处理后者。首先， $\texttt{AbSES} : \texttt{AbGroup}^{\mathrm{op}} \to \texttt{AbGroup} \to \texttt{Type}$ 分别通过拉回和推出，在每个变量上都成为一个 0-函子。

▶ **引理 6**。 设 $g :\ B' \to B$ 是阿贝尔群同态。对于任意短正合列 $A \to E \to B$，我们都有一个短正合列 $A \to g^*(E) \to B'$。◇ 此外，如果 E 是平凡的，那么短正合列 $g^*(E)$ 也是平凡的。◇

对偶地，可以沿着映射 $f :\ A \to A'$ 推出短正合列 $A \to E \to B$，从而得到短正合列 $A' \to f_*(A) \to B$。◇

我们将仔细证明，推出和拉回保持基点映射◇ 的复合以及映射之间的同伦◇，并且沿恒等映射推出会给出基点恒等映射。◇ 这些恒等式本可以用更简短的证明来展示，但在第 4 节中，我们必须证明涉及此处构造的路径的相干性；当用路径数据来表述时，这些相干性更容易处理。无论如何，这些证明使得 $\texttt{AbSES}$ 在每个变量中都是一个 1-函子。◇◇

对于双函子定律，我们要用到下面这个命题。它对于证明给定的扩张是另一个扩张的拉回，特别有用。

▶**命题 7.** 假设给定如下图表，其中各行均为短正合行：

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & B' \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & B\,. \end{array}$$

若 $\alpha = \mathrm{id}$，则顶行等于底行沿 g 的拉回。◇

证明。 由于右侧方块交换，根据拉回的泛性质，我们得到一个映射 $E' \to g^*(E)$。此映射保持包含映射和投影，因此根据引理 2 定义了一条路径。◀

对推出也有一个对偶陈述，其中最右侧的映射必须是恒等映射。◇

▶ **推论 8.** 任何如下所示、各行均为短正合行的图表，都给出一条路径 $f_*(E) = g^*(F)$。◇

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & B' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & B\,. \end{array}$$

这个推论使我们能够迅速证明双函子性：

▶ **命题 9.** 二元映射 $\texttt{AbSES} : \texttt{AbGroup}^{\mathrm{op}} \to \texttt{AbGroup} \to \texttt{Type}$ 是一个双函子。◇

证明。 考虑一个短正合列 $A \to E \to B$ 以及两个同态$f :\ A \to A'$ 和 $g :\ B' \to B$。显然存在一个具有短正合行的图表：

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & g^*(E) & \longrightarrow & B' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A' & \longrightarrow & f_*(E) & \longrightarrow & B\,. \end{array}$$

根据前一个推论，这给出一条路径 $f_*(g^*(E)) = g^*(f_*(E))$，正如所需。◀

▶ 备注 10。第 3.3 节的结果将表明， $\texttt{AbSES}$ 是一个 H-空间。◇ 结合 [1, 引理 2.6]◇，我们 deduce 出 $\texttt{AbSES}$ 是一个从类型到带基点类型的双函子。不过，这对本文的其余部分不起作用。

3.3 Baer 和

Baer 和 是 $\mathrm{Ext}^1(B,\ A)$上的一个二元运算，使其成为一个阿贝尔群 .
给定两个扩张 $E,\ F\colon \mathrm{Ext}^1(B,\ A)$，它们的 Baer 和定义为

$$E + F :\equiv \Delta^*\nabla_*(E \oplus F)$$

其中， $E \oplus F$ 是逐点直和， $\nabla(a,\ b) :\equiv a_0 + a_1\colon A \oplus A \to A$ 是余对角映射，而 $\Delta(b) :\equiv (b,\ b)\colon B \to B \oplus B$ 是对角映射。

我们与 Dan Christensen 和 Jacob Ender 一起，在 `Algebra.AbSES.BaerSum` 中实现了 Baer 和。我们在短正合列的层面上定义这一运算，然后通过截断递归将该运算下降到集合 Ext^1 上。◇

```
Definition abses_baer_sum `{Univalence} {B A : AbGroup}
  : AbSES B A -> ABSES B A AbSES B A := fun E F =>
      abses_pullback ab_diagonal
        (abses_pushout ab_codiagonal (abses_direct_sum E F)).

Definition baer_sum `{Univalence} {B A : AbGroup}
  : Ext B A -> Ext B A -> Ext B A.
Proof.
  intros E F; strip_truncations.
  exact (tr (abses_baer_sum E F)).
Defined.
```

上面， `strip_truncations` 策略是执行截断递归的辅助工具；它让我们可以假设 E 和 F 都是 $\mathtt{AbSES}(B,\ A)$ 的元素，从而映射到集合 $\mathrm{Ext}^1(B,\ A)$。接着，我们只需在短正合列的层面上对 E 和 F 取 Baer 和，然后对结果应用 `tr` 。

关于 Baer 和使 $\mathrm{Ext}^1(B, A)$ 构成阿贝尔群的形式化，基本遵循了 [6, 定理 III.2.1] 的“第二种证明”。

▶ **定理 11**。 集合 $\mathrm{Ext}^1(B, A)$ 在 *Baer* 和运算下构成阿贝尔群。◇

一旦确立了 Ext^1 的双函子性及其与直和的相互作用，整个证明便可通过串联等式来完成。为说明这一点，我们证明推出与 Baer 和相容：

▶ **命题 12**。 设 $\alpha : A \to A'$ 是阿贝尔群同态。对于任意阿贝尔群 B，推出定义了一个群同态 $\alpha_*\colon \mathrm{Ext}^1(B, A) \to \mathrm{Ext}^1(B, A')$.◇

证明。 利用 Ext^1 的双函子性以及 $\oplus$ 的自然性，我们有：

$$\begin{aligned}\alpha_*(E + F) &= \Delta^*(\alpha_*\nabla_*(E \oplus F)) = \Delta^*(\nabla_*(\alpha_* \oplus \alpha_*)_*(E \oplus F)) \\ &= \Delta^*(\nabla_*(\alpha_*E \oplus \alpha_*F)) \equiv \alpha_*E + \alpha_*F.\end{aligned}$$

◀

类似地，拉回也定义了一个群同态。◇ 这些结果使 Ext^1 成为一个取值于阿贝尔群范畴的双函子。◇

4 拉回纤维列

本节的主要目标是阐述并证明以下数学结果，讨论其形式化◇ ，并介绍一些应用。

▶**定理 13**。 设 $A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ 是阿贝尔群的一个短正合列。对于任意阿贝尔群 G，拉回会得到一个纤维序列： $\mathtt{AbSES}(B, G) \xrightarrow{p^*} \mathtt{AbSES}(E, G) \xrightarrow{i^*} \mathtt{AbSES}(A, G).$◇

在 [2, 命题 2.3.2] 中，我们通过 $\mathtt{AbSES}(B, A)$ 与 Eilenberg–Mac Lane 空间之间的基点映射之间的一个等价，给出了该结果的另一种证明。然而，这种不同的证明似乎只适用于 $\mathbb{Z}$，而我们下面的证明适用于一般环（尽管目前只针对 $\mathbb{Z}$ 进行了形式化）。

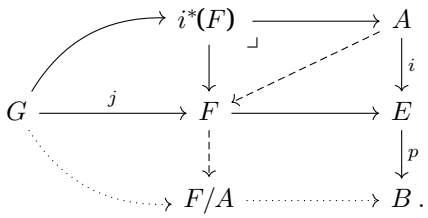
一列基点映射 $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ 称为**纤维序列**，如果 $p \circ i$ 与常值映射基点同伦，且诱导映射 $F \to \mathtt{fib}_p$ 是一个等价。任何纤维序列都会诱导出同伦群的长正合序列 [10, 定理 8.4.6]:

$$\cdots \to \pi_n(F) \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \cdots \to \pi_0(F) \to \pi_0(E) \to \pi_0(B).$$

在我们的定理所述的情形下，由 E 的函子性和正合性可立即得出，$i^* \circ p^*$ 是常值映射。因此，我们的目标是证明诱导映射 $c : \mathtt{AbSES}(B, G) \to \mathtt{fib}_{i^*}$ 是一个等价。[2] 我们将先构造 c 的一个截面，然后构造纤维 c 到该截面取值的一个收缩。形式化工作的一个关键部分是使用路径数据而非实际路径，因为前者具有更好的计算性质。在本节中，我们将用 $E = F$ 表示路径数据，并称其为路径数据。

▶ **引理 14**。 设 $G \to F \to E$ 是一个短正合列。给定路径数据 $p : i^*(F) = \mathtt{pt}$，我们构造一个短正合列 $G \to F/A \to B$。◇

证明。 路径数据 p 意味着序列 $i^*(F)$ 分裂。因此，我们可以如下图所示构造余核 F/A：



两个映射 $G \to F/A \to B$ 分别由复合和余核的泛性质给出。显然，这构成一个复形，且第二个映射是满同态，因为它是经由一个满同态分解的。为证明映射 $G \to F/A$ 是单射，设 $g : G$ 被映到 $0 : F/A$。那么 $j(g)$ 根据 $A \to F$ 属于某个 $a : A$ 的像。但映射 $i^*(F) \to F$ 是单射，因为它是一个单射的拉回，因此利用路径数据，我们得到等式 $(g, 0) = (0, a)$，它位于 $G \oplus A$ 中。当然，这意味着 $g = 0$，正如所需。

$G \to F/A \to B$ 的正合性可通过简单的图表追逐得出。 ◀

上方图表表明，F 是沿着 p^* 对 F/A 的拉回，得出：

▶ **引理15**。 我们有路径数据 $q : p^*(F/A) = F$。◇

因此，我们给出了 p^* 下 F 的一个原像 F/A。为证明 c 的纤维非空，我们将证明 $c(F/A) = (F, p)$，这是一条位于 $\mathtt{fib}_{i^*}$ 中的路径。我们将这一切用

[2] 映射 c 在代码中称为 `cxfib` 。

路径数据来表达，而 $\mathtt{fib}_{i^*}$ 中的这样一条路径对应于路径数据 $q\colon p^*(F/A) = F$，它使下方三角形交换：◇

$$\begin{array}{ccc} i^*p^*(F/A) & \xrightarrow{\quad i^*(q) \quad} & i^*(F) \\ & \searrow \quad \swarrow_{p} & \\ & G \oplus A & \end{array} \tag{2}$$

其中最右边的映射来自 i^*p^* 是平凡的。我们用路径数据来表述这些内容的关键原因是，这样一来，上述三角形中的映射就能直接计算出来，因为它们都是通过具体构造得到的。

在下文中，c 指映入 $\mathtt{fib}_{i^*}$ 的映射，并以路径数据的形式表示。◇

▶ **引理 16.** 我们有 $q\colon c(F/A) = (F, p)$ 在 $\mathtt{fib}_{i^*}$ 中。◇

证明。 前一个引理已经给出了路径数据 $q\colon p^*(F/A) = F$，因此接下来只需证明方程（2）中的三角形可交换。鉴于这些映射的构造方式，最简单的做法是翻转三角形，使其从 $G \oplus A$ 出发并以$i^*p^*(F/A)$结束。（这没有问题，因为所有映射都是同构。）这样，我们要比较的是从一个双积映入一个拉回的两个映射。要检查它们是否相等，可以分别考察双积的每个嵌入，并在拉回投影后进行检查。在每种情况下都会得到可交换的图表，但验证起来颇为繁琐。幸运的是，由于我们精心构造了相关的路径数据，这些映射可以直接计算，Coq 也能将目标归约为一个简单的计算。◀

结合前面三个引理，我们得到 c 的一个截面：$\mathtt{AbSES}(B,\ G) \to \mathtt{fib}_{i^*}$。为证明 c 是一个等价，我们将每个在某个 $(F,\ p)$ 上的纤维收缩到 $(F/A,\ q)$。

▶ **引理 17。** 设 $G \to Y \to B$ 是一个短正合列，并令 $q'\colon c(Y) = (F, p)$ 属于$\mathtt{fib}_{i^*}$。则 $(F/A, q) = (Y, q')$ 属于 c 在 (F, p) 上的纤维。◇

证明。在我们的假设下，我们有复合映射 $\phi\colon G \oplus A \to i^*p^*(Y) \to p^*(Y)$◇，通过图表追逐可知，它在一个分量上是嵌入 $G \to p^*(Y)$，在另一个分量上是 $(0, p)\colon A \to p^*(Y)$。◇。因此，复合 $\mathtt{pr}_1 \circ \phi \circ \mathtt{in}_A\colon A \to Y$ 是平凡的。由余核的泛性质，我们得到一个诱导映射 $F/A \to Y$。再次，由于我们对所涉及的所有映射都进行了仔细构造，直接计算即可得知该映射定义了路径数据 $F/A = Y$，并且这条路径提升为 c 的纤维中的一条路径。在 $\mathtt{AbSES}(A, G)$ 中的三条路径之间存在一个相干性，这显然成立，因为 $\mathtt{AbSES}(A, G)$ 是一个 1-型。◀

最后一个引理表明，c 的纤维是可缩的，这意味着 c 是一个等价，从而完成了定理 13 的证明。现在我们转而关注该定理的两个应用。第一个应用需要一个引理。

▶**引理 18.** 设 $g\colon B' \to B$ 是阿贝尔群同态。对于任意 A，下列图表可交换，其中所有垂直同构均由命题 *3* 给出：◇

$$\begin{array}{ccc} \Omega\,\mathtt{AbSES}(B, A) & \xrightarrow{\Omega(g^*)} & \Omega\,\mathtt{AbSES}(B', A) \\ \downarrow\sim & & \downarrow\sim \\ \mathtt{Hom}(B, A) & \xrightarrow{\phi \mapsto \phi \circ g} & \mathtt{Hom}(B', A)\,. \end{array} \tag{3}$$

证明。 设 $p\colon A \oplus B = A \oplus B$ 是左上角的一个元素，将其视为路径数据。通过路径归纳，可以轻易证明$\Omega(g^*)$ 在路径上的作用由拉回路径数据给出。（严格来说，先对具有自由端点的路径证明这一点，然后再将其专门化为回路。）这意味着下列图表可交换

$$\begin{array}{ccccccc} B' & \longrightarrow & A \oplus B' & \xrightarrow{\Omega(g^*)(p)} & A \oplus B' & \longrightarrow & A \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \oplus g} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \oplus g} & & \| \\ B' & \xrightarrow{(0,g)} & A \oplus B & \xrightarrow{p} & A \oplus B & \longrightarrow & A \end{array}$$

其中，我们使用了作为路径数据 p 和 $\Omega(g^*)(p)$ 基础的函数，而未标记的箭头则是指向双积或从双积出发的自然箭头。上述顶行和底行的复合，分别是将 p 绕过图表 3 的右上角和左下角所得的结果。由于后一个图表是交换的，因此图表 3 也是交换的。◀

▶ **命题 19** ([6,定理 III.3.4])。 我们有一个阿贝尔群的正合序列：◇

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathtt{Hom}(B,G) \xrightarrow{p^*} \mathtt{Hom}(E,G) \xrightarrow{i^*} \mathtt{Hom}(A,G) \\ \hookrightarrow \mathtt{Ext}^1(B,G) \xrightarrow{p^*} \mathtt{Ext}^1(E,G) \xrightarrow{i^*} \mathtt{Ext}^1(A,G)\,. \end{aligned}$$

证明。 该序列来自同伦群的长正合序列 [10, 定理 8.4。6]，它与定理 13 的纤维序列相关；利用命题 3 和前一个引理，将 $\Omega\,\mathtt{AbSES}(-,G)$ 与 $\mathtt{Hom}(-,G)$ 识别为同一个对象。◀

▶ 注 20。上述序列中的连接映射 $\mathtt{Hom}(A,G) \to \mathtt{Ext}^1(B,G)$ 由 $\phi \mapsto \phi_* E$ 给出。要从纤维序列证明这一点颇为繁琐；我们已经在纸面上完成了证明，但尚未将其形式化。相反，我们已经形式化了一个直接证明，证明刚刚陈述的映射使该序列正合。◇◇

我们应用六项正合序列来计算循环群的 Ext 群：

▶ **推论 21** ([6, 命题 III.1.1])。 对于任意 $n > 0$ 和阿贝尔群 A，我们有◇

$$\mathtt{Ext}^1(\mathbb{Z}/n, A) \cong A/n.$$

证明。 短正合列 $\mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n$ 给出一个六项正合序列

$$\cdots \to \mathtt{Hom}(\mathbb{Z}, A) \xrightarrow{n^*} \mathtt{Hom}(\mathbb{Z}, A) \to \mathtt{Ext}^1(\mathbb{Z}/n, A) \to \mathtt{Ext}^1(\mathbb{Z}, A) \to \cdots$$

其中，项 $\mathtt{Ext}^1(\mathbb{Z}, A)$ 为零，因为 $\mathbb{Z}$ 是射影的。◇◇ 这意味着映射$\mathtt{Hom}(\mathbb{Z}, A) \to \mathtt{Ext}^1(\mathbb{Z}/n, A)$ 是前一个映射的余核。将 $\mathtt{Hom}(\mathbb{Z}, A)$ 与 A 等同后，即得所述结论。◀

5 长正合序列

我们介绍高阶 Ext 群 $\mathtt{Ext}^n(B, A)$ 及其逆变长正合序列的形式化；这在很大程度上遵循 [6, 第三章5]。协变版本可根据 [7, 第七章5], 中的论证构造，但我们尚未将其形式化。 $\mathtt{Ext}^n$ ($n > 1$) 的 Baer 和尚未形式化，因此我们目前只有一个带基点集合的长正合序列。尽管如此，带基点集合与阿贝尔群的正合性是一致的，因此一旦有了高阶 Baer 和，我们便能自动得到后者的长正合序列。

本节的形式化内容位于独立的代码仓库 `Yoneda-Ext` 中，其中的 `README`文件说明了如何设置和构建与本章相关的代码。代码中还包含注释，用于解释超出本文介绍范围的细节。

5.1 长度为 n 的正合序列类型

我们首先定义一个类型 $\mathtt{ES}^n$，并将在其上赋予一个等价关系，通过该等价关系$\mathtt{Ext}^n$ 将得到商。这些构造将产生函子，下面对此进行解释。

类型 $\mathtt{ES}^n(B,\ A)$ 中长度为 **-n 的正合序列** 递归定义如下：◇

```
Fixpoint ES (n : nat) : AbGroup^op -> AbGroup -> Type
```

因此，$\mathtt{ES}^0(B,\ A)$ 与 $\mathtt{Hom}(B,\ A)$ 定义性相等，而 $\mathtt{ES}^1(B,\ A)$ 与 $\mathtt{AbSES}(B,\ A)$ 定义性相等。也可以从 $n \equiv 1$ 而不是 $n \equiv 2$ 开始归纳，但为了在层级 $n \equiv 1$ 处获得这一定义性相等，这样更方便。$\mathtt{ES}^n$ 的函子性继承自 AbSES，并通过拉回和推出以显然的方式定义。对于 $n > 0$，$\mathtt{ES}^{n+1}(B,\ A)$ 的一个元素记作 $(F,\ E)_M$，其含义显而易见。类型 $\mathtt{ES}^n(B,\ A)$ ◇ 通过递归赋予基点，在归纳步骤中以平凡阿贝尔群代替 M。

▶**定义 22.** 拼接操作定义如下：◇

$$F \circledcirc E :\equiv (F, E)_B : \mathtt{ES}^n(B, A) \to \mathtt{AbSES}(C, B) \to \mathtt{ES}^{n+1}(C, A).$$

通过归纳法，可以定义一般的拼接操作，其中第二个参数可以有任意长度◇，但我们只需要上面这个受限版本。

现在我们在 $\mathtt{ES}^n(B, A)$ 上赋予一个关系。

▶ 定义 *23.* 我们递归地定义一个关系 $\mathtt{es_zig}: \mathtt{ES}^n(B, A) \to \mathtt{ES}^n(B, A) \to \mathtt{Type}$ 如下。对于 $n = 0, 1,$ es_zig，它是恒等类型。对于 $n \geq 2$，两个元素 $(F, E)_M$ 和 $(Y, X)_N$ 之间的一个关系由一个同态 $f: \mathtt{Hom}(M, N)$、一个路径 $f_*(E) = X$ 以及一个关系 $\mathtt{es_zig}(F, f^*(Y))$ 构成（利用 $\mathtt{ES}^n$ 的函子性）。◇

关系 es_zig 生成一个等价关系 $\mathtt{es_eqrel}^\diamond$（在代码中记为 ~），其命题截断为 $\mathtt{es_meqrel}^\diamond$。$\mathtt{ES}^n$ 的函子性保持这些关系。◇◇ 关于等价关系的基本结果包含在 EquivalenceRelation.v 中。

我们强调，等价关系 es_eqrel 并不等价于$\mathtt{ES}^n$的恒等类型。相反，它是范畴$\mathtt{ES}^n$ 的分类空间的恒等类型的一种近似（我们不知道能否在同伦类型论中构造该分类空间）。相关讨论参见例如 [6, 第三章5] 。

▶ **定义 24.** 带基点集合 $\mathtt{Ext}^n(B, A)$ 是 $\mathtt{ES}^n(B, A)$ 关于等价关系 es_meqrel 的商。◇

拼接操作下降到这个商上。◇ 通过◇ 推出◇并拉回^n 扩张，$\mathtt{Ext}^n$ 也分别成为每个变量上的函子。此外，根据 es_zig的定义，只要该表达式有意义，我们就有等式$f^*(F) \circledcirc E = F \circledcirc f_*(E)$。◇▶ 注记 25。$\mathtt{Ext}^{n+1}(B, A)$ 的定义，更概念化地说，是函子 $\mathtt{Ext}^{n+1}(B, A) = \mathtt{Ext}^n(-, A) \otimes \mathtt{Ext}^1(B, -)$ 的（$n + 1$）重张量积（参见，例如，[5, 定理 9。20]或 [13, 等式 4.3。4]）。在我们的设定中，这是集合值函子的张量积，可以通过类似于第 3.3 节 Baer 和的构造将其赋予阿贝尔群结构（尽管我们尚未将其形式化）。另一种方法是将 $\mathtt{Ext}^{n+1}(B, A)$ 定义为取值于阿贝尔群的函子的（$n + 1$）重张量积。[4, 引理 2。1] 表明，这两个定义是一致的。我们选择当前的方法，是因为我们不知道如何直接为后一种方法构造长正合序列。

5.2 长正合序列

现在我们开始着手构造长正合序列，遵循 [6, 定理 XII.5。1]的证明。如本节开头所述，我们目前只形式化了带基点集合的长正合序列——然而，带基点集合的正合性与阿贝尔群的正合性相同。我们先回顾其表述：

▶ **定理 26.** 设 $A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ 是阿贝尔群的一个短正合列。对于任意阿贝尔群 G，通过拉回可得一个长正合序列：$\diamond\diamond\diamond$

$$\cdots \xrightarrow{i^*} \mathtt{Ext}^n(A,G) \xrightarrow{-\circledcirc E} \mathtt{Ext}^{n+1}(B,G) \xrightarrow{p^*} \mathtt{Ext}^{n+1}(E,G) \xrightarrow{i^*} \cdots .$$

[6] 中的证明首先讨论六项正合序列，我们已将其证明为命题 19。随后，它将问题归结为连接映射的定义域处的正合性（引理 XII.5.2，出处同上），并利用引理 XII.5.3、XII.5.4 和 XII.5.5 证明该处的正合性。我们将证明后面这三个引理，然后直接证明其他各处的正合性，实质上是将引理 XII.5.2“内联”。

我们需要进行的各种构造，在 $\mathtt{ES}^n$ 层面上比在 $\mathtt{Ext}^n$层面上更简单。因此，我们以 $\mathtt{ES}^n$ 为基础进行论述和表述，然后推导出关于后者的所需结论。

在证明引理 XII.5.3 之前，我们先证明以下结论：

▶**引理 27.** 考虑两对可以拼接的短正合列：

$$(A \xrightarrow{l} Y \xrightarrow{s} B',\ B' \xrightarrow{k} X \xrightarrow{r} C), \qquad (A \xrightarrow{j} F \xrightarrow{q} B,\ B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} C).$$

对于 $\mathtt{es_zig}(Y \circledcirc X, F \circledcirc E)$ 中的任意元素，我们有诱导映射 $\mathtt{fib}_{s_*}(X) \to \mathtt{fib}_{q_*}(E)^{\diamond}$ 和 $\mathtt{fib}_{i^*}(F) \to \mathtt{fib}_{k^*}(Y)^{\diamond}$。

证明。我们只描述第一个映射，因为第二个映射与之类似。从 $Y \circledcirc X$ 到$F \circledcirc E$ 的折线路径给出一个同态 $f\colon B' \to B$，以及两条路径 $f^*(F) = Y$ 和 $f_*(X) = E$。令 $G\colon \mathtt{fib}_{s_*}(X)$；由路径归纳，我们可以假设 $q_*(G) \equiv X$。路径 $f^*(F) = Y$ 意味着我们有一个交换图：

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{l} & Y & \xrightarrow{s} & B' \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ A & \xrightarrow{j} & F & \xrightarrow{q} & B\,. \end{array}$$

因此，$\phi_*(G)$ 通过 $q_*(\phi_*(G)) = f_*(s_*(G)) \equiv f_*(X) = E$. 定义了 $\mathtt{fib}_{q_*}(E)$ 中的一个元素。 ◀

▶ **引理 28** ([6, 引理 XII.5.3])**.** 给定两个短正合列 $A \xrightarrow{j} F \xrightarrow{q} B$ 和$B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} C$，以下类型逻辑等价：$\diamond$

1. $\mathtt{fib}_{i^*}(F)$；**2.** $\mathtt{fib}_{q_*}(E)$；**3.** $\mathtt{es_eqrel}(\mathtt{pt}, F \circledcirc E)$。

证明。 (1) 与 (2) 之间的逻辑等价如 [6]。$\diamond$ 此外，根据 $\mathtt{es_zig}$ 的定义，(2) 蕴含 (3) 显然成立。我们需要证明 (3) 蕴含 (1)，并对之字形链的长度进行归纳。

在基例中，我们有一个实际的等式 $\mathtt{pt} = F \circledcirc E$，此时 (1) 显然成立。在归纳步骤中，假设有两个短正合列 $A \xrightarrow{l} Y \xrightarrow{s} B'$ 和

$B' \xrightarrow{k} X \xrightarrow{r} C$，使得 $Y \circledcirc X$ 与 pt 通过长度为 n 的之字形链相关，并且我们有一条 zig 或 zag 将 $Y \circledcirc X$ 与 $F \circledcirc E$联系起来。如果有一条 zig，那么我们使用归纳假设，得到 $\mathtt{fib}_{s_*}(X)$中的一个元素，并对其应用前一个引理中的映射 $\mathtt{fib}_{s_*}(X) \to \mathtt{fib}_{q_*}(E)$。这就足够了，因为 (1) 和 (2) 在逻辑上等价。

如果我们有一个之字形，那么前一个引理给出一个映射 $\mathtt{fib}_{k^*}(Y) \to \mathtt{fib}_{i^*}(F)$，因此由归纳假设即可得证。◀

我们将条件 (2) 重新表述，使其能够推广到 $\mathtt{ES}^n$。♢

```
Definition es_ii_family `{Univalence} {n : nat} {C B A : AbGroup}
  : ES n.+1 B A -> ES 1 C B -> Type
  := fun E F => { alpha : { B' : AbGroup & B' $-> B }
                        & (es_eqrel pt (es_pullback alpha.2 E))
                          * (hfiber (abses_pushout alpha.2) F) }.
```

▶**引理 29** ([6, 引理 XII.5.4])。 在前一个引理的情形下，类型 $\mathtt{fib}_{q_*}(E)$和 $\mathtt{es_ii_family}(F, E)$ 在逻辑上等价。♢

Mac Lane 借助六项正合序列证明了这个引理，但我们给出一个直接构造。为了证明引理 XII.5.3，我们证明引理 27 的一个高阶类比。这个类比用“关系纤维” rfiber来表述，它取一个点相对于某个关系的纤维。

▶ 引理 *30*。设 $n > 0$，并考虑 Y: $\mathtt{ES}^n(B', A)$、 F: $\mathtt{ES}^n(B, A)$ 以及两个短正合列 $B' \xrightarrow{k} X \to C$和 $B \xrightarrow{i} E \to C$。给定 $\mathtt{es_zig}(Y \circledcirc X, F \circledcirc E)$，我们有映射$\mathtt{rfiber}_{i^*}(F) \to \mathtt{rfiber}_{k^*}(Y)$♢ 以及 $\mathtt{es_ii_family}(Y, X) \to \mathtt{es_ii_family}(F, E)$♢。

▶ **引理 31** ([6, 引理 XII.5.5])。 令 $n > 0$, F: $\mathtt{ES}^n(B, A)$，以及 E: $\mathtt{ES}^1(C, B)$。以下类型彼此等价：♢

1. $\mathtt{fib}_{i^*}(E)$；2. $\mathtt{es_ii_family}(F, E)$；
3. $\mathtt{es_eqrel}(\mathtt{pt}, F \circledcirc E)$。

证明。 我们先证明一个辅助引理，它表明：对于给定的 n，如果这三个陈述等价，那么 (1) 和 (2) 对 $n+1$也等价。这个引理的基例就是引理 28。在归纳步骤中，我们的辅助引理给出 (1) 和 (2) 等价。容易证明 (2) 总能推出 (3)，因此只需证明 (3) 能推出 (1) 或 (2)。为此，我们对之字形链的长度进行归纳，并利用 (1) 与 (2) 的等价性以及前一个引理，证明的结构与引理 28 的证明类似（至少在结构上如此）。◀

随后，我们将这一引理重新表述为 $\mathtt{Ext}^n$。♢ 有了这一引理，并采用与此处所述类似的方法，我们沿用 [6,引理 52] 的证明，推导出定理 26 的长序列的正合性。

6 结论

我们在同伦类型论这一新颖框架中，对 Yoneda Ext 理论进行了形式化，从短正合列的基本定义出发，推导出（逆变）长正合序列，并在此过程中得到若干相关结果。目前，这个长正合序列是带基点集合的长正合序列，我们将

后续关于 `Ext`^{n} for $n > 1$ 上 Baer 和的形式化工作留待未来完成；完成后，这将使其成为阿贝尔群的长正合序列。（阿贝尔群与带基点集合的正合序列概念是一致的。）

出于实用考虑，我们采用了阿贝尔群，尽管显然我们所做的一切都可以应用于一般的模。即便如此，同伦类型论中的阿贝尔群的高阶 Ext 群也不一定消失 [2], ，因此这些已经很有研究价值。未来我们还希望考虑各种更一般的方法，例如在阿贝尔范畴中使用纯正合序列（其中单态射类和满态射类会作适当替换）。

我们的许多成果已贡献至 Coq-HoTT 库 [3] 下的命名空间 `Algebra.AbSES`，目前代码约有 2900 行（包括空白和注释）。这不包括对库其他部分所作的各种贡献；具体贡献可通过拉取请求 `#1534`、 `#1646`、`#1663`、 `#1712`、 `#1718` 和 `#1738`查看。此外，长正合序列的代码目前约有 1350 行，位于单独的 `Yoneda-Ext` 仓库中。

该形式化涵盖了 [6],第三章第 1–3 节、第 5 节以及第十二章第 5 节的大部分内容，同时也超出了经典理论的范围。特别是，我们对定理 13 的证明即使对于经典 Yoneda Ext 也是新的（尽管该定理本身早已为人所知）。这一定理是本次形式化中最具挑战性的部分，因为它需要处理大量相干性。另一个难点是长正合序列，其证明涉及复杂的归纳法和许多构造。通过对这些定理进行形式化，我们不仅确立了它们的正确性，也为在 Coq 这样的证明助手中处理复杂数学结构的可行性提供了证据。

参考文献

1 Ulrik Buchholtz、J. Daniel Christensen、Jarl G. Taxerås Flaten 和 Egbert Rijke。中心 H-空间与带状类型，2023年。 `doi:10.48550/ARXIV.2301.02636`。2 J. Daniel Christensen 和 J arl G. Taxerås Flaten。同伦类型论中的 Ext 群，2023年。`arXiv:2305.09639`。3 Coq-HoTT。Coq-HoTT 库。网址： `https://github.com/HoTT/Coq-HoTT`。4 René Guitart 和 Luc Van den Bril。借助正方形正合序列计算卫星函子并表示双模。《范畴拓扑与微分几何笔记》，24(3)：299–330，1983年。网址： `http://archive.numdam.org/item/CTGDC_1983__24_3_299_0/`。5 René Guitart 和 Luc Van den Bril。借助正方形正合序列计算卫星函子并表示双模（第二部分）。《范畴拓扑与微分几何笔记》，24(4)：333–369，1983年。网址：
`http://archive.numdam.org/item/CTGDC_1983__24_4_333_0/`。6 Saunders Mac Lane。《同调》。施普林格，1963年。7 Barry Mitchell。《范畴论》。学术出版社，1965年。8 Vladimir S. Retakh。扩张范畴的同伦性质。《俄罗斯数学调查》，41(6)：217–218，1986年12月。
`doi:10.1070/rm1986v041n06abeh004237`。9 Egbert Rijke。《同伦类型论导论》。剑桥大学出版社，2023年。即将出版。10 单值基础项目。《同伦类型论：数学的单值基础》。
`https://homotopytypetheory.org/book`，高等研究院，2013年。11 Floris van Doorn。《高阶归纳类型与合成同伦论的形式化》。博士论文，卡内基梅隆大学，2018年。
`doi:10.48550/arXiv.1808.10690`。12 Nobuo Yoneda。论模的同调理论。《东京大学理学部纪要第一类》，7：193–227，1954年。13 Nobuo Yoneda。论 Ext 与正合序列。《东京大学理学部纪要第一类》，8：507–576，1960年。