arXiv:2302.12703v1 [math.CO] 24 Feb 2023

R反射多胞体与离散多拟阵 S

¨JURGEN HERZOG 和 TAKAYUKI HIBI

Abstract. 本文将给出独立多胞体为反射多胞体的离散多拟阵的分类。

Introduction

离散多拟阵在 [1] 中引入。作为 [1], 的补充，本文将给出独立多胞体为反射多胞体的离散多拟阵的分类。关于离散多拟阵的基础知识，请参阅 [1] 和 [2] 。

1. Reflexive polytopes

若凸多胞体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ 的维数为 d ，且其每个顶点都属于 $\mathbb{Z}^d$，则称其为格多胞体。反射多胞体是一个维数为 d 的格多胞体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ ，其原点 $\mathbb{R}^d$ 位于 $\mathcal{P}$ 的内部，且其对偶多胞体 $\mathcal{P}^\vee = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle \leq 1, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{P}\}$ 属于 $\mathcal{P}$ ，也是格多胞体；其中，$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 的典范内积。通过平移可以成为反射多胞体的格多胞体也称为反射多胞体。

令 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ 表示 $\mathbb{R}^d$的典范基向量。设 $P \subset \mathbb{Z}^d_+$ 是基集 $[d]$上的一个离散多拟阵 [1, 定义 2.1] 。下文假设每个 $\mathbf{e}_i$ 都属于 P。令 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_P \subset \mathbb{R}^d$ 表示 $\mathbb{R}^d$中由 P 的凸包构成的格多胞体。称 $\mathcal{P}$ 为 P的独立多面体。其维数为 $\dim \mathcal{P} = d$。令 $\rho = \rho_P$ 表示 $\mathcal{P}$的底集秩函数 [1, 第 243] 页。由 [1,定理 7.3] 可得

引理 1.1. 独立多面体 $\mathcal{P}$ 是反射的，当且仅当对于每个 ρ-闭且 ρ-不可分的子集$X \subset [d]$ [1, 第 257–258], 页，都有 $\rho(X) = |X|+1$。

$2^{[d]}$ 的子格是 $[d]$ 的子集的一个集合 $\mathcal{L}$ ，满足 $\emptyset \in \mathcal{L}$ 和 $[d] \in \mathcal{L}$ ，使得对于属于 $\mathcal{L}$ 的任意 A 和 B ，都有 $A \cap B \in \mathcal{L}$ 和 $A \cup B \in \mathcal{L}$。

定理 1.2。（a）设 P 是基集 $[d]$ 上的一个离散多拟阵， $\rho = \rho_P$是 $\mathcal{P}$的底集秩函数。设 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{P}$的 ρ-闭且 ρ-不可分的子集所组成的集合。若 $\mathcal{P}$ 是反射的，则 $\mathcal{A} \cup \{\emptyset\}$ 是 $2^{[d]}$的子格。

(b) 反之，给定 $2^{[d]}$ 的子格 $\mathcal{L}$ ，存在唯一的离散拟阵 P ，其基集为 $[d]$ ，且 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{P}$ 中 ρ-闭且 ρ-不可分的子集组成的集合， $\mathcal{P}$ 是反射的。

2010年数学主题分类。主要分类 52B20；次要分类 05E40。第二作者获得了 JSPS KAKENHI 19H00637 的资助。

证明。(a) 若 P 的独立多面体 $\mathcal{P}$ 是反射的，则引理 1.1 表明，对于每个 $A \in \mathcal{A}$，$\rho(A) = |A| + 1$。由 [1, 命题 7.2] 可知，$\mathcal{P}$ 由满足下式的 $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ 组成：

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, d,$$

and

$$\sum_{i \in A} x_i \leq |A| + 1, \quad A \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

由于每个 $\mathbf{e}_i \in \mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}$ 都是紧致的，因此

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = [d].$$

此外，如果 $X \notin \mathcal{A}$，那么 $\rho(X) > |X| + 1$。

事实上，如果 $|X| = 1$ 和 $X = \{i\}$，那么 $3\mathbf{e}_i \in \mathcal{P}$ 和 $\rho(X) > 2$。一般而言，如果$|X| = q \geq 2$ 和 $X = \{i_1, \ldots, i_q\}$，且满足 $i_1 < \cdots < i_q$，那么有

$$\mathbf{v} = \frac{q}{q-1} \sum_{j=1}^{q} \mathbf{e}_{i_j} \in \mathcal{P} \tag{2}$$

and

$$\rho(X) \geq |\mathbf{v}| = \frac{q^2}{q-1} > q + 1.$$

要了解式 (2) 成立的原因，只需证明 $\mathbf{v}$ 满足不等式 (1) 中的每一个不等式。令 $A \in \mathcal{A}$，其中 $X \subsetneq A,$，则

$$\frac{q^2}{q-1} \leq q + 2 = |X| + 2 \leq |A| + 1.$$

令 $A \in \mathcal{A}$，其中 $|X \cap A| = k < q$，则

$$k\frac{q}{q-1} \leq k + 1 \leq |A| + 1.$$

有人声称，$\mathcal{A} \cup \{\emptyset\}$ 是 $2^{[d]}$的子格。令 A、$B \in \mathcal{A}$，并假设 $A \cup B \notin \mathcal{A} \cup \{\emptyset\}$ 或 $A \cap B \notin \mathcal{A} \cup \{\emptyset\}$成立。那么

$$\rho(A) + \rho(B) = |A| + |B| + 2 = |A \cup B| + |A \cap B| + 2 < \rho(A \cup B) + \rho(A \cup B),$$

这与 ρ 是次模函数这一事实相矛盾。此外，由于$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = [d]$，有 $[d] \in \mathcal{A}$，如所要求。

（b）根据 [1, 定理 9，1]通过定义引入非递减次模函数 ρ： $2^{[n]} \to \mathbb{Z}_+$

$$\rho(X) = \min\{|A| + 1 : X \subseteq A, A \in \mathcal{L}\}, \quad \emptyset \neq X \subset [d]$$

连同 $\rho(\emptyset) = 0$。设 P是基集为 $[n]$ 的离散多拟阵，且 ρ 是 $\mathcal{P}$的底集秩函数。那么，$\mathcal{L}$ 是 $[d]$中所有 ρ-闭且 ρ-不可分子集的集合。此外，引理 1.1 保证 P的独立多面体$\mathcal{P}$ 是反射的。另一方面，假设 P' 是基集为 $[d]$ 的离散多拟阵，且 ρ' 是其独立多面体的底集秩函数

P'的$\mathcal{P}'$，其中 $\mathcal{L}$是 P'中所有 ρ'-闭且 ρ'-不可分子集的集合，并且 $\mathcal{P}'$ 是反射的。那么再次应用引理 1.1，可得对每个 $A \in \mathcal{L}$， $\rho'(A) = |A| + 1$。因此，$\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ ([1, 命题 7.2])。于是， $P = P'$ ([1, 定理 3.4])，证毕。□

2. Examples

例 2.1. 设 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ 为一个凸多胞体，其面分别为 $x_i = 0$以及

$$x_1 + x_2 = 3, \ \ x_2 + x_3 = 3, \ \ x_1 + x_2 + x_3 = 4.$$

可以验证， $\mathcal{P}$ 是反射的。然而， $\mathcal{P}$ 不可能是基集 [3]上的某个离散多拟阵的独立多面体。事实上，若 $\mathcal{P}$ 是基集 [3], 上的离散多拟阵 P 的独立多面体，那么 $u =$ (0, 3, 0) 和 $v =$ (1, 2, 1) 都属于 P的基集 [1, p。 245]。于是有 $|u| < |v|$，这与定理 2.3] 的 [1,矛盾。

例 2.2. 设 $\mathcal{L}$ 是 $2^{[d]}$中长度为 d 的一条链，例如，

$$\mathcal{L} = \{\emptyset, \{d\}, \{d-1, d\}, \ldots, \{1, \ldots, d\}\}.$$

令 P 表示定理 1.2 (b) 中构造的离散多拟阵。令

$$\mathcal{B} = \{[d], [d], [d-1], \ldots, [2], [1]\}.$$

令 P' 表示由 $\mathcal{B}$表示的横截多拟阵 [1, p。 267] 若 $X \subset [d]$且 $i =$min(X)，则由定理 1.2 (b) 的证明可知

$$\rho_P(X) = |\{i, i+1, \ldots, d\}| + 1 = (d - (i-1)) + 1 = d + 2 - i$$

另一方面，根据横截多拟阵底集秩函数的定义，有

$$\rho_{P'}(X) = (d+1) - (i-1) = d + 2 - i.$$

因此 $\rho_P = \rho_{P'}$。于是 $P = P'$。

值得研究的是，对于哪个子格 $\mathcal{L}$ of $2^{[d]}$ ，定理 1.2 (b) 中构造的离散多拟阵可以是横截多拟阵。

References

[1] J. Herzog 和 T. Hibi，《离散多拟阵》，《代数与组合》16 (2020)，239–268。[2] J. Herzog 和 T. Hibi，《单项式理想》，GTM 260，Springer，2011。

Jürgen Herzog, Fachbereich Mathematik, Universität Duisburg-Essen, Campus Essen, 45117 Essen, Germany

电子邮箱地址：juergen.herzog@uni-essen.de

Takayuki Hibi, Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University, Suita, Osaka 565-0871,Japan

电子邮箱地址：hibi@math.sci.osaka-u.ac.jp