arXiv:2302.12751v1 [math.RA] 24 Feb 2023

将矩阵分解为可逆矩阵与具有固定幂零性的矩阵之和

PETER DANCHEV、ESTHER GARC´IA 和 MIGUEL G ´OMEZ LOZANO

Abstract. 对于任意 $n \geq 2$ 和固定的 $k \geq 1$，我们给出了充要条件，使得任意域 $\mathbb{F}$上的矩阵环 $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$中的任意非零方阵都能表示为一个可逆矩阵 U 与一个满足 $N^k = 0$ 的幂零矩阵 N 之和。

Key words: 矩阵、幂零元、单位元、秩*2010 Mathematics Subject Classification*: 15A21、15A24、15B99、16U60

1. Introduction

1977年，Nicholson 在研究幂等元的提升性质时，将环 R 中的元素 a 定义为洁净元，若它可以写成 $e + u$的形式，其中 e是幂等元， u 是单位元（即可逆元）；参见 [9]。如果环 R 中的每个元素都是洁净元，则称该环为洁净环。受这些定义启发，Diesl[6] 于2013年将环元素 $b \in R$ 定义为幂零洁净元，若它可以表示为一个幂等元与一个幂零元之和；如果环 R 中的每个元素 R 都是如此，则称环 R 为幂零洁净环。

通过结合可逆性与幂零性的概念，C˘alug˘areanu 和 Lam 于 2016 年引入了精细环的概念：其中每个非零元素都可以写成一个可逆元素与一个幂零元素之和；参见 [1]。论文 [1] 的一项主要结果是：除环上的每个非零方阵都可以表示为一个可逆矩阵与一个幂零矩阵之和。事实上，他们证明，只要除环的元素多于两个，该除环上的每个非零方阵都相似于他们所称的良好形式矩阵，即所有对角元素都非零的矩阵。将这个矩阵分解为其可逆的下部与其严格的（幂零）上部，即可得出：元素多于两个的除环上的矩阵环是精细环。此外，他们还分别证明了 $\mathbb{F}_2$ 上的非零矩阵也是洁净的，从而得到了所需结果。

在同一篇论文中（参见致谢部分），作者指出，此前尚无文献提及这样一个事实：每个非零方阵（即使是在复数域上）都可以表示为一个幂零矩阵与一个可逆矩阵之和。请注意，C˘alug˘areanu 和

第一作者的研究部分得到了保加利亚国家科学基金于2019年12月7日提供的KP-06第32/1号拨款资助。第二作者的研究部分得到了URJC的Ayuda Puente 2022资助。三位作者的研究均部分得到了安达卢西亚自治区政府FQM264项目的资助。

Lam 分解中的幂零矩阵具有较高的幂零指数，因为它们对应于良好形式矩阵的严格上部。

非零幂等元均为精细元的环，后来被证明构成了一类有趣的不可分解环，并由 C˘alug˘areanu 和 Zhou 在 [2] 中进行了研究。2021年，这些作者又将研究重点放在每个非零幂零元都是精细元的环上，他们称之为 NF 环，并证明对于交换环 R 和$n \geq 2$，矩阵环 $\mathbb{M}_n(R)$ 是 NF，当且仅当 R 是一个域；见 [3]。

同样地，[5] 中以“幂零良环”之名定义了一类比上述精细环稍广的环，并分别在 [4] 和 [7]，中探讨了它的一些特征性质，包括幂零良环上的矩阵环的性质。

在我们的研究中，我们首先固定一个界 $k \geq 1$，用于限制幂零部分的幂零指数，并针对域上的矩阵提出以下问题：

问题：给定 $k \geq 1$，求出将域 $\mathbb{F}$ 上的任意非零方阵 A 分解为一个可逆矩阵 U 与一个满足 $N^k = 0$的幂零矩阵 N 之和的充要条件。

注 1.1. 注意，将一个矩阵分解为单位元矩阵与幂零指数至多为 k 的幂零矩阵之和的问题一般并不成立。事实上，可逆方阵具有满秩，而幂零指数为 k 的幂零矩阵的秩，等于其约当标准形中每个幂零指数为 k_i 的幂零块的秩之和（每个此类幂零块的秩为 $k_i - 1$）。因此，在域 $\mathbb{F}$上的矩阵环 $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 中，若我们分解 $n = ck + d$，其中 c、$d \in \mathbb{N}$ 和 $0 \leq d < k$，则每个幂零矩阵的秩都小于或等于

$$\begin{cases} c(k-1) = n - \frac{n}{k}, & \text{if } d = 0; \\ c(k-1) + d - 1 = n - \frac{n}{k} + \frac{d}{k} - 1 \leq n - \frac{n}{k}, & \text{if } d > 0 \end{cases}$$

（其约当标准形中有 c 个幂零指数为 k的块，并且当 $d > 0$时有一个幂零指数为 d 的块），因此该分解成立的必要条件是原矩阵的秩必须大于或等于 $\frac{n}{k}$。为了更具体地说明这一点，令 $k \geq 2$，设 $n \geq k + 2$，并令 $A = e_{12} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 为标准矩阵。若反设 $A = U + N$，其中 U 是一个可逆矩阵，且 $N^k = 0$，则可以写成 $U = A - N$。但是，可逆矩阵的秩总是最大的（也就是说，在此情形下恰好为 n），而 A 的秩为 1，N的秩为$\leq n - \frac{n}{k}$，因此不可能由一个秩为 1 的矩阵和一个秩至多为 $n - \frac{n}{k}$ 的矩阵恢复出一个秩为 n 的矩阵。

在本文中，我们彻底解决了任意域上矩阵的这一问题，并证明了以下结果：

定理。设 $\mathbb{F}$ 是一个域，设 $n \geq 2$，并固定 $k \geq 1$。给定一个非零矩阵 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$，存在一个可逆矩阵 $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 和一个幂零矩阵 $N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$，满足 $N^k = 0$，当且仅当 $A = U + N$ 的秩大于或等于 $\frac{n}{k}$。

由于可逆性和幂零性都是相似下的不变性质，我们将使用矩阵的初等有理标准形（[8,VII.推论 4.7(ii)]），它指出，每个矩阵 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$（其中 $\mathbb{F}$ 是一个域）都相似于一组素幂多项式的伴随矩阵的直和$p_1^{m_{11}}, \ldots, p_s^{m_{sk_s}} \in \mathbb{F}[x]$ 其中每个 p_i 都是 $\mathbb{F}[x]$中的素（不可约）多项式。矩阵

A 是唯一确定的，除这些伴随矩阵的排列顺序外。多项式 $p_1^{m_{11}}, \ldots, p_s^{m_{sk_s}}$称为矩阵 A 的初等因子。

2. Decomposing Matrices into a Sum of Invertible and NilpotentMatrices

在我们的论证中，我们将矩阵 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 的初等因子 $q(x)$ 分为满足 $q(0) \neq 0$ 的初等因子，以及满足 $q(0) = 0$ 的初等因子，即 $q(x) = x^m, m \geq 1$。在后一类中，我们还将区分次数为 1 和次数大于 1 的初等因子：

(i) 任意满足 $q(0) = a_0 \neq 0$ 的初等因子 $q(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$ 都对应一个可逆伴随矩阵

$$C(q(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{F}).$$

(ii) 任何形如 $q(x) = x$ 的初等因子都对应于 1×1 伴随矩阵 $C(x) = (0)$。

(iii) 任何形如 $q(x) = x^m$, $m > 1$ 的初等因子，都会产生一个形如下式的伴随矩阵

$$C(x^m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m-1} e_{i+1,i} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{F}).$$

定义 2.1. 设 $\mathbb{F}$ 是一个域，设 $n \geq 2$，并固定一个幂零指数为 k、满足 $2 \leq k \leq n$ 的幂零性。对于每个满足 $s + k - 2 \leq n$ 的 $1 \leq r < s \leq n$，我们定义以下矩阵，它们将构成主要结果的要素：

$$N_{r,s,k} := e_{r,r} + e_{s,r} - e_{r,s+k-2} - \sum_{i=0}^{k-2} e_{s,s+i} + \sum_{i=0}^{k-3} e_{s+i+1,s+i} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F}).$$

我们首先进行一系列技术性准备，以便证明主要结果。

引理 2.2. 设 $\mathbb{F}$ 是一个域，设 $n \geq 2$，并固定一个幂零指数为 k、满足 $2 \leq k \leq n$ 的幂零性。对于每个 $1 \leq r$，若 $s \leq n$ 满足 $s + k - 2 \leq n$，则矩阵 $N_{r,\,s,\,k}$的秩均为 $k - 1$，且幂零指数为 k。

证明。令 $N = \sum_{i=1}^{k-1} e_{i+1,i} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 为一个矩阵，它由一个大小为 k 的幂零若尔当块和 $n - k$ 个大小为 1 的块组成。根据构造，N 是幂零指数为 k的幂零矩阵。

我们断言，每个 $N_{r,\,s,\,k}$ 都可以通过适当的基变换由矩阵 N 得到。若用 $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots\}$ 表示标准基，则

矩阵

$$N_{1,2,k} = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

只是将同一个算子 N 表示在该基上

$$\mathcal{B}_{1,2,k} = \{v_1 = e_1,\, v_2 = e_2 - e_1,\, \ldots, v_k = e_k - e_1,\, v_{k+1} = e_{k+1}, \ldots\}.$$

同样地，如果我们考虑基 $\mathcal{B}_{r,\ s,\ k} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ 其中

$$\begin{aligned} v_r &= e_1 \\ v_s &= e_2 - e_1, \\ v_{s+1} &= e_3 - e_1, \\ &\vdots \\ v_{s+k-2} &= e_k - e_1, \end{aligned}$$

其余向量 v_i 中的 $\mathcal{B}_{r,\ s,\ k}$ 是向量 e_{k+1}、...、e_n的任意重新排列，则矩阵 $N_{r,\ s,\ k}$ 就是算子 N 在基 $\mathcal{B}_{r,\ s,\ k}$上的表示。

矩阵 $N_{r,\ s,\ k}$ 的秩和幂零指数直接继承自原矩阵 N的秩和幂零指数，结论得证。□

命题 2.3。设 $\mathbb{F}$ 为一个域，令 $n \geq 2$，并固定 $k \geq 1$。此外，设$B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$为一个由单个 (i) 型、大小为 t 的可逆块以及 $r = n - t$ 个 (ii) 型幂零块组成的矩阵。如果 $r \leq t(k-1)$（或者等价地，秩$(B) = t \geq n/k$），则存在一个幂零矩阵 N_B，满足 $N_B^k = 0$，使得 $B + N_B$ 可逆。

证明。根据假设，矩阵 B 由一个形如$C(q(x))$的可逆块组成，其中 $q(x)$ 是一个次数为 t 且满足 $q(0) \neq 0$ 的多项式，此外还有 r 个 (ii) 型幂零块。如果 $r = 0$，我们只需取 $N_B = 0$，因为 B 本身可逆。在证明的其余部分，假设 $r > 0$。

利用经典除法定理，可将 $r = c(k-1)+d$，其中 $0 \leq d < k-1$(c 表示我们在论证中要用到的 N_r 型幂零矩阵的数量，$_{s,\ k}$，而 d 若非零，则表示另一个 N_r 型幂零矩阵，$_{s,\ d+1}$)。条件 $r \leq t(k-1)$ 表示

$$\begin{cases} c \leq t, & \text{if } d = 0; \\ c + 1 \leq t, & \text{if } d > 0. \end{cases}$$

– 若 $c > 0$，我们考虑矩阵

$$N_{1,t+1,k} + N_{2,t+1+(k-1),k} + \cdots + N_{c,t+1+(c-1)(k-1),k} = \sum_{i=1}^{c} N_{i,t+1+(i-1)(k-1),k}.$$

根据构造，$(\sum_{i=1}^{c} N_{i,\ t+1+(i-1)(k-1),\ k})^k = 0$ （该和式中出现的矩阵 $N_{r,\ s,\ k}$ 由引理 2.2 可知其幂零指数为 k，且它们两两正交）。

– 若 $d > 0$，我们考虑 $N_{c+1,\ t+1+c(k-1),\ d+1}$，它满足 $(N_{c+1,\ t+1+c(k-1),\ d+1})^k = 0$，因为 $d+1 < k$；$N_{c+1,\ t+1+c(k-1),\ d+1}$ 与 $\sum_{i=1}^{c} N_{i,\ t+1+(i-1)(k-1),\ k}$ 正交。定义幂零矩阵

$$N_B = \underbrace{\sum_{i=1}^{c} N_{i,t+1+(i-1)(k-1),k}}_{\text{若 } c>0} + \underbrace{N_{c+1,t+1+c(k-1),d+1}}_{\text{若 } d>0}, \qquad N_B^k = 0.$$

我们断言矩阵 $U_B = B + N_B$ 是可逆的。事实上，由于只要将某些列替换为原列与其他列之和，矩阵的行列式就保持不变，

- 我们将位置 $t + k - 1$处的列加到 U_B 的第一列上，
- 我们将位置 $t + 2k - 2$处的列加到 U_B 的第二列上，.....

- 我们将位置 $t + c$处的列加到 U_B 的第 c 列上（$k - 1$），
- 若 $d > 0$，则我们将位置 $t+c$处的列加到 U_B 的第 $c+1$ 列上（$k-1$）$+d$。

条件 $c \le t$ 若 $d = 0$ 且 $c + 1 \le t$ 若 $d > 0$ 确保在 U_B 中进行这些列的求和至多只会影响 U_B的前 t 列。最终得到如下形式的矩阵

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} C(q(x)) & * & * & * & * \\ \hline 0 & J_{k-1} & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & J_{k-1} & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & J_d \end{array}\right)$$

其中

$$J_r = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_r(\mathbb{F}), \quad r = k-1 \text{ or } d.$$

由于 $\det(J_r) = (-1)^r$, $r = k - 1$ or d，因此 U_B 的行列式与伴随矩阵 $C(q(x))$ 的行列式 $\pm$ 相同。根据假设，该行列式非零，符合要求。□

上述命题可由以下具体构造加以证明。

例 2.4. 考虑幂零指数为 $k = 5$ 的矩阵

$$B = \left(\begin{array}{cc|ccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{M}_9(\mathbb{F})$$

由次数为 $t = 2$ 的多项式的可逆块 $C(x^2 - x - 1)$ 和 (ii) 型块组成。条件 $r \leq t(k - 1)$ 成立。按照命题 2.3 的证明，我们在公式 $n - t = c(k - 1) + d$ 中得到 $c = 1$ 和 $d = 3$；因此我们考虑幂零矩阵

$$N_{1,3,5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_{2,7,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

则 $N_B = N_{1,\ 3,\ 5} + N_{2,\ 7,\ 4}$ 满足 $N_B^5 = 0$；此外，

$$B + N_B = \left(\begin{array}{cc|ccccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

由于将第 6 列加到第 1 列，并将第 9 列加到第 2 列，即可得到后式，因此它是可逆的，

$$\left(\begin{array}{cc|ccccc|ccc} 0&1&0&0&0&-1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&-1\\ \hline 0&0&-1&-1&-1&-1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} C(x^2-x-1) & * & *\\ \hline 0 & J_4 & *\\ \hline 0 & 0 & J_3 \end{array}\right),$$

这显然是可逆的，正如预期。

命题 2.5. 设 $\mathbb{F}$ 为一个域，设 $n \geq 2$，并固定 $k \geq 2$。设 $C = \sum_{i=1}^{t-1} e_{i+1,i} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 是一个由一个 (iii) 型幂零块（大小为 t）和 $r = n - t$ 个 (ii) 型幂零块组成的矩阵。若 $r \leq k-2+(t-1)(k-1)$（或者等价地，$\operatorname{rank}(C) = t-1 \geq \frac{n}{k}$），则存在一个幂零矩阵 N_C，使得 $N_C^k = 0$，并且 $C + N_C$ 可逆。

证明。若 $r < k-2$，我们取幂零矩阵 $N_C = N_{1,\,t,\,r+2} = e_{1,\,1} + e_{t,\,1} - e_{1,\,t+r} - \sum_{i=0}^{r} e_{t,\,t+i} + \sum_{i=0}^{r-1} e_{t+i+1,\,t+i}$；则

$$U_C = C + N_C = \sum_{i=1}^{r-1} e_{i+1,i} + e_{1,1} + e_{t,1} - e_{1,t+r} - \sum_{i=0}^{r} e_{t,t+i}.$$

将位置 $t+r$ 处的列加到 U_C 的第一列，并将行 t 替换为该行与其下方其余各行之和，我们得到矩阵 $C(x^n+x^t+1)$，它是多项式 $p(x) = x^n+x^t+1$，$p(0) \neq 0$ 的伴随矩阵，因此 U_C 可逆。此外，由于 $r+2 < k$，我们有 $N_C^{r+2} = N_C^k = 0$。

若 $r \geq k-2$，仿照命题 2.3 的证明，但从位置 (2,2) 开始，利用经典除法定理将 $r-k+2 = c(k-1)+d$ 写成，其中 $0 \leq d < k-1$。定义

$$\begin{aligned} N_C &= N_{1,t,k} \\ &\quad + N_{2,t+(k-1),k} + N_{3,t+2(k-1),k} + \cdots + N_{c+1,t+c(k-1),k} \qquad \text{if } c > 0 \\ &\quad + N_{c+2,t+(c+1)(k-1),d+1} \qquad \text{if } d > 0 \\ &= N_{1,t,k} + \underbrace{\sum_{i=2}^{c+1} N_{i,t+(i-1)(k-1),k}}_{\text{if } c>0} + \underbrace{N_{c+2,t+(c+1)(k-1),d+1}}_{\text{if } d>0}. \end{aligned}$$

矩阵 N_C 满足 $N_C^k = 0$，因为它由形如 $N_{r,\,s,\,j}$, $j \leq k$ 的正交幂零矩阵组成，它们都满足 $N_{r,\,s,\,j}^k = 0$。

为了看出 $U_C = C + N_C$ 是可逆的，如果

- 我们将 U_C 的第一列加上位于 $t+k-2$ 的那一列，
- 我们将 U_C 的第二列加上位于 $t+2$ 的那一列（$k-1$）-1，.....

- 我们将其加到位于 $t+(c+1)(k-1)-1$ 的 U_C c 列中，

• 我们将其加到位于 $t+(c+1)(k-1)-1+d=n$ 的 U_C $c+1$ 列中,

然后，我们将第 t 行替换为该行与其下方各行 $t+1,\ldots,t+k-2$ 之和，得到如下形式的矩阵

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} C(x^{t+k-2}+x^t+1) & * & * & * & * \\ \hline 0 & J_{k-1} & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & J_{k-1} & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & J_d \end{array}\right)$$

其中

$$J_r=\begin{pmatrix} -1 & -1 & \ldots & -1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\in\mathbb{M}_r(\mathbb{F}),\quad r=k-1 \text{ or } d.$$

由于 $\det(J_r)=(-1)^r$, $r=k-1$ 或 d, U_C 的行列式与伴随矩阵 $C(x^{t+k-2}+x^t+1)$ 的行列式 $\pm$相同，而后者非零，符合所需。□

接下来的具体构造将使上一个命题得以实现。

例 2.6。考虑幂零指数 $k=4$ 以及幂零矩阵

$$C=\left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)\in\mathbb{M}_9(\mathbb{F})$$

由一个大小为 $t=4$ 的幂零块和 $r=5$ 个 (ii) 型块组成。由于$r\geq k-2$，仿照命题 2.5 的证明，我们首先考虑

$$N_{1,4,4}=\left(\begin{array}{cccccc|ccc} 1&0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&-1&-1&-1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right).$$

此外，由于 $r=5$ 和 $k=4$，我们可以在公式 $r-k+2=c(k-1)+d$ 中得到 $c=1$ 和 $d=0$，因此我们也考虑矩阵

$$N_{2,7,4}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

因此 $N_C=N_{1,\ 4,\ 4}+N_{2,\ 7,\ 4}$ 满足 $N_C^4=0$ 且

$$C+N_C=\left(\begin{array}{cccccc|ccc}1&0&0&0&0&-1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0&-1\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&-1&-1&-1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\\hline0&1&0&0&0&0&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

是可逆的，因为若将第 4 列加到第 1 列，将第 9 列加到第 2 列，并将第 5 行和第 6 行加到第 4 行，我们将得到

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccc}0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&-1\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\\hline0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}C(x^6+x^3+1)&*\\\hline0&J_3\end{array}\right),$$

显然这是可逆的，正如所承诺的那样。

结合前两个命题，我们得到了促成本篇文章写作的主要结果。

定理 2.7. 设 $\mathbb{F}$ 是一个域，设 $n\geq 2$，并固定 $k\geq 1$。给定一个非零矩阵 $A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$，存在一个可逆矩阵 $U\in\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 和一个幂零矩阵 $N\in\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$，满足 $N^k=0$，当且仅当 $A=U+N$，A 的秩大于或等于 $\frac{n}{k}$。

证明. 如注 1.1 中所述，将 A 表示为和 $U+N$ 的必要条件是：其中 U 可逆且 $N^k=0$，A 的秩大于或等于 $\frac{n}{k}$，因为 $n=\mathrm{rank}(U)=\mathrm{rank}(A-N)\leq\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(N)\leq\mathrm{rank}(A)+n-\frac{n}{k}$。

反之，假设 $A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 的秩不小于 $\frac{n}{k}$。不失一般性地，我们可以假设 A 表示为其初等有理标准

形，即表示为其初等因子的伴随矩阵之和。下面证明存在一个可逆矩阵 U 和一个幂零矩阵 N、$N^k=0$，使得 $A=U+N$ 如下所述。

我们对矩阵 A – 的块重新排序，这仅对应于对 A – 的初等因子重新排序，具体如下：

(1) 每个 $t_i\times t_i$ (i) 型块 B_i 后接 s_i 个 (ii) 型块（$s_i\leq t_i(k-1)$）；(2) 每个 $t_j\times t_j$ (iii) 型块 C_j 后接 r_j 个 (ii) 型块（$r_j\leq k-2+(t_j-1)(k-1)$）。

使得 $\sum_i s_i+\sum_j r_j=n-$ 秩(A)。A 的秩保证所有 (ii) 型块都能按照第 (1) 点和第 (2) 点的方式分配，并分别与 (i) 型块或 (iii) 型块合并。

因此，我们有以下两种情况：

• 根据命题 2.3，对于每个秩为 t_i、后面跟着 s_i 个 (ii) 型块的可逆块 B_i $s_i\leq t_i(k-1)$，存在一个幂零矩阵 N_{B_i}，使得 $N_{B_i}^k=0$，从而 $B_i+N_{B_i}$ 是一个秩为 t_i+s_i 的可逆矩阵。

• 根据命题 2.5，对于每个幂零指数为 t_j、秩为 t_j-1、后面跟着 r_j 个 (ii) 型块的幂零块 C_j $r_j\leq k-2+(t_j-2)(k-1)$，存在一个幂零矩阵 N_{C_j}，使得 $N_{C_j}^k=0$，从而 $C_j+N_{C_j}$ 是一个秩为 t_j+r_j 的可逆矩阵。

现在，定义 $N=-\sum_i N_{B_i}-\sum_j N_{C_j}$。由于我们添加的幂零矩阵两两正交，因此可以得到一个满足 $N^k=0$ 且使 $U=A-N$ 可逆的幂零矩阵 N：

$$A-N=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} B_1+N_{B_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & B_2+N_{B_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & C_1+N_{C_1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & C_2+N_{C_2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{array}\right).$$

最后，我们按所述方式分解 $A=U+N$。 □

总之，值得注意的是，我们论证中的关键工具是任意方阵的初等有理标准形；该标准形对于任意域上的矩阵均成立。然而，由于上述来自 [1] 的关于将矩阵分解为可逆矩阵与幂零矩阵之和的 Calugareanu-Lam结果对于除环上的矩阵也成立，[1, 备注 3。12], 我们可以通过提出以下问题来结束本文：

公开问题：给定幂零指数的固定上界 $k\geq 1$，找出将除环上的每个非零方阵表示为一个可逆矩阵与一个幂零矩阵之和的充要条件 N，其中$N^k=0$。

资助：第一作者（Peter V. Danchev）部分获得保加利亚国家科学基金根据12月7日的KP-06第32/1号拨款提供的资助，

2019年，第二作者（Esther Garc´ıa）部分获得Ayuda Puente 2022、URJC的资助。三位作者均部分获得Junta de Andalucía FQM264的资助。

References

[1] G. C˘alug˘areanu 和 T. Y. Lam。《精细环：一类新的单环》。 *J. Algebra & Appl.*，15 9( )：1650173，2016 年。[2] G. C˘alug˘areanu 和 Y. Zhou。《具有精细幂等元的环》。 *J. Algebra & Appl.*。21(1)：2250013（14 页），2022 年。[3] G. C˘alug˘areanu 和 Y. Zhou。《具有精细幂零元的环》。

Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. , ：–

Mat. **67** 231 241, 2021

。[4] H. Choulli 、 H. Mouanis 和 I. Namrok。《具有幂零良好性质的群分次环》。

Comm. , ( )：-

Algebra **50** 11 4700 4709, 2022

。[5] P. V. Danchev。《幂零良好含幺环》。 *Internat. J. Algebra*，10(5)：239-252，2016 年。[6] A. J. Diesl。《幂零清洁环》。 *J. Algebra*，383：197–211，2013 年。[7] A. B. Gorman 和 W. Y. Shiao。《幂零良好和幂零良好清洁矩阵环》。 *arXiv*，1512.04640v1。[8] T. W. Hungerford。 *Algebra*。数学研究生教材第 73 卷，Springer-Verlag，纽约-柏林，1980 年。（1974 年原版重印。）[9] W. K. Nicholson。《提升幂等元与交换环》。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，229：269– 278，1977 年。

Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, 1113Sofia, Bulgaria*Email address*: danchev@math.bas.bg

Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de los Materiales y Tecnología Electrónica, Universidad Rey Juan Carlos, 28933 Móstoles (Madrid), Spain*Email address*: esther.garcia@urjc.esDepartamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga, 29071Málaga, Spain*Email address*: miggl@uma.es